ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Вероятностные предпочтения в кумулятивной теории проспектов (перспектив)

Зутлер Илья Аврумович, к.т.н., НИУ ВШЭ

Содержание

Кумулятивная теория проспектов (CPT)

Предпосылки и основные положения CPT

Классическая и упрощенная интегральная формулы

Сравнение проспектов. Сравнительная ценность

Аксиоматика, критика, контрпримеры CPT

Вероятностные предпочтения и вероятностный выбор

Модели вероятностных предпочтений

Модель выбора случайным марковским блужданием

Предпосылки CPT

Reference dependence – индивидуум склонен оценивать изменение (размер выигрыша и проигрыша) относительно нынешнего состояния status quo, нежели итоговое состояние.

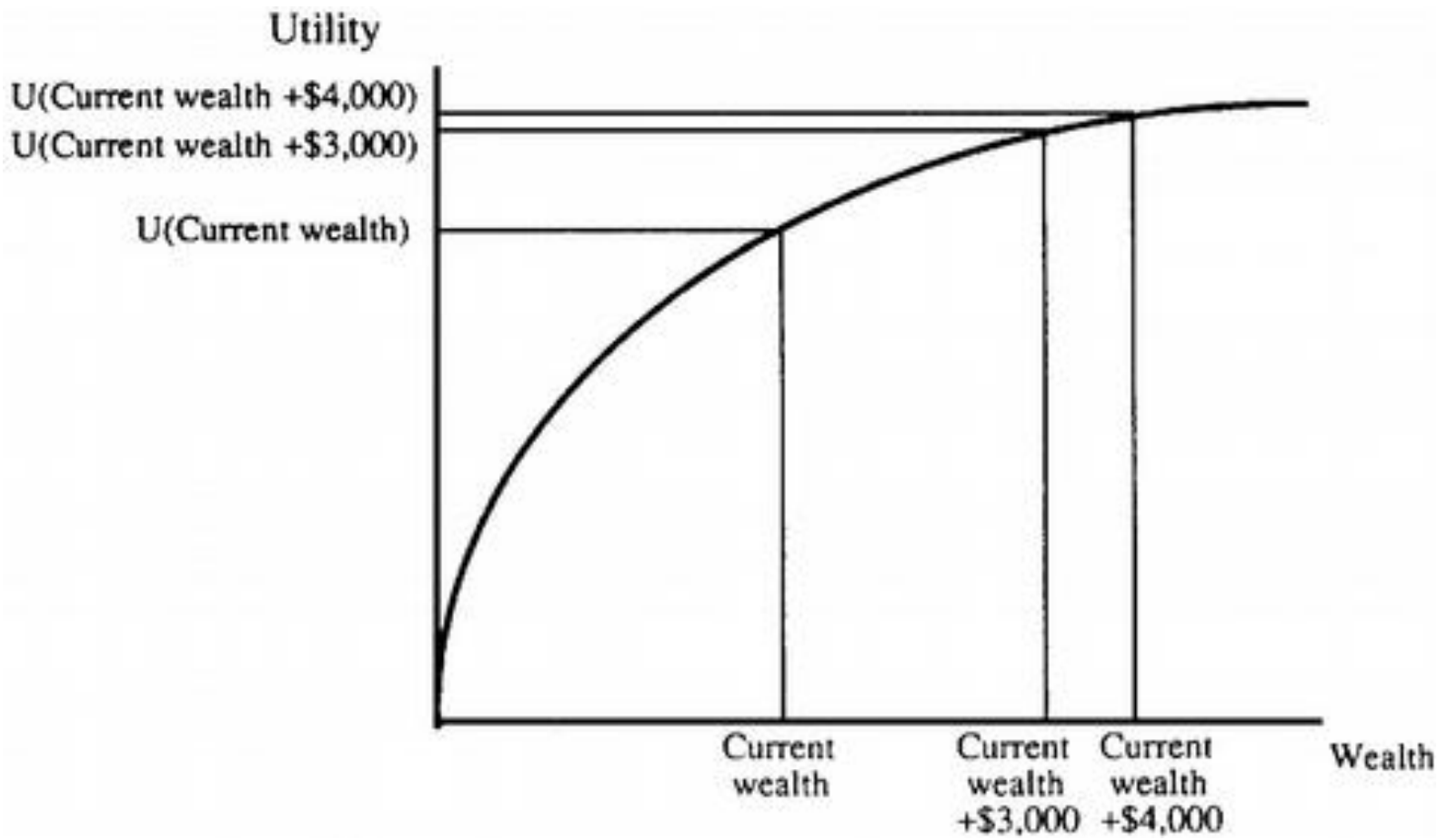
Framing effects – результат выбора индивидуумом зависит от того, представлен выбор как вопрос о выигрыше или проигрыше

Loss aversion – индивидуум склонен переживать проигрыш вдвое болезненней, чем радость выигрыша

Risk aversion / risk seeking – индивидуум не склонен к в риску при сравнении возможных выигрыша и склонен к риску при сравнении возможных потерь

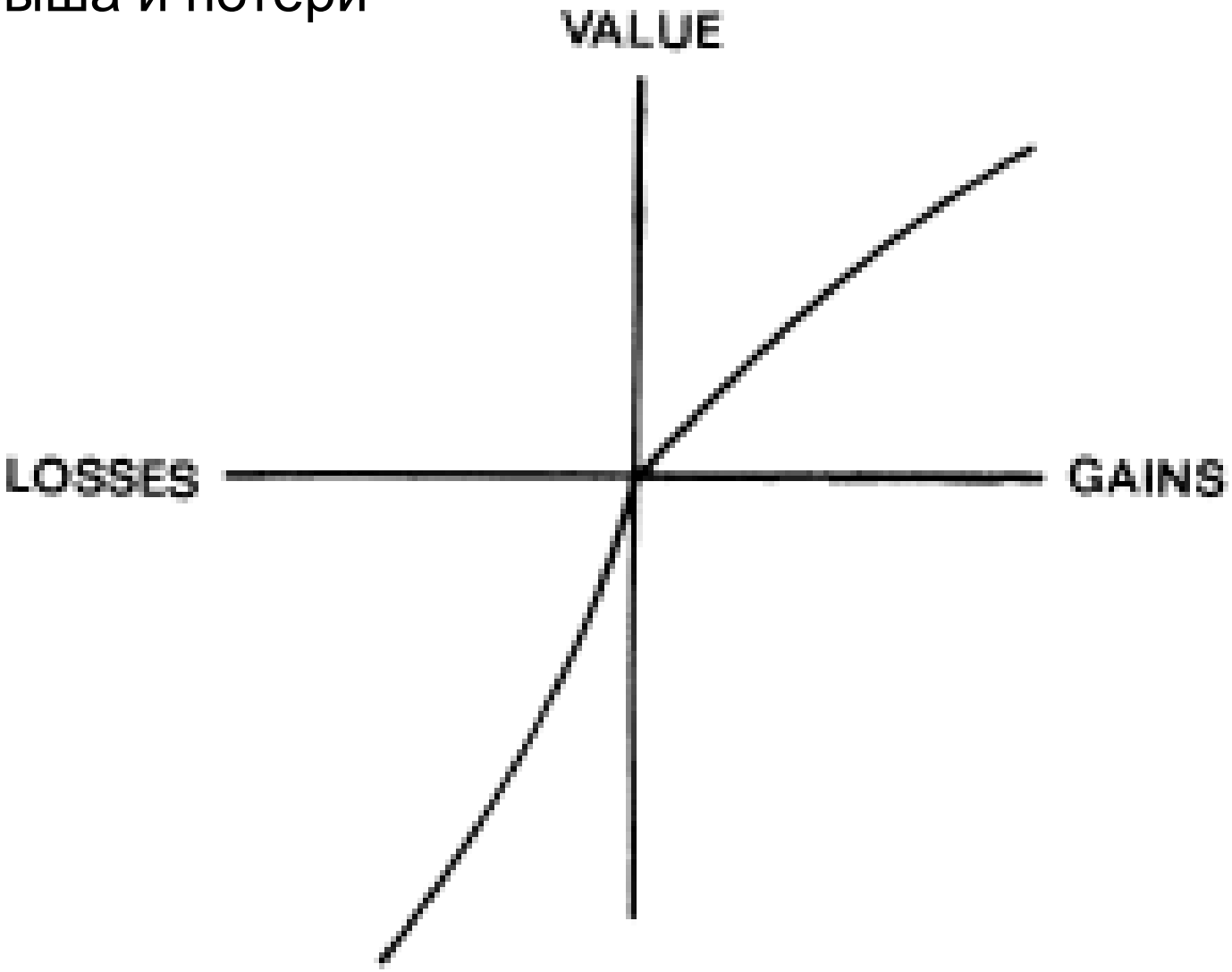
Функция полезности

Функция полезности (*utility function*) представляет полезность итогового состояния



Функция ценности

Функция ценности (*value function*) представляет ценность выигрыша и потери



Азиатский грипп (дилемма генерала)

В США 600 человек смертельно больны. Есть две вакцины А и В, но только одну можно применить.

- Вакцина А спасет 200 человек наверняка.
- Вакцина В спасет 600 человек с вероятностью 1/3, но с вероятностью 2/3 не спасет никого.

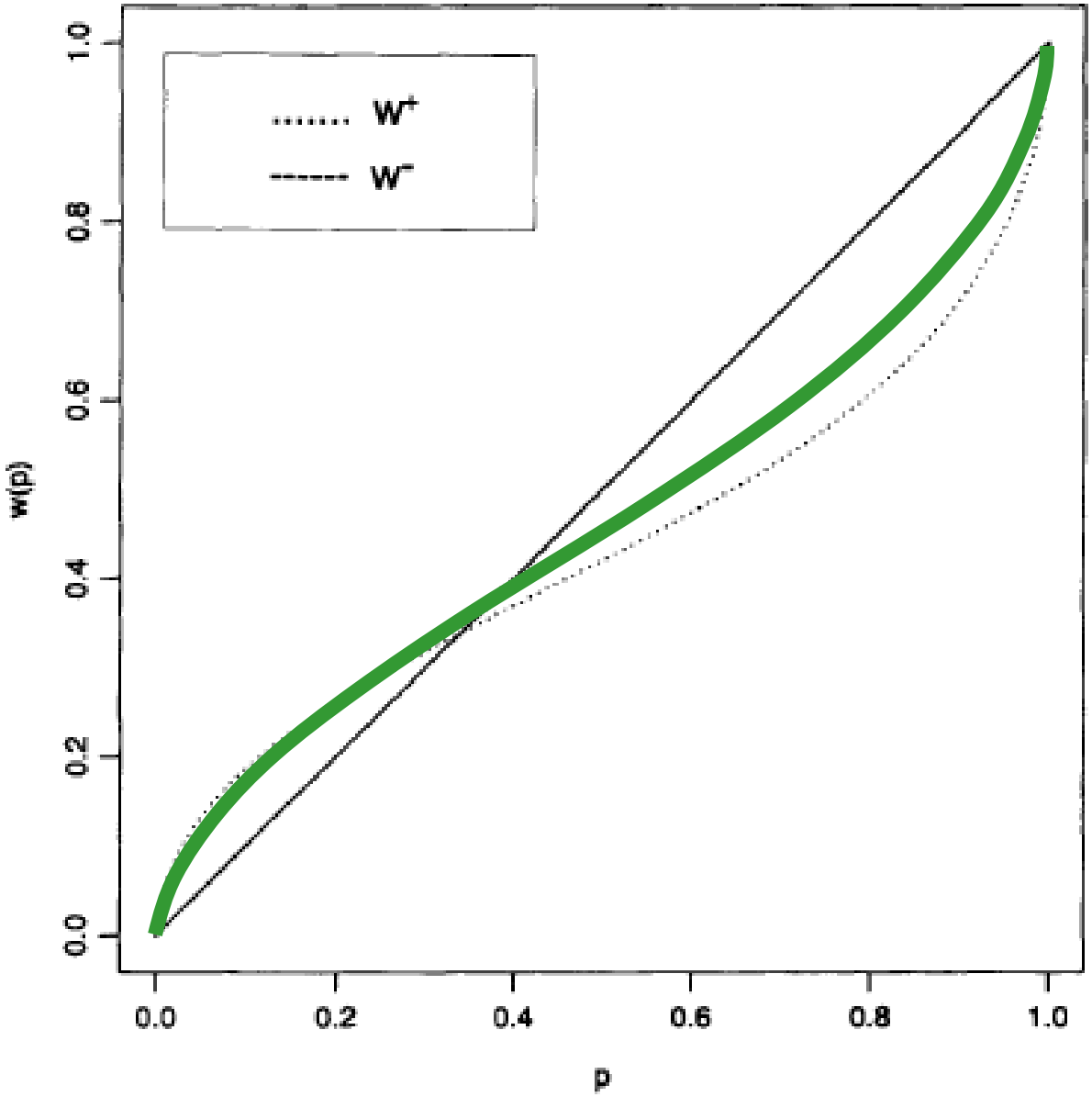
- Вакцина А погубит 400 человек наверняка.
- Вакцина В с вероятностью 1/3 никого не погубит, но с вероятностью 2/3 погубит всех.

