

А. Л. Городенцев<sup>1</sup>

# Геометрическое введение в алгебраическую геометрию

Целью этих шести лекций является знакомство с проективной геометрией и классическими примерами проективных многообразий, а также с современным языком схем и простейшими геометрическими свойствами абстрактных алгебраических многообразий и морфизмов между ними. Курс задумывался как удобный трамплин для тех, кто собирается читать более продвинутые учебники, монографии и современные статьи по алгебраической геометрии, и одновременно — как дайджест этой науки, адресованный тем, кто специализируется в других областях.

Екатеринбург  
8 – 13 октября 2012

---

<sup>1</sup>ВШЭ, ИТЭФ, НМУ, e-mail:gorod@itep.ru, <http://wwwth.itep.ru/~gorod>

## Оглавление

Оглавление . . . . .	2
§1 Проективное пространство . . . . .	4
1.1 Соглашения об обозначениях . . . . .	4
1.2 Проективное пространство . . . . .	4
1.3 Задание фигур полиномиальными уравнениями . . . . .	8
1.4 Дополнительные подпространства и проекции . . . . .	13
1.5 Линейные проективные изоморфизмы . . . . .	14
1.6 Гомографии . . . . .	15
1.7 Двойное отношение . . . . .	18
Задачи для самостоятельного решения к §1 . . . . .	21
§2 Проективные квадрики . . . . .	26
2.1 Квадрики и билинейные формы . . . . .	26
2.2 Проективная двойственность . . . . .	29
2.3 Коники . . . . .	32
2.4 Квадратичные поверхности . . . . .	42
2.5 Подпространства, лежащие на квадриках . . . . .	43
2.6 Квадрика Плюккера и $\mathrm{Gr}(2, 4)$ . . . . .	45
Задачи для самостоятельного решения к §2 . . . . .	49
§3 Тензорные заморочки . . . . .	55
3.1 Тензорные произведения и многообразия Сегре . . . . .	55
3.2 Тензорная алгебра и свёртки . . . . .	59
3.3 Условия (косо)симметричности . . . . .	62
3.4 Поляризация коммутативных многочленов . . . . .	71
3.5 Поляризация грассмановых многочленов . . . . .	78
3.6 Многообразия Грассмана . . . . .	80
Задачи для самостоятельного решения к §3 . . . . .	86
§4 Аффинная алгебраическая геометрия . . . . .	91
4.1 Порция коммутативной алгебры . . . . .	91
4.2 Системы полиномиальных уравнений . . . . .	99
4.3 Аффинный алгебро-геометрический словарик . . . . .	102
4.4 Топология Зарисского и структурный пучок . . . . .	108
4.5 Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр . . . . .	111
Задачи для самостоятельного решения к §4 . . . . .	114
§5 Алгебраические многообразия . . . . .	118
5.1 Определение и примеры многообразий и морфизмов . . . . .	118
5.2 Геометрические схемы . . . . .	122
5.3 Замкнутые морфизмы . . . . .	125
5.4 Размерность . . . . .	127
5.5 Рабочий пример: прямые на поверхностях . . . . .	130
Задачи для самостоятельного решения к §5 . . . . .	135

§6 Векторные раслоения и линейные системы . . . . .	139
6.1 Векторные расслоения . . . . .	139
6.2 Группа Пикара . . . . .	142
6.3 Модули и пучки сечений . . . . .	145
6.4 Линейные системы сечений . . . . .	148
Задачи для самостоятельного решения к §6 . . . . .	151
Ответы и указания к некоторым упражнениям . . . . .	152

## §1. Проективное пространство

**1.1. Соглашения об обозначениях.** Всюду далее мы обозначаем через  $V$  векторное пространство над полем  $\mathbb{k}$ , а через  $V^*$  – двойственное пространство однородных линейных функций  $V \rightarrow \mathbb{k}$ . Значение функции  $\varphi \in V^*$  на векторе  $v \in V$  обозначается одним из трёх способов:

$$\varphi(v) = \langle \varphi, v \rangle = \text{ev}_v(\xi).$$

Через  $\{e_i\}$  и  $\{x_i\}$  по умолчанию обозначаются двойственные базисы пространств  $V$  и  $V^*$ :

$$\langle x_i, e_j \rangle = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j \\ 0 & \text{при } i \neq j \end{cases}$$

Через  $SV^* = \bigoplus_{d \geq 0} S^d V^*$  обозначается *симметрическая алгебра* пространства  $V^*$ , т. е. алгебра многочленов от  $x_i$ . Она градуирована подпространствами  $S^d V^* \subset SV^*$  однородных многочленов степени  $d$ , которые являются конечными линейными комбинациями одночленов вида  $\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_d \in V^*$ .

Через  $\mathbb{A}(V)$  мы обозначаем ассоциированное с  $V$  *аффинное точечное* пространство<sup>1</sup>.

**1.2. Проективное пространство.** С  $(n+1)$ -мерным векторным пространством  $V$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$  помимо  $(n+1)$ -мерного аффинного пространства  $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$  связано  $n$ -мерное *проективное пространство*  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ , точки которого – одномерные векторные подпространства в  $V$ , или, что то же самое, проходящие через начало координат аффинные прямые в  $\mathbb{A}(V)$ . Чтобы видеть их как «обычные» точки, внутрь  $\mathbb{A}(V)$  следует поместить экран – не содержащую начала координат аффинную гиперплоскость  $U_\xi \subset \mathbb{A}(V)$ , задаваемую неоднородным линейным уравнением  $\xi(x) = 1$ , где  $\xi \in V^*$  – любая ненулевая линейная форма на  $V$  (см. рис. 1◦1).

Упражнение 1.1. Убедитесь, что сопоставление

$$\xi \mapsto U_\xi$$

задаёт биекцию между ненулевыми ковекторами  $\xi \in V^*$  и не проходящими через начало координат аффинными гиперплоскостями в  $\mathbb{A}(V)$ .

Всякий такого рода экран  $U_\xi$  называется *аффинной картой* на  $\mathbb{P}(V)$ . В карте  $U_\xi$  видны все одномерные подпространства, порождённые векторами  $v \in V$  с  $\xi(v) \neq 0$ . Дополнение  $\mathbb{P}_n \setminus U_\xi$  состоит из одномерных подпространств  $n$ -мерного векторного подпространства  $\text{Ann}(\xi) = \{v \in V \mid \langle \xi, v \rangle = 0\} \subset V$  – проходящей через начало координат параллельной копии гиперплоскости  $U_\xi$ . Эти одномерные подпространства

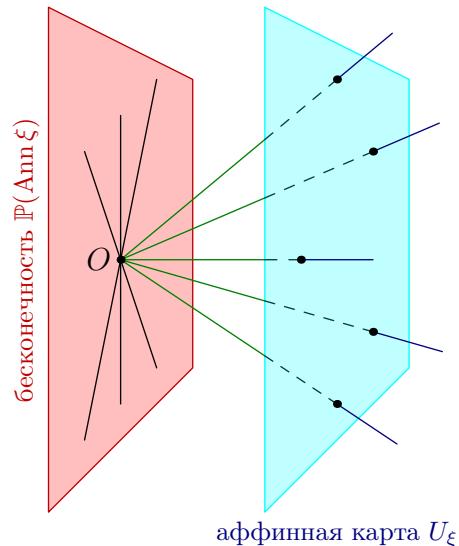


Рис. 1◦1. Проективный мир.

<sup>1</sup>его точки, по определению, взаимно однозначно соответствуют векторам из  $V$ , и их можно представлять себе как «концы» этих векторов, отложенных от отвечающей нулевому вектору  $\vec{0} \in V$  точки  $O \in \mathbb{A}(V)$

составляют  $(n - 1)$ -мерное проективное пространство  $\mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$ , которое называется бесконечно удалённой гиперплоскостью карты  $U_\xi$ . Точки  $\mathbb{P}(\text{Ann } \xi)$  можно воспринимать как *направления* в аффинной карте  $U_\xi$ .

Итак,  $n$ -мерное проективное пространство  $\mathbb{P}_n$  разбивается в объединение непересекающихся аффинных пространств всех промежуточных размерностей:

$$\mathbb{P}_n = U_\xi \sqcup \mathbb{P}(\text{Ann } \xi) = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{P}_{n-1} = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \mathbb{P}_{n-2} = \dots = \mathbb{A}^n \sqcup \mathbb{A}^{n-1} \sqcup \dots \sqcup \mathbb{A}^0$$

(где  $\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}_0$  — это одна точка).

**Упражнение 1.2.** Какое соотношение на  $q$  получится, если независимо подсчитать количество точек, из которых состоят левая и правая части этого разбиения над конечным полем из  $q$  элементов?

**1.2.1. Глобальные однородные координаты.** Фиксируем на векторном пространстве  $V$  координаты  $x_0, x_1, \dots, x_n$  относительно какого-нибудь базиса  $e_0, e_1, \dots, e_n$ . Ненулевые векторы  $v = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  и  $w = (y_0, y_1, \dots, y_n)$  задают одну и ту же точку  $p \in \mathbb{P}_n$ , если и только если их координаты пропорциональны. Это равносильно равенству отношений<sup>1</sup>  $x_\mu : x_\nu = y_\mu : y_\nu$  для всех  $0 \leq \mu \neq \nu \leq n$ . Таким образом, точкам  $p \in \mathbb{P}_n$  корректно соответствуют не сами координаты, а только отношения  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  между ними. Эти отношения называются *однородными координатами* точки  $p$  в базисе  $e_0, e_1, \dots, e_n$ .

**1.2.2. Локальные аффинные координаты.** Рассмотрим на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  аффинную карту  $U_\xi = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}(V) \mid \xi(x) = 1\}$ , отвечающую какому-нибудь ненулевому ковектору  $\xi \in V^*$ . Любые  $n$  ковекторов  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n \in V^*$ , таких что  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  образуют базис в  $V^*$ , задают внутри карты  $U_\xi$  *локальные аффинные координаты*. А именно, если векторы  $e_0, e_1, \dots, e_m \in V$  составляют двойственный к  $\xi, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$  базис, то точка  $e_0 \in U_\xi$  будет началом отсчёта аффинной координатной системы, а векторы  $e_1, e_2, \dots, e_n$  будут базисными векторами в векторном пространстве  $\text{Ann } \xi$ , с которым ассоциировано аффинное пространство  $U_\xi$ .

Чтобы вычислить локальные аффинные координаты точки  $p \in \mathbb{P}_n$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ , следует сначала выбрать в одномерном подпространстве, отвечающем точке  $p$ , вектор  $v = p/\xi(p) \in U_\xi$ , такой что  $\xi(v) = 1$ , а затем вычислить значения  $n$  линейных форм  $\xi_i$  на этом векторе. Отметим, что получающиеся таким образом значения локальных аффинных координат  $x_i(p) = \xi_i(v) = \xi_i(p)/\xi(p)$  (где  $1 \leq i \leq n$ ) *нелинейно* зависят от однородных координат точки  $p$ .

**Пример 1.1 (проективная прямая)**

$\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  покрывается двумя аффинными картами  $U_0 = U_{x_0}$  и  $U_1 = U_{x_1}$ , представляющими собою аффинные прямые с уравнениями  $x_0 = 1$  и  $x_1 = 1$  (см. рис. 1.1). Кarta  $U_0$  покрывает все точки  $\mathbb{P}_1$  кроме вертикальной координатной оси  $(0 : 1)$ , которая является единственной бесконечно удалённой точкой для карты  $U_0$ . Точка  $(x_0 : x_1)$  с  $x_0 \neq 0$  видна в карте  $U_1$  как  $(1 : \frac{x_1}{x_0})$  и функция  $t = x_1|_{U_0} = x_1/x_0$  может использоваться в качестве локальной аффинной координаты в этой карте. Кarta  $U_1$  покрывает все точки  $(x_0 : x_1) = (\frac{x_0}{x_1} : 1)$  с  $x_1 \neq 0$ , и функция  $s = x_0|_{U_1} = x_0/x_1$  годится в качестве локальной координаты в  $U_1$ . Единственной бесконечно удалённой точкой для карты  $U_1$  явля-

<sup>1</sup>где равенства вида  $0 : x = 0 : y$  и  $x : 0 = y : 0$  также допускаются

ется горизонтальная координатная ось  $(1 : 0)$ . Координаты  $s$  и  $t$  одной и той же точки  $(x_0 : x_1) \in \mathbb{P}_1$ , видимой сразу в обеих картах, связаны соотношением  $s = 1/t$ .

Упражнение 1.3. Убедитесь в этом.

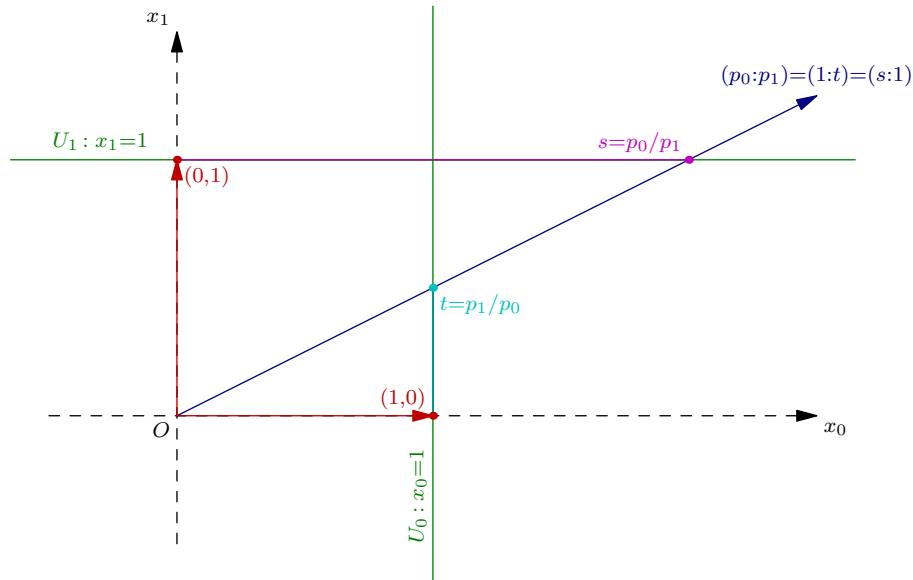


Рис. 1◦2. Стандартные карты на  $\mathbb{P}_1$ .

Поэтому  $\mathbb{P}_1$  можно воспринимать как результат склейки двух аффинных координатных прямых  $\mathbb{A}^1$  (одна — с координатой  $s$ , другая — с координатой  $t$ ) по дополнению до начала координат по следующему правилу: точка с координатой  $s$  на одной прямой приклеивается к точке с координатой  $t = 1/s$  на другой.

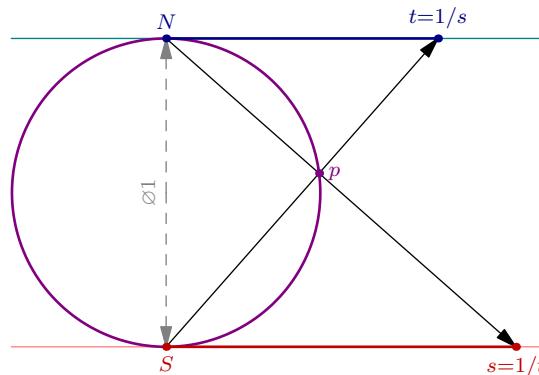


Рис. 1◦3.  $\mathbb{P}_1(\mathbb{R}) \simeq S^1$ .

Если основное поле  $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ , то в результате такой склейки мы получим окружность диаметра 1, картами на которой служат две диаметрально противоположные касательные прямые (см. рис. 1◦3), а отображения окружности на карты суть центральные проекции из точек, диаметрально противоположных к точке касания этой карты с окружностью.

Точно также при  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  в результате склейки двух экземпляров комплексной аффинной прямой  $\mathbb{A}^1 = \mathbb{C}$  по правилу  $s \leftrightarrow t = 1/s$  мы получим сферу диаметра 1, для которой наши карты являются диаметрально противоположными касательными плоскостями, а сопоставление точке сферы точки на карте задаётся центральной проекцией из диаметрально противоположного к точке касания «полюса» сферы, как на рис. 1◦4: если ориентации касательных плоскостей выбраны согласованным образом, как на рис. 1◦4, комплексные числа  $s$  и  $t$  будут иметь противоположные аргументы и — согласно рис. 1◦3 — обратные модули.

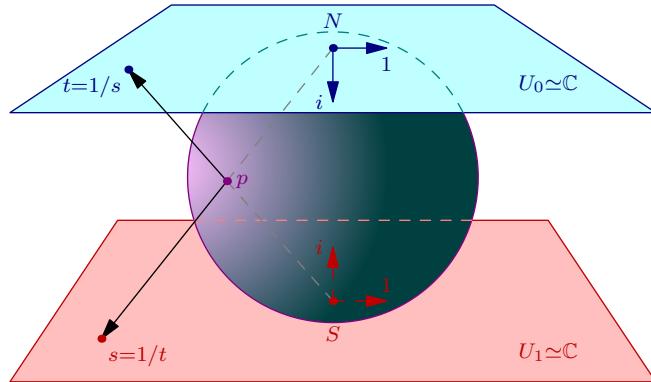


Рис. 1◦4.  $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \simeq S^2$ .

Проективно-геометрический взгляд на окружность как на прямую, к которой «добавили бесконечно удалённую точку» хорошо согласуется с представлениями о бесконечности, принятыми в математическом анализе: если мы занимаемся анализом на аффинной прямой с координатой  $t$ , то стремлению  $t$  к бесконечности отвечает стремление точки  $s = 1/t$  к нулю; при  $st \neq 0$  величины  $t$  и  $s = 1/t$  являются координатами одной и той же точки  $p = (s : 1) = (1 : t) \in \mathbb{P}_1$  и эта точка стремится при  $t \rightarrow \infty$  к точке  $(0 : 1) \in \mathbb{P}_1$ , которая не видна в карте с координатой  $t$  и является началом координат в карте с координатой  $s$  (обратите внимание, что эта картина одинаково осмыслена как над  $\mathbb{R}$ , так и над  $\mathbb{C}$ ).

**Упражнение 1.4.** Убедитесь, что вещественные проективные пространства  $\mathbb{RP}_2$  и  $\mathbb{RP}_3$  — это лента Мёбиуса с заклеенной диском границей<sup>1</sup> и группа  $SO(\mathbb{R}^3)$  собственных изометрий трёхмерного евклидова пространства.

**Пример 1.2 (стандартное аффинное покрытие  $\mathbb{P}_n$ )**

Набор из  $(n+1)$  аффинных карт  $U_\nu = U_{x_\nu}$ , задаваемых в  $\mathbb{A}^{n+1}$  уравнениями  $\{x_\nu = 1\}$ , называется *стандартным открытым покрытием*  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$ . Для каждого  $\nu = 0, 1, \dots, n$  в качестве стандартных локальных аффинных координат на  $U_\nu$  берутся  $n$  форм

$$t_i^{(\nu)} = x_i|_{U_\nu} = \frac{x_i}{x_\nu} \quad \text{с} \quad 0 \leq i \leq n, \quad i \neq \nu.$$

Таким образом, пространство  $\mathbb{P}_n$  можно представлять себе как результат склейки  $(n+1)$  различных копий  $U_0, U_1, \dots, U_n$  аффинного пространства  $\mathbb{A}^n$  по их фактическим пересечениям внутри  $\mathbb{P}_n$ . В однородных координатах на  $\mathbb{P}_n$  пересечение  $U_\mu \cap U_\nu$  состоит из

<sup>1</sup>напомним, что границей ленты Мёбиуса, так же как и границей круга, является окружность

всех таких  $x$ , у которых обе координаты  $x_\mu$  и  $x_\nu$  не обращаются в 0. В локальных аффинных координатах на  $U_\mu$  и  $U_\nu$  это подмножество задаётся, соответственно, неравенствами  $t_\nu^{(\mu)} \neq 0$  и  $t_\mu^{(\nu)} \neq 0$ . При этом точка  $t^{(\mu)} \in U_\mu$  склеивается с точкой  $t^{(\nu)} \in U_\nu$ , если и только если  $t_\nu^{(\mu)} = 1/t_\mu^{(\nu)}$  и  $t_i^{(\mu)} = t_i^{(\nu)}/t_\mu^{(\nu)}$  для  $i \neq \mu, \nu$ . Правые части этих равенств называются *функциями перехода* от локальных координат  $t^{(\nu)}$  к локальным координатам  $t^{(\mu)}$ .

**1.3. Задание фигур полиномиальными уравнениями.** Если в  $(n+1)$ -мерном пространстве  $V$  над полем  $\mathbb{k}$  зафиксированы координаты  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , то каждому многочлену  $f \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  можно сопоставить функцию

$$\tilde{f} : \mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k},$$

значение которой в точке  $p = (p_0, p_1, \dots, p_n)$  равно  $f(p_0, p_1, \dots, p_n)$ . Функции  $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$ , получающиеся таким способом, называются *полиномиальными функциями* на аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V)$ .

**Упражнение 1.5.** Покажите, что полиномиальные функции образуют подалгебру<sup>1</sup> в алгебре всех функций  $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$ , причём эта подалгебра не зависит от выбора базиса в  $V$ , использованного для её определения.

**Упражнение 1.6.** Покажите, что над конечным полем  $\mathbb{k}$  любая функция  $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$  может быть (многими способами) записана в виде  $\tilde{f}$  с разными  $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , и что, напротив, над бесконечным полем имеются неполиномиальные функции  $\mathbb{A}(V) \rightarrow \mathbb{k}$ , а равенство полиномиальных функций  $\tilde{f} = \tilde{g}$  влечёт равенство многочленов  $f = g$ .

Множество нулей многочлена  $f$  на аффинном пространстве  $\mathbb{A}(V)$  обозначается через

$$V(f) = \{p \in \mathbb{A}(V) \mid f(p) = 0\}$$

и называется *аффинной алгебраической гиперповерхностью* степени  $\deg f$ . Пересечения аффинных алгебраических гиперповерхностей, т. е. множества решений систем полиномиальных уравнений на координаты, называются *аффинными алгебраическими многообразиями*. Например, аффинными многообразиями являются аффинные подпространства — они задаются системами линейных уравнений.

На проективном пространстве  $\mathbb{P}(V)$  никакой отличный от константы многочлен от однородных координат не задаёт никакой функции. Тем не менее, для любого однородного многочлена  $f$  степени  $d$  множество его нулей

$$V(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V \mid f(v) = 0\}$$

является корректно определенным подмножеством в  $\mathbb{P}(V)$ , поскольку

$$f(v) = 0 \iff f(\lambda v) = \lambda^d f(v) = 0$$

Иначе говоря, аффинная гиперповерхность  $V(f) \subset \mathbb{A}(V)$  представляет собой конус, образованный проходящими через начало координат прямыми, которые являются точками

---

<sup>1</sup>т. е. подкольцо и одновременно векторное подпространство

проективного пространства. Множество этих точек  $V(f) \subset \mathbb{P}(V)$  называется *проективной алгебраической гиперповерхностью* степени  $\deg f$ . Пересечения проективных гиперповерхностей, т. е. множества ненулевых решений<sup>1</sup> систем однородных полиномиальных уравнений, называются *проективными алгебраическими многообразиями*.

Простейшими примерами проективных многообразий являются *проективные подпространства*  $\mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}(V)$ , ассоциированные с векторными подпространствами  $U \subset V$  — они задаются системами однородных линейных уравнений. Например, проективная прямая  $(ab)$  представляет собою проективизацию линейной оболочки векторов  $a$  и  $b$ , т. е. состоит из всевозможных точек вида  $\lambda a + \mu b$  и может быть задана системой линейных уравнений  $\xi(x) = 0$ , где  $\xi$  пробегает подпространство  $\text{Ann}(a) \cap \text{Ann}(b)$  (или любой базис в этом подпространстве). Отношение  $(\lambda : \mu)$  коэффициентов из разложения вектора  $\lambda a + \mu b \in (a, b)$  можно использовать в качестве внутренней однородной координаты на прямой  $(ab)$ .

**Упражнение 1.7.** Покажите, что для любых двух проективных подпространств  $K, L \subset \mathbb{P}_n$  выполняется неравенство  $\dim(K \cap L) \geq \dim K + \dim L - n$  (в частности, любые две прямые на  $\mathbb{P}_2$  пересекаются).

**Пример 1.3 (аффинные коники)**

Посмотрим как выглядит в различных аффинных картах плоская проективная кривая  $C$  степени 2, заданная в однородных координатах на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  уравнением

$$x_0^2 + x_1^2 = x_2^2 \quad (1-1)$$

В стандартной карте  $U_{x_1}$ , где  $x_1 = 1$ , в локальных координатах

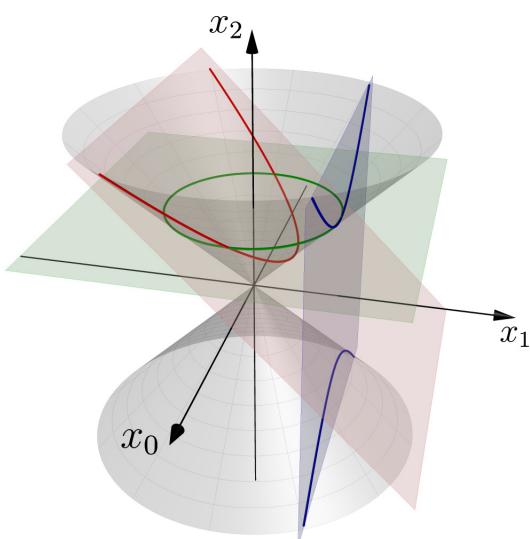


Рис. 1◦5. Конус.

$$\begin{aligned} t_0 &= x_0|_{U_{x_1}} = x_0/x_1 \\ t_2 &= x_2|_{U_{x_1}} = x_2/x_1 \end{aligned}$$

уравнение (1-1) превращается в уравнение гиперболы  $t_2^2 - t_0^2 = 1$ . В стандартной карте  $U_{x_2}$ , где  $x_2 = 1$ , с локальными координатами

$$\begin{aligned} t_0 &= x_0|_{U_{x_2}} = x_0/x_2 \\ t_1 &= x_1|_{U_{x_2}} = x_1/x_2 \end{aligned}$$

мы получим уравнение окружности  $t_0^2 + t_1^2 = 1$ . В карте  $U_{x_1+x_2}$ , где  $x_1 + x_2 = 1$ , в локальных аффинных координатах

$$\begin{aligned} t &= x_0|_{U_{x_1+x_2}} = x_0/(x_1 + x_2) \\ u &= (x_2 - x_1)|_{U_{x_1+x_2}} = (x_2 - x_1)/(x_2 + x_1) \end{aligned}$$

мы получим уравнение параболы  $t^2 = u$  (надо перенести  $x_1^2$  в (1-1) слева направо и поделить обе части на  $x_2 + x_1$ ).

<sup>1</sup>рассматриваемых с точностью до умножения на ненулевые константы

Таким образом, аффинные эллипс, гипербола и парабола суть изображения одной и той же проективной кривой (1-1) в различных картах. Вид  $C$  в карте  $U \subset \mathbb{P}_2$  определяется тем, как располагается по отношению к  $C$  бесконечно удалённая прямая этой карты: эллипс, парабола и гипербола возникают, соответственно, когда эта прямая не пересекается с  $C$ , касается  $C$  и пересекается с  $C$  в двух различных точках (см. рис. 1◦5).

**1.3.1. Проективное замыкание аффинной гиперповерхности**  $S = V(f) \subset \mathbb{A}^n$  это такая проективная гиперповерхность  $\bar{S} = V(\bar{f}) \subset \mathbb{P}_n$  той же степени, что и  $S$ , пересечение которой со стандартной аффинной картой  $U_0$  совпадает с  $X$ . Если (неоднородный) многочлен степени  $d$ , задающий  $S$  имеет вид

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_0 + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) + f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) + \dots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

где каждый  $f_i$  однороден степени  $i$ , то проективное замыкание  $\bar{S}$  задаётся однородным многочленом

$$\bar{f}(x_0, x_1, \dots, x_n) = f_0 \cdot x_0^d + f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot x_0^{d-1} + \dots + f_d(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

который получается из  $f$  умножением каждого монома на подходящую степень  $x_0$ , дополняющую степень всего монома до  $d$ , и превращается в  $f$  при  $x_0 = 1$ . Дополнение  $\bar{S} \setminus S = \bar{S} \cap U_0^{(\infty)}$  задаётся в однородных координатах  $(x_1 : x_2 : \dots : x_n)$  бесконечно удалённой гиперплоскости  $x_0 = 0$  уравнением  $f_d(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ . Таким образом, лежащие на бесконечности точки гиперповерхности  $\bar{S}$  — это в точности нули старшей однородной компоненты уравнения, задающего  $S$ . В аффинной геометрии их обычно называют *асимптотическими направлениями* гиперповерхности  $S$ .

