О.В. Шварцман

Пространства Тейхмюллера.

Элементарное введение для студентов, начиная с третьего курса

Пусть S – гладкая замкнутая ориентированная поверхность с g ручками. Через $M(S)$ обозначим пространство гладких римановых метрик на S, рассматриваемых с точностью до конформной эквивалентности.

Две римановы метрики на S называются конформно эквивалентными, если они пропорциональны в каждой точке (причем коэффициент пропорциональности, вообще говоря, зависит от точки).

Класс конформно эквивалентных римановых метрик на S называется конформной структурой. Итак, $M(S)$ – это пространство конформных структур на S.

Поверхность S с заданной на ней конформной структурой μ называется римановой поверхностью.

Часто римановой поверхностью называют связное одномерное комплексное многообразие, но оба определения эквивалентны.

Римановы поверхности (S, μ) и (S', μ') называются эквивалентными, если существует такой сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $f\colon S \to S'$, что $\mu = f^*(\mu')$.

Перемолов все эти определения, можно прийти к такому выводу: при естественном действии группы Diff^+S сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов поверхности S на пространстве конформных структур, точки факторпространства $\widehat{M}(S) = M(S)/\mathrm{Diff}_+S$ находятся в каноническом биективном соответствии с классами эквивалентных римановых поверхностей с g ручками.

Пространство $\widehat{M}(S)$ называется пространством модулей. Голыми руками его не возьмешь. Довоенная хитрость, восходящая к О. Тейхмюллеру (1938 г), состоит в том, чтобы рассмотреть промежуточное пространство
$T(S) = M(S)/\mathrm{Diff}_+^\circ S$, где
$\mathrm{Diff}_+^\circ S$ - связная компонента группы Diff_+S, состоящая из диффеоморфизмов, гомотопных тождественному.

Определение. Для $g > 1$ пространство $T(S)$ называется пространством Тейхмюллера рода g.

Пространство Тейхмюллера $T(S)$ оказывается клеткой размерности $6g - 6$. На нем дискретно действует группа $\mathrm{Mod}(S) = \mathrm{Diff}_+S/\mathrm{Diff}_+^\circ S$, которая называется модулярной группой рода g или группой классов отображений. При этом пространство модулей $\widehat{M}(S)$ есть факторпространство $T(S)/\mathrm{Mod}(S)$ (действие не свободно!). Пространство $T(S)$ богато $\mathrm{Mod}(S)$-инвариантными геометрическими структурами, что позволяет бросить на изучение пространства модулей много-много современной математики.

Программа.

1. Риманова и конформная геометрия на поверхности. Гиперболическая метрика.
2. Элементарная теория дискретных групп преобразований. Клейновы и фуксовы группы.
3. Теорема униформизации.
4. Модулярная группа. Образующие Дена-Ликориша. Вычисление модулярной группы тора.
5. Пространство Тейхмюллера и пространство модулей тора.
6. Алгебраическая модель пространства Тейхмюллера $T(S)$ как компоненты аффинного алгебраического многообразия $\mathrm{Hom}(\pi_1(S), SL_2)$. Комплексная и келерова структуры.
7. Дискретность действия группы $\mathrm{Mod}(S)$ на пространстве Тейхмюллера.
8. Геометрическая теория пространств Тейхмюллера: длины геодезических, твисты Фенхеля-Нильсена и симплектическая геометрия.
9. Геометрическая теория: классические координаты Фенхеля-Нильсена ($F - N$-координаты).
10. Геометрия Вейля-Петерсона на пространстве Тейхмюллера проколотого тора.
11. Форма Вейля-Петерсона в $F - N$-координатах.
12. Тождество Mc Shane-Mirzakhani.
13. Дифференциалы Бельтрами. Комплексно-аналитическая модель пространства Тейхмюллера.