Весовая функция вероятности

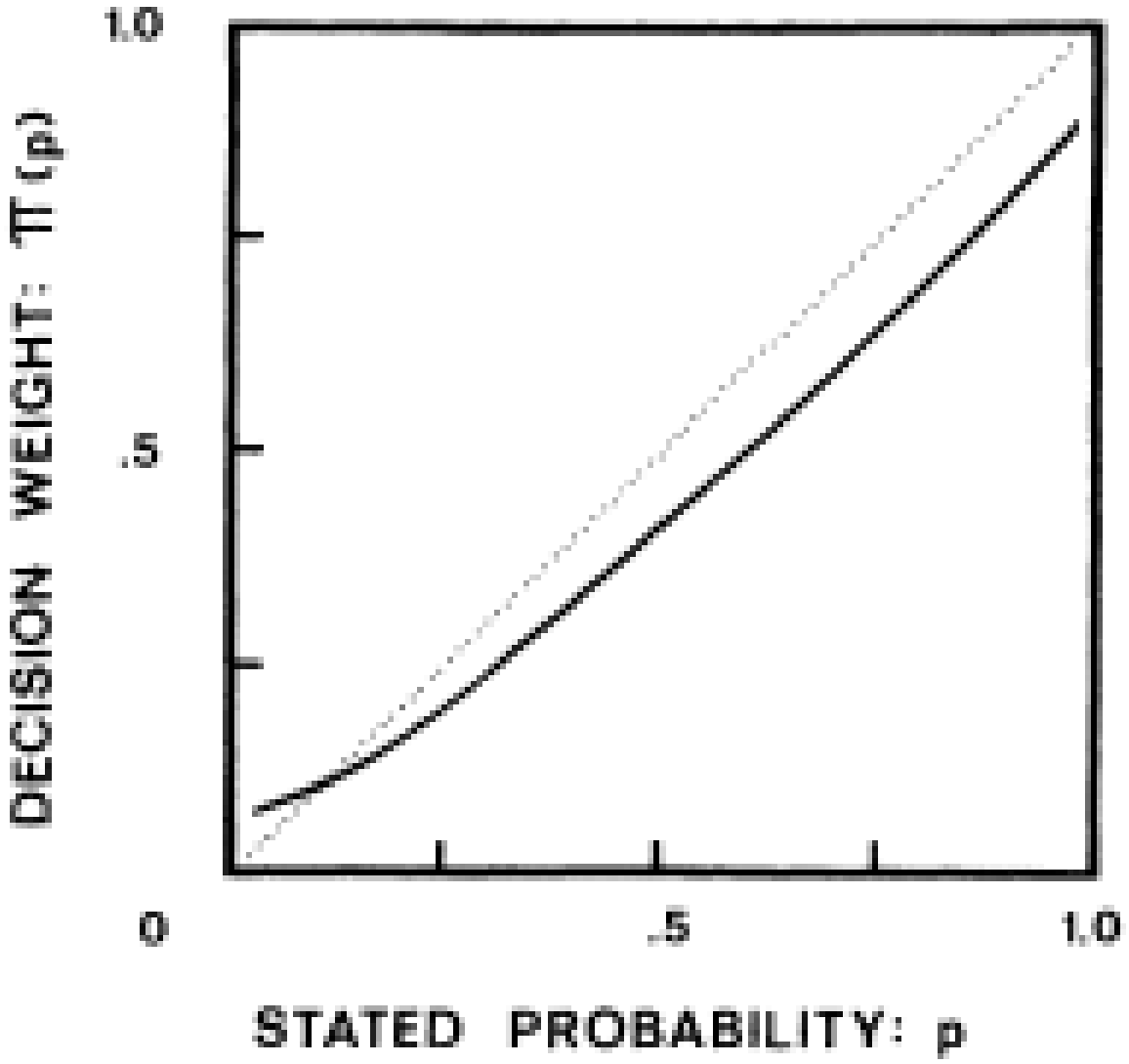
Decision weights – субъективное восприятие вероятности не совпадает с объективной вероятностью.

В представлении индивидуума вероятность 0.99 существенно меньше достоверной, также индивидуум склонен переоценивает малые вероятности.

Весовая функция вероятности



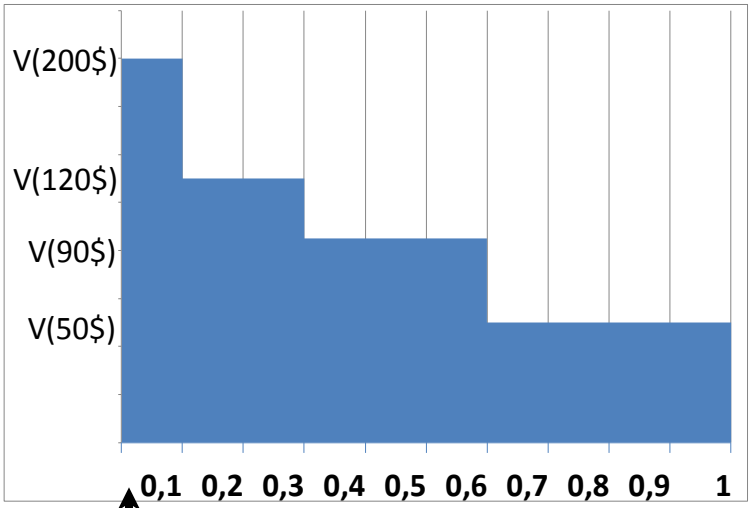
Весовая функция вероятности



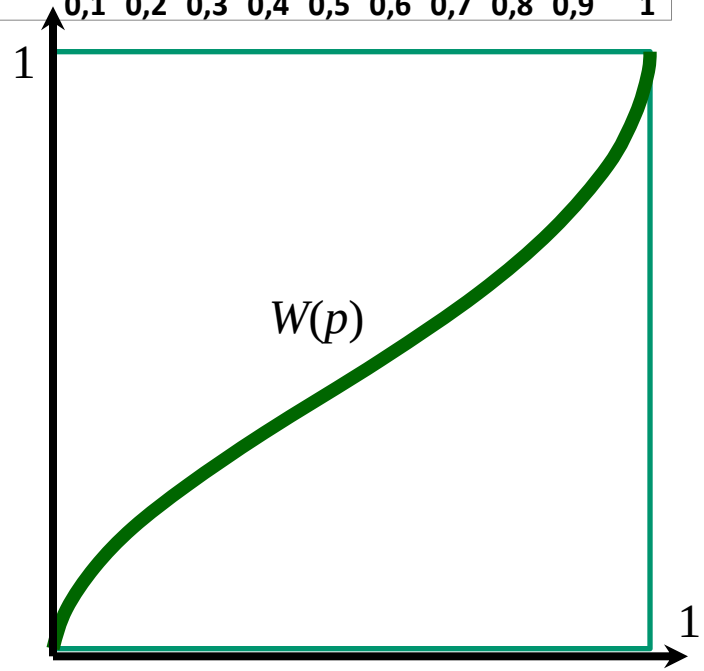
Расчет кумулятивной ценности

x= (200$, 0.1; 120$, 0.2; 90$, 0.3; 50$, 0.4)

$$V(x) =$$
$$V(50\$)\cdot W(1) +$$
$$+\left[V(90\$) - V(50\$)\right]\cdot W(0.6) +$$
$$+\left[V(120\$) - V(90\$)\right]\cdot W(0.3) +$$
$$+\left[V(200\$) - V(120\$)\right]\cdot W(0.1) =$$



$$= V(50\$)\cdot\left[W(1) - W(0.6)\right] +$$
$$+ V(90\$)\cdot\left[W(0.6) - W(0.3)\right] +$$
$$+ V(120\$)\cdot\left[W(0.3) - W(0.1)\right] +$$
$$+ V(200\$)\cdot W(0.1)$$



Расчет кумулятивной ценности

$x = (x_{-m}, p_{-m}; \ldots x_0, p_0; x_1, p_1; \ldots x_n, p_n)$

p_i – вероятность исхода x_i, исхода $x_i > x_j$ при $i>j$, x_0=0

$$V(x^+) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i^+ V(x_i), \quad V(x^-) = \sum_{i=-m}^{0} \pi_i^- V(x_i),$$

$$\pi_n^+ = W^+(p_n),$$

$$\pi_i^+ = W^+(p_i + p_{i+1} + \ldots + p_n) - W^+(p_{i+1} + \ldots + p_n),$$

$$\pi_{-m}^- = W^-(p_{-m}),$$

$$\pi_i^- = W^-(p_{-m} + p_{-m+1} + \ldots + p_i) - W^-(p_{-m} + p_{-m+1} \ldots + p_{i-1}),$$

$$V(x) = V(x^+) + V(x^-).$$

Кумулятивная интегральная модель Шоке

Для непрерывного множества альтернатив формула преобразуется в интеграл Шоке (Choquet G.):

$$V(x) = \int_{-\infty}^{0} V(x) \frac{d}{dx} W^{-}\big(F(x)\big)\, dx + \int_{0}^{+\infty} V(x) \frac{d}{dx}\Big(-W^{+}\big(1 - F(x)\big)\Big)\, dx,$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} dp$$

График положительного проспекта

x= (100$, 0.2; 200$, 0.3; 50$, 0.5)