Например проективным замыканием аффинной кубической кривой  $x_1 = x_2^3$  является проективная кривая  $x_0^2 x_1 = x_2^3$ , которая имеет ровно одну бесконечно удалённую точку  $(0 : 1 : 0)$  и выглядит в аффинной карте  $U_1$  как полукубическая парабола  $x_0^2 = x_2^3$  с остирем в этой точке.

**1.3.2. Пространство гиперповерхностей.** Однородные многочлены фиксированной степени  $d$  вместе с нулевым многочленом образуют конечномерное векторное подпространство, которое мы будем обозначать через

$$S^d V^* \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Поскольку пропорциональные уравнения задают одну и ту же гиперповерхность, гиперповерхности степени  $d$  являются точками проективного пространства  $\mathbb{P}(S^d V^*)$ , которое мы будем называть *пространством гиперповерхностей* степени  $d$  в  $\mathbb{P}(V)$ .

Упражнение 1.8. Найдите размерность пространства гиперповерхностей  $d$ -той степени в  $\mathbb{P}_n$ .

Поскольку уравнение  $f(p) = 0$  при фиксированном  $p \in \mathbb{P}(V)$  является *линейным уравнением* на  $f \in S^d V^*$ , гиперповерхности степени  $d$ , проходящие через заданную точку  $p$ , образуют проективную гиперплоскость в пространстве всех гиперповерхностей.

Проективные подпространства в пространстве гиперповерхностей называются *линейными системами* гиперповерхностей. По определению, всякая гиперповерхность из линейной системы, порождённой гиперповерхностями

$$V(f_1), V(f_2), \dots, V(f_m),$$

задаётся уравнением вида

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_m f_m = 0 ,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{k}$  – некоторые константы. В частности, любая гиперповерхность из такой системы обязательно содержит пересечение

$$V(f_1) \cap V(f_2) \cap \dots \cap V(f_m) .$$

По старинной традиции, одномерные и двумерные линейные системы также называются *пучками* и *связками* соответственно. Поскольку любая прямая в проективном пространстве имеет непустое пересечение с любой гиперплоскостью, всякий пучок гиперповерхностей (над любым полем!) всегда содержит гиперповерхность, проходящую через любую наперёд заданную точку.

**Пример 1.4** (наборы точек на  $\mathbb{P}_1$  и кривая Веронезе)

Фиксируем двумерное векторное пространство  $U \simeq \mathbb{k}^2$  с координатами  $x_0, x_1$  и рассмотрим проективную прямую  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ . Всякое конечное множество точек

$$p_1, p_2, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$$

(среди которых допускаются и совпадающие) является алгебраической гиперповерхностью, а именно, множеством нулей однородного многочлена  $d$ -той степени

$$f(x_0, x_1) = \prod_{v=1}^d \det(x, p_v) = \prod_{v=1}^d (p_{v,1}x_0 - p_{v,0}x_1) , \quad \text{где } p_v = (p_{v,0} : p_{v,1}) . \quad (1-2)$$

По аналогии с (неоднородными) многочленами от одной переменной, задающими конфигурации точек на аффинной прямой  $A_1$ , мы будем называть точки  $p_v \in \mathbb{P}_1$  *корнями* однородного многочлена  $f$  от переменных  $x_0, x_1$ . В этом смысле разложение (1-2) аналогично разложению многочлена от одной переменной на линейные множители, отвечающие корням. В частности, у однородного многочлена степени  $d$  от двух переменных имеется не более  $d$  различных корней на  $\mathbb{P}_1$ , а если поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто, то таких корней, с учётом кратностей<sup>1</sup>, будет ровно  $d$ . Таким образом, над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  все возможные  $d$ -точечные конфигурации на  $\mathbb{P}_1$  взаимно однозначно соответствуют точкам проективного пространства  $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$ , ассоциированного с  $(d+1)$ -мерным векторным пространством однородных многочленов степени  $d$  от  $x_0, x_1$ .

Конфигурации, в которых все  $d$  точек слипаются в одну, образуют (над любым полем!) алгебраическую кривую  $C_d \subset \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$ , которая называется *кривой Веронезе* степени  $d$  или *рациональной нормальной кривой*  $d$ -той степени. Эта кривая является образом *отображения Веронезе*

$$\mathbb{P}_1^\times = \mathbb{P}(U^*) \xrightarrow{\nu_d} \mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*) , \quad (1-3)$$

---

<sup>1</sup>под кратностью корня  $p$  понимается максимальная степень линейной формы  $\det(t, p)$ , на которую делится  $f$

переводящего линейную форму  $\varphi \in U^*$  (задающую одну точку  $p \in \mathbb{P}(U)$ ) в её  $d$ -ю степень  $\varphi^d \in S^d(U^*)$  (задающую  $d$ -кратную точку  $p$ ). Если записывать формы  $\varphi \in U^*$  и  $f \in S^d(U^*)$  в виде

$$\varphi(x) = a_0 x_0 + a_1 x_1 \quad \text{и} \quad f(x) = \sum_{\nu} a_{\nu} \cdot \binom{d}{\nu} x_0^{d-\nu} x_1^{\nu}$$

и использовать отношения коэффициентов  $(a_0 : a_1)$  и  $(a_0 : a_1 : \dots : a_d)$  в качестве однородных координат на  $\mathbb{P}_1^{\times} = \mathbb{P}(U^*)$  и на  $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U^*)$  соответственно, кривая Веронезе будет задаваться параметрическим уравнением

$$(a_0 : a_1) \longmapsto (a_0 : a_1 : \dots : a_d) = (a_0^d : a_0^{d-1} a_1 : a_0^{d-2} a_1^2 : \dots : a_1^d). \quad (1-4)$$

Таким образом,  $C_d$  состоит из всех точек  $(a_0 : a_1 : \dots : a_d) \in \mathbb{P}_d$ , координаты которых составляют геометрическую прогрессию. Это условие равносильно тому, что

$$\operatorname{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{d-2} & a_{d-1} \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{d-1} & a_d \end{pmatrix} = 1,$$

и может быть выражено системой однородных уравнений второй степени — обращением в нуль всех  $2 \times 2$ -миноров этой матрицы.

Например, кривая  $C_2 \subset \mathbb{P}_2$  образована всеми квадратными трёхчленами

$$a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2,$$

которые являются полными квадратами. Она задаётся известным из школы уравнением

$$D/4 = -\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 \end{pmatrix} = a_1^2 - a_0 a_2 = 0 \quad (1-5)$$

и допускает следующее параметрическое задание:

$$a_0 = a_0^2, \quad a_1 = a_0 a_1, \quad a_2 = a_1^2. \quad (1-6)$$

Пересечение кривой (1-4) с произвольной гиперплоскостью, заданной уравнением

$$A_0 a_0 + A_1 a_1 + \dots + A_d a_d = 0,$$

состоит из Веронезе-образов тех точек  $(a_0 : a_1) \in \mathbb{P}_1$ , в которых обращается в нуль однородный многочлен  $\sum A_{\nu} \cdot a_0^{d-\nu} a_1^{\nu}$  степени  $d$ . Поскольку таких точек не более  $d$ , никакие  $d+1$  точек кривой Веронезе не лежат в одной гиперплоскости. Отсюда вытекает, что при  $2 \leq m \leq d$  никакие  $m+1$  точек кривой  $C_d$  не лежат в одном  $(m-1)$ -мерном подпространстве. Отметим, что над алгебраически замкнутым полем пересечение кривой  $C_d$  с любой гиперплоскостью состоит в точности из  $d$  точек<sup>1</sup> — именно поэтому мы и сказали выше, что *степень* кривой  $C_d$  равна  $d$ .

---

<sup>1</sup>некоторые из которых могут совпадать друг с другом

**1.4. Дополнительные подпространства и проекции.** Проективные подпространства  $K = \mathbb{P}(U)$  и  $L = \mathbb{P}(W)$  пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  называются *дополнительными*, если  $K \cap L = \emptyset$  и  $\dim K + \dim L = n - 1$ . Например, любые две непересекающиеся прямые в  $\mathbb{P}_3$  дополнительны. На языке линейной алгебры дополнительность означает, что соответствующие векторные пространства  $U, W \subset V$  трансверсальны:  $U \cap W = \{0\}$ , и

$$\dim U + \dim W = \dim K + 1 + \dim L + 1 = (n + 1) = \dim V,$$

откуда  $V = U \oplus W$ . В этом случае любой вектор  $v \in V$  имеет единственное разложение  $v = u + w$  с  $u \in U$  и  $w \in W$ , причём обе компоненты этого разложения отличны от нуля, если  $v$  не содержится ни в  $U$ , ни в  $W$ . Это означает, что для любой точки  $p \notin K \sqcup L$  существует единственная прямая  $\ell = (q, r)$ , проходящая через  $p$  и пересекающая каждое из подпространств  $K, L$ .

Упражнение 1.9. Убедитесь в этом.

Для каждой пары дополнительных подпространств  $K, L \subset \mathbb{P}_n$  *проекция на  $L$  из  $K$*

$$\pi_L^K : (\mathbb{P}_n \setminus K) \rightarrow L,$$

тождественно действует на  $L$  и переводит каждую точку  $p \in \mathbb{P}_n \setminus (K \sqcup L)$  в точку пересечения с  $L$  единственной прямой, проходящей через  $p$  и пересекающей как  $K$ , так и  $L$ . В однородных координатах  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ , согласованных с разложением  $V = U \oplus W$  так, что  $(x_0 : x_1 : \dots : x_m)$  являются координатами в  $K$ , а  $(x_{m+1} : x_{m+2} : \dots : x_n)$  — в  $L$ , проекция  $\pi_L^K$  просто удаляет первые  $(m + 1)$  координат  $x_v$  с  $0 \leq v \leq m$ .

Пример 1.5 (проектирование коники на прямую)

Спроектируем гладкую конику  $C$  из прим. 1.3, заданную уравнением  $x_0^2 + x_1^2 = x_2^2$ , из точки  $p = (1 : 0 : 1) \in C$  на прямую  $L$ , заданную уравнением  $x_0 = 0$ . В стандартной аффинной карте  $U_2$ , где  $x_2 = 1$ , эта проекция

$\pi_L^p : C \rightarrow L$  выглядит как на рис. 1◦6. Она является *бирациональной биекцией* между  $L$  и  $C$  в том смысле, что однородные координаты соответственных точек  $q = (q_0 : q_1 : q_2) \in C$  и  $t = (0 : t_1 : t_2) = \pi_L^p(q) \in L$  суть *рациональные* алгебраические функции друг друга:

$$(t_1 : t_2) = (q_1 : (q_2 - q_0)) \\ (q_0 : q_1 : q_2) = \\ = ((t_1^2 - t_2^2) : 2t_1t_2 : (t_1^2 + t_2^2)) \quad (1-7)$$

Упражнение 1.10. Проверьте эти формулы и обратите внимание, что когда  $(t_1, t_2)$  пробегает  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  вторая из них перечисляет все пифагоровы тройки<sup>1</sup>  $(q_0 : q_1 : q_2)$ .

а само отображение  $\pi_L^p : C \rightarrow L$  взаимно однозначно, если доопределить его в точке  $p$  так, чтобы она переходила в точку пересечения прямой  $L$  и касательной к  $C$  в точке  $p$  прямой

<sup>1</sup>т. е. все целые решения уравнения Пифагора  $q_0^2 + q_1^2 = q_2^2$

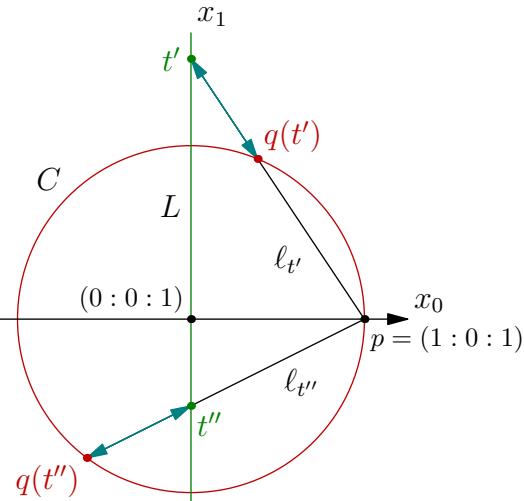


Рис. 1◦6. Проектирование коники.

$x_0 = x_2$  (на рис. 1.6 это пересечение происходит в бесконечной точке  $t = (0 : 1 : 0)$ ). В самом деле, каждая проходящая через  $p$  прямая  $\ell_t = (pt)$ , за исключением касательной, пересекает  $C$  ещё ровно в одной точке  $q = q(t)$ , отличной от  $p$ , и координаты этой точки  $q$  рационально выражаются через коэффициенты уравнения прямой  $\ell_t$ , являющиеся рациональными функциями от  $t$ , и координаты точки  $p$ .

Отметим, что коника  $C$  переводится в конику Веронезе  $a_1^2 = a_0 a_2$  из (1-5) обратимой линейной заменой координат

$$\begin{cases} a_0 = x_2 + x_0 \\ a_1 = x_1 \\ a_2 = x_2 - x_0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0 = (a_0 - a_2)/2 \\ x_1 = a_1 \\ x_0 = (a_0 + a_2)/2 \end{cases}$$

и параметризация (1-6) кривой Веронезе при этой замене координат превращается в точности в параметризацию (1-7).

**1.5. Линейные проективные изоморфизмы.** Всякий линейный изоморфизм векторных пространств  $F : U \rightarrow W$  корректно определяет биекцию  $\bar{F} : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ , которая называется *проективным линейным преобразованием* или *проективным изоморфизмом*.

Упражнение 1.11. Рассмотрим две гиперплоскости  $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  и точку  $p \notin L_1 \cup L_2$ .

Убедитесь, что проекция из  $p$  задаёт проективный изоморфизм  $\gamma_p : L_1 \rightarrow L_2$ .

### Лемма 1.1

Для любых двух упорядоченных наборов из  $(n+2)$  точек

$$\{p_0, p_1, \dots, p_{n+1}\} \in \mathbb{P}(U), \quad \{q_0, q_1, \dots, q_{n+1}\} \in \mathbb{P}(W),$$

в каждом из которых никакие  $(n+1)$  точек не лежат в одной гиперплоскости, существует единственный с точностью до пропорциональности линейный изоморфизм  $F : U \rightarrow W$ , такой что  $\bar{F}(p_i) = q_i$  при всех  $i$ .

Доказательство. Зафиксируем некоторые векторы  $u_i$  и  $w_i$ , представляющие точки  $p_i$  и  $q_i$ , и возьмём  $\{u_0, u_1, \dots, u_n\}$  и  $\{w_0, w_1, \dots, w_n\}$  в качестве базисов в  $U$  и  $W$ . Оператор  $F : U \rightarrow W$  тогда и только тогда переводит точку  $p_i$  в точку  $q_i$ , когда  $F(u_i) = \lambda_i w_i$  для некоторых ненулевых  $\lambda_i \in \mathbb{k}$ . В частности, для того, чтобы точки  $p_0, p_1, \dots, p_n$  переводились преобразованием  $\bar{F}$  в точки  $q_0, q_1, \dots, q_n$ , необходимо и достаточно, чтобы оператор  $F$  в выбранных нами базисах имел диагональную матрицу с произвольными ненулевыми константами  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  по главной диагонали. Заметим теперь, что в разложении

$$u_{n+1} = x_0 u_0 + x_1 u_1 + \dots + x_n u_n$$

все координаты  $x_i$  отличны от нуля, поскольку в противном случае  $n+1$  точка<sup>1</sup> оказались бы в одной гиперплоскости, заданной условием обращения этой координаты в нуль. Если аналогичным образом разложить вектор  $w_{n+1} = y_0 w_0 + y_1 w_1 + \dots + y_n w_n$  и записать равенство  $F(u_{n+1}) = \lambda_{n+1} w_{n+1}$  в виде системы равенств на координаты, мы получим на константы  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$  соотношения  $y_i = \lambda_{n+1} \lambda_i x_i$  (при всех  $0 \leq i \leq n$ ), из которых

---

<sup>1</sup>а именно,  $p_{n+1}$  и все  $p_i$  с номерами, отличными от номера занулившейся координаты вектора  $u_{n+1}$

$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = \lambda_{n+1}^{-1} \cdot (y_1/x_1, y_2/x_2, \dots, y_n/x_n)$ . Таким образом, матрица оператора  $F$  определена однозначно с точностью до постоянного множителя  $\lambda_{n+1}^{-1} \neq 0$ .  $\square$

Следствие 1.1

Две матрицы тогда и только тогда задают одинаковые проективные изоморфизмы, когда они пропорциональны.  $\square$

**1.5.1. Линейная проективная группа.** Согласно лем. 1.1 линейные проективные автоморфизмы пространства  $\mathbb{P}(V)$  образуют группу, изоморфную фактор группе полной линейной группы  $GL(V)$  по подгруппе гомотетий  $H = \{\lambda \cdot \text{Id} \mid \lambda \neq 0\} \subset GL(V)$ . Эта фактор группа обозначается  $PGL(V) = GL(V)/H$  и называется *проективной линейной группой*. Если при помощи выбора базиса отождествить линейную группу  $GL(V)$  с группой невырожденных матриц  $GL_{n+1}$ , проективная группа  $PGL(V)$  отождествляется с группой  $PGL_{n+1}$  невырожденных матриц, рассматриваемых с точностью до пропорциональности.

**1.5.2. Дробно-линейные преобразования прямой.** Группа  $PGL_2(\mathbb{k})$  состоит из классов пропорциональности матриц  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  с  $ad - bc \neq 0$ . Она действует на  $\mathbb{P}_1$  по правилу

$$(x_0 : x_1) \xrightarrow{\bar{A}} ((ax_0 + bx_1) : (cx_0 + dx_1)).$$

В стандартной аффинной карте  $U_1 \simeq \mathbb{A}^1$  с аффинной координатой  $t = x_0/x_1$ , это действие имеет вид дробно линейного преобразования

$$t \mapsto \frac{at + b}{ct + d}$$

Единственное дробно линейное преобразование, переводящее три заданных различных точки  $q, r, s$  в  $\infty, 0, 1$ , очевидно, таково:

$$t \mapsto \frac{t - r}{t - q} \cdot \frac{s - r}{s - q} \tag{1-8}$$

**1.6. Гомографии.** Многие геометрические задачи так или иначе связаны с такими соответствиями между точками одной проективной прямой и точками другой проективной прямой, что координаты соответственных точек *алгебраически* выражаются друг через друга. Простейшими такими соответствиями являются бирациональные<sup>1</sup> биекции, или *гомографии*.

Лемма 1.2

Если над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  имеется биективное отображение

$$\varphi : \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\} \simeq \mathbb{P}_1 \setminus \{\text{конечное множество}\},$$

которое в некоторой аффинной карте с аффинной координатой  $t$  может быть задано формулой

$$t \mapsto \varphi(t) = g(t)/h(t), \quad \text{где } g, h \in \mathbb{k}[t], \tag{1-9}$$

то  $\varphi$  является дробно линейным изоморфизмом (и, в частности, однозначно продолжается на всю прямую).

---

<sup>1</sup>соответствие между точками называется *бирациональным*, если координаты соответственных точек являются рациональными функциями друг друга

Доказательство. В однородных координатах  $(x_0 : x_1)$ , для которых  $t = x_0/x_1$ , формула (1-9), задающая отображение  $\varphi$ , может быть переписана<sup>1</sup> в виде

$$\varphi : (x_0 : x_1) \mapsto (F(x_0, x_1) : G(x_0, x_1)) ,$$

где  $F$  и  $G$  не пропорциональные друг другу однородные многочлены от  $(x_0, x_1)$  одинаковой степени  $d = \deg F = \deg G$ . Обозначим проективизацию пространства однородных многочленов степени  $d$  от  $(x_0, x_1)$  через  $\mathbb{P}_d$ . Если точка  $\vartheta = (\vartheta_0 : \vartheta_1) \in \mathbb{P}_1$  имеет при отображении  $\varphi$  ровно один прообраз, то однородный многочлен  $\vartheta_1 \cdot F(x_0, x_1) - \vartheta_0 \cdot G(x_0, x_1)$  имеет на  $\mathbb{P}_1$  ровно один корень  $x = \varphi^{-1}(\vartheta)$ , который над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  автоматически является  $d$ -кратным. Поэтому отвечающая многочлену  $\vartheta_1 F - \vartheta_0 G$  точка прямой  $(FG) \subset \mathbb{P}_d$  лежит в на кривой Веронезе  $C_d \subset \mathbb{P}_d$  из прим. 1.4 на стр. 11. Поскольку поле  $\mathbb{k}$  бесконечно, а отображение  $\varphi$  биективно вне конечного множества точек, кривая  $C_d$  и прямая  $(F, G)$  имеют в  $\mathbb{P}_d$  бесконечно много точек пересечения. Но в прим. 1.4 мы видели, что при  $d \geq 2$  никакие три точки кривой  $C_d$  не лежат на одной прямой. Поэтому  $d = 1$  и  $\varphi \in \mathrm{PGL}_2(\mathbb{k})$ .  $\square$

#### Пример 1.6 (перспективы)

Важным примером гомографии является центральная проекция прямой  $\ell_1 \subset \mathbb{P}_2$  на другую прямую  $\ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  из произвольной точки  $o \notin \ell_1 \cup \ell_2$  (см. рис. 1◦7). Мы будем называть такую гомографию *перспективой* с центром  $o$  и обозначать  $o : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$ .

**Упражнение 1.12.** Убедитесь, что перспектива в самом деле является гомографией (т. е. биективна и рациональна).

Гомография  $\varphi : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  является перспективой тогда и только тогда, когда она переводит точку пересечения прямых  $\ell_1 \cap \ell_2$  в себя. В самом деле, беря в качестве  $o$  точку пересечения прямых  $(a, \varphi(a))$  и  $(b, \varphi(b))$ , соединяющих произвольные точки  $a, b \in \ell_1 \setminus \ell_2$  с их образами  $\varphi(a), \varphi(b) \in \ell_2$  (см. рис. 1◦7), видим, что перспектива  $o : \ell_1 \xrightarrow{\sim} \ell_2$  действует на три точки  $a, b$  и  $\ell_1 \cap \ell_2$  также, как и  $\varphi$ , и, стало быть, совпадает с  $\varphi$ , т. к. дробно линейный изоморфизм однозначно определяется своим действием на три различных точки.

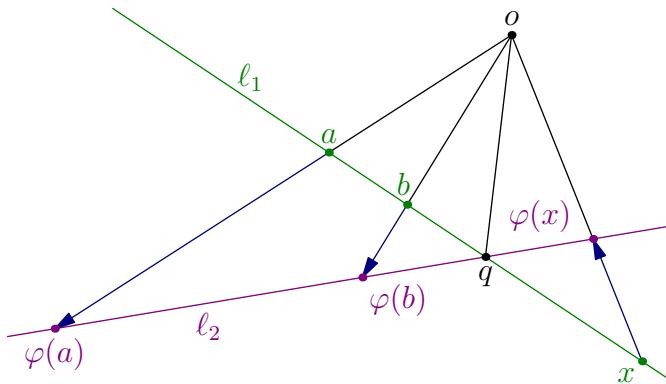


Рис. 1◦7. Перспектива.

<sup>1</sup>возможно, после некоторой модификации конечного множества, на котором отображение  $\varphi$  не определено

## Предложение 1.1

Пусть прямые  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  пересекаются в точке  $q = \ell_1 \cap \ell_2$ . Если гомография  $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$  является композицией двух перспектив:

$$\varphi = (b_1 : \ell \rightarrow \ell_2) \circ (b_2 : \ell_1 \rightarrow \ell) , \quad \text{где } b_1 \in \ell_1, b_2 \in \ell_2 , \quad (1-10)$$

то  $b_2 = \varphi(b_1)$ , а прямая  $\ell$  проходит через точки  $\varphi(q)$  и  $\varphi^{-1}(q)$ . Наоборот, любая гомография  $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$  представляется в виде композиции (1-10), где точка  $b_1 \in \ell_1$  произвольна,  $b_2 = \varphi(b_1)$ , а прямая  $\ell$  не зависит от выбора  $b_1 \in \ell_1$ .

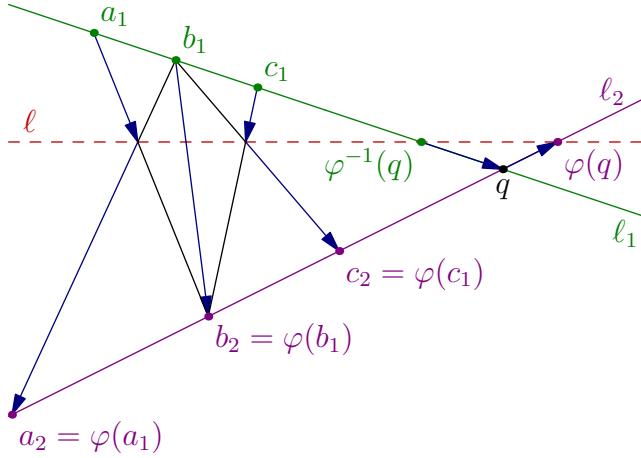


Рис. 1◦8. Перекрёстная ось.

Доказательство. Первое утверждение очевидно из рис. 1◦8. Для доказательства второго рассмотрим произвольные три различных и отличных от  $q = \ell_1 \cap \ell_2$  точки  $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$  и обозначим через  $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$  их образы относительно  $\varphi$ . Возьмём в качестве  $\ell$  прямую, проходящую через точки пересечения пар «перекрёстных» прямых

$$(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2) \quad \text{и} \quad (c_1 b_2) \cap (b_1, c_2) .$$

Из рис. 1◦8 видно, что композиция из правой части (1-10) переводит  $a_1, b_1, c_1$  соответственно в  $a_2, b_2, c_2$  и, стало быть, совпадает с  $\varphi$ .

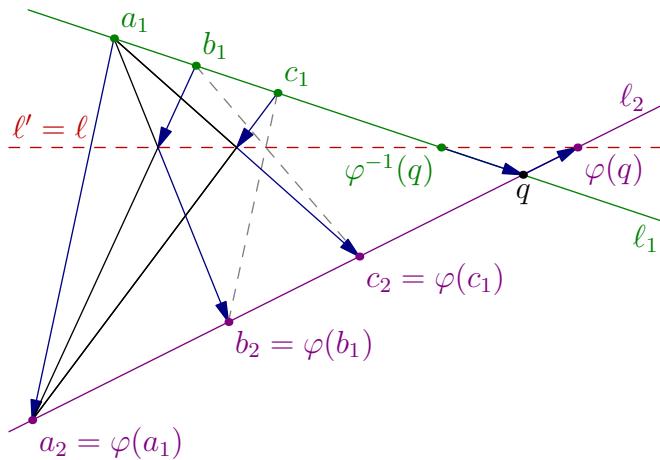


Рис. 1◦9. Равенство  $\ell' = \ell$ .

Чтобы убедиться, что прямая  $\ell$  не зависит от  $b_1$  повторим предыдущее рассуждение, заменив в нём тройку  $a_1, b_1, c_1$  — тройкой  $c_1, a_1, b_1$  (см. рис. 1♦9). Получим разложение  $\varphi$  в композицию перспектив  $\varphi = (a_1 : \ell' \rightarrow \ell_2) \circ (a_2 : \ell' \rightarrow \ell)$ , в котором прямая  $\ell'$  проходит через точки пересечения пар перекрёстных прямых  $(a_1 c_2) \cap (c_1, a_2)$  и  $(b_1 a_2) \cap (a_1, b_2)$ . Обе прямые  $\ell$  и  $\ell'$  проходят через точку  $(b_1 a_2) \cap (a_1, b_2)$ , а также — по первому утверждению — через точки<sup>1</sup>  $\varphi(q)$  и  $\varphi^{-1}(q)$ . Поэтому  $\ell = \ell'$ .  $\square$

**Следствие 1.2 (перекрёстная ось гомографии)**

Для любой гомографии  $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$  ГМТ пересечений перекрёстных прямых

$$(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x)) ,$$

где  $x \neq y$  независимо пробегают  $\ell_1$ , представляет собою прямую, проходящую через точки  $\varphi(\ell_1 \cap \ell_2)$  и  $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$  (эта прямая называется *перекрёстной осью*<sup>2</sup> гомографии  $\varphi$ ).

