Извращённые пучки и когомологии Горески-Макферсона

Это спецкурсы для 4-го курса бакалавриата, магистрантов и аспирантов. Подразумевается знание основ гомологической алгебры (производных категорий), арифметики (теория Галуа) и алгебраической геометрии. Невозможно записаться и ходить только на один из спецкурсов этой пары — только на оба одновременно.

Когомологии комплексного многообразия — это когомологии с коэффициентами в постоянном конструктивном пучке. Если многообразие особое, то на нём есть канонический конструктивный комплекс пучков (пучок Горески-Макферсона), когомологии с коэффициентами в котором (когомологии Горески-Макферсона) во многих отношениях приятнее обычных когомологий. Например, для них выполняется двойственность Пуанкаре. Если же рассматриваются этальные когомологии проективных многообразий над конечным полем, то собственные значения автоморфизма Фробениуса в n-ых когомологиях Горески-Макферсона имеют модуль $q^{n/2}$ (гипотеза Вейля-Римана).

Кроме пучка Горески-Макферсона есть и другие конструктивные комплексы с похожими свойствами; все вместе они образуют абелеву категорию извращённых пучков. Эта категория отличается чудесными функториальными свойствами при морфизмах многообразий. Например, прямой образ при полумалых морфизмах сохраняет извращённость, а прямой образ полупростого извращённого пучка при произвольном проективном морфизме опять полупрост (следствие гипотезы Вейля-Римана). Близкие и исчезающие циклы сохраняют извращённость. Итеративно применяя близкие и исчезающие циклы, можно всю категорию извращённых пучков описать в терминах линейной алгебры (теорема Бейлинсона о склейке). Например, категория представлений квантовой группы эквивалентна категории извращённых (факторизуемых) пучков на пространстве конфигураций римановой поверхности. Из функториальности продолжения Горески-Макферсона немедленно получается представление Спрингера группы Вейля в когомологиях неподвижных точек нильпотентных векторных полей на пространстве флагов полупростой группы Ли. Преобразование Фурье-Делиня сохраняет извращённость (и является одним из ключевых шагов в доказательстве гипотезы Вейля-Римана). Извращённые пучки на многообразиях Шуберта аффинного Грассманниана полупростой группы Ли замкнуты относительно свёртки и образуют тензорную категорию, эквивалентную представлениям двойственной по Ленглендсу группы.

Короче, извращённые пучки — одно из величайших математических открытий последней четверти 20-го века. Огромная доля успехов теории представлений (классификация и вычисление характеров комплексных и модулярных представлений конечных групп Ли, p-адических групп Ли, квантовых групп, аффинных алгебр Каца-Муди; конструкция автоморфных представлений адельных групп и другие достижения геометрической теории представлений) обязана своим существованием теории извращённых пучков.

Миша Финкельберг.