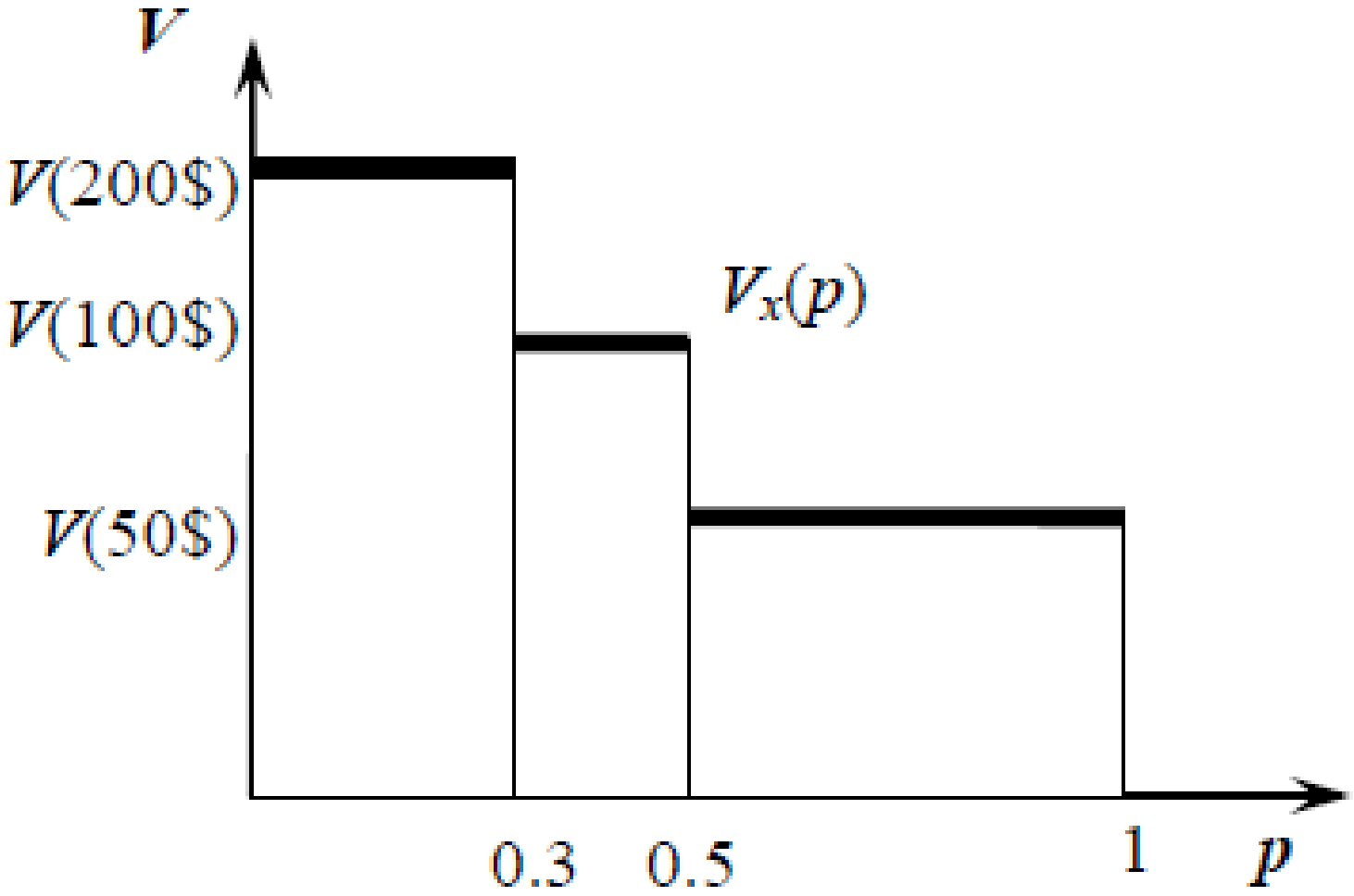
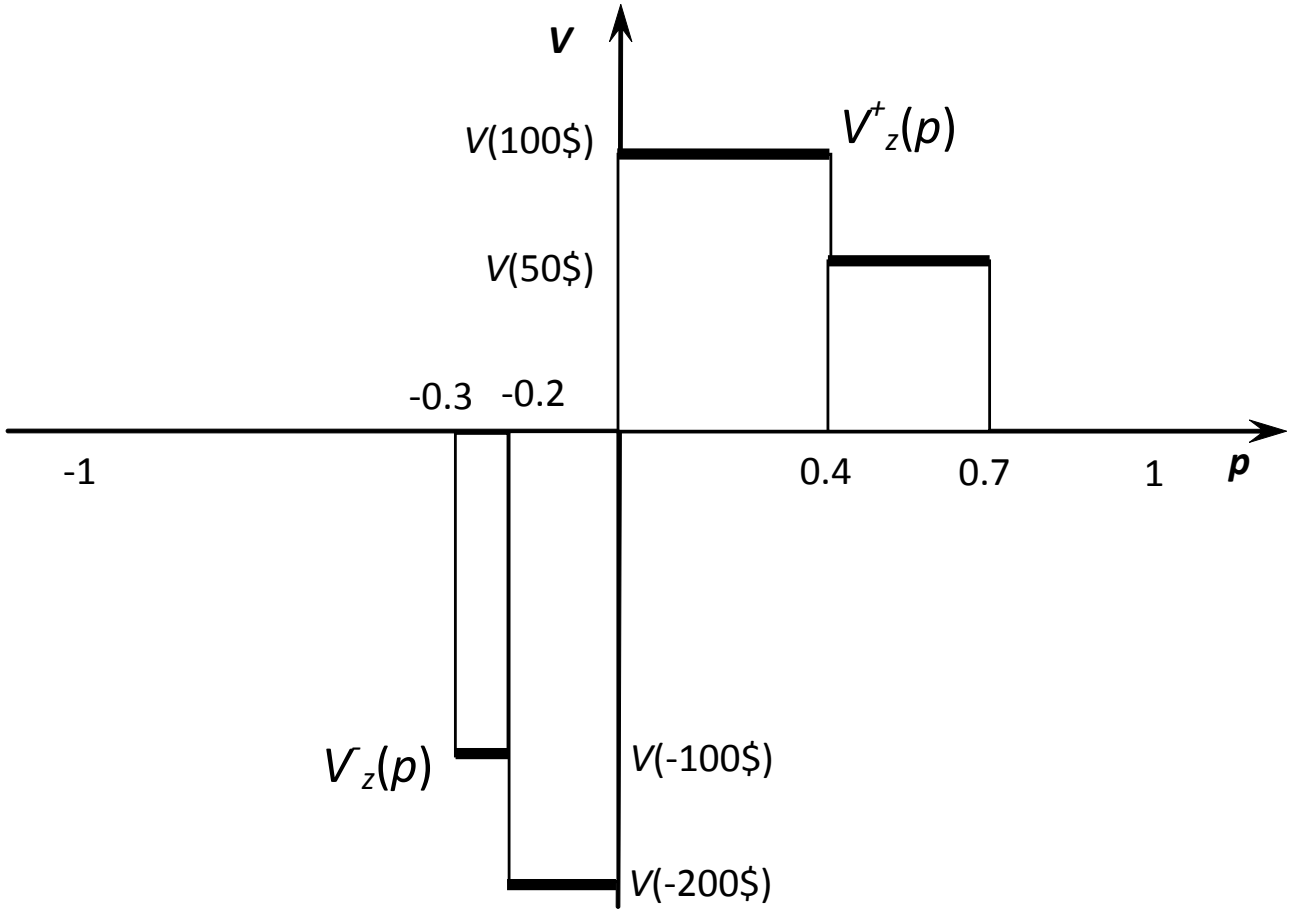


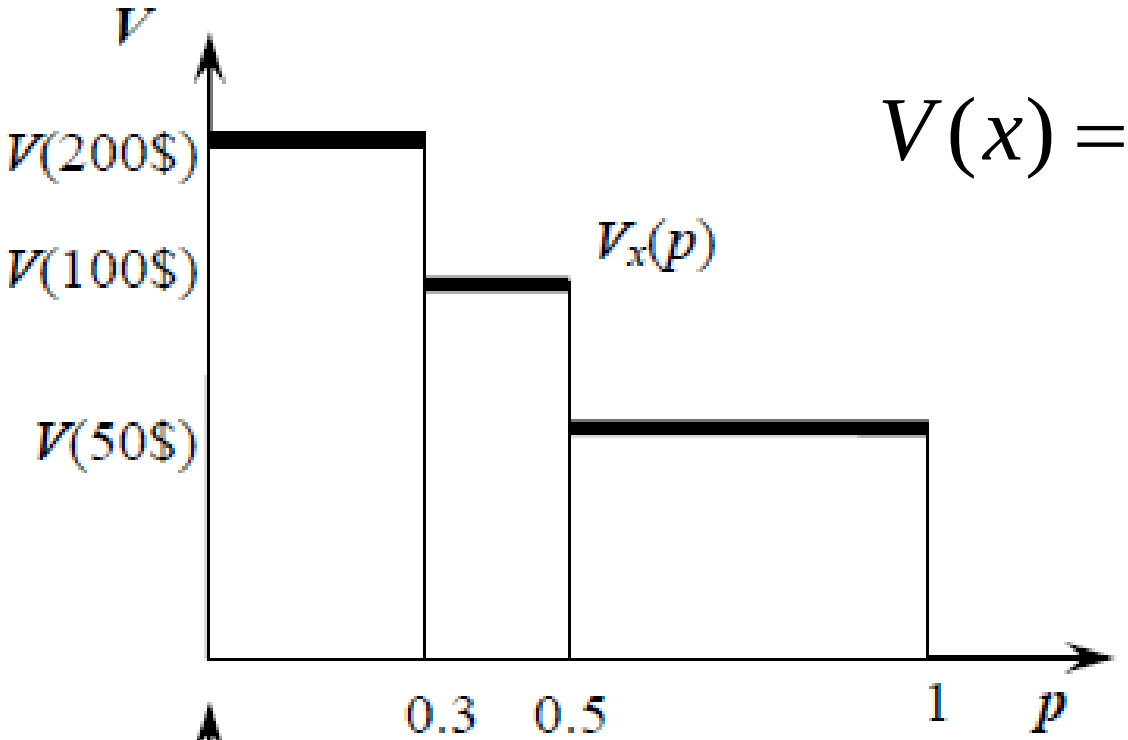
График смешанного проспекта

z = (-200$, 0.2; -100$, 0.1; 100$, 0.4; 50$, 0.3)



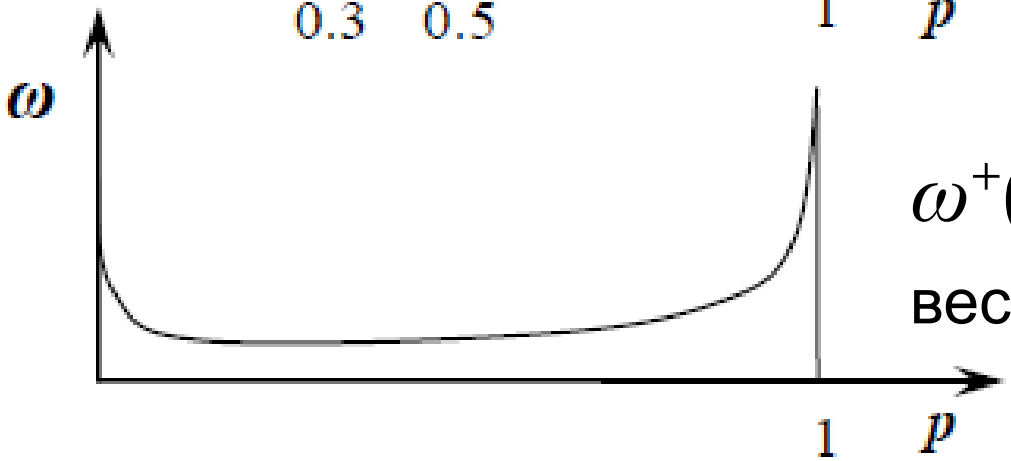
Ценность положительного проспекта

x= (100$, 0.2; 200$, 0.3; 50$, 0.5)



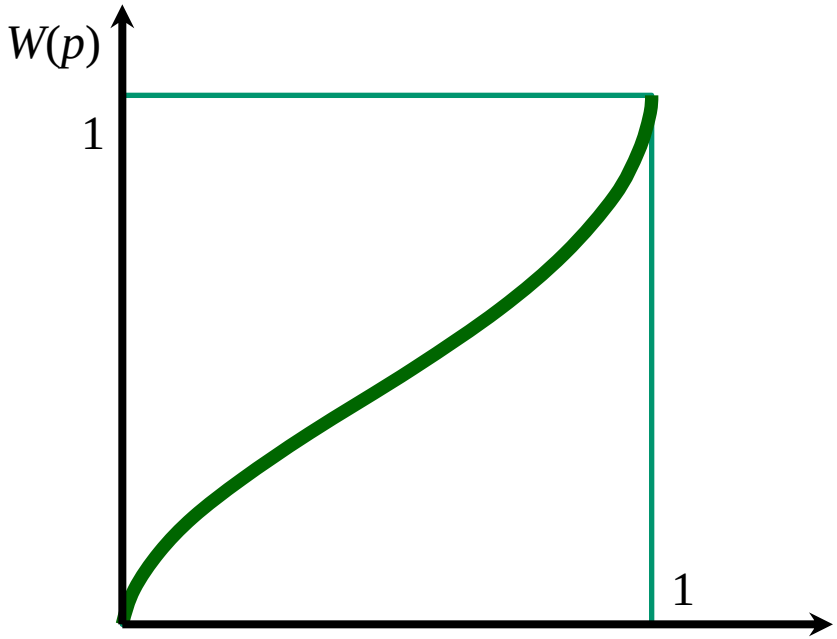
$$V(x) = \int_0^1 V^+(p)\omega^+(p)\,dp$$

$$\omega^+(p) = \frac{dW^+(p)}{dp}$$



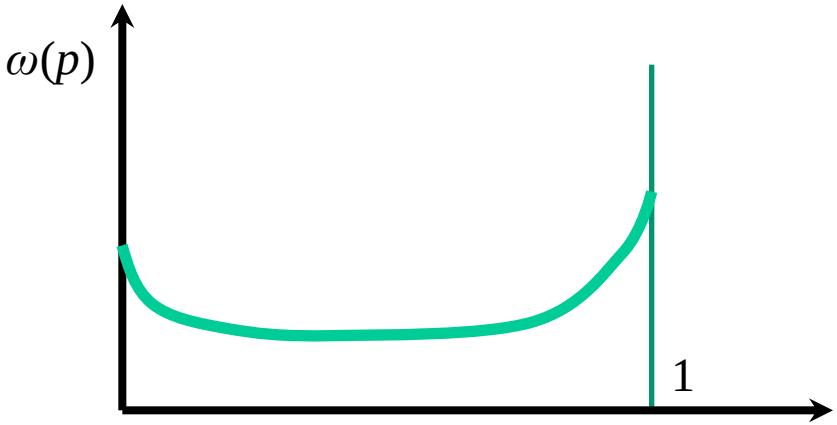
$\omega^+(p)$ – плотность весовой функции $W^+(p)$

Плотность весовой функции



$$\omega(p) = \frac{dW(p)}{dp}$$

$$\int_0^1 \omega(p)dp = 1$$



Кумулятивная модель в форме интеграла Римана

$$V(x) = \int_0^1 V^+(p)\omega^+(p)\,dp + \int_{-1}^0 V^-(p)\omega^-(p)\,dp$$

$$\omega^+(p) = \frac{dW^+(p)}{dp}, \quad \omega^-(p) = -\frac{dW^-(-p)}{dp}$$

где $V^+(p)$ – убывающая функция ценности выигрыша

$V^-(p)$ – возрастающая функция ценности потерь

$$x = (x_{-m}, p_{-m};\ \ldots; x_0, p_0; x_1, p_1; \ldots; x_n, p_n)$$

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i^+ V(x_i) + \sum_{i=-m}^{0} \pi_i^- V(x_i),$$

$$\pi_i^+ = W^+(p_i + p_{i+1} + \ldots + p_n) - W^+(p_{i+1} + \ldots + p_n),$$

$$\pi_i^- = W^-(p_{-m} + p_{-m+1} + \ldots + p_i) - W^-(p_{-m} + p_{-m+1} \ldots + p_{i-1})$$