**Замечание 1.1.** Обратите внимание, что предл. 1.1 и сл. 1.2 справедливы и в случае, когда точки  $\varphi(\ell_1 \cap \ell_2)$  и  $\varphi^{-1}(\ell_1 \cap \ell_2)$  совпадают друг с другом и с точкой  $\ell_1 \cap \ell_2$ , так что сами по себе они не определяют перекрёстную ось  $\ell$  однозначно.

**Упражнение 1.13.** На  $\mathbb{P}_2$  даны две прямые  $\ell_1$  и  $\ell_2$ . Гомография  $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$  переводит три данные точки  $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$  в три данные точки  $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ . Одной линейкой постройте образ  $\varphi(x)$  произвольно заданной точки  $x \in \ell_1$ .

**1.7. Двойное отношение.** Рассмотрим проективную прямую  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  со стандартными однородными координатами  $(x_0 : x_1)$  и аффинной координатой  $x = x_0/x_1$ . Отметим, что разность аффинных координат  $a = a_0/a_1$  и  $b = b_0/b_1$  любых двух точек  $a = (a_0 : a_1)$  и  $b = (b_0 : b_1)$  с точностью до множителя совпадает с определителем их однородных координат:

$$a - b = \frac{a_0}{a_1} - \frac{b_0}{b_1} = \frac{a_0 b_1 - a_1 b_0}{a_1 b_1} = \frac{\det(a, b)}{a_1 b_1} .$$

**Определение 1.1**

Для четырёх различных точек  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_1$  величина

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = \frac{(p_1 - p_3)(p_2 - p_4)}{(p_1 - p_4)(p_2 - p_3)} = \frac{\det(p_1, p_3) \cdot \det(p_2, p_4)}{\det(p_1, p_4) \cdot \det(p_2, p_3)} . \quad (1-11)$$

называется *двойным отношением*<sup>3</sup> этих четырёх точек.

**1.7.1. Геометрический смысл двойного отношения.** Согласно (1-8) двойное отношение  $[p_1, p_2, p_3, p_4] \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  представляет собою образ точки  $p_4$  при единственном дробно линейном автоморфизме  $\mathbb{P}_1$ , переводящем точки  $p_1, p_2, p_3$  в точки  $\infty, 0, 1$  соответственно. Отсюда сразу следует, что двойное отношение четырёх различных точек

<sup>1</sup>совпадающие друг с другом, если  $\varphi$  перспектива

<sup>2</sup>по-английски *cross-axis*

<sup>3</sup>по-английски *cross-ratio*

может принимать любые значения кроме  $\infty$ , 0 и 1 и что две упорядоченных четвёрки точек тогда и только тогда переводятся одна в другую дробно линейным преобразованием прямой, когда их двойные отношения одинаковы.

Упражнение 1.14. Докажите последнее утверждение.

Поскольку замена однородных координат является именно таким преобразованием, мы заключаем, что правая часть равенства (1-11) не зависит от выбора однородных координат, а средняя часть (содержащая разности аффинных координат точек) не зависит ни от выбора аффинной карты, ни от выбора локальной аффинной координаты в ней (при условии, что карта содержит все четыре точки, т. е. значения  $p_1, p_2, p_3, p_4$  конечны).

Упражнение 1.15. Убедитесь в этом прямым вычислением.

**1.7.2. Действие симметрической группы  $S_4$ .** Выясним, как изменяется двойное отношение при перестановках точек. Из формулы (1-11) очевидно, что нормальная подгруппа Клейна  $D_2 \subset S_4$ , состоящая из тождественного преобразования и трёх пар независимых транспозиций<sup>1</sup>, не меняет двойного отношения:

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_2, p_1] \quad (1-12)$$

Поэтому действие группы перестановок  $S_4$  на множестве значений двойного отношения данных четырёх точек пропускается через действие фактор группы<sup>2</sup>

$$S_4/D_2 = S_3,$$

которая кроме класса тождественного отображения содержит ещё три отражения (классы транспозиций  $(1, 2), (1, 3)$  и  $(1, 4)$ ) и два поворота (классы циклов  $(1, 2, 3)$  и  $(1, 3, 2)$ ). Если обозначить значение двойных отношений (1-12) через  $\vartheta$ , из (1-11) получаем

$$\begin{aligned} [p_1, p_2, p_3, p_4] &= [p_2, p_1, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_2, p_1] = [p_4, p_3, p_2, p_1] = \vartheta \\ [p_2, p_1, p_3, p_4] &= [p_1, p_2, p_4, p_3] = [p_3, p_4, p_1, p_2] = [p_4, p_3, p_1, p_2] = 1/\vartheta \\ [p_3, p_2, p_1, p_4] &= [p_2, p_3, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_2, p_3] = [p_4, p_1, p_2, p_3] = \vartheta/(\vartheta - 1) \\ [p_4, p_2, p_3, p_1] &= [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_3, p_1, p_2, p_4] = [p_1, p_3, p_2, p_4] = 1 - \vartheta \\ [p_2, p_3, p_1, p_4] &= [p_3, p_2, p_4, p_1] = [p_1, p_4, p_3, p_2] = [p_4, p_1, p_3, p_2] = (\vartheta - 1)/\vartheta \\ [p_3, p_1, p_2, p_4] &= [p_1, p_3, p_4, p_2] = [p_2, p_4, p_1, p_3] = [p_4, p_2, p_1, p_3] = 1/(1 - \vartheta). \end{aligned} \quad (1-13)$$

Упражнение 1.16. Проверьте это.

<sup>1</sup>напомним, что если отождествить симметрическую группу  $S_4$  с собственной группой куба, переставляющей 4 его диагонали, то возникает сюръективный гомоморфизм  $S_4 \twoheadrightarrow S_3$ , задаваемый действием группы куба на трёх отрезках, соединяющих центры противоположных граней; ядром этого гомоморфизма является группа двуугольника  $D_2$ , или группа Клейна, состоящая из тождественного отображения и трёх поворотов на  $180^\circ$  вокруг осей, проходящих через центры противоположных граней куба

<sup>2</sup>т. е. группы треугольника, ср. с зад. 1.14 и зад. 1.11 ниже

**1.7.3. Специальные чётвёрки точек.** Из формул (1-13) видно, что имеются три специальных значения  $\vartheta = -1, 2, 1/2$ , которые удовлетворяют соотношениям

$$\vartheta = \frac{1}{\vartheta}, \quad \vartheta = \frac{\vartheta}{\vartheta - 1} \quad \text{и} \quad \vartheta = 1 - \vartheta$$

и, соответственно, не меняются при транспозициях (1, 2), (1, 3) и (1, 4) и циклически переставляются двумя поворотами, а также два специальных значения  $\vartheta$ , которые равны корням уравнения<sup>1</sup>

$$\vartheta^2 - \vartheta + 1 = 0 \iff \vartheta = \frac{\vartheta - 1}{\vartheta} \iff \vartheta = \frac{1}{1 - \vartheta}$$

и не меняются при поворотах, но переставляются между собой при транспозициях. Мы будем называть чётвёрки точек с такими двойными отношениями *специальными*, поскольку при перестановках таких точек двойное отношение пробегает, соответственно, три и два различных значения. Если же чётвёрка точек не специальная, то при перестановках точек в такой чётвёрке все 6 значений (1-13) будут различны.

**1.7.4. Гармонические пары точек.** Четыре точки  $\{a, b; c, d\} \in \mathbb{P}_1$  называются *гармоническими*, если двойное отношение

$$[a, b; c, d] = -1. \quad (1-14)$$

Геометрически это условие означает, что в аффинной карте, для которой точка  $a$  является бесконечностью, точка  $b$  является центром тяжести точек  $c$  и  $d$ . При его выполнении говорят также, что пары точек  $\{a, b\}$  и  $\{c, d\}$  гармоничны по отношению друг к другу. Алгебраически, гармоничность двух пар точек по № 1.7.3 равносильна тому, что их двойное отношение не меняется при перестановке точек в одной из этих пар, а также тому, что двойное отношение не меняется при перестановке пар между собой<sup>2</sup>. Таким образом, гармоничность — это *симметричное отношение на множестве неупорядоченных пар точек на  $\mathbb{P}_1$* .

Пример 1.7 (четырёхвершинник)

С каждой чётвёркой точек  $a, b, c, d \in \mathbb{P}_2$ , никакие 3 из которых не коллинеарны, связана конфигурация из трёх пар прямых, соединяющих пары данных точек (см. рис. 1◦10) и называемых *сторонами* четырёхвершинника  $abcd$ . Пусть эти прямые пересекаются в точках

$$x = (ab) \cap (cd), \quad y = (ac) \cap (bd), \quad z = (ad) \cap (bc). \quad (1-15)$$

Покажем, что в каждом из трёх пучков прямых с центрами в точках  $x, y, z$  пара сторон четырёхвершинника гармонична паре сторон треугольника  $xyz$ . Для этого запараметризуем пучок всех проходящих через точку  $x$  прямых точками прямой  $(ad)$  или точками прямой  $(bc)$  и проверим, что прямая  $(xy)$  пересекает прямые  $(ad)$  и  $(bc)$  по таким

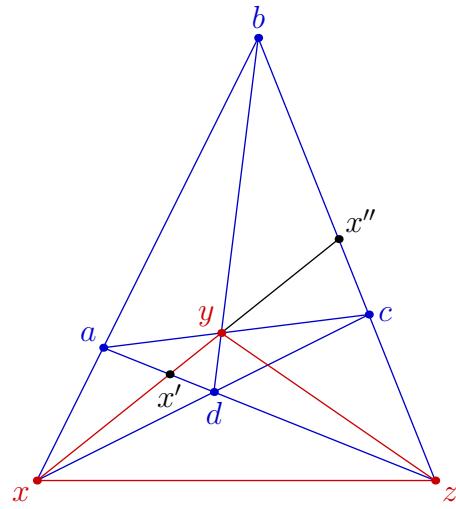


Рис. 1◦10. Четырёхвершинник.

<sup>1</sup>т. е. отличным от  $-1$  кубическим корням из единицы в поле  $\mathbb{k}$

<sup>2</sup>см. первые две формулы в (1-13)

точкам  $x'$ ,  $x''$ , что  $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = -1$ . В самом деле, т. к. центральные проекции из  $x$  и из  $y$  являются дробно линейными изоморфизмами между прямыми  $(ad)$  и  $(bc)$ , мы имеем следующие равенства двойных отношений соответственных точек:  $[a, d, z, x'] = [b, c, z, x''] = [d, a, z, x']$ . Коль скоро при перестановке первых двух точек двойное отношение не поменялось, оно равно  $-1$ , что и требовалось.

### Задачи для самостоятельного решения к §1

**Задача 1.1.** При каком условии на три прямые  $\ell_0, \ell_1, \ell_2$  на проективной плоскости  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  в пространстве  $V$  можно выбрать базис так, чтобы каждая прямая  $\ell_i$  была бесконечно удалённой для стандартной аффинной карты  $U_i = \{(x_0 : x_1 : x_2) \mid x_i \neq 0\}$ ?

**Задача 1.2.** Укажите три точки  $A, B, C \in \mathbb{P}_2$  так, чтобы точки

$$A' = (1 : 0 : 0), \quad B' = (0 : 1 : 0) \quad \text{и} \quad C' = (0 : 0 : 1)$$

оказались лежащими, соответственно, на прямых  $(BC)$ ,  $(CA)$  и  $(AB)$ , а прямые  $(AA')$ ,  $(BB')$  и  $(CC')$  пересекались бы в точке  $(1 : 1 : 1)$ .

**Задача 1.3.** Пусть основное поле  $\mathbb{k}$  конечно и состоит из  $q$  элементов. Сколько всего имеется  $k$ -мерных  
 а) векторных подпространств в  $\mathbb{k}^n$   
 б) аффинных подпространств в  $\mathbb{A}^n = \mathbb{A}(\mathbb{k}^n)$   
 в) проективных подпространств в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{n+1})$ ? Найдите пределы этих количеств при  $q \rightarrow 1$ .

**Задача 1.4.** Рассмотрим в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  аффинную карту  $U_\xi = \{v \in V \mid \xi(v) \neq 0\}$ , отвечающую какому-нибудь ненулевому  $\xi \in V^*$ , и  $k$ -мерное проективное подпространство  $K = \mathbb{P}(W) \subset \mathbb{P}_n$ , ассоциированное с каким-нибудь  $(k+1)$ -мерным векторным подпространством  $W \subset V$ . Покажите, что либо  $K \cap U_\xi = \emptyset$ , либо  $K \cap U_\xi$  видимо в  $U_\xi$  как  $k$ -мерное аффинное подпространство.

**Задача 1.5.** Подмножество  $\Phi \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  таково, что в каждой аффинной карте, с которой оно пересекается, его видно как  $k$ -мерное аффинное подпространство (где  $k < n$  фиксировано). Обязательно ли  $\Phi = \mathbb{P}(W)$  для некоторого  $(k+1)$ -мерного векторного подпространства  $W \subset V$ ? Всегда ли существуют аффинные карты, в которых  $\Phi$  вообще не видно?

**Задача 1.6.** Докажите для любых двух проективных подпространств  $K, L \subset \mathbb{P}_n$  неравенство  $\dim(K \cap L) \geq \dim K + \dim L - n$ .

**Задача 1.7.** Нетождественный проективный автоморфизм  $\bar{F}$  называется *инволюцией*, если  $\bar{F}^2 = \text{Id}$ . Покажите, что всякая инволюция на проективной прямой над алгебраически замкнутым полем имеет ровно две различных неподвижных точек.

**Задача 1.8 (проективная двойственность).** Пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  и  $\mathbb{P}_n^\times = \mathbb{P}(V^*)$  называются *двойственными*. Покажите, что

- а) каждое из них является пространством гиперплоскостей в другом
- б) правило  $\mathbb{P}(W) \longleftrightarrow \mathbb{P}(\text{Ann } W)$  устанавливает оборачивающую включение биекцию между  $k$ -мерными проективными подпространствами в  $\mathbb{P}_n$  и  $(n-k-1)$ -мерными проективными подпространствами в  $\mathbb{P}_n^\times$
- в) с учётом (а) биекция из (б) имеет следующее геометрическое описание: подпространству  $H \subset \mathbb{P}_n$  соответствует множество всех содержащих это подпространство

гиперплоскостей, причём множество сие есть проективное пространство размерности  $n - \dim H - 1$ .

**Задача 1.9 (теорема Паппа).** Пусть точки  $a_1, b_1, c_1$  коллинеарны и точки  $a_2, b_2, c_2$  коллинеарны. Покажите, что тройка точек пресечений прямых

$$(a_1b_2) \cap (a_2b_1), \quad (b_1c_2) \cap (b_2c_1), \quad (c_1a_2) \cap (c_2a_1)$$

также коллинеарна.

**Задача 1.10.** Сформулируйте и докажите двойственное утверждение к теореме Паппа.

**Задача 1.11 (первая теорема Дезарга).** Даны два треугольника  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  на  $\mathbb{P}_2$ . Покажите, что три точки пересечения пар их соответственных<sup>1</sup> сторон коллинеарны тогда и только тогда, когда три прямые, проходящие через пары соответственных вершин, пересекаются в одной точке<sup>2</sup>.

**Задача 1.12 (вторая теорема Дезарга).** На прямой  $\ell$ , не проходящей через точки  $a, b, c$ , заданы три различных точки  $p, q, r$ . Докажите, что на прямой  $\ell$  тогда и только тогда имеется инволюция, переводящая точки  $p, q, r$  в точки пересечения прямой  $\ell$  с прямыми  $(bc), (ca)$  и  $(ab)$  соответственно, когда три прямые  $(ap), (bq)$  и  $(cr)$  пересекаются в одной точке.

**Задача 1.13.** Пусть симметрическая группа  $\mathfrak{S}_4$  переставляет буквы  $a, b, c, d$ , стоящие в вершинах четырёхвершинника на рис. 1♦10. Каждой такой перестановке отвечает по формулам (1-15) перестановка букв  $x, y, z$ , стоящих в вершинах ассоциированного с четырёхвершинником треугольника. Покажите, что таким образом получается сюръективный гомоморфизм  $\mathfrak{S}_4 \rightarrow \mathfrak{S}_3$ , ядром которого служит группа Клейна, состоящая из тождественной перестановки и трёх пар независимых транспозиций.

**Задача 1.14.** Рассмотрим в  $\mathbb{R}^3$  стандартный единичный куб с центром в нуле и обозначим через  $a, b, c, d$  одномерные подпространства в  $\mathbb{R}^3$ , содержащие четыре его диагонали. Покажите, что группа куба действует на четырёхвершиннике  $abcd$  в  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{R}^3)$  и что это действие задаёт изоморфизм собственной группы куба с симметрической группой  $\mathfrak{S}_4$ . Убедитесь также, что одномерные подпространства, проходящие через центры граней куба, являются вершинами ассоциированного с четырёхвершинником  $abcd$  треугольника, и получите отсюда независимое доказательство гармоничности сторон треугольника сторонам четырёхвершинника.

**Задача 1.15.** Опишите подгруппу в  $\mathrm{PGL}_2(\mathbb{k})$ , состоящую из всех преобразований

- а) оставляющих на месте  $\infty$
- б) оставляющих на месте 0 и  $\infty$
- в) оставляющих на месте 1 и переставляющих местами 0 и  $\infty$
- г) оставляющих на месте 0 и переставляющих местами 1 и  $\infty$
- д) оставляющих на месте  $\infty$  и переставляющих местами 0 и 1

<sup>1</sup>т. е. поименованных одинаковыми буквами

<sup>2</sup>треугольники, для которых это так, называются *перспективными*

Получите из этого безо всяких вычислений равенства

$$\begin{aligned}[p_2, p_1, p_3, p_4] &= [p_1, p_2, p_3, p_4]^{-1} \\ [p_1, p_3, p_2, p_4] &= 1 - [p_1, p_2, p_3, p_4] \\ [p_1, p_4, p_3, p_2] &= \frac{[p_1, p_2, p_3, p_4] - 1}{[p_1, p_2, p_3, p_4]}. \end{aligned}$$

Задача 1.16. Покажите, что для любых пяти различных точек  $p_1, p_2, \dots, p_5 \in \mathbb{P}_1$  выполняется равенство  $[p_1, p_2, p_3, p_4] \cdot [p_1, p_2, p_4, p_5] \cdot [p_1, p_2, p_5, p_3] = 1$ .

Задача 1.17. Даны 8 различных точек  $p_1, p_2, p_3, p_4, q_1, q_2, q_3, q_4 \in \mathbb{P}_1$ . Докажите равенство

$$[p_1, p_2, q_3, q_4] \cdot [p_2, p_3, q_1, q_4] \cdot [p_3, p_1, q_2, q_4] \times \\ \times [q_1, q_2, p_3, p_4] \cdot [q_2, q_3, p_1, p_4] \cdot [q_3, q_1, p_2, p_4] = 1.$$

Задача 1.18. Одной короткой линейкой проведите прямую, соединяющую две заданные на листе бумаги точки, расстояние между которыми больше длины линейки.

Задача 1.19. В стандартной карте  $U_0 \subset \mathbb{P}_2$  даны кривые

a)  $y = x^2$     6)  $y = x^3$     b)  $y^2 + (x - 1)^2 = 1$     r)  $y^2 = x^2(x + 1)$ .

Напишите их уравнения в картах  $U_1$  и  $U_2$  и нарисуйте все эти 12 кривых.

Задача 1.20. Вложим евклидову плоскость  $\mathbb{R}^2$  в  $\mathbb{CP}_2$  в качестве действительной части стандартной аффинной карты  $U_0$ . а) Найдите в  $\mathbb{CP}_2$  две точки, лежащие на всех кривых степени 2, видных в  $\mathbb{R}^2$  как окружности. б) Всякая ли коника, проходящая через эти две точки и имеющая хотя бы 3 неколлинеарные точки в  $\mathbb{R}^2$ , видна в  $\mathbb{R}^2$  как окружность?

Задача 1.21 (правило Крамера). Рассмотрим  $n$  линейно независимых линейных форм на координатном пространстве  $\mathbb{K}^{n+1}$

$$\begin{aligned} \alpha_1(x) &= a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n \\ \alpha_2(x) &= a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n \\ &\dots \\ \alpha_n(x) &= a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n \end{aligned}$$

и обозначим через  $A = (a_{ij}) \in \text{Mat}_{n \times (n+1)}(\mathbb{K})$  матрицу коэффициентов этих форм, записанных по строкам, а через  $A_i$  для  $0 \leq i \leq n - n \times n$ -матрицу, которая получается выкидыванием  $i$ -того столбца из  $n \times (n+1)$ -матрицы  $A$ . Покажите, что в проективном пространстве  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1})$  гиперплоскости  $\text{Ann } \alpha_1, \text{Ann } \alpha_1, \dots, \text{Ann } \alpha_n$  пересекаются в единственной точке  $p = (p_0 : p_1 : \dots : p_n)$ , однородные координаты которой находятся по правилу Крамера:  $p_i = (-1)^i \det A_i$ .

**Задача 1.22 (рациональная нормальная кривая).** Рассмотрим 2-мерное векторное пространство  $U$  с базисом  $t_0, t_1$ , векторы которого  $\alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1$  будем воспринимать как однородные линейные многочлены от переменных  $(t_0, t_1)$ , и используем отношение  $(\alpha_0 : \alpha_1)$  в качестве однородной координаты на  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ . Обозначим через  $S^d U$  пространство однородных многочленов степени  $d$  от  $(t_0, t_1)$ , условимся записывать такие

многочлены в виде  $\sum_{n=0}^d \binom{d}{n} a_n t_0^n t_1^{d-n}$  и используем  $(a_0 : a_1 : \dots : a_n)$  как однородные координаты на  $\mathbb{P}_d = \mathbb{P}(S^d U)$ . Покажите, что все перечисляемые далее кривые  $C \subset \mathbb{P}_d$  переводятся друг в друга подходящими линейными проективными автоморфизмами:

- $C$  — образ отображения  $c_d : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(S^d U)$ ,  $\psi \mapsto \psi^d$
- $C$  — образ любого отображения  $\mathbb{P}(U) \xrightarrow{F} \mathbb{P}(S^d U)$  заданного в однородных координатах формулой  $t = (\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto (f_0(\alpha) : f_1(\alpha) : \dots : f_d(\alpha))$ , где  $f_m(\alpha)$  — линейно независимые однородные многочлены степени  $d$  от  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1)$ .
- фиксировем любые  $d + 1$  различных точек  $p_0, p_1, \dots, p_d \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ ;  $C$  — образ отображения  $\mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_d$  задаваемого в однородных координатах формулой

$$\alpha = (\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto \left( \frac{1}{\det(p_0, \alpha)} : \frac{1}{\det(p_1, \alpha)} : \dots : \frac{1}{\det(p_d, \alpha)} \right),$$

где мы как обычно полагаем для  $a = (a_0 : a_1)$  и  $b = (b_0 : b_1)$  на  $\mathbb{P}_1$

$$\det(a, b) = a_0 b_1 - a_1 b_0$$

г) фиксируем  $d + 3$  точки  $p_1, p_2, \dots, p_d, a, b, c \in \mathbb{P}_d$  так, чтобы никакие  $(d + 1)$  из них не лежали в одной гиперплоскости, обозначим через  $\ell_i \simeq \mathbb{P}_1$  пучок гиперплоскостей, проходящий через все точки  $p_v$ , кроме  $p_i$ , и зададим проективные изоморфизмы  $\psi_{ij} : \ell_j \xrightarrow{\sim} \ell_i$  так, чтобы 3 гиперплоскости пучка  $\ell_j$ , проходящие через точки  $a, b, c$ , переходили в аналогичные 3 гиперплоскости пучка  $\ell_i$ ; кривая<sup>1</sup>

$$C = \bigcup_{H \in \ell_1} H \cap \psi_{21}(H) \cap \dots \cap \psi_{n1}(H).$$

**Задача 1.23.** Покажите, что над бесконечным полем никакие  $m + 1$  разных точек рациональной нормальной кривой  $C_n$  не лежат в одном  $(m - 1)$ -мерном подпространстве при  $2 \leq m \leq n$ .

**Задача 1.24.** Покажите, что любые  $n + 3$  точки в  $\mathbb{P}_n$ , никакие  $n + 1$  из которых линейно не зависимы, лежат на единственной рациональной нормальной кривой  $C_n$ .

**Задача 1.25<sup>\*</sup>.** Покажите, что два упорядоченных набора из  $n + 3$  точек на  $\mathbb{P}_n$ , такие что в каждом из наборов никакие  $n + 1$  точек не лежат в одной гиперплоскости, тогда и только тогда переводятся друг в друга проективным автоморфизмом, когда на проведённых через эти наборы рациональных нормальных кривых совпадают двойные отношения любых четвёрок соответственных точек.

**Задача 1.26.** В проективизации  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(S^3 U)$  пространства однородных кубических многочленов от  $t_0, t_1$  рассмотрим проекции кубики Веронезе<sup>2</sup>  $C_3 \subset \mathbb{P}_3$

- из точки  $t_0^3$  на плоскость  $(3t_0^2 t_1, 3t_0 t_1^2, t_1^3)$
- из точки  $3t_0^2 t_1$  на плоскость  $(t_0^3, 3t_0 t_1^2, t_1^3)$
- из точки  $t_0^3 + t_1^3$  на плоскость  $(t_0^3, 3t_0^2 t_1, 3t_0 t_1^2)$ .

<sup>1</sup>ср. с зад. 1.21

<sup>2</sup>образованной полными кубами  $(\alpha_0 t_0 + \alpha_1 t_1)^3$ , где  $(\alpha_0 : \alpha_1)$  пробегает  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$

Для каждой из этих трёх кривых напишите параметрическое и «внешнее» уравнения в каждой из трёх стандартных аффинных карт на плоскости – образе проекции и нарисуйте все девять получающихся аффинных кривых. Убедитесь, что над алгебраически замкнутым полем кривая (в) имеет самопересечение.

Задача 1.27. Выведите из предыдущей задачи, что гладкая<sup>1</sup> кубическая кривая  $C \subset \mathbb{P}_2$  не допускает рациональной параметризации<sup>2</sup>.

---

<sup>1</sup>без самопересечений и заострений, или, что то же самое, без таких точек  $p \in C$ , что любая проходящая через  $p$  прямая пересекает  $C$  с кратностью  $\geq 2$

<sup>2</sup>подсказка: всякая допускающая рациональную параметризацию плоская кривая степени  $d$  получается проектированием кривой Веронезе  $C_d \subset \mathbb{P}_d$  на подходящую плоскость  $\mathbb{P}_2 \subset \mathbb{P}_d$

## §2. Проективные квадрики

Всюду в этом параграфе мы предполагаем, что  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ .

**2.1. Квадрики и билинейные формы.** Гиперповерхность степени два  $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$ , задаваемая в проективном пространстве  $\mathbb{P}(V)$  ненулевым однородным квадратичным многочленом  $q \in S^2 V^*$ , называется *проективной квадрикой*. В однородных координатах  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  относительно какого-нибудь базиса  $e_0, e_1, \dots, e_n \in V$  квадратичный многочлен  $q(x) \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  можно записать в виде

$$q(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j = x \cdot A \cdot {}^t x,$$

где  $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  — строка координат,  ${}^t x$  — транспонированный ей столбец координат, а  $A = (a_{ij})$  — *симметричная* матрица, которая при  $i \neq j$  имеет в качестве  $a_{ij} = a_{ji}$  половину коэффициента при  $x_i x_j$  в многочлене  $q(x)$  (здесь существенно  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$ ).

Иначе говоря, для любого однородного многочлена  $q(x)$  второй степени существует единственная симметричная билинейная форма

$$\tilde{q} : V \times V \xrightarrow{(u,w) \mapsto \tilde{q}(u,w)} \mathbb{k},$$

такая что  $q(x) = \tilde{q}(x, x)$ . Эта симметричная билинейная форма называется *поляризацией* квадратичной формы  $q$  и выражается через  $q$  несколькими эквивалентными способами:

$$\begin{aligned} \tilde{q}(x, y) &= \sum_{i,j} a_{ij} x_i y_j = \frac{1}{2} \sum_i y_i \frac{\partial q(x)}{\partial x_i} = x \cdot A \cdot {}^t y = \\ &= \frac{1}{2} (q(x+y) - q(x) - q(y)) = \frac{1}{4} (q(x+y) - q(x-y)). \end{aligned} \quad (2-1)$$

Матрица  $A$  представляет собою *матрицу Грама* формы  $\tilde{q}$  в базисе  $\{e_i\}$ :  $a_{ij} = \tilde{q}(e_i, e_j)$ .

Упражнение 2.1. Проверьте, что в другом базисе  $(e'_0, e'_1, \dots, e'_n) = (e_0, e_1, \dots, e_n) \cdot C$  новая матрица Грама  $A'$  выражается через  $A$  по формуле  $A' = {}^t C \cdot A \cdot C$ .

**2.1.1. Определитель и ранг квадратичной формы.** Из упр. 2.1 вытекает, что при линейной замене координат *определитель Грама*  $\det A$  умножается на *ненулевой квадрат* определителя матрицы перехода:  $\det(A') = \det(A) \cdot \det^2(C)$ . Таким образом, класс определителя Грама по модулю умножения на ненулевые квадраты из поля  $\mathbb{k}$ , не зависит от выбора базиса и является инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат. Мы будем называть этот класс *определенителем* формы  $q$  и обозначать  $\det(q)$ . Если  $\det q \neq 0$ , квадрика  $V(q)$  называется *невырожденной* (или *гладкой*), в противном случае — *вырожденной* (или *особой*).

Ещё одним важным инвариантом квадрики по отношению к линейным заменам координат является ранг её матрицы Грама. Он называется *рангом* формы  $q$ .

Упражнение 2.2. Убедитесь, что ранг матрицы Грама не зависит от выбора базиса.

**2.1.2. Проективная эквивалентность квадрик.** Квадрики называются *проективно эквивалентными*, если они переводятся друг в друга линейным проективными автоморфизмами объемлющего пространства.

Теорема 2.1 (теорема Лагранжа)

Для любой квадрики над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  существует базис, в котором её матрица Грама диагональна.

Доказательство. Индукция по  $\dim V$  (при  $\dim V = 1$  доказывать нечего). Поскольку  $q \not\equiv 0$ , найдётся  $e \in V$ , такой что  $q(e) = \tilde{q}(e, e) \neq 0$ . Примем его за первый базисный вектор и обозначим через  $e^\perp = \{ u \in V \mid \tilde{q}(u, e) = 0 \}$  ортогональное относительно формы  $\tilde{q}$  дополнение к натянутому на  $e$  одномерному подпространству  $\mathbb{k} \cdot e$ . Пространство  $V$  является ортогональной прямой суммой  $V = (\mathbb{k} \cdot e) \oplus e^\perp$ , т. к.  $(\mathbb{k} \cdot e) \cap e^\perp = 0$ , и любой вектор  $v \in V$  представляется в виде

$$v = \frac{\tilde{q}(v, e)}{\tilde{q}(e, e)} \cdot e + u,$$

где  $u = v - e \cdot \tilde{q}(v, e) / \tilde{q}(e, e) \in e^\perp$  (обязательно убедитесь в этом!). Если  $q|_{e^\perp} \equiv 0$ , искомый базис состоит из  $e$  и произвольных базисных векторов пространства  $e^\perp$ . Если  $q|_{e^\perp} \not\equiv 0$ , то по индукции в  $e^\perp$  есть базис  $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  с диагональной матрицей Грама. Тогда матрица Грама базиса  $e, e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$  тоже диагональна.  $\square$

Следствие 2.1

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  всякая квадрика задаётся в подходящих однородных координатах уравнением  $x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0$ , где  $r$  – ранг квадрики. В частности, две квадрики проективно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый ранг.

Доказательство. Ненулевые диагональные элементы матрицы Грама становятся единицами при замене базисных векторов  $e_i$  на  $e_i / \sqrt{q(e_i)}$ .  $\square$

**2.1.3. Пример: квадрики на  $\mathbb{P}_1$ .** Согласно теореме Лагранжа произвольная квадратичная форма от двух переменных (над любым полем, в котором  $1+1 \neq 0$ ) в подходящем базисе задаётся либо уравнением  $x_0^2 + ax_1^2 = 0$  с  $a \neq 0$ , либо уравнением  $x_0^2 = 0$ . В первом случае определитель формы  $\det(q)$  с точностью до умножения на квадраты равен  $a$ , и форма невырождена. Во втором случае  $\det(q) = 0$  и форма вырождена.

Вырожденная квадрика  $x_0^2 = 0$  называется *двойной точкой*, поскольку её уравнение – это квадрат линейной формы  $x_0$ , задающей точку  $(0 : 1)$ .

Неособая квадрика  $x_0^2 + ax_1^2 = 0$  либо пуста, либо состоит из двух точек. Первое равносильно тому, что  $-a$  не является квадратом в  $\mathbb{k}$ , и над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  такого не бывает. Если же  $-a = \delta^2$ , то  $x_0^2 + ax_1^2 = (x_0 - \delta x_1)(x_0 + \delta x_1)$  имеет на  $\mathbb{P}_1$  два разных корня ( $\pm\delta : 1$ ).

Поскольку  $-a$  с точностью до умножения на квадрат совпадает с  $-\det(q)$ , строение квадрики, задаваемой на  $\mathbb{P}_1$  произвольного вида формой  $q(x) = a_0x_0^2 + 2a_1x_0x_1 + a_2x_1^2$ , полностью определяется классом её *дискриминанта*  $D / 4 \stackrel{\text{def}}{=} -\det(q) = a_1^2 - a_0a_2$  по модулю умножения на ненулевые квадраты: если он нулевой, то квадрика является двойной точкой, если он единичный – парой различных точек, если он не квадрат (что бывает только над незамкнутыми полями) – квадрика пуста.

**Следствие 2.2**

Для пересечения произвольных квадрики  $Q$  и прямой  $\ell$  имеется ровно 4 взаимоисключающие возможности: или  $\ell \subset Q$ , или  $\ell \cap Q$  это одна двойная точка, или  $\ell \cap Q$  состоит из 2 различных точек, или  $\ell \cap Q = \emptyset$ , причём над алгебраически замкнутым последний случай невозможен.  $\square$

**2.1.4. Корреляция, ядро и особые точки.** Со всякой билинейной формой  $q$  на  $V$  связан линейный оператор корреляции  $\hat{q} : V \rightarrow V^*$ , переводящий вектор  $v \in V$  в линейную форму  $\hat{q}(v) : V \rightarrow \mathbb{k}$  «скалярного умножения» на  $v$ :

$$\hat{q}(v) : w \mapsto \tilde{q}(w, v).$$

**Упражнение 2.3.** Проверьте, что матрица оператора корреляции, записанная в двойственных базисах  $e_1, e_2, \dots, e_n \in V$  и  $x_1, x_2, \dots, x_n \in V^*$  совпадает с матрицей Грама  $A$  квадратичной формы  $q$ .

В частности, невырожденность  $q$  равносильна тому, что  $\hat{q}$  изоморфизм. Пространство

$$\ker \hat{q} = \{ v \in V \mid \forall w \in V \tilde{q}(w, v) = 0 \}$$

называется **ядром** квадратичной формы  $q$ . Поскольку  $\dim \ker \hat{q} = \dim V - \text{rk } A$ , мы ещё раз видим, что ранг формы является её инвариантом (не зависит от координат).

Проективизация ядра  $\text{Sing } Q \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\ker \hat{q}) \subset \mathbb{P}(V)$  называется **множеством особых точек** (или **вершинным пространством**) квадрики  $Q$ . Обратите внимание, что  $\text{Sing } Q \subset Q$ .

**Теорема 2.2**

Пересечение  $Q' = L \cap Q$  особой квадрики  $Q$  с любым дополнительным к  $\text{Sing } Q$  проективным подпространством  $L \subset \mathbb{P}(V)$  представляет собой невырожденную квадрику в  $L$ , и исходная квадрика  $Q$  является **линейным соединением**<sup>1</sup>  $Q'$  и  $\text{Sing } Q$ .

**Доказательство.** Пусть  $K = \ker \hat{q}$  и  $L = \mathbb{P}(U)$ . Тогда  $V = U \oplus K$ . Если вектор  $u \in U$  лежит в ядре ограничения  $\hat{q}|_U$ , то  $\hat{q}(u, u') = 0$  для всех  $u' \in U$ . Записывая произвольный вектор  $v \in V$  как  $v = u' + u''$  с  $u' \in U$  и  $u'' \in K$ , получаем  $\tilde{q}(u, v) = \tilde{q}(u, u'') + \tilde{q}(u, u') = 0$  для всех  $v \in V$ , откуда  $u \in U \cap \ker \hat{q} = 0$ . Таким образом, ограничение  $q|_U$  невырождено.

Если прямая  $\ell$  проходит через точку  $p \in \text{Sing } Q$  и не лежит на квадрике  $Q$ , то ограничение формы  $q$  на  $\ell$  является ненулевой особой квадратичной формой, а значит,  $Q \cap \ell$  – это двойная точка  $p$ . Тем самым, каждая прямая, пересекающая  $\text{Sing } Q$ , либо целиком лежит на  $Q$ , либо больше нигде не пересекает квадрику.  $\square$

**2.1.5. Касательное пространство.** Прямая  $\ell$ , проходящая через точку  $p \in Q$ , называется **касательной** к  $Q$  в  $p$ , если  $\ell$  либо лежит на  $Q$  целиком, либо пересекает  $Q$  по двойной точке  $p$ . Объединение всех прямых, касающихся  $Q$  в точке  $p$ , называется **касательным пространством** к квадрике  $Q$  в точке  $p \in Q$  и обозначается  $T_p Q$ .

**Лемма 2.1**

Прямая  $\ell = (ab)$  касается квадрики  $Q$ , заданной уравнением  $q(x) = 0$ , в точке  $a \in Q$  тогда и только тогда, когда  $\tilde{q}(a, b) = 0$ .

---

<sup>1</sup>т. е. объединением всех прямых, пересекающих как  $Q'$ , так и  $\text{Sing } Q$

Доказательство. Пусть  $\ell = \mathbb{P}(U)$ . Матрица Грама ограничения  $q|_U$  имеет в базисе  $\{a, b\}$  вид

$$\begin{pmatrix} 0 & \tilde{q}(a, b) \\ \tilde{q}(b, a) & \tilde{q}(b, b) \end{pmatrix},$$

и  $\det q|_U = 0 \iff \tilde{q}(a, b) = \tilde{q}(b, a) = 0$ .  $\square$

Следствие 2.3

Видимый из точки  $b \notin Q$  контур<sup>1</sup> квадрики  $Q$  высекается из  $Q$  гиперплоскостью

$$\text{Ann } \hat{q}(b) = \{x \mid \tilde{q}(b, x) = 0\}.$$

Следствие 2.4

Следующие условия на точку  $a \in Q \subset \mathbb{P}(V)$  эквиваленты друг другу:

$$1) p \in \text{Sing } Q \quad 2) T_p Q = \mathbb{P}(V) \text{ — это всё пространство} \quad 3) \forall i \quad \frac{\partial q}{\partial x_i}(p) = 0. \quad \square$$

Следствие 2.5

Если точка  $p \in Q$  неособа, то  $T_p Q = \{x \in \mathbb{P}_n \mid \tilde{q}(p, x) = 0\}$  является гиперплоскостью коразмерности 1.  $\square$

**2.2. Проективная двойственность.** Пространства  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  и  $\mathbb{P}_n^\times \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(V^*)$  называются *двойственными* проективными пространствами. Геометрически, каждое из них есть пространство гиперплоскостей в другом: однородное линейное уравнение  $\langle \xi, v \rangle = 0$  на  $\xi \in V^*$  и  $v \in V$  при фиксированном  $\xi \in \mathbb{P}_n^\times$  задаёт гиперплоскость в  $\mathbb{P}_n$ , а при фиксированном  $v \in \mathbb{P}_n$  — гиперплоскость в  $\mathbb{P}_n^\times$ , состоящую из всех гиперплоскостей в  $\mathbb{P}_n$ , проходящих через точку  $v \in \mathbb{P}_n$ .

Биекция  $U \leftrightarrows \text{Ann}(U)$  между векторными подпространствами дополнительных раз мерностей в двойственных пространствах  $V$  и  $V^*$  при переходе к проективизациям устанавливает для каждого  $m = 0, 1, \dots, (n - 1)$  обращающую включения биекцию между  $m$ -мерными проективными подпространствами в  $\mathbb{P}_n$  и  $(n - 1 - m)$ -мерными проективными подпространствами в  $\mathbb{P}_n^\times$ . Эта биекция называется *проективной двойственностью*. Она переводит проективное подпространство  $L = \mathbb{P}(U) \subset \mathbb{P}_n$  в проективное подпространство  $L^\times = \mathbb{P}(\text{Ann}(U)) \subset \mathbb{P}_n^\times$ , образованное всеми гиперплоскостями, содержащими  $L$ , и позволяет переговаривать геометрические утверждения в двойственные геометрические утверждения, которые могут довольно сильно отличаться от исходных. Например, условие коллинеарности трёх точек двойственно условию наличия у трёх гиперплоскостей общего подпространства коразмерности 2.

**2.2.1. Полярное преобразование.** Корреляция  $\hat{q} : V \simeq V^*$ , ассоциированная с невырожденной квадратичной формой  $q$ , индуцирует линейный проективный изоморфизм

$$\bar{q} : \mathbb{P}(V) \simeq \mathbb{P}(V^*)$$

который называется *полярным преобразованием* (или *поляритетом*) квадрики  $Q$ . Поляритет переводит точку  $p \in \mathbb{P}_n$  в гиперплоскость  $L \subset \mathbb{P}_n$ , заданную уравнением  $\tilde{q}(p, x) = 0$ . Точка  $p$  и гиперплоскость  $L$  в этом случае называются *полюсом* и *полярой* друг друга относительно квадрики  $Q$ .

<sup>1</sup>т. е. ГМТ касания с  $Q$  всевозможных касательных, опущенных на  $Q$  из  $b$

Геометрически, поляра точки, не лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, высякающая видимый из этой точки контур квадрики, а поляра точки, лежащей на квадрике, — это гиперплоскость, касающаяся квадрики в этой точке. Таким образом, всякую квадрику  $Q$  можно охарактеризовать как ГМТ, лежащих на своих полярах.

Поскольку условие  $\tilde{q}(a, b) = 0$  симметрично по  $a$  и  $b$ , точка  $a$  лежит на поляре точки  $b$ , если и только если точка  $b$  лежит на поляре точки  $a$ . Такие точки называются *сопряжёнными относительно* квадрики  $Q$ .

**Упражнение 2.4.** Постройте<sup>1</sup> поляру данной точки и полюс данной прямой при полярном преобразовании евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  относительно заданной окружности<sup>2</sup>.

**Предложение 2.1**

Пусть  $a, b \notin Q$  и прямая  $(ab)$  пересекает  $Q$  в двух различных точках  $c, d$ . Точки  $a, b$  тогда и только тогда сопряжены относительно квадрики  $Q$ , когда они гармоничны по отношению к точкам  $c, d$ .

**Доказательство.** Поучительно дать два независимых доказательства — геометрическое и алгебраическое.

**Геометрическое рассуждение.** Обозначим проходящую через точки  $a, b, c, d$  прямую через  $\ell$ . Сопряжение относительно квадрики  $Q$  задаёт на прямой  $\ell$  инволюцию

$$\sigma_Q : \ell \rightarrow \ell,$$

переводящую точку  $x \in \ell$  в единственную лежащую на прямой  $\ell$  сопряжённую к  $x$  точку  $\sigma_Q(x) = \ell \cap \bar{q}(x)$ , где  $\bar{q}(x) \subset \mathbb{P}_n$  — полярная точке  $x$  гиперплоскость. Точки  $c$  и  $d$  неподвижны относительно  $\sigma_Q$ . Если  $\sigma_Q$  меняет местами  $a$  и  $b$ , то  $[a, b, c, d] = [b, a, c, d]$ , откуда  $[a, b, c, d] = -1$ . Наоборот, если  $[a, b, c, d] = -1$ , то отображение  $\sigma_{c,d} : \ell \rightarrow \ell$ , переводящее точку  $x \in \ell$ , в единственную точку  $y \in \ell$ , такую что  $[x, y, c, d] = -1$ , действует на точки  $a, b, c, d$  так же, как  $\sigma_Q$ , и является инволютивной гомографией, ибо биективно и бирационально.

**Упражнение 2.5.** Убедитесь в этом, и покажите, что для любых двух точек  $c, d \in \ell$  существует единственная инволюция  $\sigma_{c,d} : \ell \rightarrow \ell$ , для которой точки  $c$  и  $d$  являются неподвижными, причём в любой аффинной карте, где  $d = \infty$ , эта инволюция выглядит как центральная симметрия относительно  $c$ .

Таким образом,  $\sigma_Q = \sigma_{c,d}$ , а значит,  $a$  и  $b$  сопряжены относительно  $Q$ .

**Алгебраическое рассуждение.** Ограничение квадрики  $Q$  на прямую  $(cd)$  задаётся в однородных координатах  $(x_0 : x_1)$  относительно базиса  $c, d$  квадратичной формой

$$q(x) = \det(x, c) \cdot \det(x, d),$$

поляризация которой есть  $\tilde{q}(x, y) = \frac{1}{2} (\det(x, c) \cdot \det(y, d) + \det(y, c) \cdot \det(x, d))$ . Условие сопряжённости  $\tilde{q}(a, b) = 0$  означает, что  $\det(a, c) \cdot \det(b, d) = -\det(b, c) \cdot \det(a, d)$  или  $[a, b, c, d] = -1$ .  $\square$

<sup>1</sup>в настоящий момент желающие могут пользоваться циркулем и линейкой, но в действительности для выполнения этого построения достаточно одной линейки (см. рис. 2\*10 на стр. 41, а также зад. 2.11 и зад. 2.12 на стр. 50)

<sup>2</sup>что особенно интересно, когда прямая не пересекает окружности, а точка лежит внутри ограниченного ею круга

**Предложение 2.2**

Для неособой квадрики  $G$  и произвольной квадрики  $Q$  в  $\mathbb{P}_n$  гиперплоскости, полярные относительно квадрики  $G$  точкам  $p \in Q$ , образуют в двойственном проективном пространстве  $\mathbb{P}_n^\times$  квадрику в  $Q_G^\times$  того же ранга, что и квадрика  $Q$ . Если  $Q$  и  $G$  имеют в некоторых однородных координатах на  $\mathbb{P}_n$  матрицы Грама  $A$  и  $\Gamma$  соответственно, то квадрика  $Q_G^\times$  имеет в двойственных однородных координатах на  $\mathbb{P}_n^\times$  матрицу  $\Gamma^{-1}A\Gamma^{-1}$ .

**Доказательство.** Поляритет  $\hat{g} : \mathbb{P}_n \simeq \mathbb{P}_n^\times$  гладкой квадрики  $G \subset \mathbb{P}_n$  переводит точку из  $\mathbb{P}_n$  со столбцом координат  $x$  в точку двойственного пространства  $\mathbb{P}_n^\times$  со строкой координат

$$\xi = x^t \cdot \Gamma$$

и является проективным изоморфизмом. Таким образом, полярные гиперплоскости  $\xi$  точек  $x \in Q$  задаются в  $\mathbb{P}_n^\times$  уравнением, которое получается подстановкой в уравнение  $x^t \cdot A \cdot x = 0$  квадрики  $Q$  точек  $x = \Gamma^{-1}\xi^t$ . В результате получаем на  $\xi$  требуемое уравнение  $\xi \cdot \Gamma^{-1}A\Gamma^{-1} \cdot \xi^t = 0$ .  $\square$

**Следствие 2.6**

Касательные пространства гладкой квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$  образуют в  $\mathbb{P}_n^\times$  гладкую квадрику  $Q^\times$ . Матрицы Грама квадрик  $Q$  и  $Q^\times$  в двойственных базисах пространств  $\mathbb{P}_n$  и  $\mathbb{P}_n^\times$  обратны друг другу.

**Доказательство.** Положим в предыдущей теореме  $G = Q$  и  $\Gamma = A$ , и заметим, что гиперплоскости, полярные точкам  $p \in Q$  относительно самой же квадрики  $Q$  — это в точности касательные пространства  $T_p Q$ .  $\square$

**2.2.2. Поляритеты над незамкнутыми полями.** Над алгебраически незамкнутыми полями имеются квадратичные формы  $q$ , задающие *пустые* квадрики  $Q$ . Однако задаваемые такими квадриками полярные преобразования геометрически вполне наблюдаются.

**Упражнение 2.6.** Опишите геометрически полярное преобразование евклидовой плоскости  $\mathbb{R}^2$  относительно «мнимой» окружности  $x^2 + y^2 = -1$ .

На языке поляритетов пустота квадрики означает, что никакая точка не лежит на своей поляре.

**Лемма 2.2**

Два поляритета совпадают, если и только если задающие их квадратичные формы пропорциональны.

**Доказательство.** Это сразу следует из лем. 1.1.  $\square$

**Теорема 2.3**

Над алгебраически замкнутым полем две квадрики совпадают тогда и только тогда, когда их уравнения пропорциональны.

**Доказательство.** Пусть  $Q = Q'$ . Поскольку при ограничении на любое дополнительное к  $\text{Sing } Q = \text{Sing } Q'$  подпространство уравнения обеих квадрик не поменяются, можно считать обе квадрики невырожденными, а тогда всё следует из лем. 2.2.  $\square$

**Определение 2.1**

Проективизация пространства квадратичных форм на  $V$

$$\mathbb{P}_{\frac{n(n+3)}{2}} = \mathbb{P}(S^2 V^*) \quad (2-2)$$

называется *пространством квадрик*<sup>1</sup> на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ .

**Упражнение 2.7.** Убедитесь, что размерность пространства квадрик на  $\mathbb{P}_n$  именно такая как в (2-2).

**2.3. Коники.** Квадрики на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$ ,  $\dim V = 3$ , называются *проективными кониками*. Они образуют пятимерное проективное пространство  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$ . Над алгебраически замкнутым полем имеются ровно три проективно неэквивалентных коники:

- *двойная прямая*  $x_0^2 = 0$  (ранг 1, все точки особые);
- *распавшаяся коника*<sup>2</sup>  $x_0^2 + x_1^2 = 0$  (ранг 2, одна особая точка);
- *гладкая коника*  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$ .

Обратите внимание, что распавшаяся коника является линейным соединением особой точки и гладкой квадрики<sup>3</sup> на прямой, не проходящей через особую точку.

**2.3.1. Параметризация гладкой коники.** Всякая непустая гладкая коника<sup>4</sup>  $C \subset \mathbb{P}_2$  допускает квадратичную *рациональную параметризацию* – отображение  $\varphi : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_2$  задаваемое в однородных координатах тройкой взаимно простых однородных многочленов второй степени  $\varphi(t_0, t_1) = (\varphi_0(t_0, t_1) : \varphi_1(t_0, t_1) : \varphi_2(t_0, t_1)) \in \mathbb{P}_2$  и биективно отображающее прямую  $\mathbb{P}_1$  на конику  $C \subset \mathbb{P}_2$ . Геометрически, такая параметризация задаётся проекцией  $p : C \xrightarrow{\sim} \ell$  коники  $C$  из любой её точки  $p \in C$  на любую не проходящую через  $p$  прямую  $\ell$ . В самом деле, любая прямая  $(px)$  с  $x \in \ell$ , отличная от касательной прямой  $T_p C$ , пересекает конику  $C$  по двум различным точкам –  $p$  и ещё одной точке  $p'(x) \in C$ , однородные координаты которой  $(\lambda_0 : \lambda_1)$  в базисе  $p, x$  на прямой  $(px)$  доставляют отличный от  $p = (1 : 0)$  корень уравнения

$$(\lambda_0, \lambda_1) \cdot \begin{pmatrix} q(p, p) & q(p, x) \\ q(x, p) & q(x, x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} = 0 \iff 2q(p, x) \cdot \lambda_0 \lambda_1 + q(x, x) \cdot \lambda_1^2 = 0,$$

равный  $(\lambda_0 : \lambda_1) = (q(x, x) : -2q(p, x))$ . Отображение

$$\ell \ni x \mapsto q(x, x) \cdot p - 2q(p, x) \cdot x \in C \subset \mathbb{P}_2 \quad (2-3)$$

и задаёт искомую квадратичную параметризацию коники  $C$  точками  $x \in \ell$ .

**Упражнение 2.8.** Убедитесь, что три однородных координаты точки

$$q(x, x) \cdot p - 2q(p, x) \cdot x \in \mathbb{P}_2$$

<sup>1</sup>над незамкнутым полем  $\mathbb{k}$  не все точки этого пространства отвечают непустым квадрикам, и разные точки могут задавать одинаковые (скажем, пустые) квадрики, так что правильнее было бы говорить не о «пространстве квадрик», а о «пространстве поляритетов», тем не менее, наше название является общепринятым

<sup>2</sup>т. е. объединение двух прямых  $x_0 = \pm i x_1$ , пересекающихся в особой точке  $(0 : 0 : 1)$

<sup>3</sup>т. е. пары различных точек

<sup>4</sup>над любым полем  $\mathbb{k}$  с  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 0$

являются однородными полиномами степени 2 от пары внутренних однородных координат  $(x_0 : x_1)$  точки  $x \in \ell$  относительно произвольного базиса на прямой  $\ell$ , и что формула (2-3) корректно сопоставляет точке  $x = T_p C \cap \ell$  точку  $p \in C$ .

Над алгебраическим замкнутым полем  $\mathbb{k}$  квадратичную параметризацию гладкой коники можно получить преобразовав её уравнение подходящей линейной заменой однородных координат на  $\mathbb{P}_2$  к виду Веронезе<sup>1</sup>

$$\det \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix} = a_0 a_2 - a_1^2 = 0 \quad (2-4)$$

и воспользовавшись рациональной параметризацией коники Веронезе (2-4) по формуле

$$(\alpha_0 : \alpha_1) \mapsto (a_0 : a_1 : a_2) = (\alpha_0^2 : \alpha_0 \alpha_1 : \alpha_1^2). \quad (2-5)$$

**Упражнение 2.9.** Убедитесь, что проекция коники  $a_0 a_2 - a_1^2 = 0$  из точки  $(1 : 1 : 1)$  на прямую  $a_1 = 0$ , переводит точку  $(\alpha_0^2 : \alpha_0 \alpha_1 : \alpha_1^2)$  в точку  $(\alpha_0 : 0 : \alpha_1)$ .

### Предложение 2.3

Гладкая коника пересекает произвольную кривую, заданную однородным уравнением степени  $d$ , не более, чем по  $2d$  точкам, либо целиком содержится в этой кривой в качестве компоненты.

**Доказательство.** Запараметризуем конику однородными полиномами степени 2 от параметра  $t = (t_0 : t_1) \in \mathbb{P}_1$ . Значения  $t$ , при которых коника пересекает кривую с уравнением  $f(x) = 0$ , являются корнями однородного уравнения  $f(q(t)) = 0$ , левая часть которого либо тождественно равна нулю, либо имеет степень  $2d$ . В первом случае вся коника содержится в кривой, во втором случае имеется не более  $2d$  различных корней.  $\square$

### Предложение 2.4

Каждые 5 точек в  $\mathbb{P}_2$  лежат на некоторой конике. Если никакие 4 из пяти точек не коллинеарны, то такая коника единственна, а если никакие 3 не коллинеарны, то она ещё и невырождена.

**Доказательство.** При фиксированном  $p \in V$  уравнение  $q(p) = 0$  линейно по  $q \in S^2 V^*$ . Поэтому коники, проходящие через  $p \in \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  образуют гиперплоскость в  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$ . Поскольку любые 5 гиперплоскостей в  $\mathbb{P}_5$  имеют непустое пересечение, требуемая коника существует. Если какие-то три из точек коллинеарны, а никакие четыре — нет, коника содержит прямую, проходящую через три коллинеарные точки, и стало быть, распадается в объединение этой прямой и прямой, проходящей через две оставшиеся точки. Тем самым, такая коника единственна. Если никакие три из точек не коллинеарны, любая проходящая через них коника автоматически неособа, и значит, единственна по предл. 2.3.  $\square$

---

<sup>1</sup>напомним (см. прим. 1.4 на стр. 11), что коника Веронезе  $C_{\text{ver}} \subset \mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U^*)$  состоит из всех квадратичных форм  $a_0 x_0^2 + 2a_1 x_0 x_1 + a_2 x_1^2$  на двумерном пространстве  $U \simeq \mathbb{k}^2$  с координатами  $(x_0, x_1)$ , которые являются полными квадратами линейных форм  $\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1 \in U^*$

Следствие 2.7

Каждые 5 прямых без тройных пересечений на  $\mathbb{P}_2$  касаются единственной невырожденной коники.