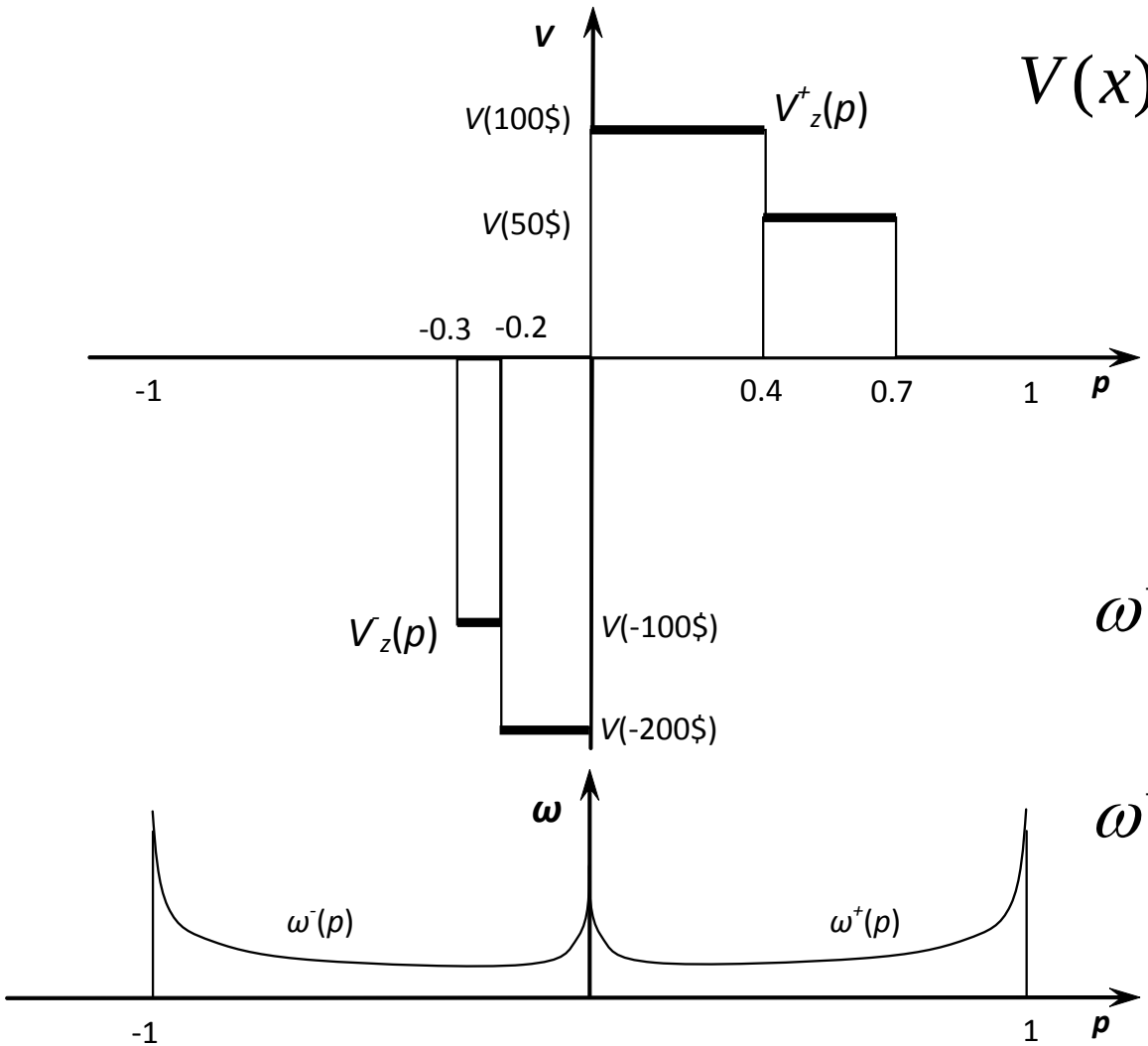
Кумулятивная интегральная модель Римана

Wakker P. (2010), Prospect Theory for risk and ambiguity.

стр.160., 197

Ценность смешаного проспекта

z = (-200$, 0.2; -100$, 0.1; 100$, 0.4; 50$, 0.3)



$$V(x) = \int_0^1 V^+(p)\omega^+(p)\,dp + \int_{-1}^0 V^-(p)\omega^-(p)\,dp$$

$$\omega^+(p) = \frac{dW^+(p)}{dp},$$

$$\omega^-(p) = -\frac{dW^-(-p)}{dp}$$

Парадокс Алле

Из альтернатив:

x_1=(4000\$, 0.8; 0\$, 0.2) и y_1=(3000\$, 1.0)

около 80% респондентов выбирают альтернативу y_1

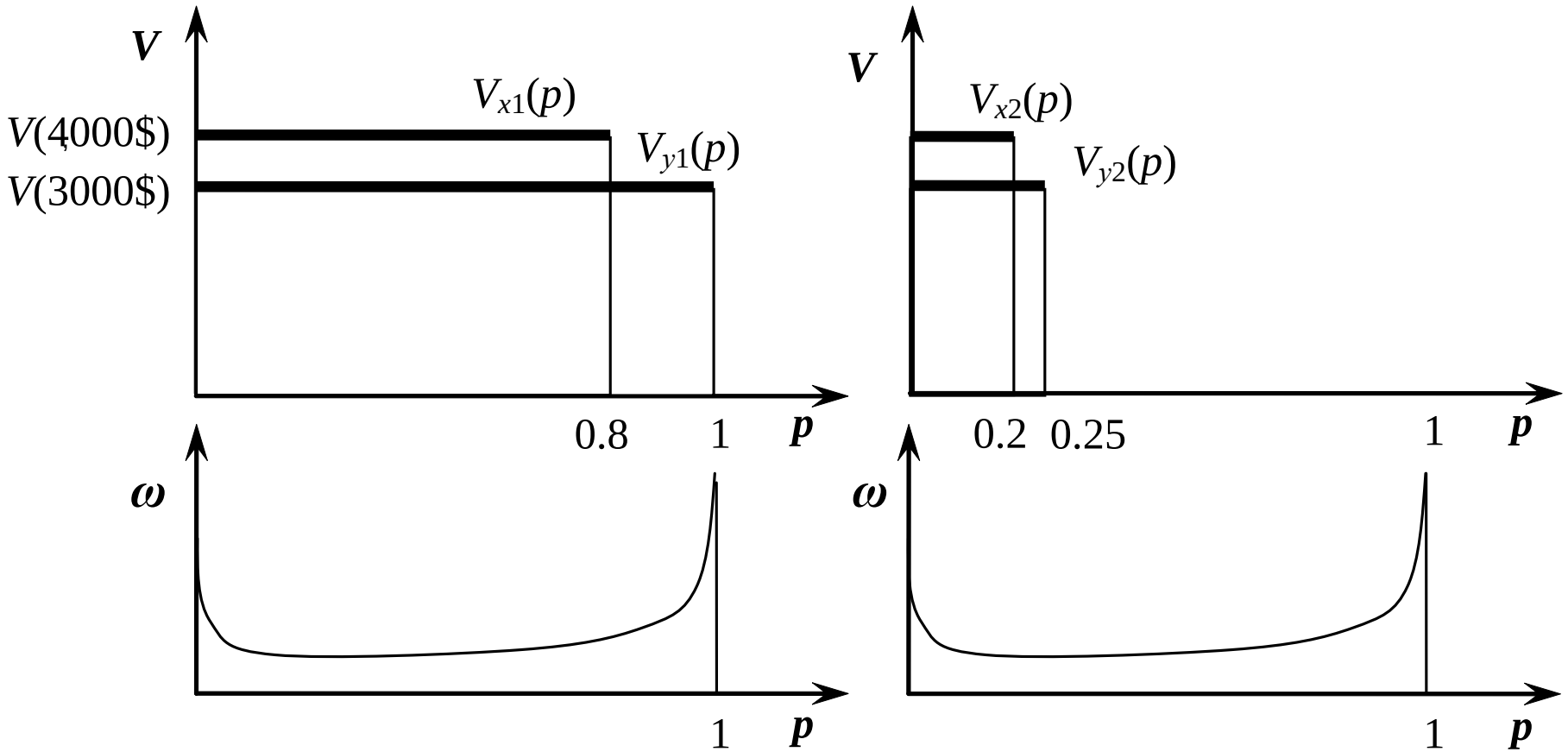
Сократим вероятность выигрыша для обеих альтернатив вчетверо. Тогда из:

x_2=(4000\$, 0.2; 0\$, 0.8) и y_2=(3000\$, 0.25)

около 65% респондентов выбирают альтернативу x_2.

Это нарушает аксиому независимости классической теории ожидаемой полезности.

Парадокс Алле



$$\int_0^{0.8} V(4000\$)\omega(p)dp < \int_0^{1} V(3000\$)\omega(p)dp$$

$$\int_0^{0.2} V(4000\$)\omega(p)dp > \int_0^{0.25} V(3000\$)\omega(p)dp$$

Стохастическое доминирование

Пусть индивидууму предъявляются две альтернативы:

x= (100$, 0.2; 200$, 0.3; 50$, 0.5)
x'= (90$, 0.2; 190$, 0.3; 40$, 0.5)

Результат выбора очевиден. Первая альтернатива стохастически доминирует вторую.

График первого проспекта будет строго больше второго.

Стохастическое доминирование

Пусть индивидууму предъявляются две альтернативы:

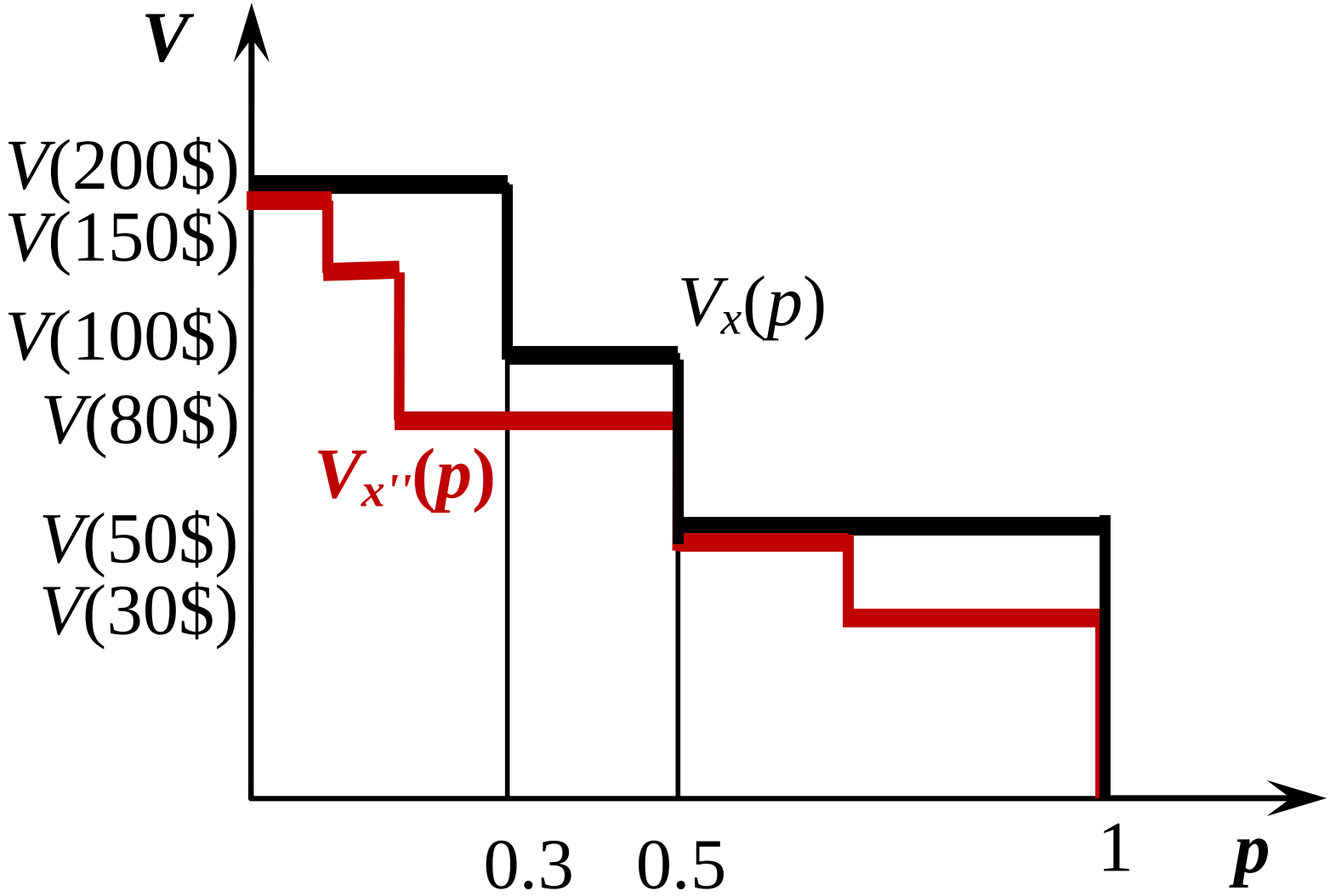
x= (100$, 0.2; 200$, 0.3; 50$, 0.5)

x'' = (200$, 0.1, 150$, 0.1; 80$, 0.3; 50$, 0.2; 30$, 0.3)