Доказательство. Это утверждение проективно двойственно предыдущему: 5 точек на  $\mathbb{P}_2^\times$ , двойственные к данным пяти прямым на  $\mathbb{P}_2$ , лежат на единственной гладкой конике  $C \subset \mathbb{P}_2^\times$ , и двойственная ей коника  $C \subset \mathbb{P}_2$  есть единственная гладкая коника, касающаяся пяти данных прямых.  $\square$

Пример 2.1 (геометрическая классификация гомографий)

Пусть гомография  $\varphi : \ell_1 \simeq \ell_2$  между двумя несовпадающими прямыми  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_2$  переводит три различные точки  $a_1, b_1, c_1 \in \ell_1$ , отличные от точки пересечения прямых  $q = \ell_1 \cap \ell_2$ , соответственно, в точки  $a_2, b_2, c_2 \in \ell_2$ . Для геометрического устройства такой гомографии есть ровно две разных возможности, представленные на рис. 2\*1 и рис. 2\*2: либо три прямые  $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$  и  $(c_1, c_2)$ , соединяющие соответственные точки, проходят через одну точку  $p$ , либо — не проходят через одну точку.

Как мы видели в прим. 1.6, первое означает, что  $\varphi$  является перспективой с центром в  $p$ , и это равносильно тому, что  $\varphi(q) = q$ .

Во втором случае никакие три из прямых  $\ell_1, \ell_2$  и  $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$  не пересекаются в одной точке, и по сл. 2.7 существует единственная и автоматически гладкая коника  $C$ , касающаяся всех пяти этих прямых. Преобразование  $C : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ , переводящее точку  $x \in \ell_1$  в точку пересечения прямой  $\ell_2$  с отличной от  $\ell_1$  касательной, опущенной из  $x$  на  $C$ , является гомографией  $\ell_1$  на  $\ell_2$ , т. к. биективно и рационально: уравнения пары касательных, опущенных из  $x$  на  $C$ , суть точки пересечения двойственной коники  $C^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  с прямой  $x^\times = \text{Ann}(x)$ ; одна из этих точек — уравнение прямой  $\ell_1$  — дана, так что вторая — уравнение прямой  $(x, y)$  — рационально через неё выражается. Поскольку  $C$  и  $\varphi$  одинаково действуют на  $a_1, b_1, c_1$ , гомография  $C : \ell_1 \rightarrow \ell_2$  совпадает с  $\varphi$ . Обратите внимание, что образом и прообразом точки  $q = \ell_1 \cap \ell_2$  в этом случае являются точки пересечения  $\ell_2 \cap C$  и  $\ell_1 \cap C$  соответственно.

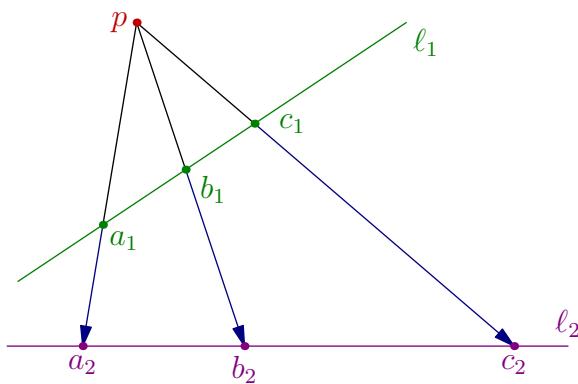


Рис. 2\*1. Перспектива  $p : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ .

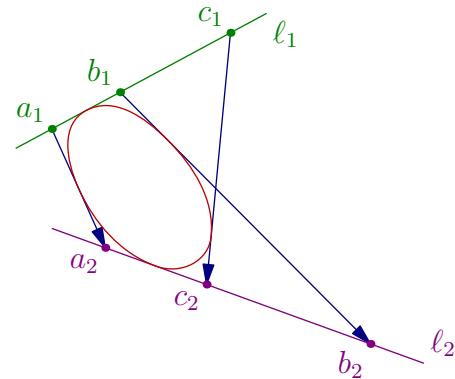


Рис. 2\*2. Гомография  $C : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ .

Итак, каждая гомография  $\ell_1 \simeq \ell_2$  либо является перспективой, либо высекается семейством касательных к некоторой гладкой конике. В обоих случаях центр  $p$  и коника

С определяются по гомографии однозначно. Перспектива может рассматриваться как вырожденный случай гомографии  $C : \ell_1 \rightarrow \ell_2$ , отвечающий особой конике  $C$ , распавшейся в объединение двух прямых, пересекающихся в центре перспективы<sup>1</sup>.

**Предложение 2.5 (теорема о вписанно-описанных треугольниках)**

Два треугольника  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  вписаны в одну и ту же гладкую конику  $Q'$ , если и только если они описаны вокруг одной и той же гладкой коники  $Q''$ .

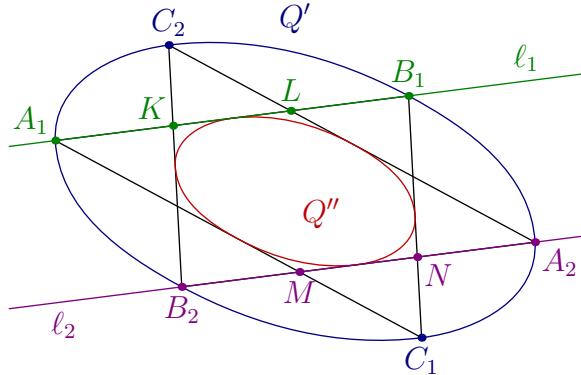


Рис. 2◦3. Вписанно-описанные треугольники.

**Доказательство.** Пусть 6 точек  $A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$  лежат на одной конике  $Q'$  (см. рис. 2◦3). Рассмотрим прямые  $\ell_1 = (A_1B_1)$ ,  $\ell_2 = (A_2B_2)$  и обозначим через  $C_2 : \ell_1 \cong Q' \Rightarrow Q''$  и  $C_1 : Q' \cong \ell_2$  проекцию прямой  $\ell_1$  из точки  $C_2$  на конику  $Q'$  и проекцию конику  $Q'$  на прямую  $\ell_2$  из точки  $C_1$ . Композиция этих двух проекций

$$[C_1 : Q' \cong \ell_2] \circ [C_2 : \ell_1 \cong Q'] : \ell_1 \cong \ell_2$$

переводит  $A_1 \mapsto M$ ,  $K \mapsto B_2$ ,  $L \mapsto A_2$ ,  $B_1 \mapsto N$  и является неперспективной гомографией. Значит, она задаётся семейством касательных к некоторой гладкой конику  $Q''$ , вписанной в оба треугольника. Обратная импликация проективно двойственна только что доказанной.  $\square$

**Следствие 2.8 (поризм Понселе для треугольников)**

Если пара коник  $Q'$  и  $Q''$  такова, что существует треугольник  $A_1B_1C_1$ , одновременно вписанный в  $Q'$  и описанный около  $Q''$ , то такой же треугольник  $A_2B_2C_2$  (одновременно вписанный в  $Q$  и описанный около  $Q'$ ) можно нарисовать стартовав с любой точки  $A_2 \in Q' \setminus Q''$ .

**Доказательство.** В самом деле, проведём из  $A_2$  две касательных  $(A_2B_2)$  и  $(A_2C_2)$  к конику  $Q''$  до их пересечения с  $Q'$  в точках  $B_2, C_2 \in Q'$ , как на рис. 2◦3. По предл. 2.5, треугольники  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  описаны вокруг некоторой коники, а поскольку существует лишь одна коника, касающаяся пяти прямых  $(AB), (BC), (CA), (A_2B_2), (A_2C_2)$ , эта коника и есть  $Q''$ .  $\square$

**Пример 2.2 (построение коники линейкой)**

Точки коники  $C$ , проходящей через пять данных точек  $p_1, p_2, \dots, p_5$ , никакие 3 из которых не коллинеарны, можно эффективно строить одной линейкой (см. рис. 2◦4).

<sup>1</sup>сами прямые могут в этом случае выбираться многими способами — подойдут любые две прямые, соединяющие соответственные точки гомографии

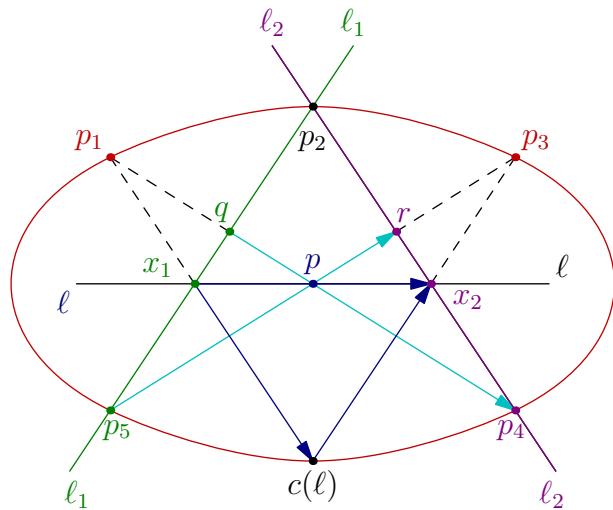


Рис. 2◦4. Трассировка коники линейкой.

Проведём прямые  $\ell_1 = (p_2p_5)$ ,  $\ell_2 = (p_2p_4)$  и рассмотрим точку  $p = (p_1p_4) \cap (p_3p_5)$ . Перспектива  $p : \ell_1 \simeq \ell_2$  совпадает с композицией проекции  $p_1 : \ell_1 \simeq C$  прямой  $\ell_1$  на конику  $C$  из точки  $p_1 \in C$  и  $p_3 : C \simeq \ell_2$  проекции коники  $C$  на прямую  $\ell_2$  из точки  $p_3 \in C$ , поскольку они одинаково действуют на лежащие на прямой  $\ell_1$  три точки  $p_2, p_5$  и  $q = \ell_1 \cap (p_2p_4)$  (см. рис. 2◦4). Поэтому для любой прямой  $\ell$ , проходящей через  $p$  и пересекающейся с прямыми  $\ell_1$  и  $\ell_2$  в точках  $x_1$  и  $x_2$  соответственно, точка  $c(\ell) = (p_1x_1) \cap (p_2x_2)$  лежит на  $C$  и прочертит эту конику, когда  $\ell$  пробежит пучок прямых через  $p$ .

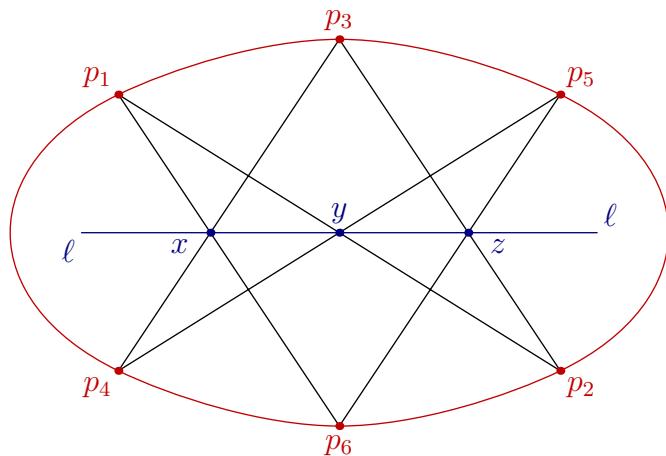


Рис. 2◦5. Гексограмма Паскаля.

#### Теорема 2.4 (теорема Паскаля)

Шесть точек  $p_1, p_2, \dots, p_6$ , никакие 3 из которых не коллинеарны, тогда и только тогда лежат на одной гладкой конике, когда коллинеарны три точки пересечений

$$x = (p_3p_4) \cap (p_6p_1), \quad y = (p_1p_2) \cap (p_4p_5), \quad z = (p_2p_3) \cap (p_5p_6)$$

пар «противоположных сторон» шестиугольника  $p_1, p_2, \dots, p_6$  (ср. рис. 2◦6 и рис. 2◦5).

Доказательство. Полагая  $\ell_1 = (p_3 p_4)$  и  $\ell_2 = (p_3 p_2)$ , как на рис. 2◦5, мы видим, что условие  $z \in (xy)$  означает, что  $x$  переходит в  $z$  при перспективе

$$y : \ell_1 \rightarrow \ell_2, \quad (2-6)$$

которая, согласно прим. 2.2, раскладывается в композицию проекций

$$(p_5 : C \simeq \ell_2) \circ (p_1 : \ell_1 \simeq C) \quad (2-7)$$

где  $C$  — гладкая коника, проходящая через  $p_1, p_2, \dots, p_5$ . Но тогда  $p_6 = (p_5 z) \cap (p_3 x) \in C$ . Наоборот, если  $(p_5 z) \cap (p_3 x) \in C$ , то точка  $z \in \ell_2$  является образом точки  $x \in \ell_1$  при композиции проекций (2-7), а значит, и при перспективе (2-6), откуда  $z \in (xy)$ .  $\square$

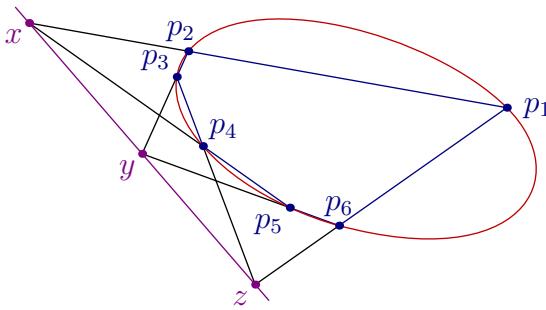


Рис. 2◦6. Вписанный шестиугольник.

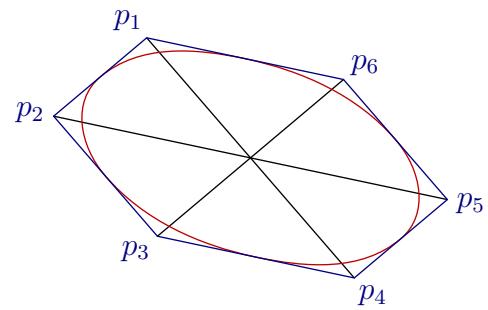


Рис. 2◦7. Описанный шестиугольник.

### Следствие 2.9 (теорема Брианшона)

Шестиугольник  $p_1, p_2, \dots, p_6$  тогда и только тогда описан вокруг некоторой гладкой коники, когда его главные диагонали  $(p_1 p_4), (p_2 p_5), (p_3 p_6)$  пересекаются в одной точке (см. рис. 2◦7).

Доказательство. Эта теорема проективно двойственна к теореме Паскаля.  $\square$

**2.3.2. Внутренняя геометрия гладкой коники.** Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  с  $\text{char}(\mathbb{k}) \neq 2$  проективная плоскость  $\mathbb{P}_2$  с заданной на ней гладкой коникой может восприниматься как множество неупорядоченных пар точек  $\{p, q\}$  проективной прямой  $\mathbb{P}_1$ , а сама коника — как множество пар совпадающих точек  $\{p, p\}$ .

Точнее, рассмотрим проективизацию  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$  двумерного координатного векторного пространства  $U = \mathbb{k}^2$ , зафиксируем в  $U$  стандартные координаты  $x = (x_0, x_1)$  и сопоставим каждой точке  $p \in \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$  одномерное подпространство  $\text{Ann}(p) \subset U^*$  линейных форм, зануляющихся в  $p$ , порождённое линейной формой

$$\det(x, p) = p_1 x_0 - p_0 x_1, \quad \text{где } p = (p_0 : p_1).$$

**Упражнение 2.10.** Покажите, что отображение  $\det : \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U) \simeq \mathbb{P}(U^*) = \mathbb{P}_1^\times$ , переводящее точку  $p \in \mathbb{P}_1$  в класс пропорциональности линейной формы  $x \mapsto \det(p, x)$ , не зависит от выбора однородных координат и является гомографией.

Далее, сопоставим каждой неупорядоченной паре точек  $p = (p_0 : p_1), q = (q_0 : q_1)$  на  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$  множество всех однородных многочленов второй степени, зануляющихся в

точках  $p$  и  $q$ . Такие многочлены образуют в трёхмерном пространстве  $S^2 U^*$  всех квадратичных форм на  $U$  одномерное векторное подпространство, порождённое квадратичной формой

$$\begin{aligned} f_{p,q}(x) &= \det(x, p) \cdot \det(x, q) = a_0(p, q) \cdot x_0^2 + 2 a_1(p, q) \cdot x_0 x_1 + a_2(p, q) \cdot x_1^2, \quad \text{где} \\ a_0(p, q) &= p_1 q_1, \quad a_1(p, q) = -\frac{1}{2} (p_1 q_0 + p_0 q_1), \quad a_2(p, q) = p_0 q_0. \end{aligned} \quad (2-8)$$

**Упражнение 2.11.** Убедитесь, что сопоставляя неупорядоченной паре точек  $\{p, q\}$  одномерное подпространство в  $S^2 U^*$ , порождённое квадратичной формой (2-8), мы получаем биекцию между неупорядоченными парами точек на прямой  $\mathbb{P}(U)$  и точками пространства  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U^*)$  квадрик на  $\mathbb{P}(U)$ .

Пары совпадающих точек  $\{p, p\}$  перейдут при этом в конику Веронезе  $C_{\text{ver}} \subset \mathbb{P}(S^2 U^*)$ , состоящую из ненулевых квадратичных форм (2-8) с нулевым определителем<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} f_p(x) &= \det^2(x, p) = a_0(p) \cdot x_0^2 + 2 a_1(p) \cdot x_0 x_1 + a_2(p) \cdot x_1^2, \quad \text{где} \\ a_0(p) &= p_1^2, \quad a_1(p) = -p_0 p_1, \quad a_2(p) = p_0^2. \end{aligned} \quad (2-9)$$

Пары точек вида  $\{p, t\}$ , где  $p \in \mathbb{P}_1$  фиксирована, а  $t$  пробегает  $\mathbb{P}_1$ , переходит в *прямую*  $\text{Ann}(p) \subset \mathbb{P}(S^2 U^*)$ , состоящую из всех квадратичных форм на  $\mathbb{P}_1$ , зануляющихся в  $p$ .

**Упражнение 2.12.** Убедитесь, что уравнение  $f(p) = 0$  является при фиксированном  $p$  линейным уравнением на  $f$  и, стало быть, задаёт в  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$  прямую.

В частности, касательные к конику Веронезе  $C_{\text{ver}}$ , восстановленные в точках  $\{p, p\}$  и  $\{q, q\}$ , суть прямые, состоящие из точек вида  $\{p, t\}$  и  $\{q, s\}$  соответственно. Эти две прямые пересекаются в точке  $\{p, q\}$ .

Поскольку над алгебраически замкнутым полем все гладкие коники проективно эквивалентны друг другу, произвольную гладкую конику  $C$  на  $\mathbb{P}_2$  можно записать в подходящих однородных координатах  $(a_0 : a_1 : a_2)$  уравнением  $a_1^2 = a_0 a_2$  и воспринимать как конику Веронезе.

**Пример 2.3 (двойное отношение и внутренние однородные координаты на конике)**  
Назовём *двойным отношением* четырёх точек  $P_1, P_2, P_3, P_4$  на гладкой конице  $C$  двойное отношение проекций этих точек на какую-нибудь прямую  $\ell \subset \mathbb{P}_2$  из какой-нибудь пятой точки  $P_0 \in C$ , отличной от всех четырёх и не лежащей на  $\ell$ , или — что то же самое — двойное отношение в пучке прямых, проходящих через точку  $P_0$ , четырёх прямых, проходящих через точки  $P_1, P_2, P_3, P_4$ .

**Упражнение 2.13.** Убедитесь, что это двойное отношение не зависит ни от выбора  $\ell$ , ни от выбора  $P_0$ .

Если подходящей линейной заменой координат отождествить конику  $C$  с коникой Веронезе  $C_{\text{ver}}$  и, тем самым, плоскость  $\mathbb{P}_2 \supset C$  — с пространством неупорядоченных пар точек на  $\mathbb{P}_1$ , то определённое выше двойное отношение точек  $P_i = \{p_i, p_i\} \in C_{\text{ver}} \subset \mathbb{P}_2$  будет

<sup>1</sup>Параметризация конику Веронезе по формулам (2-9) отличается от параметризации (2-5) и является композицией квадратичного вложения Веронезе  $\mathbb{P}(U^*) \xrightarrow{\psi(x) \mapsto \psi^2(x)} \mathbb{P}(S^2 U^*)$  из (2-5) и гомографии  $\det : \mathbb{P}(U) \xrightarrow{(p_0 : p_1) \mapsto p_1 x_0 - p_0 x_1} \mathbb{P}(U^*)$  из упр. 2.10

равно — вне зависимости от способа такого отождествления — двойному отношению точек  $p_i$  на  $\mathbb{P}_1$ .

В самом деле, композиция вложения  $\mathbb{P}_1 \hookrightarrow C_{\text{ver}} \subset \mathbb{P}_2$ , переводящего  $p \in \mathbb{P}_1$  в  $\{p, p\} \in C_{\text{ver}}$ , и проекции коники  $C_{\text{ver}}$  из любой её точки на любую не проходящую через эту точку прямую  $\ell \subset \mathbb{P}_2$  биективна и рациональна, а значит, является гомографией  $\mathbb{P}_1 \hookrightarrow \ell$  и сохраняет двойные отношения.

По этой же причине на любой гладкой конике  $C$  имеются единственныес точностью до проективного преобразования внутренние однородные координаты: их можно задать либо отождествив конику  $C$  с множеством двойных точек  $\{a, a\}$  на  $\mathbb{P}_1$  и объявив однородными координатами точки  $\{a, a\} \in C$  однородные координаты точки  $a$  на  $\mathbb{P}_1$ , либо спроектировав конику  $C$  из любой точки  $p \in C$  на любую прямую  $\ell \not\ni p$  и перенеся при помощи этой проекции на конику  $C$  какие-нибудь однородные координаты с прямой  $\ell$ .

### Предложение 2.6

Всякий линейный проективный автоморфизм  $F$  плоскости  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U^*)$ , переводящий в себя конику Веронезе  $C_{\text{ver}} \subset \mathbb{P}(S^2 U^*)$ , имеет вид  $S^2 \varphi : \{a, b\} \mapsto \{\varphi(a), \varphi(b)\}$ , где

$$\varphi : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(U)$$

однозначно определяемая по  $F$  гомография на прямой  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$ .

**Доказательство.** Проективный изоморфизм  $F$  однозначно задаётся своим действием на какие-нибудь четыре различных точки  $P_i = \{p_i, p_i\}$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , на кривой Веронезе  $C_{\text{ver}}$ . Пусть  $F(P_i) = \{q_i, q_i\} \in C_{\text{ver}}$ . В силу линейности оператора  $F$ , двойное отношение проекций точек  $P_i$  на какую-нибудь прямую  $\ell$  из какой-нибудь пятой точки  $P_0 \in C_{\text{ver}}$  равно двойному отношению проекций точек  $F(P_i)$  на прямую  $F(\ell)$  из точки  $F(P_0)$ . Тем самым, выполняется следующее равенство двойных отношений точек на конику Веронезе  $C_{\text{ver}}$ :

$$[P_1, P_2, P_3, P_4] = [F(P_1), F(P_2), F(P_3), F(P_4)].$$

Тогда на  $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(U)$  имеет место равенство двойных отношений

$$[p_1, p_2, p_3, p_4] = [P_1, P_2, P_3, P_4] = [F(P_1), F(P_2), F(P_3), F(P_4)] = [q_1, q_2, q_3, q_4].$$

Поэтому, существует (автоматически единственная) гомография  $\varphi : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$ , такая что  $\varphi(p_i) = q_i$  для всех  $i = 1, 2, 3, 4$ .

**Упражнение 2.14.** Убедитесь, что отображение  $S^2 \varphi : \{a, b\} \mapsto \{\varphi(a), \varphi(b)\}$  является линейным проективным преобразованием плоскости  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(S^2 U^*)$  и явно выпишите его матрицу в координатах  $(a_0 : a_1 : a_2)$ , если задана матрица  $\varphi$  в координатах  $(x_0 : x_1)$  на  $\mathbb{P}_1$ .

Поскольку  $S^2 \varphi$  совпадает с  $F$  на четырёх точках  $P_i \in \mathbb{P}_2$ , эти проективные преобразования одинаковы.  $\square$

**2.3.3. Гомографии на гладкой конике.** Будем называть отображение  $\varphi : C \rightarrow C$  гладкой коники в себя *гомографией*, если оно осуществляет дробно линейное преобразование описанных в прим. 2.3 внутренних однородных координат на этой конике. По лем. 1.2 любое биективное<sup>1</sup> отображение  $\varphi : C \rightarrow C$ , которое во внутренних однородных

---

<sup>1</sup>всюду, за исключением, может быть, конечного множества точек

координатах на конике задаётся рациональной формулой вида  $\varphi(\alpha_0 : \alpha_1) = (f(\alpha_0/\alpha_1) : g(\alpha_0/\alpha_1))$ , где  $f, g \in \mathbb{k}[t]$ , является гомографией. Для любых двух упорядоченных троек различных точек коники существует единственная гомография, переводящая первую тройку точек во вторую с сохранением порядка. В доказательстве предл. 2.6 мы видели, что любая гомография  $\varphi : C \rightarrow C$  однозначно продолжается до проективного автоморфизма всей плоскости, переводящего конику в себя и индуцирующего на ней гомографию  $\varphi$ .

#### Пример 2.4 (инволюции)

Нетождественная гомография, обратная самой себе, называется *инволюцией*. Пусть инволюция  $\sigma : C_{\text{ver}} \rightarrow C_{\text{ver}}$  меняет местами две разных пары точек:  $a' \leftrightarrow a''$  и  $b' \leftrightarrow b''$  (см. рис. 2\*8). Прямые  $(a'a'')$  и  $(b'b'')$  пересекаются в какой-то точке  $s = \{p, q\} = (a'a'') \cap (b'b'') \notin C$ . Очевидно, что действие  $\sigma$  на  $C_{\text{ver}}$  высекается пучком прямых с центром в точке  $s$  в том смысле, что точки  $x', x'' \in C_{\text{ver}}$  переводятся друг в друга инволюцией  $\sigma$  тогда и только тогда, когда прямая  $(x'x'')$  проходит через точку  $s$ .

Упражнение 2.15. Убедитесь в этом.

Таким образом, над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  каждая инволюция  $\sigma$  на  $\mathbb{P}_1$  имеет ровно две различных неподвижных точек<sup>1</sup>  $p$  и  $q$ , такие что точки  $\{p, p\}$  и  $\{q, q\}$  на  $C_{\text{ver}}$  суть точки касания с  $C_{\text{ver}}$  пары касательных, опущенных на  $C_{\text{ver}}$  из точки

$$s = \{p, q\} = (\{a, a\} \{\sigma(a), \sigma(a)\}) \cap (\{b, b\} \{\sigma(b), \sigma(b)\}),$$

где  $a, b \in \mathbb{P}_1$  — любые две точки, не остающиеся на месте под действием  $\sigma$ . Мы будем обозначать инволюцию с неподвижными точками  $p, q \in \mathbb{P}_1$  через  $\sigma_{p,q}$ .

Упражнение 2.16. Напишите явную формулу, выражающую координаты точек  $p$  и  $q$  через координаты точек  $a', a'', b', b''$  таких что  $\sigma_{p,q}(a') = a''$  и  $\sigma_{p,q}(b') = b''$ .

Из сказанного вытекает, в частности, что две инволюции на  $\mathbb{P}_1$  совпадают тогда и только тогда, когда у них одни и те же неподвижные точки (ср. с упр. 2.5 на стр. 30).

Упражнение 2.17. Покажите, что любые две различных инволюции проективной прямой всегда одинаково действуют ровно на одну пару точек этой прямой.

#### Пример 2.5 (перекрёстная ось дробно линейного автоморфизма)

Гомография  $\varphi : C_{\text{ver}} \rightarrow C_{\text{ver}}$ , переводящая три различные точки  $a_1, b_1, c_1 \in C_{\text{ver}}$  в точки  $a_2, b_2, c_2 \in C_{\text{ver}}$  является композицией проекций  $b_2 : C_{\text{ver}} \rightarrow \ell$  и  $b_1 : \ell \rightarrow C_{\text{ver}}$ , где

<sup>1</sup>Поучительно сравнить наше геометрическое рассуждение с алгебраическим доказательством этого же факта. Инволюция  $\sigma : \mathbb{P}(U) \rightarrow \mathbb{P}(U)$  индуцируется линейным автоморфизмом  $F : U \rightarrow U$ , и условие  $\sigma^2 = \text{Id}$  означает, что  $F^2 = \lambda E$  для некоторого ненулевого  $\lambda \in \mathbb{k}$ . Тем самым, оператор  $F$  аннулируется многочленом  $t^2 - \lambda = (t - \sqrt{\lambda}) \cdot (t + \sqrt{\lambda})$  без кратных корней. Из этого вытекает, что  $F$  диагонализуем, и его собственные значения могут быть равны только  $\pm\sqrt{\lambda}$ . Поскольку  $\sigma \neq \text{Id}$ , оператор  $F$  не скалярен, а значит, имеет ровно два различных собственных вектора с противоположными собственными значениями  $\pm\sqrt{\lambda}$

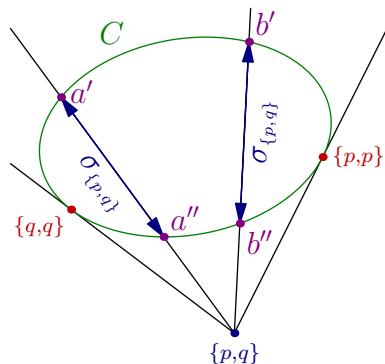


Рис. 2\*8. Инволюция на конике.

прямая  $\ell$  соединяет точки пересечения  $(a_1, b_2) \cap (b_1, a_2)$  и  $(c_1, b_2) \cap (b_1, c_2)$  пар перекрёстных прямых на рис. 2◦9.

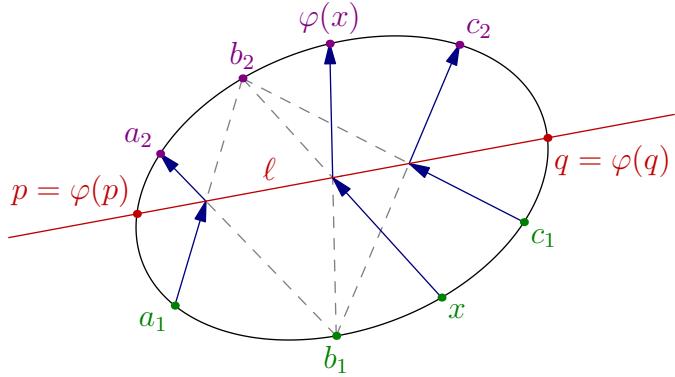


Рис. 2◦9. Перекрёстная ось гомографии на книге.

Из такого описания следует, что неподвижные точки  $\varphi$  суть точки пересечения  $\ell \cap C_{\text{ver}}$ . Поэтому прямая  $\ell$  не зависит от выбора точек  $a_1, b_1, c_1 \in C_{\text{ver}}$ , и  $\varphi$  имеет либо две неподвижные точки, либо одну (в этом случае  $\ell$  касается  $C_{\text{ver}}$  в этой точке). Таким образом, прямая  $\ell$  представляет собой ГМТ пересечения всех перекрёстных прямых  $(x, \varphi(y)) \cap (y, \varphi(x))$  с произвольными различными  $x, y \in C_{\text{ver}}$ . Это, среди прочего, даёт новое доказательство теоремы Паскаля: три точки пересечений пар противоположных сторон вписанного в  $C_{\text{ver}}$  шестиугольника  $a_1 c_2 b_1 a_2 c_1 b_2$ , будучи точками пересечений перекрёстных прямых гомографии, переводящей  $a_1, b_1, c_1$  в  $a_2, b_2, c_2$ , лежат на её перекрёстной оси  $\ell$ .

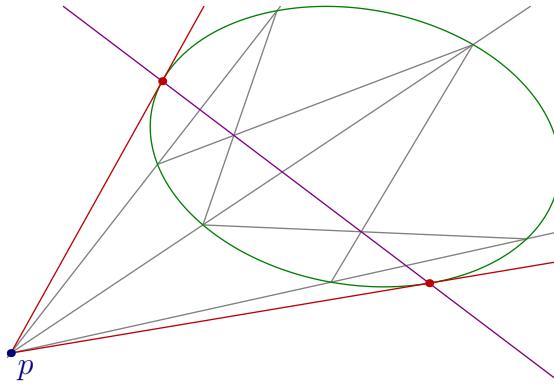


Рис. 2◦10. Построение касательных.

Отметим, что перекрёстная ось гомографии  $\varphi : C \rightarrow C$ , заданной своим действием на какие-нибудь три точки, легко строится одной линейкой, что позволяет одной линейкой построить образ  $\varphi(z)$  любой точки  $z \in C$  относительно такой гомографии, а также указать её неподвижные точки. В частности, одной линейкой можно начертить две касательных к данной гладкой конике  $C$  из данной точки  $s \in \mathbb{P}_2$  — это будут две прямые, соединяющие  $s$  с неподвижными точками инволюции  $\sigma_s : C \rightarrow C$ , выsekаемой пучком прямых с центром в  $s$ . Чтобы найти эти неподвижные точки, проведём через  $s$  любые три секущих и начертим перекрёстную ось  $\ell_{\sigma_s}$  инволюции  $\sigma_s$  (см. рис. 2◦10). Точки пересечения  $\ell_{\sigma_s} \cap C$  будут искомыми точками касания<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>ещё более простое построение см. ниже в зад. 2.11 на стр. 50

**2.4. Квадратичные поверхности.** Квадрики в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ ,  $\dim V = 4$ , образуют проективное пространство  $\mathbb{P}_9 = \mathbb{P}(S^2 V^*)$ . Поэтому любые 9 точек в  $\mathbb{P}_3$  лежат на некоторой квадрике. В частности, любые три прямые в  $\mathbb{P}_3$  лежат на некоторой квадрике — достаточно взять по 3 точки на каждой прямой и провести квадрику через эти 9 точек.

Над алгебраическим полем особые квадрики в  $\mathbb{P}_3$  суть:

- *двойная плоскость*  $x_0^2 = 0$  (ранг 1)
- *распавшаяся квадрика*<sup>1</sup>  $x_0^2 + x_1^2 = 0$  (ранг 2)
- *простой конус*<sup>2</sup>  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$  (ранг 3)

**Упражнение 2.18.** Покажите, что особая квадрика в  $\mathbb{P}_3$  (над произвольным полем) не может содержать трёх попарно непересекающихся прямых.

Таким образом, любые три попарно скрещивающиеся прямые в  $\mathbb{P}_3$  лежат на гладкой квадрике.

**2.4.1. Квадрика Сегре.** Удобной геометрической моделью гладкой квадрики в  $\mathbb{P}_3$  является *квадрика Сегре* в проективном пространстве  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{k}))$ , состоящая из ненулевых матриц ранга 1:

$$Q_s \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} \neq 0 \mid \det \begin{pmatrix} \alpha_{00} & \alpha_{01} \\ \alpha_{10} & \alpha_{11} \end{pmatrix} = \alpha_{00}\alpha_{11} - \alpha_{01}\alpha_{10} = 0 \right\}. \quad (2-10)$$

Если ненулевой линейный оператор  $F : U \rightarrow V$  имеет ранг 1, то одномерный образ  $F$  состоит из векторов, пропорциональных некоему ненулевому вектору  $v \in V$ , а ядро  $F$  имеет коразмерность 1 и, тем самым, представляет собою аннулятор некоего ненулевого ковектора  $\xi \in U^*$ . И вектор  $v \in V$ , и ковектор  $\xi \in U^*$  определяются оператором  $F$  однозначно с точностью до пропорциональности, а сам  $F$  пропорционален линейному оператору  $v \otimes \xi : U \rightarrow V$ , который действует на векторы  $u \in U$  по правилу

$$v \otimes \xi : u \mapsto v \cdot \langle \xi, u \rangle \quad (2-11)$$

и называется *тензорным произведением* вектора  $v \in V$  и ковектора  $\xi \in U^*$ .

В ситуации, когда  $U = V = \mathbb{k}^2$ , а  $v$  и  $\xi$  имеют в стандартных двойственных базисах пространств  $\mathbb{k}^2$  и  $\mathbb{k}^{2*}$  координаты  $v = (x_0 : x_1)$  и  $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$ , матрица оператора  $v \otimes \xi$  имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_0 & \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_0 x_0 & \xi_1 x_0 \\ \xi_0 x_1 & \xi_1 x_1 \end{pmatrix} \quad (2-12)$$

Сопоставляя паре точек  $(\xi, v) \in \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(\mathbb{k}^{2*}) \times \mathbb{P}(\mathbb{k}^2)$  одномерное подпространство в  $\text{Hom}(\mathbb{k}^2, \mathbb{k}^2)$ , порождённое оператором (2-11) с матрицей (2-12), мы получаем *вложение Сегре*

$$s : \mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1 \hookrightarrow \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(\text{End}(\mathbb{k}^2)),$$

<sup>1</sup>т. е. объединение двух плоскостей  $x_0 = \pm i x_1$ , или, что то же самое, линейное соединение особой прямой  $(e_2, e_3)$  и пары точек  $(1 : \pm i : 0 : 0)$ , составляющих неособую квадрику на дополнительной прямой  $(e_0, e_1)$

<sup>2</sup>т. е. линейное соединение одной особой точки с невырожденной коникой в дополнительной плоскости

биективно отображающее  $\mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$  на квадрику Сегре  $Q_s \subset \mathbb{P}_3$ . При этом два семейства координатных прямых на  $\mathbb{P}_1^\times \times \mathbb{P}_1$  переходят в два семейства прямых на  $Q_s$ .

А именно, координатная прямая  $\xi = \text{const}$  изобразится на квадрике Сегре проективизацией двумерного пространства матриц ранга 1 с фиксированным отношением  $\xi = (\xi_0 : \xi_1)$  между столбцами, а прямая  $v = \text{const}$  — матрицами с фиксированным отношением  $x = (x_0 : x_1)$  между строками. В каждом из этих семейств все прямые попарно скрещиваются, а любые две прямые из разных семейств пересекаются, причём каждая точка  $Q_s$  является точкой пересечения пары прямых из различных семейств.

Никаких других прямых на квадрике Сегре нет, поскольку всякая прямая, лежащая на  $Q_s$  и проходящая через какую-нибудь точку  $p \in Q_s$  содержитя в плоской конике  $Q_s \cap T_p Q_s$ , которая исчерпывается парой проходящих через  $p$  прямых из описанных выше двух семейств.

### Предложение 2.7

Через любые три попарно непересекающиеся прямые в  $\mathbb{P}_3$  проходит единственная (и автоматически неособая) квадрика. Эта квадрика представляет собою объединение всех прямых, пересекающих все три заданных.

**Доказательство.** Всякая квадрика, проходящая через три скрещивающихся прямые, является неособой квадрикой Сегре, заметаемой двумя семействами прямолинейных образующих. Все три заданные прямые должны лежать в одном из них. Но тогда любая прямая из другого семейства пересекают каждую из них, и наоборот, всякая прямая пересекающая каждую из них, лежит на квадрике (ибо пересекает её по трём точкам), причём в другом по отношению к трём заданным прямым семействе.  $\square$

**2.5. Подпространства, лежащие на квадриках.** Размерность максимального по включению проективного пространства, целиком лежащего на квадрике  $Q \subset \mathbb{P}_n$ , называется *планарностью* квадрики  $Q$ . Планарность пустой квадрики будем по определению считать равной  $-1$ . Таким образом,  $0$ -планарные квадрики суть непустые квадрики, не содержащие прямых.

### Предложение 2.8

Планарность любой гладкой квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$ ,  $\text{char} \mathbb{k} \neq 2$ , не превышает половины размерности квадрики  $Q$ , т. е. не больше целой части  $[(n - 1)/2]$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ ,  $\dim V = n + 1$ , и  $L = \mathbb{P}(W) \subset Q = V(q)$ , где  $q \in S^2 V^*$ . Поскольку ограничение формы  $q$  на подпространство  $W \subset V$  тождественно нулевое, оператор корреляции  $\hat{q} : V \rightarrow V^*$  переводит подпространство  $W$  внутрь подпространства  $\text{Ann}(W) \subset V^*$ . В силу невырожденности формы  $q$  этот оператор инъективен, откуда

$$\dim(W) = \dim \hat{q}(W) \leq \dim \text{Ann} W = \dim V - \dim W.$$

Таким образом,  $2 \dim W \leq \dim V$ , т. е.  $2 \dim L \leq n - 1$ .  $\square$

### Лемма 2.3

Сечение неособой квадрики  $Q$  произвольной гиперплоскостью  $\Pi$  либо является неособой квадрикой в  $\Pi$ , либо имеет единственную особую точку  $p \in \Pi \cap Q$ , и в этом случае  $\Pi = T_p Q$  касается квадрики в точке  $p$ .

Доказательство. Пусть  $Q = V(q) \subset \mathbb{P}(V)$  и  $\Pi = \mathbb{P}(W)$ . Первый факт следует из оценки:

$$\begin{aligned} \dim \ker(\hat{q}|_W) &= \dim(W \cap \hat{q}^{-1}(\text{Ann } W)) \leqslant \\ &\leqslant \dim \hat{q}^{-1}(\text{Ann } W) = \dim \text{Ann } W = \dim V - \dim W = 1. \end{aligned}$$

Если ядро ограничения  $\hat{q}|_W$  не нулевое, а одномерное с базисом  $p$ , то  $p \in Q \cap \Pi$  имеет  $\text{Ann}(\hat{q}(p)) = W$ , откуда  $T_p Q = \Pi$ . Наоборот, если  $\Pi = T_p Q = \mathbb{P}(\text{Ann } \hat{q}(p))$ , то  $p \in \text{Ann } \hat{q}(p)$  лежит в ядре ограничения  $\hat{q}$  на  $\text{Ann } \hat{q}$ .  $\square$

### Предложение 2.9

Пусть  $Q \subset \mathbb{P}_{n+1}$  — гладкая  $n$ -мерная квадрика над произвольным полем  $\mathbb{k}$ ,  $\text{char } \mathbb{k} \neq 2$ . Тогда  $m$ -мерные проективные подпространства  $L \subset Q$ , проходящие через фиксированную точку  $p \in Q$ , биективно соответствуют всевозможным  $(m-1)$ -мерным проективным подпространствам  $L'$ , лежащим на гладкой  $(n-2)$ -мерной квадрике  $Q' = H \cap Q$ , которую квадрика  $Q$  высекает из произвольной не проходящей через точку  $p$  гиперплоскости  $H \simeq \mathbb{P}_{n-1}$  касательного пространства  $T_p Q \simeq \mathbb{P}_n$ .

Доказательство. Всякая  $m$ -мерная плоскость  $L \subset Q$ , проходящая через точку  $p \in Q$ , лежит в пересечении  $Q \cap T_Q$ . Согласно лем. 2.3 это пересечение является особой квадрикой с единственной особой точкой  $p$ , а значит, по теор. 2.2 на стр. 28 представляет собою конус с вершиной в точке  $p$  над неособой квадрикой  $Q'$ , которая высекается квадрикой  $Q$  в произвольно выбранной не проходящей через  $p$  гиперплоскости  $H \subset T_p Q$ . Поэтому  $(m-1)$ -мерная плоскость  $L' = L \cap H = L \cap Q'$  лежит на  $Q'$ . Наоборот, линейное соединение точки  $p$  с произвольной  $(m-1)$ -мерной плоскостью  $L' \subset Q'$  содержит  $p$  и лежит в  $Q$ .  $\square$

### Следствие 2.10

Мощность множества<sup>1</sup>  $k$ -мерных плоскостей, лежащих на гладкой квадрике  $Q$  и проходящих через заданную точку  $p \in Q$ , одинакова для всех точек  $p \in Q$ . В частности, через каждую точку гладкой  $m$ -планарной квадрики можно провести лежащую на квадрике  $m$ -мерную плоскость.

Доказательство. Если  $a, b \in Q$  и  $b \notin T_a Q$ , то  $H = T_a Q \cap T_b Q$  одновременно является не проходящей через  $a$  гиперплоскостью в  $T_a Q$  и не проходящей через  $b$  гиперплоскостью в  $T_b Q$ . По предл. 2.9 оба множества лежащих на  $Q$   $k$ -мерных плоскостей — плоскости, проходящие через точку  $a$ , и плоскости, проходящие через точку  $b$  — равномощны множеству всех  $(k-1)$ -мерных плоскостей, лежащих на гладкой квадрике  $Q \cap H$  в  $H$ , и значит, равномощны друг другу. Если  $b \in T_a Q$ , рассмотрим любую точку  $c \in Q \setminus (T_a Q \cup T_b Q)$ . По уже доказанному, множество лежащих на  $Q$   $k$ -мерных плоскостей — проходящих через точку  $c$  равномочно как множеству плоскостей, проходящих через точку  $a$ , так и множеству плоскостей, проходящих через точку  $b$ .  $\square$

### Следствие 2.11

Гладкая  $n$ -мерная квадрика над алгебраически замкнутым полем  $[n/2]$ -планарна.

<sup>1</sup>на самом деле эти плоскости образуют гладкое проективное многообразие — так называемое *многообразие Фано* (или *изотропный грассманнian*), см. зад. 5.8 на стр. 137

**Доказательство.** Это так при  $n = 0, 1, 2$ . Поскольку все гладкие  $n$ -мерные квадрики над алгебраически замкнутым полем проективно эквивалентны, общий случай получается индуктивным применением предл. 2.9.  $\square$

### Следствие 2.12

Гладкая вещественная проективная квадрика  $Q_{n,m}$ , заданная в  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$  уравнением

$$x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + \cdots + x_{2m-2}^2 - x_{2m-1}^2 + x_{2m}^2 + x_{2m+1}^2 + \cdots + x_n^2 = 0$$

( $m$  минусов и  $n + 1 - m \geq m$  плюсов), имеет планарность  $m - 1$ .

**Доказательство.** Индукция по  $m$ . При  $m = 0$  все квадрики  $Q_{n,0}$  пусты и по определению имеют планарность  $-1$ . При  $m > 0$  планарность квадрики  $Q_{n,m}$  согласно предл. 2.9 и сл. 2.10 ровно на единицу больше планарности квадрики  $Q_{n-2,m-1}$ , которая высекается квадрикой  $Q$  в лежащей внутри касательного пространства к  $Q_{n,m}$  в точке  $e_0 + e_1 \in Q_{n,m}$  и не проходящей через эту точку  $(n - 1)$ -мерной проективной плоскости, натянутой на базисные векторы  $e_2, e_3, \dots, e_n$ .  $\square$

### Следствие 2.13

Гладкие непустые вещественные проективные квадрики по модулю проективной эквивалентности исчерпываются квадриками  $Q_{n,m}$  с  $m \geq 1$ , которые попарно не эквивалентны друг другу.  $\square$

#### Пример 2.6 (планарность гладкой квадрики над замкнутым полем)

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  предл. 2.9 позволяет полностью описать по индукции многообразие подпространств максимальной размерности, заметающих неособую квадрику  $Q_n \subset \mathbb{P}_{n+1}$ .

А именно, гладкая квадрика в  $Q_{-1} \subset \mathbb{P}_0$  пуста, нульмерная гладкая квадрика  $Q_0 \subset \mathbb{P}_1$  состоит из двух точек. Одномерная гладкая квадрика  $Q_1 \subset \mathbb{P}_2$  не содержит прямых, ибо множество прямых  $\ell \subset Q_1$ , проходящих через задданную точку  $p \in Q_1$  — это пустое множество точек на квадрике  $Q_{-1} \subset \mathbb{P}_0$ . Через каждую точку  $p$  гладкой двумерной квадрики  $Q_2 \subset \mathbb{P}_3$  проходят две разные прямые, биективно отвечающие двум точкам гладкой квадрики  $Q_0 \subset \mathbb{P}_1 \subset T_p Q_2 \setminus \{p\}$ . Через каждую точку  $p$  гладкой трёхмерной квадрики  $Q_3 \subset \mathbb{P}_4$  проходит одномерное семейство прямых, запараметризованное точками гладкой коники  $Q_1 \subset \mathbb{P}_2 \subset T_p Q_3 \setminus \{p\}$  и образующее конус над  $Q_1$  с вершиной  $p$ . Двумерных плоскостей на гладкой трёхмерной квадрике нет. Гладкая четырёхмерная квадрика  $Q_4 \subset \mathbb{P}_5$  не содержит 3-мерных подпространств, но через любую точку  $p \in Q_4$  проходят два пучка плоскостей, взаимно однозначно соответствующих двум семействам прямых на квадрике Серре  $Q_2 \simeq \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \subset T_p Q_4 \setminus \{p\}$ , и т. д. (см. зад. 5.8 на стр. 137).

**2.6. Квадрика Плюккера и  $\text{Gr}(2, 4)$ .** Зафиксируем 4-мерное векторное пространство  $V$ , и пусть  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ , а  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ . По определению, грассманян  $\text{Gr}(2, 4) = \text{Gr}(2, V)$  есть множество всех 2-мерных векторных подпространств  $U \subset V$ , или — на геометрическом языке — множество всех прямых  $\ell \subset \mathbb{P}_3$ . Внешний квадрат<sup>1</sup> 2-мерного подпространства

<sup>1</sup>подробнее о внешней алгебре и грассмановых многочленах см. в № 3.3.2 на стр. 65 ниже

$U \subset V$  представляет собой одномерное подпространство  $\Lambda^2 U \subset \Lambda^2 V$ , т. е. точку в  $\mathbb{P}_5$ . Возникающее таким образом отображение

$$\mathbf{u} : \mathrm{Gr}(2, 4) \xrightarrow{U \mapsto \Lambda^2 U} \mathbb{P}(\Lambda^2 V) \quad (2-13)$$

называется *отображением Плюккера*. Его образ состоит из грависмановых многочленов, которые *разложимы* в произведение двух линейных форм. Действительно, равенство  $\omega = u_1 \wedge u_2$  в точности означает, что  $\omega \in \Lambda^2 U$  для подпространства  $U$ , натянутого на пару векторов  $u_1, u_2 \in U$ . С другой стороны, в пространстве  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$  имеется каноническая *квадрика Плюккера*

$$P \stackrel{\text{def}}{=} \{ \omega \in \Lambda^2 V \mid \omega \wedge \omega = 0 \}.$$

Если зафиксировать базис  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  в  $V$  и индуцированный мономиальный базис

$$e_{ij} = e_i \wedge e_j$$

в  $\Lambda^2 V$ , то условие  $\omega \wedge \omega = 0$  на грависманову квадратичную форму  $\omega = \sum_{i < j} x_{ij} e_{ij}$  запишется в однородных координатах  $x_{ij}$  на  $\mathbb{P}_5$  в виде (обязательно проверьте!)

$$x_{01}x_{23} - x_{02}x_{13} + x_{03}x_{12} = 0,$$

откуда видно, в частности, что плюккерова квадрика неособа.

Упражнение 2.19. Убедитесь, что на координатном языке отображение Плюккера (2-13) переводит подпространство, натянутое на пару векторов  $u = \sum u_i e_i$ ,  $w = \sum w_j e_j$  в грависманову квадратичную форму с коэффициентами  $x_{ij} = u_i w_j - u_j w_i$ , т. е. сопоставляет матрице  $\begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}$  шестёрку её миноров  $x_{ij} = \det \begin{pmatrix} u_i & u_j \\ w_i & w_j \end{pmatrix}$ .

На бескоординатном языке,  $P$  задаётся квадратичной формой  $q(\omega) = \tilde{q}(\omega, \omega)$ , поляризация которой  $\tilde{q}(\omega_1, \omega_2)$  однозначно с точностью до скалярного множителя определяется соотношением:  $\omega_1 \wedge \omega_2 = \tilde{q}(\omega_1, \omega_2) \cdot \Omega$ , где  $\Omega$  — произвольный ненулевой вектор одномерного пространства  $\Lambda^4 V \simeq \mathbb{k}$ , например,  $\Omega = e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$ . Поскольку грависмановы многочлены чётной степени коммутируют:  $\omega_1 \wedge \omega_2 = \omega_2 \wedge \omega_1$ , форма  $\tilde{q}$  симметрична.

#### Лемма 2.4

Форма  $\omega \in \Lambda^2 V$  разложима тогда и только тогда, когда  $\omega \wedge \omega = 0$ .

Доказательство. Если  $\omega = u_1 \wedge u_2$ , то  $\omega \wedge \omega = u_1 \wedge u_2 \wedge u_1 \wedge u_2 = 0$ . Чтобы получить обратное, выберем в  $V$  базис Дарбу  $\{\xi_i\}$ , в котором  $\omega$  имеет либо вид  $\omega = \xi_0 \wedge \xi_1 + \xi_2 \wedge \xi_3$ , либо вид  $\omega = \xi_0 \wedge \xi_1$ . В первом случае  $\omega$  неразложима, поскольку  $\omega \wedge \omega = 2\xi_0 \wedge \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 \neq 0$ . Во втором — разложима и имеет нулевой квадрат.  $\square$

#### Лемма 2.5

Две прямые  $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}_3$  пересекаются тогда и только тогда, когда их образы при отображении Плюккера (2-13) ортогональны относительно плюккеровой квадрики, т. е.

$$\tilde{q}(\mathbf{u}(\ell_1), \mathbf{u}(\ell_2)) = \mathbf{u}(\ell_1) \wedge \mathbf{u}(\ell_2) = 0.$$

**Доказательство.** Пусть  $\ell_1 = \mathbb{P}(U_1)$ ,  $\ell_2 = \mathbb{P}(U_2)$ . Если  $U_1 \cap U_2 = 0$ , то  $V = U_1 \oplus U_2$  и существует базис  $\{e_i\} \subset V$  такой, что  $U_1$  натянуто на  $e_0, e_1$  и  $U_2$  натянуто на  $e_2, e_3$ . Таким образом,  $\mathbf{u}(U_1) = e_0 \wedge e_1$ ,  $\mathbf{u}(U_2) = e_2 \wedge e_3$  и  $\mathbf{u}(U_1) \wedge \mathbf{u}(U_2) = e_0 \wedge e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \neq 0$ . Если  $U_1 \cap U_2 \neq 0$ , то, взяв  $u_0 \subset U_1 \cap U_2$ , мы можем написать:  $\mathbf{u}(U_1) = u_0 \wedge u_1$ ,  $\mathbf{u}(U_2) = u_0 \wedge u_2$  для некоторых  $u_1, u_2$ . Следовательно,  $\mathbf{u}(U_1) \wedge \mathbf{u}(U_2) = u_0 \wedge u_1 \wedge u_0 \wedge u_2 = 0$ .  $\square$

**Следствие 2.14**

Плюккерово отображение (2-13) инъективно и определяет биекцию между грассmannианом  $\text{Gr}(2, 4)$  и квадрикой Плюккера  $P \subset \mathbb{P}_5$ .

**Доказательство.** Для любых двух различных прямых  $\ell_1 \neq \ell_2$  на  $\mathbb{P}_3$  найдётся третья прямая  $\ell$ , которая пересекает  $\ell_1$  и не пересекает  $\ell_2$ . Тогда  $\mathbf{u}(\ell_1) \wedge \mathbf{u}(\ell) = 0$  и  $\mathbf{u}(\ell_2) \wedge \mathbf{u}(\ell) \neq 0$ , т. е.  $\mathbf{u}(\ell_1) \neq \mathbf{u}(\ell_2)$  и отображение (2-13) инъективно. То, что его образ равен  $P$ , следует из лем. 2.4.  $\square$

**Упражнение 2.20.** Существует ли комплексная  $2 \times 4$ -матрица, шесть  $2 \times 2$ -миноров которой образуют множество: а)  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  б)  $\{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  (если да, представьте такую матрицу явно).

**Следствие 2.15**

Для любой точки  $p = \mathbf{u}(\ell) \in P$  квадрика  $P \cap T_p P$ , высекаемая на квадрике Плюккера касательным пространством в точке  $p$ , состоит из плюккеровых образов  $\mathbf{u}(\ell')$  всех прямых  $\ell' \subset \mathbb{P}_3$ , пересекающих  $\ell$ .

**Доказательство.** Подпространство  $T_p P \subset \mathbb{P}_5$  есть множество нулей линейной формы  $\tilde{q}(\mathbf{u}(\ell), *)$ , и, согласно лемме лем. 2.5,  $\tilde{q}(\mathbf{u}(\ell), \mathbf{u}(\ell')) = 0 \iff \ell \cap \ell' \neq \emptyset$ .  $\square$

**2.6.1. Связки и пучки прямых в  $\mathbb{P}_3$ .** Множество прямых на  $\mathbb{P}_3$  называется *связкой*, если оно представляется плоскостью  $\pi \subset P \subset \mathbb{P}_5$ . Если  $\pi \subset P$  натянуто на 3 неколлинеарные точки  $p_i = \mathbf{u}(\ell_i)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , т. е.  $\pi = P \cap T_{p_1} P \cap T_{p_2} P \cap T_{p_3} P$ , то по лемме лем. 2.5 и следствию сл. 2.15 соответствующая связка прямых состоит из всех прямых, которые пересекают 3 данные попарно пересекающиеся прямые  $\ell_i$ . Три прямых в  $\mathbb{P}_3$  попарно пересекаются только тогда, когда они либо лежат в одной плоскости, либо проходят через одну точку. Таким образом, существуют два геометрически разных типа связок прямых на  $\mathbb{P}_3$ :

*$\alpha$ -плоскость*  $\pi_\alpha(O) \subset P$  является образом  $\alpha$ -связки, состоящей из всех прямых, проходящих через данную точку  $O \in \mathbb{P}_3$ , и линейно порождается плюккеровыми образами любых трёх некомпланарных прямых, проходящих через  $O$ ;

*$\beta$ -плоскость*  $\pi_\beta(\Pi) \subset P$  является образом  $\beta$ -связки, состоящей из всех прямых, лежащих в данной плоскости  $\Pi \in \mathbb{P}_3$ , и линейно порождается плюккеровыми образами любых трёх лежащих в  $\Pi$  прямых, не проходящих там через одну точку.