Стохастическое доминирование

x= (100$, 0.2; 200$, 0.3; 50$, 0.5)

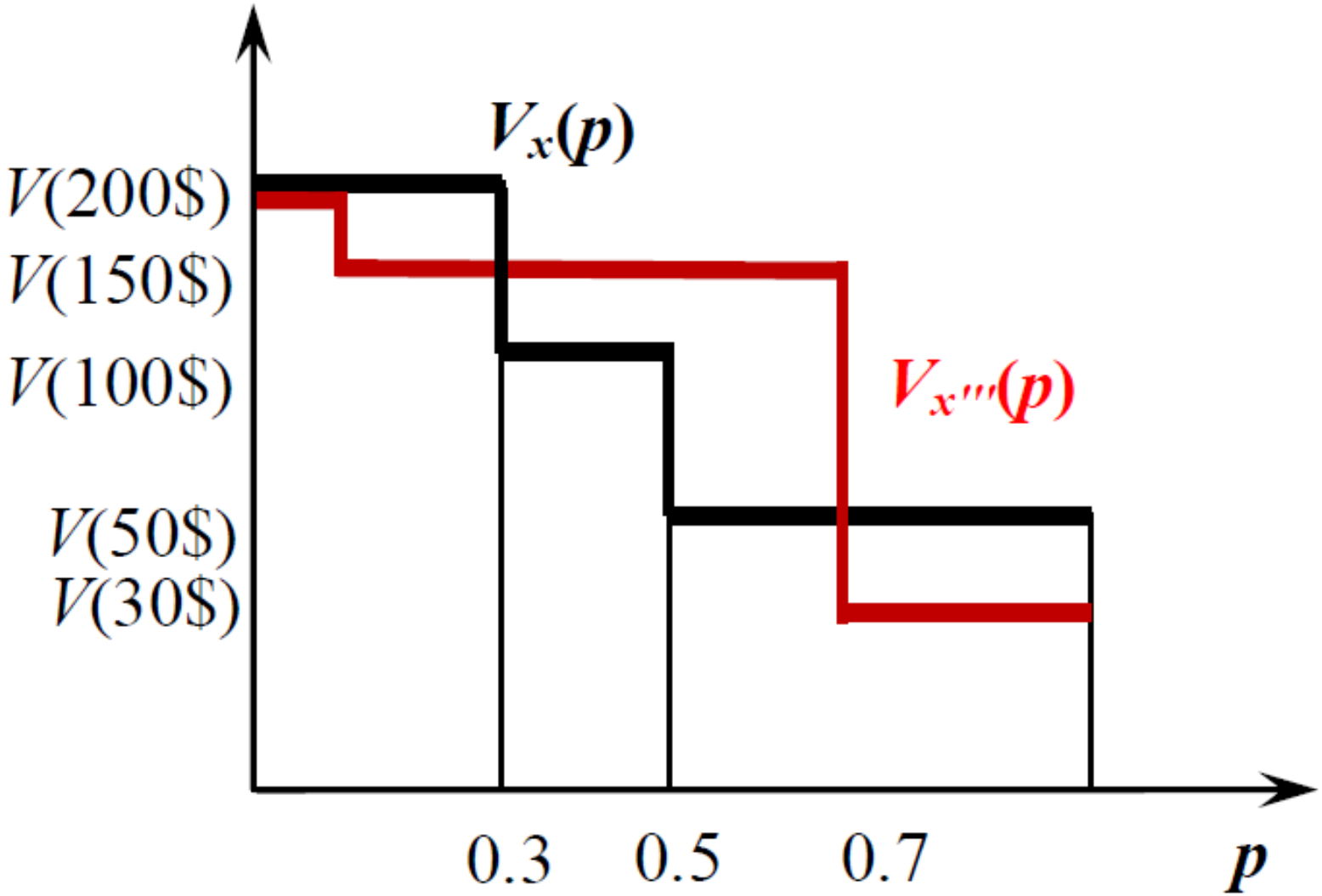
x'' =(200$, 0.1, 150$, 0.1; 80$, 0.3; 50$, 0.2; 30$, 0.3)



Нет стохастического доминирования

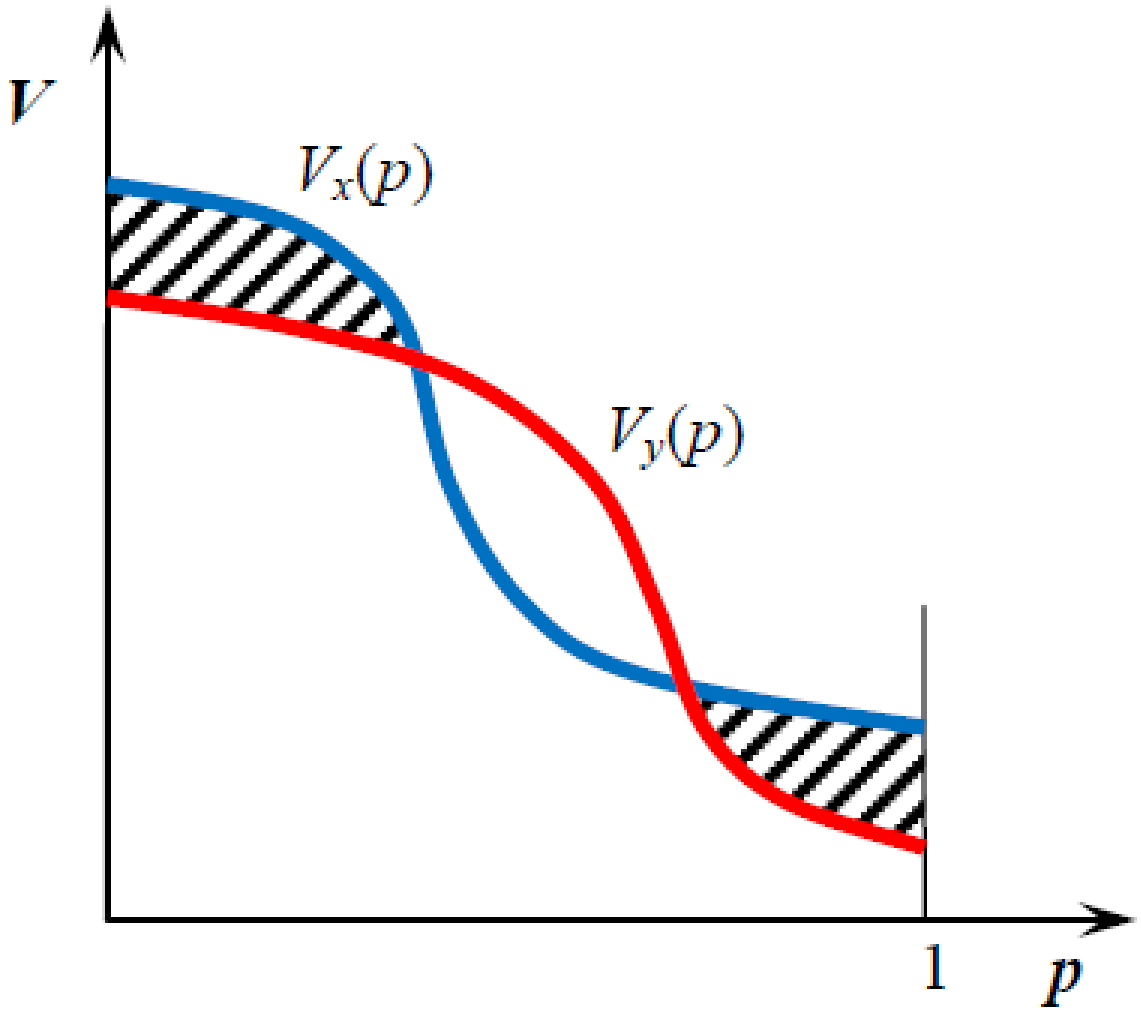
x = (100$, 0.2; 200$, 0.3; 50$, 0.5)

x'''=(200$, 0.1, 150$, 0.6; 30$, 0.3)



Сравнительная ценность

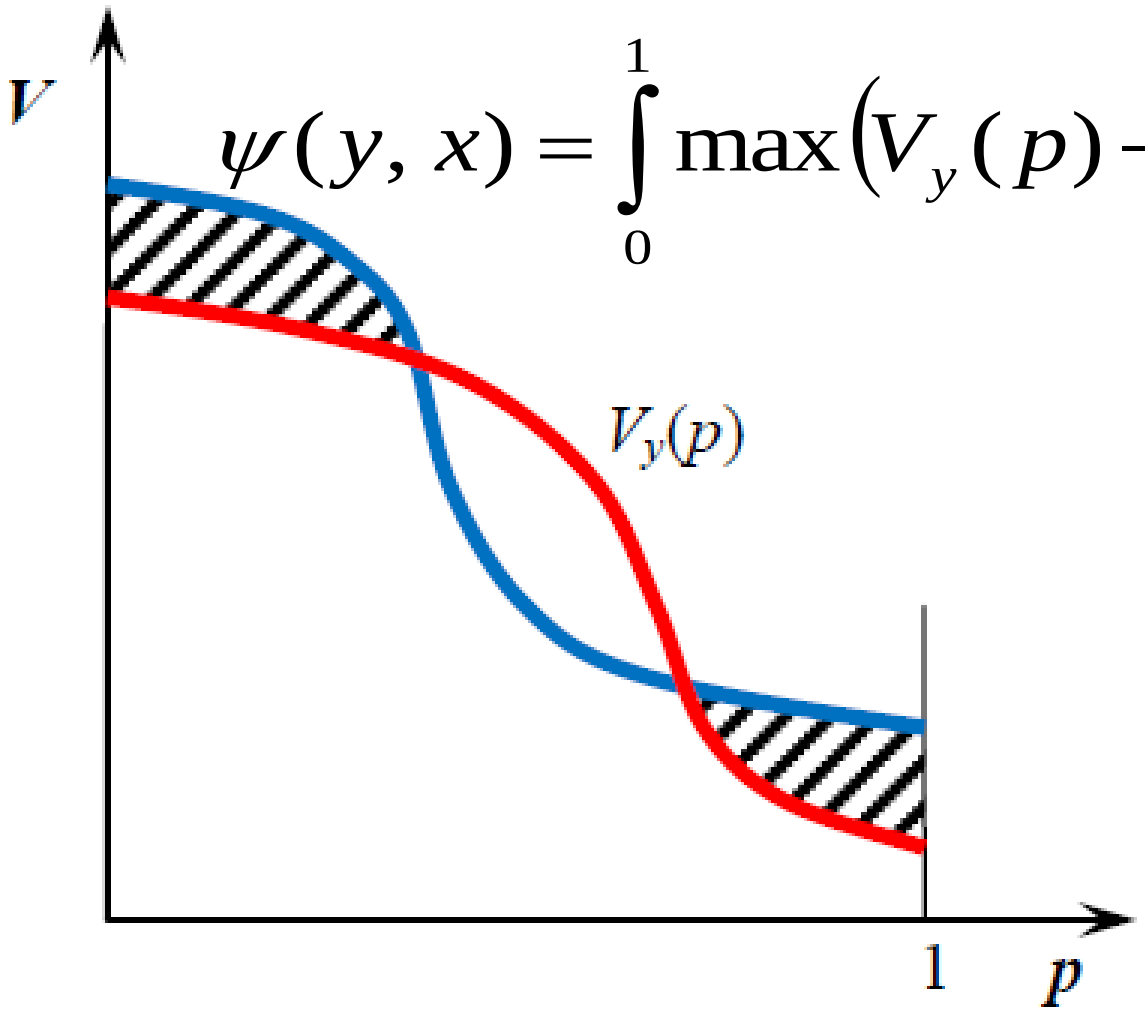
$$\psi(x, y) = \int^{1} \max\left(V_x(p) - V_y(p), 0\right)\omega(p)dp$$