При этом любые две плоскости одного и того же типа обязательно пересекаются ровно по одной точке:  $\pi_\beta(\Pi_1) \cap \pi_\beta(\Pi_2) = \mathbf{u}(\Pi_1 \cap \Pi_2)$ ,  $\pi_\alpha(O_1) \cap \pi_\alpha(O_2) = \mathbf{u}((O_1 O_2))$ , а две плоскости  $\pi_\beta(\Pi)$  и  $\pi_\alpha(O)$  различных типов либо не пересекаются (когда  $O \notin \Pi$ ), либо пересекаются по прямой, изображающей на квадрике Плюккера пучок прямых  $\ell \subset \Pi$ , проходящих  $O \in \Pi$  (когда  $O \in \Pi$ ).

Упражнение 2.21. Покажите, что всякая прямая, лежащая на плюккеровой квадрике, является пересечением  $\alpha$ - и  $\beta$ -плоскости (т. е. все пучки прямых в  $\mathbb{P}_3$  исчерпываются пучками прямых, лежащих в некоторой плоскости и проходящих там через одну точку).

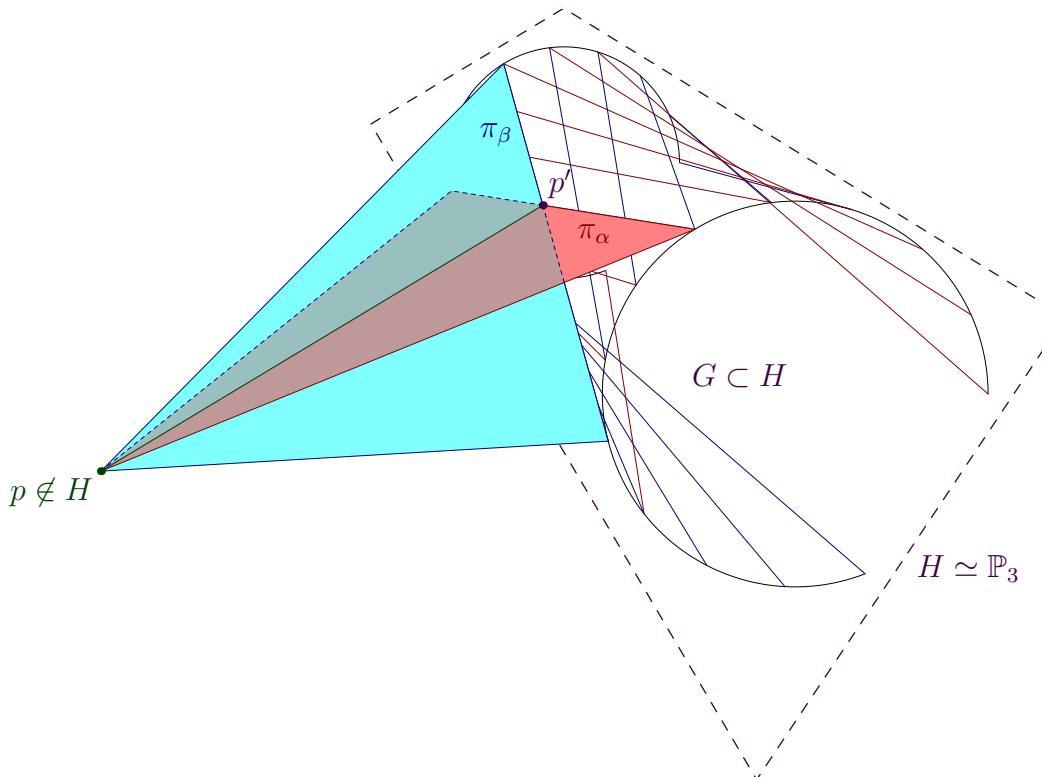
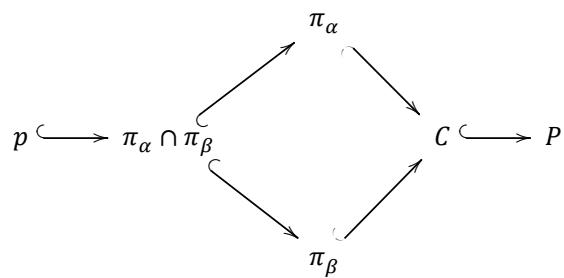


Рис. 2◦11. Конус  $C = P \cap T_p P$ .

**2.6.2. Клеточное разбиение  $\text{Gr}(2, 4)$ .** Фиксируем некоторую 3-мерную гиперплоскость  $H \subset T_p P$ , дополнительную к точке  $p \in P$  в 4-мерном касательном пространстве  $T_p P$  к квадрике Плюккера  $P \subset \mathbb{P}_5$ . Особая квадрика  $C = P \cap T_p P$  представляет собой простой конус с вершиной  $p$  над неособой квадрикой  $G = H \cap P$ , изоморфной квадрике Сегре в  $\mathbb{P}_3$  (см. рис. 2◦11). Рассмотрим следующую стратификацию плюккеровой квадрики замкнутыми подмножествами:



Она индуцирует разбиение  $P$  в дизъюнктное объединение открытых клеток<sup>1</sup>, изоморфных аффинным пространствам:

$$\text{Gr}(2, 4) = \mathbb{A}^0 \sqcup \mathbb{A}^1 \sqcup \left( \begin{array}{c} \mathbb{A}^2 \\ \sqcup \\ \mathbb{A}^2 \end{array} \right) \sqcup \mathbb{A}^3 \sqcup \mathbb{A}^4$$

В самом деле, сначала мы имеем проективную прямую без точки:  $(\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \setminus p \simeq \mathbb{A}^1$ , затем пару проективных плоскостей без прямой:  $\pi_\alpha \setminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \simeq \pi_\beta \setminus (\pi_\alpha \cap \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^2$ , далее  $C \setminus (\pi_\alpha \cup \pi_\beta) \simeq \mathbb{A}^1 \times (G \setminus (G \cap T_{p'}G))$  (поскольку  $C$  является конусом над  $G$ ), и, наконец,  $G \setminus (G \cap T_{p'}G) \simeq \mathbb{A}^2$  и  $Q \setminus C \simeq \mathbb{A}^4$  в силу следующей леммы:

### Лемма 2.6

Проекция неособой квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$  из любой точки  $p \in Q$  на произвольную гиперплоскость  $H \not\ni p$  устанавливает биекцию<sup>2</sup> дополнения  $Q \setminus (Q \cap T_p Q)$  с аффинным пространством  $\mathbb{A}^{n-1} = H \setminus (H \cap T_p Q)$ .

**Доказательство.** Каждая прямая, которая проходит через  $p$  и не касается  $Q$ , пересекает квадрику ещё ровно в одной отличной от  $p$  точке, координаты которой, по теореме Виета, рационально зависят от прямой.  $\square$

**Упражнение 2.22.** Если вы знакомы с клеточными гомологиями, покажите, что над  $\mathbb{C}$  все группы нечетномерных гомологий  $\text{Gr}(2, 4)$  равны нулю, а группы четномерных гомологий суть  $H_0 = H_2 = H_6 = H_8 = \mathbb{Z}$  и  $H_4 = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ . Попытайтесь вычислить и гомологии действительного грассмана (это сложнее, поскольку в вещественном случае граничные отображения будут нетривиальны).

## Задачи для самостоятельного решения к §2

**Задача 2.1.** Напишите явное уравнение<sup>3</sup>, задающее пучок коник, проходящих через точки  $a = (1 : 0 : 0)$ ,  $b = (0 : 1 : 0)$ ,  $c = (0 : 0 : 1)$ ,  $d = (1 : 1 : 1)$ . Сколько в нём

<sup>1</sup>каждая аффинная клетка является плотным открытым подмножеством в соответствующем страте предыдущей диаграммы, дополнительное к объединению всех содержащихся в нём стратов меньшей размерности

<sup>2</sup>на самом деле алгебраический изоморфизм, т. е. обратимое преобразование, задаваемое в координатах (как само, так и обратное) рациональными алгебраическими функциями; в частности, над  $\mathbb{k} = \mathbb{C}$  это будет аналитический диффеоморфизм

<sup>3</sup>т. е. квадратичную форму, коэффициенты которой линейно зависят от двух параметров

вырожденных коник?

Задача 2.2. Могут ли все коники в некотором пучке коник быть вырожденными?

Задача 2.3. Пусть в пучке коник присутствует гладкая коника. Может ли в нём быть ровно  
а) 0    б) 1    в) 2    г) 3    д) 4    вырожденных коники?

Задача 2.4. Могут ли две гладкие коники пересекаться ровно по    а) 1    б) 2    в) 3    точкам? Если да, приведите соответствующие примеры.

Задача 2.5. Сколько общих касательных может быть у двух гладких коник?

Задача 2.6 (теорема Ламе). Покажите, что поляры данной точки  $a \in \mathbb{P}_2$  относительно всех коник из произвольного пучка коник на  $\mathbb{P}_2$  пересекаются в одной точке.

Задача 2.7. Назовём двойным отношением  $[a, b, c, d]$  четырёх точек гладкой коники  $C$  двойное отношение четырёх прямых  $[(pa), (pb), (pc), (pd)]$  в пучке прямых с центром в некоторой пятой точке  $p \in C$ . Покажите, что оно не зависит от выбора  $p$  и что две хорды  $C$  тогда и только сопряжены относительно  $C$  когда их концы гармоничны на  $C$ .

Задача 2.8. Покажите, что ассоциированный с четырёхвершинником  $abcd$  треугольник<sup>1</sup>  $xuz$  автополярен<sup>2</sup> относительно любой гладкой коники  $C$ , проходящей через все 4 вершины  $a, b, c, d$ .

Задача 2.9. Покажите, что два треугольника тогда и только тогда перспективны<sup>3</sup>, когда они полярны друг другу относительно некоторой коники.

Задача 2.10. Каково уравнение гладкой коники  $C$  в базисе  $(e_0, e_1, e_2)$ , если треугольник  $e_0e_1e_2$   
а) вписан в  $C$       б) описан вокруг  $C$   
в) автополярен относительно  $C$ ?

Задача 2.11 (построение Штейнера). Обоснуйте показанное на рис. 2◦12 построение<sup>4</sup> одной линейкой поляры  $\ell(p)$  данной точки  $p$  относительно данной коники  $C$ .

Задача 2.12. Одной линейкой постройте касательную к данной конике  $C$  в данной точке  $p \in C$ .

Задача 2.13. Покажите, что две разных инволюции коммутируют, если и только если пары их неподвижных точек гармоничны, а три разных инволюции тогда и только тогда составляют (вместе с  $\text{Id}_C$ ) группу Клейна  $\mathbb{Z}/(2) \times \mathbb{Z}/(2)$ , когда прямые, соединяющие пары их неподвижных точек, образуют автополярный треугольник.

Задача 2.14. Используя только линейку, постройте треугольник, вписанный в данную гладкую конику  $C$  так, что прямые, содержащие его стороны, проходят через 3 задан-

<sup>1</sup> см. рис. 1◦10 на стр. 20

<sup>2</sup> симплекс называется *автополярным* относительно гладкой квадрики, если поляра каждой из его вершин содержит все остальные вершины

<sup>3</sup> см. зад. 1.11 на стр. 22

<sup>4</sup> принадлежащее Якову Штейнеру (1796-1863), см. Я. Штейнер. Геометрические построения, выполняемые с помощью прямой линии и неподвижного круга. «Харьковская математическая библиотека», Харьков, 1910 (или любое другое издание)

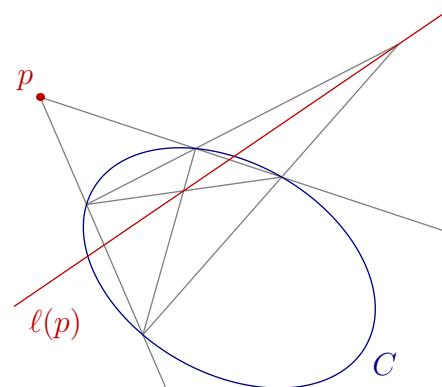


Рис. 2◦12. Построение поляры.

ные точки. Сколько решений может иметь эта задача?

Задача 2.15. Сформулируйте и решите задачу, проективно двойственную к зад. 2.14.

Задача 2.16 (гомографии между пучками прямых). Для точки  $p \in \mathbb{P}_2$  и прямой  $\ell \subset \mathbb{P}_2$  условимся обозначать через  $p^\times = \text{Ann } p \subset \mathbb{P}_2^\times$  прямую, точки которой задают всевозможные прямые на  $\mathbb{P}_2$ , проходящие через  $p$ , а через  $\ell^\times = \text{Ann } \ell \in \mathbb{P}_2$  — уравнение прямой  $\ell$ . Рассмотрим на  $\mathbb{P}_2$  два пучка прямых  $p_1^\times$  и  $p_2^\times$ , проходящих через различные точки  $p_1, p_2 \in \mathbb{P}_2$ . Покажите, что для любой гомографии  $\varphi : p_1^\times \rightarrow p_2^\times$  существует единственная коника  $C$ , проходящая через  $p_1$  и  $p_2$ , такая что  $p_1^\times \cap \varphi(\ell') = \ell'' \iff \ell' \cap \ell'' \in C$ .

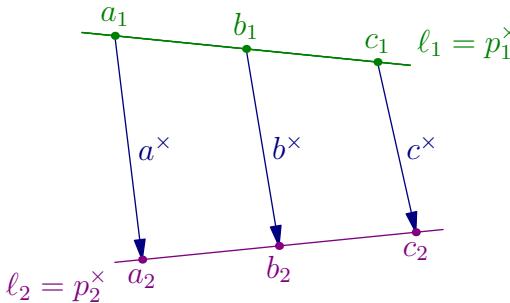


Рис. 2♦13. Гомография прямых на  $\mathbb{P}_2^\times$ .

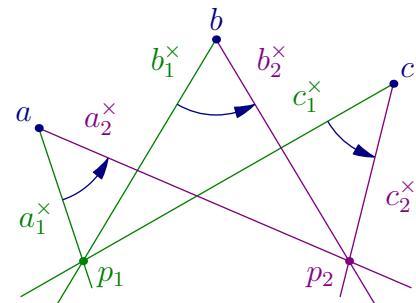


Рис. 2♦14. Гомография пучков  $p_1^\times \sim p_2^\times$ .

Для этого рассмотрите любые три прямые  $a_1^\times = (p_1, a)$ ,  $b_1^\times = (p_1, b)$  и  $c_1^\times = (p_1, c)$  из пучка  $p_1^\times$ , отвечающие некоторым трём точкам  $a_1, b_1, c_1$  на прямой  $p_1^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$ , и их образы  $a_2^\times = (p_2, a)$ ,  $b_2^\times = (p_2, b)$  и  $c_2^\times = (p_2, c)$  из пучка  $p_2^\times$  (см. рис. 2♦13 и рис. 2♦14), обозначьте через

$$a = a_1^\times \cap a_2^\times, \quad b = b_1^\times \cap b_2^\times, \quad c = c_1^\times \cap c_2^\times$$

точки пересечений соответственных прямых и убедитесь, что никакие четыре из пяти точек  $p_1, p_2, a, b, c$  не коллинеарны и что через них проходит единственная коника  $C$ . Затем разберите два случая:

- а) если точки  $a, b, c$  коллинеарны, как на рис. 2♦15, или одна из точек  $a, b, c$  лежит на прямой  $(p_1, p_2)$ , то коника  $C$  распадается в объединение прямой  $(p_1, p_2)$  и ещё одной прямой  $\ell$ , которая представляет собою<sup>1</sup> ГМТ пересечения  $\ell' \cap \varphi(\ell')$ , где  $\ell'$  пробегает пучок  $p_1^\times$

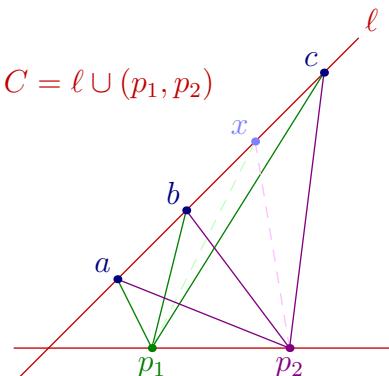


Рис. 2♦15. Перспектива пучков прямых.

<sup>1</sup>в терминах двойственной плоскости  $\mathbb{P}_2^\times$  соответствующая гомография  $\varphi : \ell_1 \rightarrow \ell_2$  является перспективой с центром в точке  $\ell^\times \in \mathbb{P}_2^\times$

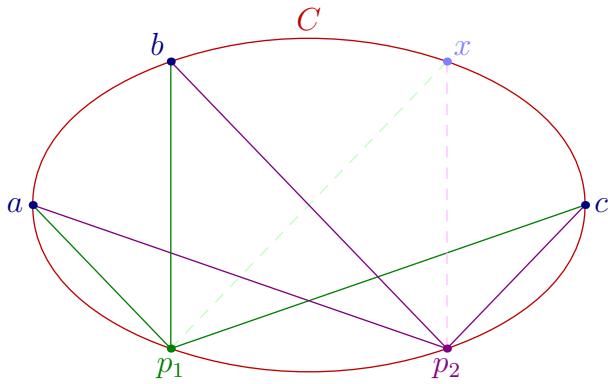


Рис. 2◦16. Неперспективная гомография пучков прямых.

б) если никакие 3 из 5 точек  $p_1, p_2, a, b, c$  не коллинеарны<sup>1</sup>, как на рис. 2◦16, то ГМТ пересечения  $\ell' \cap \varphi(\ell')$ , где  $\ell'$  пробегает пучок  $p_1^\times$  — это гладкая коника  $C$ .

Задача 2.17. В условиях предыдущей задачи покажите, что для любой гомографии

$$\varphi : p_1^\times \xrightarrow{\sim} p_2^\times$$

существует точка, в которой пересекаются все прямые, соединяющие пары точек пересечений  $\ell' \cap \varphi(\ell'')$  и  $\ell'' \cap \varphi(\ell')$ , где  $\ell', \ell'' \in p_1^\times$ .

Задача 2.18. Для данных четырёх точек  $p_1, p_2, p_3, p_4 \in \mathbb{P}_2$ , никакие три из которых не коллинеарны, и числа  $\vartheta \in \mathbb{k}$  опишите ГМТ  $q \in \mathbb{P}_2$ , таких что в пучке  $q^\times \subset \mathbb{P}_2^\times$  всех проходящих через  $q$  прямых на  $\mathbb{P}_2$  двойное отношение  $[(qp_1), (qp_2), (qp_3), (qp_4)] = \vartheta$ .

Задача 2.19\* (2-2 соответствие на конике). Будем называть 2-2 *соответствием*<sup>2</sup> на гладкой конике  $C$  всякую кривую  $\Gamma \subset C \times C$ , задаваемую во внутренних однородных координатах на  $C$  уравнением  $f(x, y) = 0$ , где  $f \in \mathbb{k}[x_0, x_1, y_0, y_1]$  однороден степени 2 как по  $x = (x_0 : x_1)$ , так и по  $y = (y_0 : y_1)$ , и симметричен:  $f(x, y) = f(y, x)$ . Пары точек  $(p, q) \in \Gamma$  называются *соответственными* (или *образом* и *прообразом* друг друга), что записывается как  $q \in \Gamma(p)$ ,  $p \in \Gamma^{-1}(q)$ . Соответствие называется *невырожденным*, если у каждой точки, лежащей вне некоторого конечного множества, имеется ровно по два различных образа и прообраза. Покажите, что любое симметричное алгебраическое 2-2 соответствие на  $C$

- а) либо вырождено, либо имеет не более 4 неподвижных<sup>3</sup> точек
- б) является сопряжением относительно некоторой коники<sup>4</sup>  $C'$
- в) высекается касательными к некоторой конике<sup>5</sup>  $C''$

Задача 2.20\*. Опишите все вырожденные 2-2 соответства.

Задача 2.21\* (поризм Понселе). Фиксируем натуральное  $n \geq 3$  и две различных гладких коники  $C_1$  и  $C_2$  на  $\mathbb{P}_2$ . Покажите, что если существует  $n$ -угольник, одновременно

<sup>1</sup>в терминах двойственной плоскости  $\mathbb{P}_2^\times$  соответствующая гомография  $\varphi : \ell_1 \rightarrow \ell_2$  высекается касательными к двойственной конике  $C^\times$

<sup>2</sup>точнее, симметричным алгебраическим 2-2 соответствием

<sup>3</sup>т. е. входящих в множество своих (про)образов

<sup>4</sup>т. е.  $p, q \in C$  соответственны если и только если они сопряжены относительно  $C'$

<sup>5</sup>т. е.  $p, q \in C$  соответственны если и только если прямая  $(p, q)$  касается  $C''$

вписанный в  $C_1$  и описанный около  $C_2$ , то такой  $n$ -угольник можно нарисовать с вершиной в любой точке  $p \in C_1$ , за исключением, разве что, конечного множества точек, дающих «вырожденные<sup>1</sup>»  $n$ -угольники.

**Задача 2.22.** Покажите, что следующие три свойства оператора  $F : \mathbb{k}^2 \rightarrow \mathbb{k}^2$  эквивалентны друг другу: а)  $F \in T_{\xi \otimes v} Q_s$  б)  $F(\text{Ann}(\xi)) \subset \mathbb{k} \cdot v$  в)  $F = \xi \otimes w + \eta \otimes v$  для некоторых  $\eta \in \mathbb{P}_1^\times$ ,  $w \in \mathbb{P}_1$  и что действие ассоциированного с невырожденным оператором  $F \in \text{GL}(\mathbb{k}^2)$  дробно линейного изоморфизма  $\bar{F} : \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_1$  на произвольную точку  $p = \text{Ann}(\xi) \in \mathbb{P}_1$  допускает следующее геометрическое описание: проведём в  $\mathbb{P}_3$  плоскость  $\pi$  через точку  $F$  и отвечающую  $\xi$  прямолинейную образующую  $L' = \xi \times \mathbb{P}_1$  на квадрике Серре  $Q_s \subset \mathbb{P}_3$ ; тогда  $\pi$  пересечёт  $Q_s$  по распавшейся конике, состоящей из образующей  $L'$  и ещё одной образующей  $L''$ , лежащей в другом семействе, и имеющей вид  $L'' = \mathbb{P}_1 \times v$ , где  $v = \bar{F}(p)$ .

**Задача 2.23.** Сколько прямых пересекают 4 данные попарно скрещивающиеся прямые в пространствах а)  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^4)$  б)  $\mathbb{A}(\mathbb{C}^4)$  в)  $\mathbb{P}(\mathbb{R}^4)$  г)  $\mathbb{A}(\mathbb{R}^4)$ ? Найдите все возможные ответы и выясните, какие из них устойчивы к малым шевелениям четырёх данных прямых<sup>2</sup>.

**Задача 2.24.** Из скольких точек состоят над полем  $\mathbb{F}_9$  из девяти элементов<sup>3</sup>

а) коника  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$  на  $\mathbb{P}_2$  б) квадрика  $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$  в  $\mathbb{P}_3$ .

**Задача 2.25.** Рассмотрим в  $\mathbb{P}_3$  пару прямых  $\ell_1$  и  $\ell_2$  и три точки  $a, b, c$ , никакие две из которых не лежат в одной плоскости ни с одной из прямых  $\ell_1, \ell_2$ . Зададим гомографию

$$\varphi : \ell_1^\times \simeq \ell_2^\times,$$

между пучком плоскостей, проходящих через прямую  $\ell_1$ , и пучком плоскостей, проходящих через прямую  $\ell_2$ , отправив три проходящие через точки  $a, b$  и  $c$  плоскости первого пучка соответственно в три проходящие через точки  $a, b$  и  $c$  плоскости второго пучка. Верно ли, что фигура, заметаемая в  $\mathbb{P}_3$  прямыми пересечений  $\pi \cap \varphi(\pi)$ , где  $\pi$  пробегает пучок  $\ell_1^\times$ , представляет собою квадрику? Рассмотрите два случая: а)  $\ell_1 \cap \ell_2 = \emptyset$  б)  $\ell_1 \cap \ell_2 \neq \emptyset$ .

**Задача 2.26.** Пусть  $A \in \text{Hom}(U, V) \simeq U^* \otimes V$ ,  $B \in \text{Hom}(V, W) \simeq V^* \otimes W$  — два линейных отображения, разложенные как  $A = \sum \alpha_\nu \otimes a_\nu$ ,  $B = \sum \beta_\mu \otimes b_\mu$  с  $\alpha_\nu \in U^*$ ,  $a_\nu \in V$ ,  $\beta_\mu \in V^*$ ,  $b_\mu \in W$ . Разложите аналогично их произведение  $B \circ A \in \text{Hom}(U, W) \simeq U^* \otimes W$ .

**Задача 2.27.** Имеют ли место разложения а)  $V^{\otimes 2} \simeq S^2 V \oplus \Lambda^2 V$  б)  $V^{\otimes 3} \simeq S^3 V \oplus \Lambda^3 V$  для любого векторного пространства  $V$  над полем характеристики нуль? Если да, докажите, если нет, предъявите тензор, который так не раскладывается.

**Задача 2.28 (спинорное разложение).** Пусть  $V = \text{Hom}(U_-, U_+)$ , где  $\dim U_\pm = 2$ . Покажите, что  $V = U_-^* \otimes U_+$ , разложение  $V^{\otimes 2}$  на симметрическую и кососимметрическую

<sup>1</sup>с меньшим числом сторон и/или с повторяющимися сторонами

<sup>2</sup>указание: примените «метод геометрических мест» — рассмотрите все прямые, пересекающие некоторые три из заданных четырёх, и выясните, какие из них пересекают оставшуюся четвёртую прямую.

<sup>3</sup>напомним, что поле  $\mathbb{F}_9 = \mathbb{Z}[x]/(3, x^2 + 1)$  состоит из чисел вида  $a + b\sqrt{-1}$ , где  $a, b \in \mathbb{Z}/(3)$  суть вычеты по модулю 3, и  $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = -1 \in \mathbb{Z}/(3)$

составляющие иммеет вид

$$\underbrace{((S^2U_-^* \otimes S^2U_+) \oplus (\Lambda^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+))}_{S^2V} \bigoplus \underbrace{((S^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+) \oplus (\Lambda^2U_-^* \otimes S^2U_+))}_{\Lambda^2V}.$$

Задача 2.29. Пусть  $G \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$  — невырожденная квадрика, заданная квадратичной формой  $g$ , поляризация которой есть  $\tilde{g}$ . Покажите, что билинейная форма  $\Lambda^2\tilde{g}$  на  $\Lambda^2V$ , которая действует на разложимых бивекторах как

$$\Lambda^2\tilde{g}(v_1 \wedge v_2, w_1 \wedge w_2) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} \tilde{g}(v_1, w_1) & \tilde{g}(v_1, w_2) \\ \tilde{g}(v_2, w_1) & \tilde{g}(v_2, w_2) \end{pmatrix},$$

является симметричной и неврожденной, и запишите ее явную матрицу Грама в подходящем базисе (допустим, приходящем из ортонормированного базиса для  $g$  in  $V$ ). Покажите, что пересечение соответствующей квадрики  $\Lambda^2G \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2V)$  с квадрикой Плюккера состоит из всех касательных к  $G \subset \mathbb{P}_3$ .