Сравнительная ценность

$$\psi(x, y) = \int_0^1 \max\left(V_x(p) - V_y(p), 0\right)\omega(p)dp$$

$$\psi(y, x) = \int_0^1 \max\left(V_y(p) - V_x(p), 0\right)\omega(p)dp$$

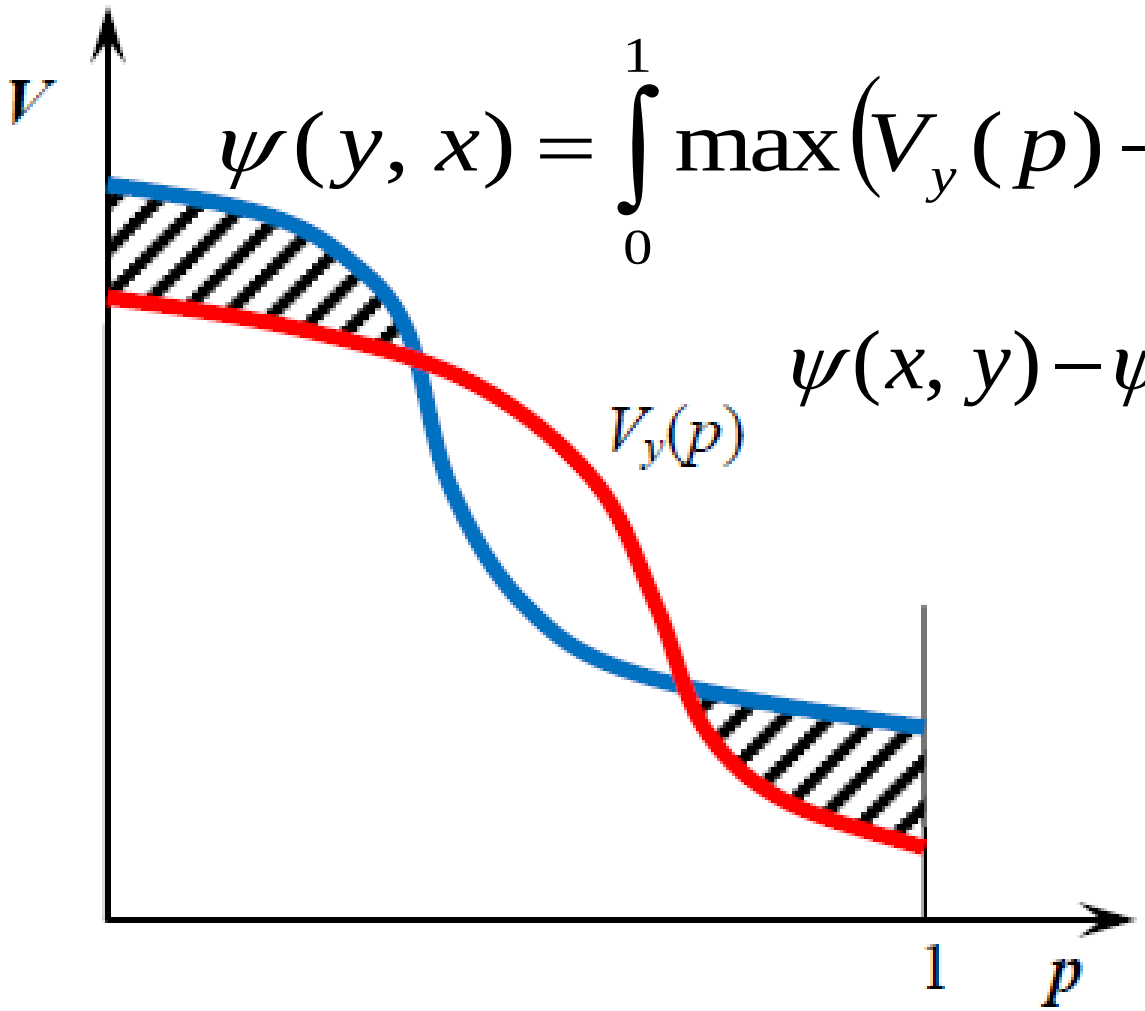


Сравнительная ценность

$$\psi(x, y) = \int_0^1 \max\left(V_x(p) - V_y(p), 0\right)\omega(p)dp$$

$$\psi(y, x) = \int_0^1 \max\left(V_y(p) - V_x(p), 0\right)\omega(p)dp$$

$$\psi(x, y) - \psi(y, x) = V(x) - V(y)$$

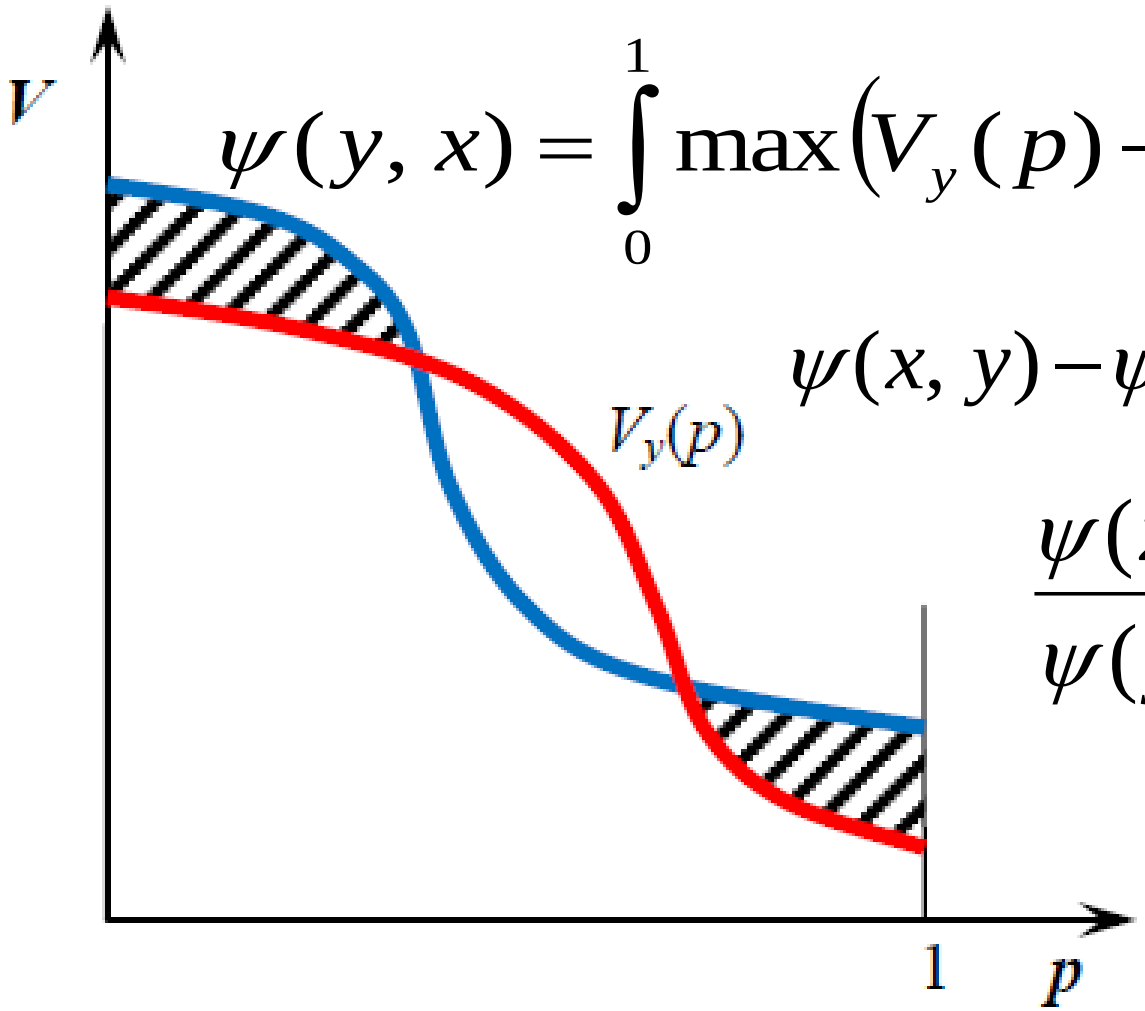


Сравнительная ценность

$$\psi(x, y) = \int_0^1 \max\left(V_x(p) - V_y(p), 0\right)\omega(p)dp$$

$$\psi(y, x) = \int_0^1 \max\left(V_y(p) - V_x(p), 0\right)\omega(p)dp$$

$$\psi(x, y) - \psi(y, x) = V(x) - V(y)$$



$$\frac{\psi(x, y)}{\psi(y, x)}$$ – отношение вероятностей выбора x и y

Вероятностные предпочтений

Будем обозначать:

$$x \succ_a y$$

то, что из двух альтернатив индивидуум

с вероятностью a предпочтет x

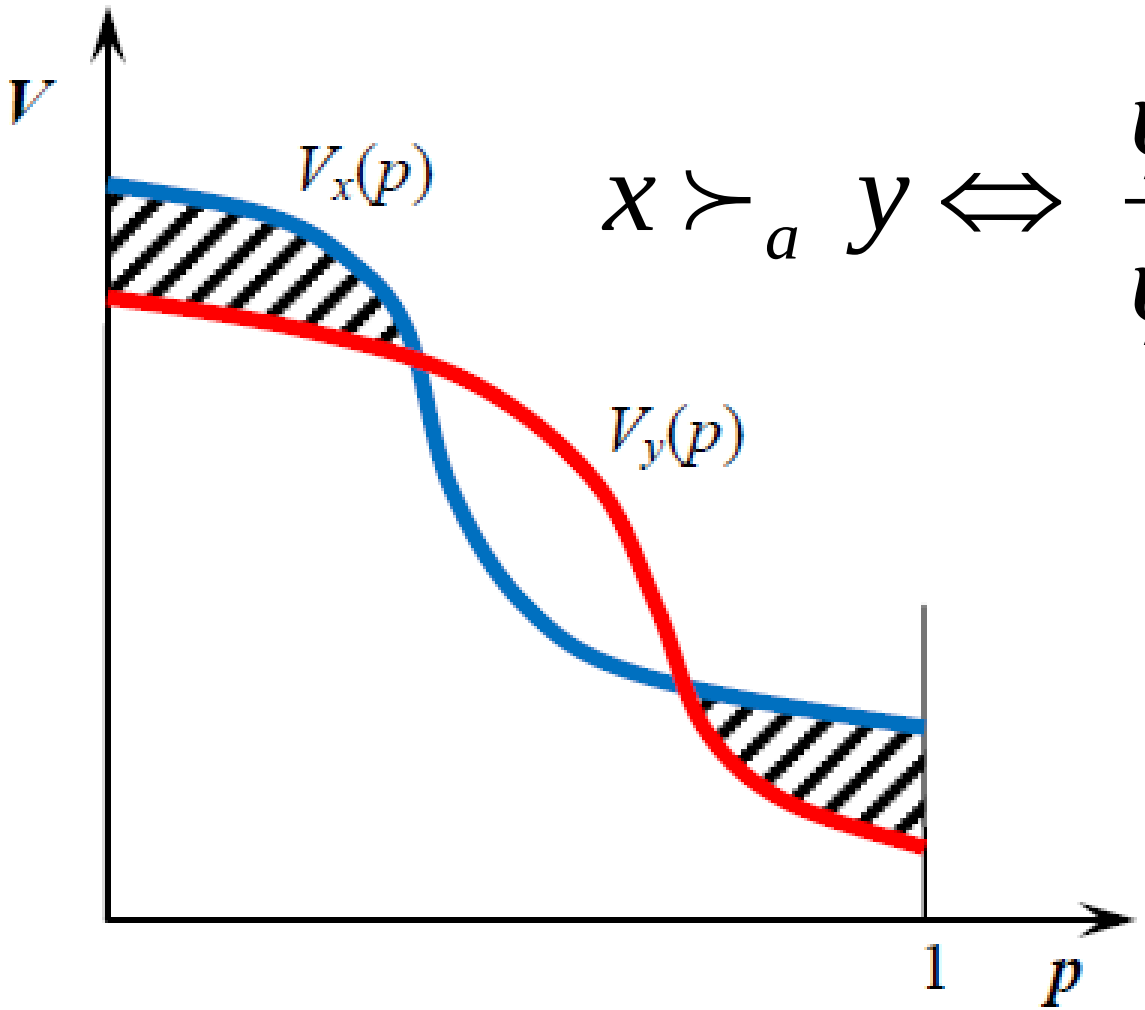
и с вероятностью $(1\text{-}a)$ предпочтет y.

$x \sim y$ будет соответствовать тому, что $a = ½$,

$x \succ y$ будет соответствовать тому, что $a > ½$.

Сравнительная ценность

$$\psi(x, y) = \int^{1} \max\left(V_x(p) - V_y(p), 0\right)\omega(p)dp$$



$$x \succ_a y \Leftrightarrow \frac{\psi(x, y)}{\psi(y, x)} = \frac{a}{1-a}$$

Incremental expected utility advantage model

Fishburn P. (1978), A probabilistic expected utility theory of risky binary choice.

Blavatskyy P. (2011), A Model of Probabilistic Choice Satisfying First-Order Stochastic Dominance

- модели описывают аналогичное построение на основании функции полезности, которая, в отличии от функции ценности не является интервальной шкалой.

Контрпримеры CPT

George Wu, Alex B. Markle (2007)
An Empirical Test of Gain-Loss Separability in Prospect Theory
(Double matching)

Michael H. Birnbaum (1999)
Evidence against Rank-Dependent Utility Theories: Tests of Cumulative Independence, Interval Independence, Stochastic Dominance, and Transitivity

Gain-Loss Separability

$(n = 81)$

$$H^+ = \begin{pmatrix} \text{.50 chance at \$4200} \\ \text{.50 chance at \$0} \end{pmatrix} \text{ vs. } L^+ = \begin{pmatrix} \text{.75 chance at \$3000} \\ \text{.25 chance at \$0} \end{pmatrix}$$

[15%] [85%]

$(n = 81)$

$$H^- = \begin{pmatrix} \text{.50 chance at \$0} \\ \text{.50 chance at \$-3000} \end{pmatrix} \text{ vs. } L^- = \begin{pmatrix} \text{.75 chance at \$0} \\ \text{.25 chance at \$-4500} \end{pmatrix}$$

[37%] [63%]

Gain-Loss Separability

$(n = 81)$

$$H = \begin{pmatrix} .50 \text{ chance at } \$4200 \\ .50 \text{ chance at } \$\text{-}3000 \end{pmatrix} \text{ vs. } L = \begin{pmatrix} .75 \text{ chance at } \$3000 \\ .25 \text{ chance at } \$\text{-}4500 \end{pmatrix}$$

[52%] [48%]

В смешанных проспектах индивидуум больше внимания уделяет максимальным возможным значениям. Тогда как в чисто положительных и отрицательных более адекватно оценивает вероятности.

Стохастическое доминирование

Gamble A	Gamble B
90 reds to win $96 05 blues to win $14 05 whites to win $12	85 reds to win $96 05 blues to win $90 10 whites to win $12

70% респондентов выбрали B

Вероятностные предпочтения

Вероятностный выбор – понимается то, что мы не можем однозначно предсказать результаты выбора индивидуума из предложенного множества альтернатив на основании всех возможных априорных знаний о его предпочтений. Можно лишь говорить о вероятности выбора той или иной альтернативы.

Вероятностные предпочтения – понимается то, что вероятностный выбор из двух альтернатив.

Примеры моделей вероятностных предпочтений

Bradley-Terry-Luce (BTL) модель

Выбор альтернативы из множества $(s_1, s_2, s_3, \ldots s_m)$ вероятностный и зависит от “силы” альтернатив $(u(s_1), u(s_2), \ldots)$:

$$P_{s_i(s_1, s_2, \ldots)} = \frac{u(s_i)}{u(s_1) + u(s_2) + \ldots}$$

Примеры моделей вероятностных предпочтений

Модель случайной полезности

Выбор альтернативы из множества $(s_1, s_2, s_3, \ldots s_m)$ вероятностный и зависит реализации случайного m –мерного вектора $U\ (u(s_1), u(s_2), \ldots)$, компоненты которого соответствуют полезности альтернатив.

$$P_{s_i(s_1, s_2, \ldots)} = \mathrm{P}\left\{u(s_i) > u(s_j) \quad \forall j \neq i\right\}$$

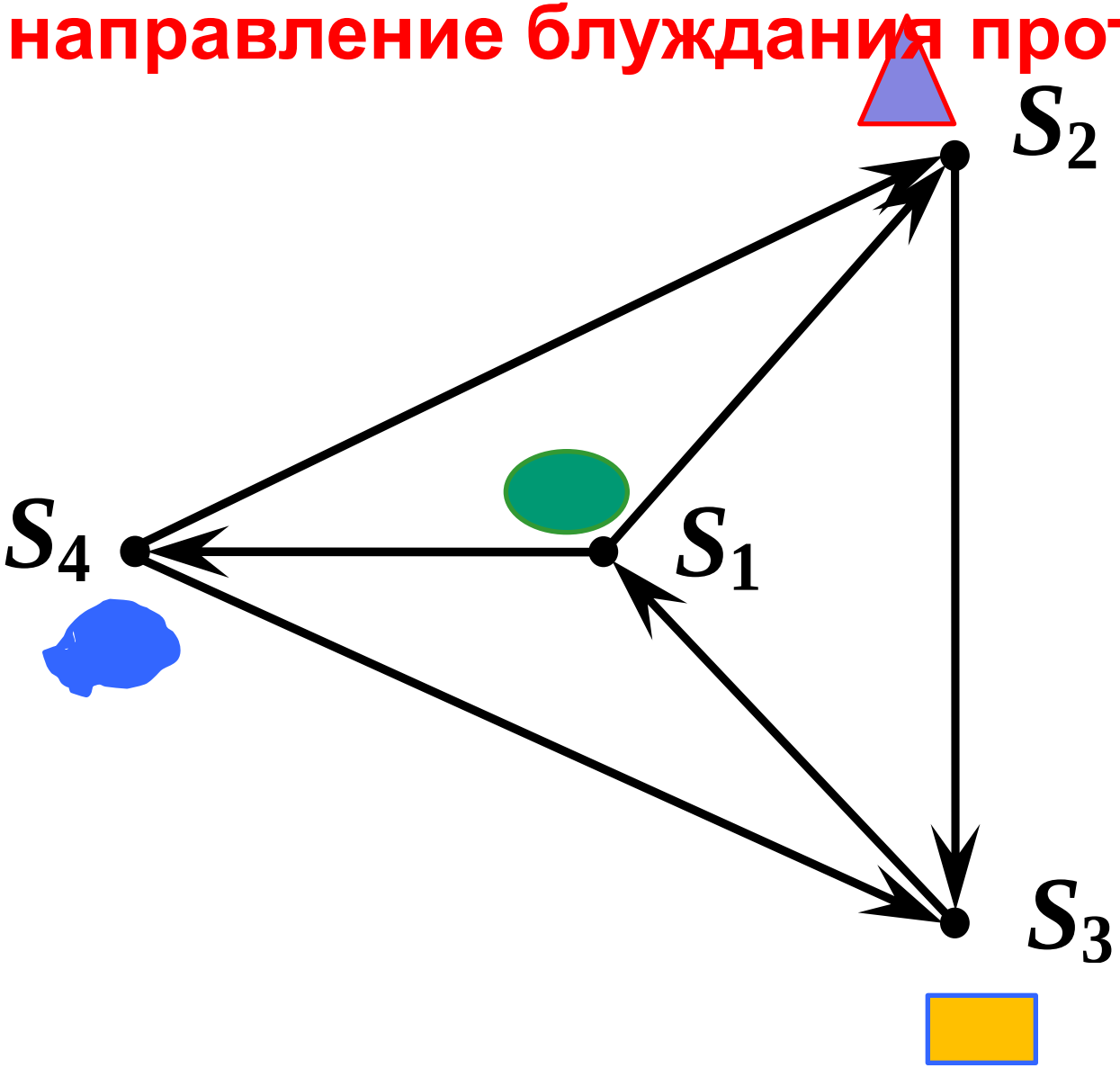
Выбор непрерывным марковским блужданием

Индивидуум должен выбрать одну альтернативу из предложенного множества, на котором у него имеются бинарные, возможно нетранзитивные предпочтения.

Индивидуум мысленно осуществляет последовательный перебор. “Хватает” некоторую альтернативу в надежде, что она наилучшая. Хаотически оглядывает остальные альтернативы. Если замечает альтернативу лучше той, что ”в руках”, “хватает” ее, а старую бросает обратно в общую кучу.

Выбор непрерывным марковским блужданием

направление блуждания против стрелки!!!



$$S_1 \succ S_2$$

$$S_1 \succ S_4$$

$$S_1 \prec S_3$$

$$S_2 \prec S_4$$

$$S_2 \succ S_3$$

$$S_3 \prec S_4$$

Выбор непрерывным марковским блужданием

Предполагается, что выбор осуществляется непрерывным марковским блужданием на множестве альтернатив. А именно, интенсивности перехода от рассматриваемой альтернативы к любой другой зависят только от того, какую альтернативу индивидуум рассматривает сейчас.

Будем называть эту модель **Continuous Markov Chain Choice** (CMCC).

Continuous Markov Chain Choice

Improvements (IM):
Индивидуум не может перейти к худшей альтернативе (в парном сравнении).

Equivalent favor (EF):
Если две лотереи эквивалентны, расчетные интенсивности перехода между ними равны.

Stationarity (ST):
В случае, если процесс блуждания эргодичен, результат выбора вероятностный и соответствует вероятности стационарностям стационарного распределения.

СМСС в случае SSB предпочтений

Пусть S конечное множество альтернатив, отношение предпочтений на котором может быть представлено SSB функцией $\phi(\cdot, \cdot)$.

Пусть индивидуум осуществляет выбор непрерывным марковским блужданием на множестве альтернатив, S, удовлетворяющем условиям EF и IM. Тогда интенсивности перехода равны положительной части SSB функции, т.е. $\psi(x, y)=\max\{\phi(x, y), 0\}$.

Определяющие уравнения СМСС процесса

Пусть на множестве $(s_1, s_2, s_3, \ldots s_m)$ сравнительная привлекательность альтернатив задается функцией $\psi(s_1, s_2)$, которая определяет интенсивности перехода, а именно

если индивидуум рассматривает s_j , то вероятность перейти за время Δt к s_i равна

$$\psi(s_i, s_j)\,\Delta t + o(\Delta t)$$

Определяющие уравнения СМСС процесса

$p_j(t)$ – вероятность того, что индивидуум рассматривает s_j в момент времени t .

К моменту времени $t+\Delta t$ он может перейти к s_i в состояние $p_j(t+\Delta t)$ с вероятностью $\psi(s_i, s_j)\,\Delta t+o(\Delta t)$

$$p_i(t+\Delta t)=\left(1-\sum_{k=1}^{m}\psi(s_k, s_i)\Delta t\right)p_i(t)+\sum_{j=1}^{m}\psi(s_i, s_j)\Delta t\; p_j(t)+o(\Delta t)$$

для всех i

Определяющие уравнения СМСС процесса

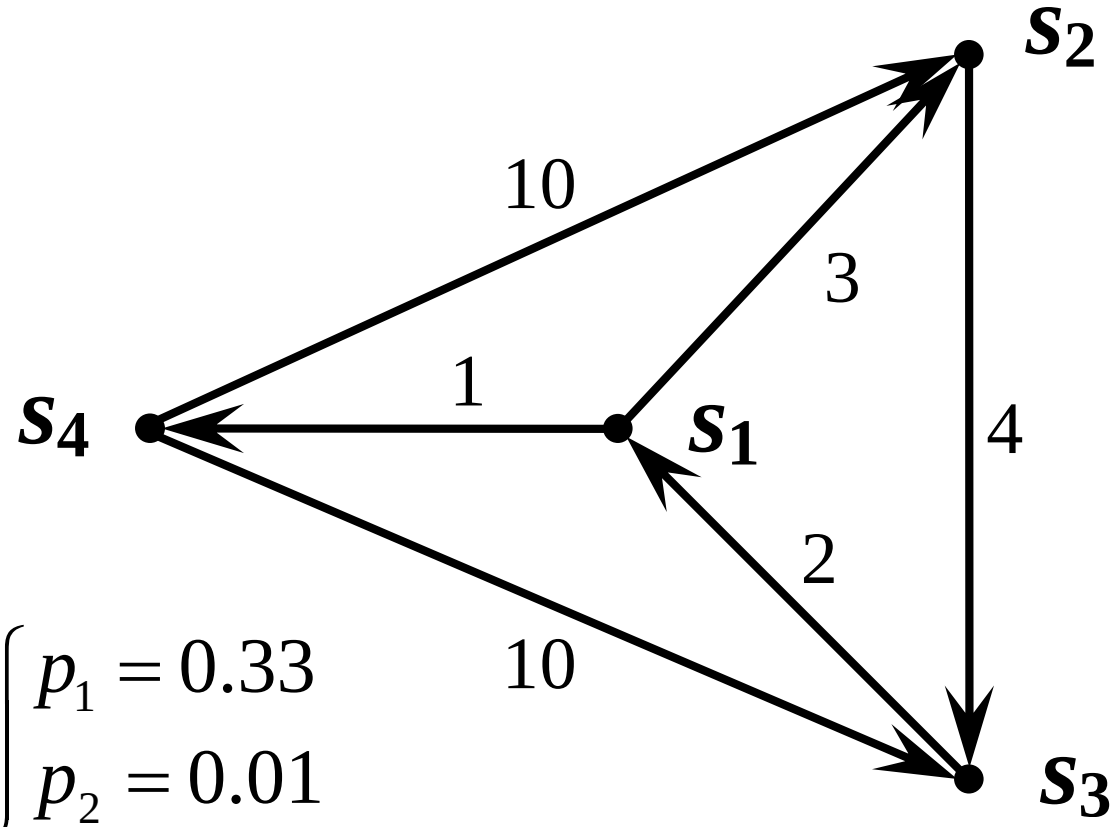
$$p_i(t+\Delta t)=\left(1-\sum_{k=1}^{m}\psi(s_k,s_i)\Delta t\right)p_i(t)+\sum_{j=1}^{m}\psi(s_i,s_j)\Delta t\, p_j(t)+o(\Delta t)$$

$$\frac{d}{dt}p_i(t)=-\sum_{k=1}^{m}\psi(s_k,s_i)\,p_i(t)+\sum_{j=1}^{m}\psi(s_i,s_j)p_j(t)\quad \text{для всех}\quad i$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{m}\psi(s_i,s_j)p_j-p_i\sum_{k=1}^{m}\psi(s_k,s_i)=0 \quad \text{для всех}\ \ i,\\ \sum_{j=1}^{m}p_j=1.\end{cases}$$

Пример

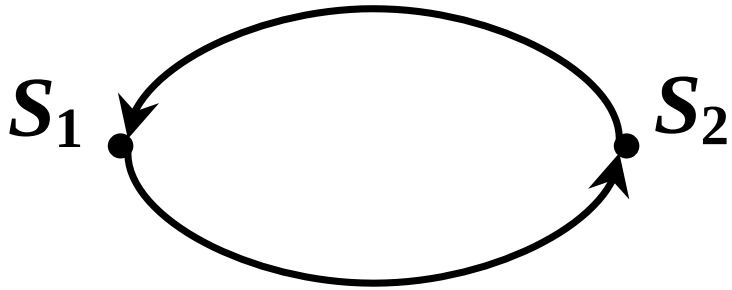
$$\begin{cases} 2p_1 = 1p_4 + 3p_2 \\ (10+3)p_2 = 4p_3 \\ (10+4)p_3 = 2p_1 \\ 1p_4 = 10p_2 + 10p_3 \\ \sum_{j=1}^{4} p_i = 1 \end{cases}$$



Решение системы:

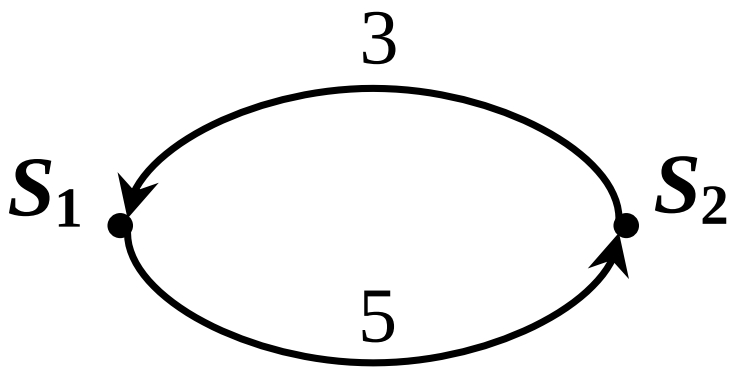
$$\begin{cases} p_1 = 0.33 \\ p_2 = 0.01 \\ p_3 = 0.05 \\ p_4 = 0.61 \end{cases}$$

Блуждание при вероятностных предпочтениях



При вероятностных предпочтениях при блуждании возможен переход между этими альтернативами в обе стороны.

Блуждание на множестве из двух альтернатив



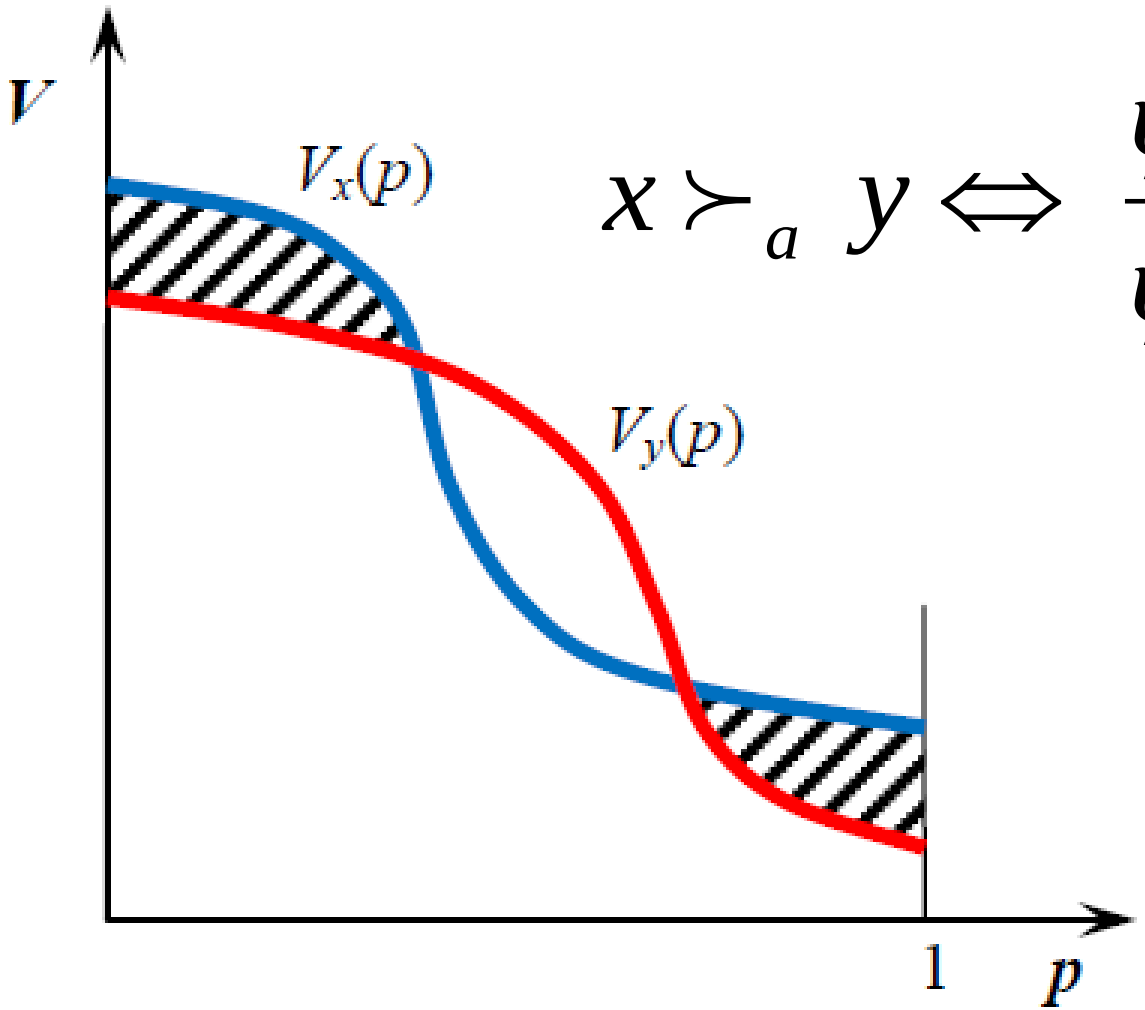
Пусть, например, $\psi(s_1, s_2) = 5, \quad \psi(s_2, s_1) = 3$

Решение системы: $\begin{cases} 3p_1 = 5p_2 \\ p_1 + p_2 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} p_1 = 5/8 \\ p_2 = 3/8 \end{cases}$

То есть: $s_1 \succ_{5/8} s_2$

Сравнительная ценность

$$\psi(x, y) = \int^{1} \max\left(V_x(p) - V_y(p), 0\right)\omega(p)dp$$

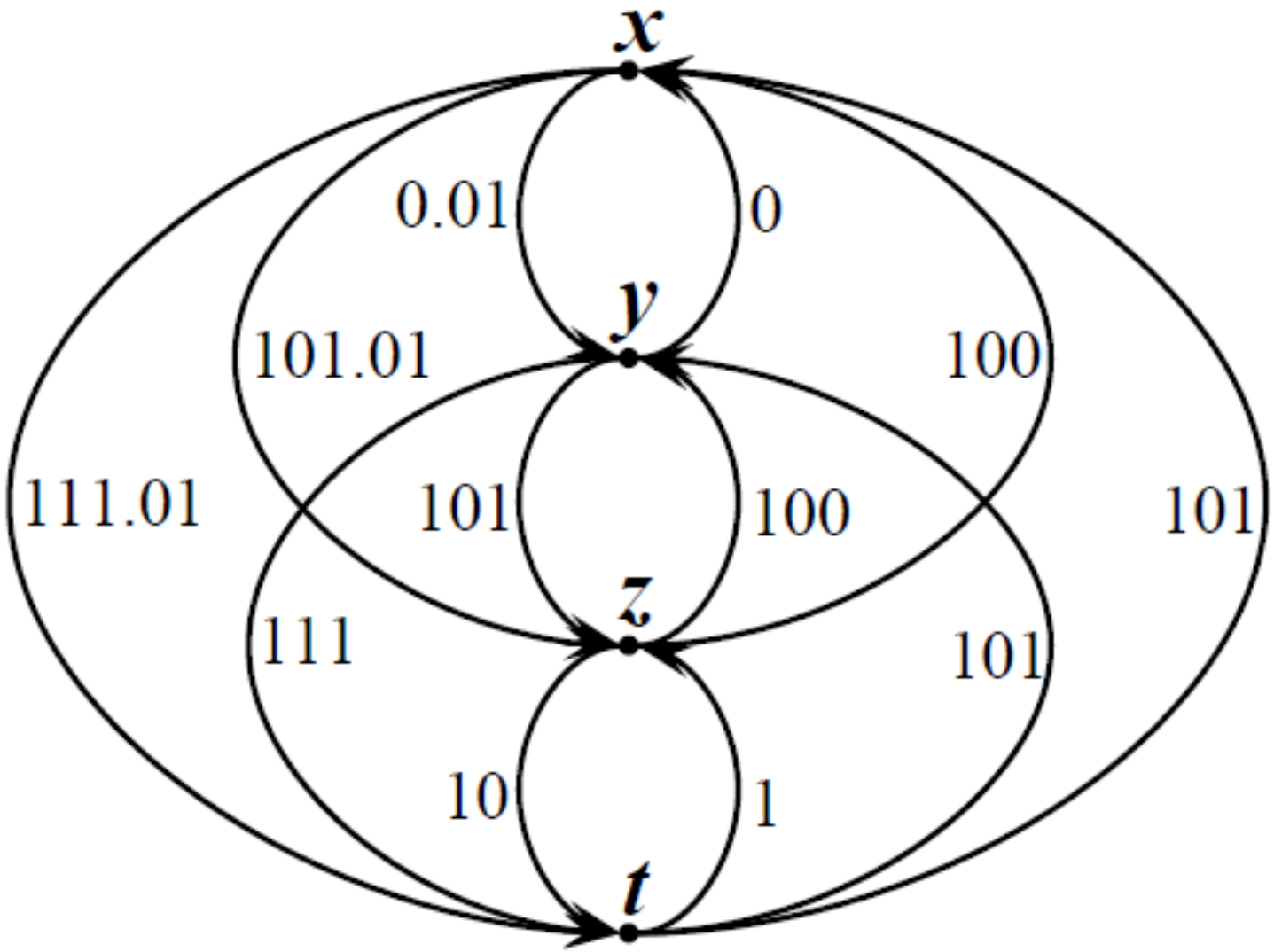


$$x \succ_a y \Leftrightarrow \frac{\psi(x, y)}{\psi(y, x)} = \frac{a}{1-a}$$

Модель СМСС на вероятностном расширении СРТ

Будет ли результат СМСС модели выбора альтернатива с наибольшей кумулятивной ценностью?

Модель СМСС на вероятностном расширении СРТ



$p_x = 0.25621$, $p_y = 0.25616$, $p_z = 0.26343$, $p_t = 0.22419$

Основные положения CPT

2

Tversky A., Kahneman D. (1992), Advances in prospect theory: cumulative representation of uncertainty.
Wakker P. , *Tversky A.* (1993), An axiomatization of Cumulative Prospect Theory.
Chateauneuf A. , *Wakker P.* (1993), An axiomatization of Cumulative Prospect Theory for decision under risk.
Wakker P. (2010), Prospect Theory for risk and ambiguity. Cambridge university press.
Fishburn P. (1978), A probabilistic expected utility theory of risky binary choices
Blavatskyy P. (2011), A Model of Probabilistic Choice Satisfying First-Order Stochastic Dominance
Зутлер И.А. (2011), Выбор последовательными сравнениями как непрерывное марковское блуждание, Автоматика и Телемеханика, №12.

Спасибо за внимание