Задача 2.30. Пусть в обозначениях предыдущей задачи  $\text{Gr}(2, V)$  — грассманово многообразие прямых в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ . Покажите, что вложение Плюккера  $\text{Gr}(2, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^2V)$  переводит два семейства прямых, живущих на квадрике Серге  $G \subset \mathbb{P}(V) = \mathbb{P}(\text{Hom}(U_-, U_+))$  в пару невырожденных плоских коник, которые вырезаются из квадрики Плюккера  $P \subset \mathbb{P}(\Lambda^2V)$  двумя дополнительными плоскостями

$$\Lambda_- = \mathbb{P}(S^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+) \quad \text{и} \quad \Lambda_+ = \mathbb{P}(\Lambda^2U_-^* \otimes S^2U_+),$$

лежащими в  $\mathbb{P}(\Lambda^2\text{Hom}(U_-, U_+))$  по зад. 2.28. Более того, обе коники вложены в эти плоскости по Веронезе, т. е. мы имеем следующую коммутативную диаграмму<sup>1</sup>:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{P}(U_+) & \xrightarrow{\text{Веронезе}} & \mathbb{P}(S^2U_+) \simeq \Lambda_+ & & \\ \uparrow \pi_+ & & \downarrow & & \\ \mathbb{P}_1^+ \times \mathbb{P}_1^- & \xrightarrow[\sim]{\text{Серге}} & G \subset \mathbb{P}\text{Hom}(U_-, U_+) & \dashrightarrow P \subset \mathbb{P} \left( \begin{matrix} \Lambda^2U_-^* \otimes S^2U_+ \\ \oplus \\ S^2U_-^* \otimes \Lambda^2U_+ \end{matrix} \right) & \\ \downarrow \pi_- & & \text{Веронезе} & & \uparrow \\ \mathbb{P}(U_-^*) & \xrightarrow{\text{Веронезе}} & \mathbb{P}(S^2U_-^*) \simeq \Lambda_- & & \end{array}$$

Задача 2.31 (звёздочка Ходжа). В условиях предыдущих трёх задач, оператор Ходжа

$$*: \Lambda^2V \xrightarrow{\omega \mapsto \omega^*} \Lambda^2V,$$

ассоциированный с невырожденной квадратичной формой  $g$  на  $V$ , определяется соотношением

$$\omega_1 \wedge \omega_2^* = \Lambda^2\tilde{g}(\omega_1, \omega_2) \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

в котором  $\omega_{1,2} \in \Lambda^2$  произвольны, а  $e_i \in V$  составляют фиксированный ортонормальный базис формы  $g$ . Покажите что это определение корректно (не зависит от выбора базиса), найдите собственные значения и собственные подпространства оператора Ходжа и укажите место последних на предыдущей картинке.

<sup>1</sup>Плюккер пунктирный, ибо отображает прямые в точки

### §3. Тензорные заморочки

**3.1. Тензорные произведения и многообразия Серге.** С целью сделать изложение самодостаточным и фиксировать обозначения, мы по ходу дела напоминаем все необходимые определения и конструкции, относящиеся к тензорам. Читатель, так или иначе знакомый с этими понятиями может без ущерба для понимания проглядеть этот параграф «по диагонали».

**3.1.1. Тензорные произведения.** Рассмотрим векторные пространства  $V_1, V_2, \dots, V_n$  и  $W$  размерностей  $d_1, d_2, \dots, d_n$  и  $m$  над произвольным полем  $\mathbb{k}$ . Отображение

$$\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$$

называется *полилинейным*, если оно линейно по каждому своему аргументу, когда все остальные аргументы произвольным образом фиксированы:

$$\varphi(\dots, \lambda v' + \mu v'', \dots) = \lambda \varphi(\dots, v', \dots) + \mu \varphi(\dots, v'', \dots).$$

Полилинейные отображения можно складывать и умножать на числа, так что они образуют векторное пространство, которое мы обозначим через

$$\text{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W).$$

Если зафиксировать в каждом  $V_i$  некоторый базис  $\{e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}\}$ , а также какой-либо базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$  в  $W$ , то полилинейное отображение  $\varphi \in \text{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W)$  можно однозначно задать набором его значений на всех комбинациях базисных векторов:

$$\varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)}) = \sum_{\nu} a_{\nu}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \cdot e^{\nu} \in W,$$

т. е. набором из  $m \cdot \prod d_{\nu}$  чисел  $a_{\nu}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \in \mathbb{k}$ , которые при желании можно воспринимать как элементы некоей «матрицы»  $(n+1)$ -мерного формата<sup>1</sup>  $m \times d_1 \times d_2 \times \dots \times d_n$ .

Отображение  $\varphi$  с заданной матрицей переводит набор векторов  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ , в котором  $v_i = \sum_{\alpha_i=1}^{d_i} x_{\alpha_i}^{(i)} e_{\alpha_i}^{(i)} \in V_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , в вектор

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) = \sum_{\nu=1}^m \left( \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n} a_{\nu}^{(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \cdot x_{\alpha_1}^{(1)} \cdot x_{\alpha_2}^{(2)} \cdot \dots \cdot x_{\alpha_n}^{(n)} \right) \cdot e^{\nu} \in W,$$

и сложению и умножению на числа отображений отвечают покомпонентные сложение и умножение на числа их матриц. Таким образом,

$$\dim \text{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W) = \dim W \cdot \prod_{\nu} \dim V_{\nu}.$$

**Упражнение 3.1.** Проверьте, что:

а) набор векторов  $(v_1, v_2, \dots, v_n) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$  тогда и только тогда не содержит

---

<sup>1</sup>если Вы в состоянии таковую себе представить – обычные матрицы, дающие *линейные* отображения  $V \rightarrow W$ , имеют 2-мерный формат  $d \times m$

нулевого вектора, когда существует полилинейное отображение  $\varphi$  (куда-нибудь), такое что  $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n) \neq 0$

б) композиция полилинейного отображения  $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow U$  с любым линейным оператором  $F : U \rightarrow W$  является полилинейным отображением.

Рассмотрим какое-нибудь полилинейное отображение

$$\tau : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow U. \quad (3-1)$$

Взятие композиции этого отображения со всевозможными линейными операторами

$$F : U \rightarrow W$$

в произвольно зафиксированное пространство  $W$  задаёт *линейное отображение* из пространства  $\text{Hom}(U, W)$  линейных операторов  $U \xrightarrow{F} W$  в пространство полилинейных отображений  $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$ :

$$\text{Hom}(U, W) \xrightarrow{F \mapsto F \circ \tau} \text{Hom}(V_1, V_2, \dots, V_n; W). \quad (3-2)$$

**Определение 3.1**

Полилинейное отображение (3-1) называется *универсальным*, если для всех пространств  $W$  линейный оператор (3-2) является изоморфизмом.

Иначе говоря, полилинейное отображение  $\tau$  универсально, если для любого пространства  $W$  и любого полилинейного отображения  $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$  существует единственный линейный оператор  $F : U \rightarrow W$  такой, что  $\varphi = F \circ \tau$ , т. е. пара *полилинейных сплошных стрелок* в диаграмме

$$\begin{array}{ccc} & & U \\ & \nearrow \tau & \downarrow F \\ V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n & & \downarrow \varphi \\ & \searrow & \end{array}$$

всегда замыкается в коммутативный треугольник *единственным* пунктирным линейным отображением.

**Лемма 3.1**

Любые два универсальных полилинейных отображения

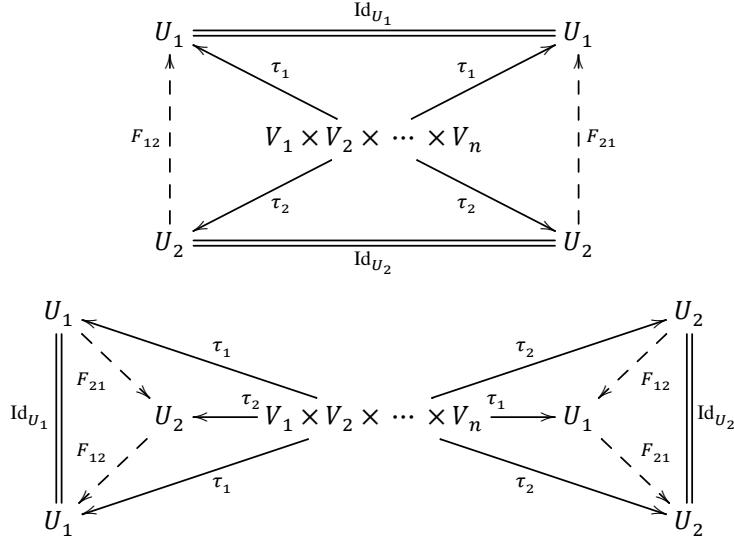
$$\tau_1 : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow U_1 \quad \text{и} \quad \tau_2 : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow U_2$$

канонически отождествляются при помощи единственного линейного изоморфизма

$$\iota : U_1 \rightarrow U_2,$$

такого что  $\tau_2 = \iota \tau_1$ .

**Доказательство.** Поскольку и  $U_1$ , и  $U_2$  оба универсальны, существуют единственны линейные операторы  $F_{21} : U_1 \rightarrow U_2$  и  $F_{12} : U_2 \rightarrow U_1$ , которые встраиваются в коммутативные диаграммы



Обе композиции  $F_{21}F_{12} = \text{Id}_{U_2}$ ,  $F_{12}F_{21} = \text{Id}_{U_1}$ , поскольку канонические представления  $\tau_1 = \varphi \circ \tau_1$ ,  $\tau_2 = \psi \circ \tau_2$  самих универсальных полилинейных отображений, в силу единственности таких представлений, возможны только с  $\varphi = \text{Id}_{U_1}$ ,  $\psi = \text{Id}_{U_2}$ .  $\square$

### Лемма 3.2

Пусть векторы  $e_1^{(i)}, e_2^{(i)}, \dots, e_{d_i}^{(i)}$  образуют базис пространства  $V_i$  (где  $1 \leq i \leq n$ ). Обозначим через  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$  векторное пространство размерности  $\prod d_i$  с базисом

$$e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}, \quad 1 \leq \alpha_i \leq d_i \quad (3-3)$$

(всевозможные формальные тензорные произведения базисных векторов  $e_v^{(\mu)}$ ). Тогда полилинейное отображение  $\tau : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ , переводящее набор базисных векторов  $(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)}) \in V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$  в их тензорное произведение (3-3), является универсальным.

**Доказательство.** Для любого полилинейного отображения  $\varphi : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow W$  и линейного отображения  $F : V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n \rightarrow W$  равенство  $\varphi = F \circ \tau$  как раз и означает, что  $F(e_{\alpha_1}^{(1)} \otimes e_{\alpha_2}^{(2)} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_n}^{(n)}) = \varphi(e_{\alpha_1}^{(1)}, e_{\alpha_2}^{(2)}, \dots, e_{\alpha_n}^{(n)})$  на каждом наборе базисных векторов.  $\square$

### Определение 3.2

Векторное пространство  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$  называется *тензорным произведением* пространств  $V_1, V_2, \dots, V_n$ , а универсальное полилинейное отображение

$$\tau : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n \rightarrow V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$$

*тензорным умножением* векторов. Образ  $\tau(v_1, v_2, \dots, v_n)$  всякого набора векторов обозначается через  $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n$ . Такие произведения называются *разложимыми тензорами*.

**3.1.2. Многообразия Сегре.** Поскольку отображение  $\tau$  не линейно, а только полилинейно, его образ — множество разложимых тензоров — не является векторным подпространством в  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ , а образует внутри  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$  нелинейное подмногообразие, проективизация которого называется *многообразием Сегре*. Говоря точнее, многообразие Сегре определяется как образ *отображения Сегре* из прямого произведения проективных пространств  $\mathbb{P}_{m_i} = \mathbb{P}(V_i)$  в пространство  $\mathbb{P}_m = \mathbb{P}(V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n)$ :

$$s : \mathbb{P}_{m_1} \times \dots \times \mathbb{P}_{m_n} \rightarrow \mathbb{P}_m,$$

которое переводит набор одномерных подпространств  $\mathbb{k} \cdot v_i \subset V_i$ , порождённых ненулевыми векторами  $v_i \in V_i$ , в одномерное подпространство

$$\mathbb{k} \cdot v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \subset V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n.$$

**Упражнение 3.2.** Проверьте, что это отображение корректно определено<sup>1</sup> и является вложением.

Поскольку по лем. 3.2 разложимые тензоры линейно порождают всё пространство  $V_1 \otimes V_2 \otimes \dots \otimes V_n$ , многообразие Сегре не лежит ни в какой гиперплоскости. Однако его размерность существенно меньше размерности объемлющего пространства и «общий» (в любом разумном смысле) тензор не разложим. По построению, многообразие Сегре заматается  $n$  семействами проективных подпространств размерностей  $m_1, m_2, \dots, m_n$ , где  $m_i = d_i - 1$ . Квадрика Сегре из № 2.4.1 является простейшим примером такого многообразия.

**Пример 3.1 (изоморфизм  $U^* \otimes V \simeq \text{Hom}(U, V)$  и разложимые операторы)**

Для любых двух векторных пространств  $U$  и  $W$  имеется билинейное отображение

$$U^* \times W \rightarrow \text{Hom}(U, V),$$

сопоставляющее паре  $(\xi, w) \in U^* \times W$  линейное отображение  $U \rightarrow W$ , действующее по правилу

$$U \ni u \longmapsto \xi(u)w \in W. \quad (3-4)$$

Это оператор ранга 1, образом которого является 1-мерное подпространство в  $W$ , натянутое на вектор  $w$ , а ядром — подпространство  $\text{Ann}(\xi) \subset U$  коразмерности 1.

**Упражнение 3.3.** Покажите, что всякий оператор  $F : U \rightarrow W$  ранга 1 представляется в виде (3-4) с подходящими  $\xi \in U^*$  и  $w \in W$ .

В силу универсальности тензорного произведения, существует единственное линейное отображение

$$U^* \otimes V \rightarrow \text{Hom}(U, V) \quad (3-5)$$

переводящее каждый разложимый тензор  $\xi \otimes w$  в оператор (3-4).

**Упражнение 3.4.** Покажите, что когда оба пространства  $U$  и  $V$  конечномерны, это отображение является изоморфизмом.

---

<sup>1</sup>т. е. тензор  $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n$  отличен от нуля и заменяется на пропорциональный при замене векторов  $v_i$  на пропорциональные

На геометрическом языке операторы ранга 1, рассматриваемые с точностью до пропорциональности, составляют многообразие Сегре  $S \subset \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\text{Hom}(U, W))$ . Оно линейно порождает всё пространство  $\mathbb{P}(\text{Hom}(U, W))$ . Если использовать в качестве однородных координат на  $\mathbb{P}(\text{Hom}(V, W))$  матричные элементы  $(a_{ij})$  операторов в каких-нибудь фиксированных базисах, то многообразие Сегре можно задать в этих координатах системой квадратичных уравнений — обращением в нуль всех миноров второго порядка:

$$\det \begin{pmatrix} a_{ij} & a_{ik} \\ a_{\ell j} & a_{\ell k} \end{pmatrix} = a_{ij}a_{\ell k} - a_{ik}a_{\ell j} = 0.$$

Отображение Сегре  $\mathbb{P}_{n-1} \times \mathbb{P}_{m-1} = \mathbb{P}(U^*) \times \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}_{mn-1} = \mathbb{P}(\text{Hom}(U, W))$ , переводящее пару точек  $(\xi, w)$  в точку  $\xi \otimes w$ , устанавливает биекцию между произведением проективных пространств и многообразием Сегре. Оно переводит пару точек с однородными координатами  $(x_1 : x_2 : \dots : x_n)$  и  $(y_1 : y_2 : \dots : y_n)$  в точку, однородными координатами которой являются  $m n$  всевозможных произведений  $x_j y_i$ , т. е. матрица  $y^t \cdot x$  ранга 1 (произведение столбца  $y$  на строку  $x$ ). Два семейства «координатных плоскостей»  $\xi \times \mathbb{P}_{m-1}$  и  $\mathbb{P}_{n-1} \times w$  при этом перейдут в два семейства проективных пространств, заматающих многообразие Сегре. При  $\dim U = \dim W = 2$  мы получаем в точности обсуждавшуюся в п. 2.4.1 биекцию между  $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$  и детерминантной квадрикой Сегре в  $\mathbb{P}_3$ .

### 3.2. Тензорная алгебра и свёртки. Тензорное произведение

$$V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_n$$

называется  $n$ -той *тензорной степенью* пространства  $V$ . Мы по определению полагаем

$$V^{\otimes 0} = \mathbb{k} \quad \text{и} \quad V^{\otimes 1} = V.$$

Все тензорные степени объединяются в прямую сумму

$$TV \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{n \geq 0} V^{\otimes n}.$$

Тензорное умножение векторов задаёт на пространстве  $TV$  структуру ассоциативной некоммутативной градуированной алгебры. Если выбрать в пространстве  $V$  какой-нибудь базис  $\{e_\nu\}$ , то эта алгебра становится изоморфна алгебре многочленов от *некоммутирующих* переменных  $e_\nu$ : по лем. 3.2 всевозможные (некоммутативные) мономы вида

$$e_{\nu_1} \otimes e_{\nu_2} \otimes \dots \otimes e_{\nu_m} \tag{3-6}$$

составят базис пространства  $TV$  над  $\mathbb{k}$ , и перемножение мономов (3-6) состоит в приписывании их друг к другу через значок  $\otimes$ . Компонента  $V^{\otimes n} \subset TV$  при такой интерпретации становится пространством всех однородных некоммутативных многочленов степени  $n$ .

Алгебра  $TV$  называется *тензорной алгеброй* пространства  $V$ , а также *свободной ассоциативной  $\mathbb{k}$ -алгеброй*, порожденной пространством  $V$ . Второе название обусловлено универсальным свойством вложения

$$\iota : V \hookrightarrow TV \tag{3-7}$$

в качестве подпространства  $V^{\otimes 1}$ . Это свойство аналогично универсальному свойству базиса свободного модуля: для любой ассоциативной  $\mathbb{k}$ -алгебры  $A$  и любого  $\mathbb{k}$ -линейного отображения векторных пространств  $f : V \rightarrow A$  существует единственный гомоморфизм алгебр  $\alpha : TV \rightarrow A$  такой, что  $f = \alpha \circ \iota$ . Иными словами, гомоморфизмы алгебр  $TV \rightarrow A$  биективно соответствуют линейным отображениям  $V \rightarrow A$ .

**Упражнение 3.5.** Следуя доказательству лем. 3.1 убедитесь, что алгебра  $TV$  вместе с вложением (3-7) определяются этим свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с (3-7), и проверьте, что для описанного выше вложения (3-7) это универсальное свойство действительно выполнено.

**3.2.1. Двойственность и полная свёртка.** Тензорные степени  $V^{\otimes n}$  и  $(V^*)^{\otimes n}$  конечномерного пространства  $V$  канонически двойственны друг другу:

$$(V^{\otimes n})^* \simeq (V^*)^{\otimes n}. \quad (3-8)$$

Спаривание между ними называется *полной свёрткой* и сопоставляет разложимым тензорам  $v = v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$  и  $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$  произведение

$$\langle v, \xi \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \prod_{i=1}^n \xi_i(v_i). \quad (3-9)$$

Поскольку правая часть полилинейна по каждому  $v_i$  и  $\xi_i$ , правило  $v \mapsto \langle v, \xi \rangle$  корректно продолжается до линейного функционала  $V^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{k}$ , который, в свою очередь, полилинейно зависит от каждого  $\xi_i$ , и значит сопоставление разложимому  $\xi \in V^{*\otimes n}$  такого функционала корректно продолжается до линейного отображения  $V^{*\otimes n} \rightarrow (V^{\otimes n})^*$ , при котором действие разложимых «ковекторных» тензоров на разложимые «векторные» тензоры задаётся правилом (3-9).

Конечномерность существенна для проверки того, что это отображение изоморфизм. Выберем двойственные базисы

$$e_1, e_2, \dots, e_n \subset V, \quad x_1, x_2, \dots, x_n \subset V^* \quad : \quad x_i(e_j) = \delta_{ij}$$

и рассмотрим соответствующие базисы в  $V^{\otimes n}$  и  $(V^*)^{\otimes n}$  из тензорных мономов

$$e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \quad \text{и} \quad x_{j_1} \otimes x_{j_2} \otimes \dots \otimes x_{j_s}.$$

Из (3-9) немедленно вытекает, что они двойственны друг другу.

Из универсального свойства тензорного произведения  $V^{\otimes n}$  тавтологически получается ещё одна двойственность — пространство  $(V^{\otimes n})^*$  линейных отображений  $V^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{k}$  канонически изоморфно пространству  $n$ -линейных форм  $\underbrace{V \times V \times \dots \times V}_n \rightarrow \mathbb{k}$ :

$$(V^{\otimes n})^* \simeq \text{Hom}(V, \dots, V; \mathbb{k}). \quad (3-10)$$

Комбинируя изоморфизмы (3-8) и (3-10) получаем канонический изоморфизм

$$(V^*)^{\otimes n} \simeq \text{Hom}(V, \dots, V; \mathbb{k}), \quad (3-11)$$

который сопоставляет разложимому тензору  $\xi = \xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_n \in V^{*\otimes n}$   $n$ -линейную форму на  $V \times V \times \dots \times V$  со значениями в поле  $\mathbb{k}$ , действующую по правилу

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) \mapsto \prod_{i=1}^n \xi_i(v_i).$$

**3.2.2. Частичные свёртки.** Зафиксируем какие-нибудь два инъективных (но не обязательно монотонных) отображения

$$\{1, 2, \dots, p\} \xleftarrow{I} \{1, 2, \dots, m\} \xrightarrow{J} \{1, 2, \dots, q\}$$

и будем, как обычно, писать  $i_v$  и  $j_v$  вместо  $I(v)$  и  $J(v)$ . Образы этих отображений суть упорядоченные (но не обязательно по возрастанию) наборы неповторяющихся индексов  $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ ,  $J = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ , состоящие из одинакового числа элементов. Линейный оператор

$$c_J^I : V^{*\otimes p} \otimes V^{\otimes q} \rightarrow V^{*\otimes(p-m)} \otimes V^{\otimes(q-m)}$$

сворачивающий для каждого  $v = 1, 2, \dots, m$   $i_v$ -тый сомножитель в  $V^{*\otimes p}$  с  $j_v$ -тым сомножителем в  $V^{\otimes q}$  и оставляющий все остальные сомножители стоящими в том же порядке, в каком они стояли

$$\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_p \otimes v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_q \mapsto \prod_{v=1}^m \xi_{i_v}(v_{j_v}) \cdot (\otimes_{i \notin I} \xi_i) \otimes (\otimes_{j \notin J} v_j) \quad (3-12)$$

называется *частичной сверткой* по индексам  $I$  и  $J$ . Подчеркнём, что при разных выборах отображений  $I$  и  $J$  будут, как правило, получаться *различные* отображения свёртки.

Пример 3.2 (свертка вектора с полилинейной формой)

Если при помощи изоморфизма (3-11) проинтерпретировать  $n$ -линейную форму

$$\varphi(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

как тензор из  $V^{*\otimes n}$  и свернуть его по первому тензорному сомножителю с вектором  $v \in V$ , мы получим тензор из  $V^{*\otimes(n-1)}$ , который можно обратно проинтерпретировать как  $(n-1)$ -линейную форму на  $V$ . Полученная форма называется *внутренним произведением*  $v$  и  $\varphi$  и обозначается  $i_v \varphi$  или  $v_L \varphi$ .

Упражнение 3.6. Проверьте, что внутреннее умножение на  $v$  есть не что иное, как фиксация  $v$  в качестве первого аргумента формы  $\varphi$ :

$$i_v \varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1}).$$

**3.2.3. Линейный носитель тензора.** Для заданного тензора  $t \in V^{\otimes n}$  обозначим через  $\text{Supp}(t) \subset V$  пересечение всех векторных подпространств  $U \subset V$ , таких что  $t \in U^{\otimes n}$ . Иначе  $\text{Supp}(t)$  можно охарактеризовать как наименьшее по включению подпространство  $U \subset V$ , такое что  $t \in U^{\otimes n}$ , или как наименьшее по размерности подпространство с таким свойством. Правомочность всех этих переформулировок вытекает из того, что если  $t \in U^{\otimes n}$  и  $t \in W^{\otimes n}$  для некоторых подпространств  $U, W \subset V$ , то  $t \in (U \cap W)^{\otimes n}$ .

В самом деле, выберем в  $V$  базис  $e_1, \dots, e_p, u_1, \dots, u_q, w_1, \dots, w_r, v_1, \dots, v_s$ , такой что  $e_i$  образуют базис в  $U \cap W$ ,  $u_j$  и  $w_k$  дополняют его до базисов в  $U$  и  $W$  соответственно, а  $v_m$  дополняют всё предыдущее до базиса в  $V$ , и разложим  $t$  по базисным тензорным мономам. Условие  $t \in U^{\otimes n} \cap W^{\otimes n}$  означает, что в  $t$  входят только мономы, не содержащие никаких иных векторов, кроме  $e_i$ , что мы и утверждали.

Определение 3.3

Подпространство  $\text{Supp}(t)$ , описанное выше, называется *линейным носителем* тензора  $t$ , а его размерность  $\dim \text{Supp}(t)$  — *рангом* тензора  $t$ .

**3.2.4. Вырожденные тензоры.** Тензоры, ранг которых меньше размерности пространства  $V$ , на котором они определены, называются *вырожденными*. Условие  $\text{Supp}(t) \neq V$  означает, что тензор  $t$  эффективно зависит от меньшего числа «координат», чем имеется в  $V$ , т. е. существует линейная замена базиса, уничтожающая часть переменных в многочлене  $t$ . Например, если  $\dim \text{Supp}(t) = 1$ , то  $t = c \cdot v^{\otimes n}$  для некоторого  $c \in \mathbb{k}$  и  $v \in V$ , порождающего  $\text{Supp}(t)$ .

**3.2.5. Линейные порождающие носителя.** Для нахождения ранга данного тензора  $t$  желательно иметь более явное описание  $\text{Supp}(t)$  — например, в виде линейной оболочки конкретного конечного набора векторов, эффективно вычислимого по  $t$ . Одно из таких описаний можно получить при помощи свёрток.

А именно, для каждого инъективного (не обязательно монотонного) отображения

$$J = (j_1, j_2, \dots, j_{n-1}) : \{1, 2, \dots, (n-1)\} \hookrightarrow \{1, 2, \dots, n\} \quad (3-13)$$

рассмотрим отображение полной свёртки с тензором  $t$ , спаривающее  $v$ -й сомножитель  $V^{*\otimes(n-1)}$  с  $j_v$ -тым сомножителем  $t$  для всех  $1 \leq v \leq (n-1)$ :

$$\begin{aligned} c_t^I : V^{*\otimes(n-1)} &\rightarrow V \\ \xi &\longmapsto c_{(j_1, j_2, \dots, j_{n-1})}^{(1, 2, \dots, (n-1))}(\xi \otimes t) \end{aligned} \quad (3-14)$$

в результате чего тензор  $t$  превращается в линейную комбинацию векторов, стоявших в том тензорном сомножителе, номер которого не попал в образ отображения  $I$ . Очевидно, что эта линейная комбинация лежит в  $\text{Supp}(t)$ .

### Теорема 3.1

Пространство  $\text{Supp}(t)$  линейно порождается образами всех отображений свёртки (3-14) со всевозможными выборами сворачиваемых индексов (3-13).

**Доказательство.** Пусть  $\text{Supp}(t) = W$ . Чтобы убедиться в том, что образы свёрток (3-14) линейно порождают  $W$ , достаточно доказать, что каждая линейная форма  $\xi \in V^*$ , которая аннулирует все подпространства  $\text{im } (c_t^I)$ , аннулирует и подпространство  $W$ .

Предположим противное: пусть  $\xi \in V^*$  имеет ненулевое ограничение на  $W$ , но аннулирует все  $c_t^I(V^{*\otimes(n-1)})$ . Выберем в  $V^*$  такой базис  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_d$ , чтобы  $\xi_1 = \xi$ , а ограничения  $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$  на  $W$  составляли базис в  $W^*$ . Обозначим через  $w_1, w_2, \dots, w_k$  двойственный к нему базис в  $W$  и разложим  $t$  по этому базису. Значение  $\xi(c_t^I(\xi_{v_1} \otimes \xi_{v_2} \otimes \dots \otimes \xi_{v_{n-1}}))$  равно полной свёртке  $t$  с базисным мономом  $\xi_1 \otimes \xi_{v_1} \otimes \xi_{v_2} \otimes \dots \otimes \xi_{v_{n-1}}$  (по индексам, переставленным согласно отображению  $I$ ), которая, в свою очередь, равна коэффициенту при соответствующем двойственном мономе из разложения  $t$ . Выбирая подходящие  $I$ , мы можем таким образом получить коэффициент при любом содержащем  $w_1$  мономе из разложения  $t$ . Следовательно, все эти коэффициенты нулевые, т. е.  $t$  не зависит от  $w_1$  и, тем самым,  $w_1$  не входит в  $\text{Supp}(t)$  — противоречие.  $\square$

### 3.3. Условия (косо) симметричности. Полилинейное отображение

$$\varphi : \underbrace{V \times V \times \dots \times V}_n \rightarrow U \quad (3-15)$$

называется *симметричным*, если при перестановках аргументов оно не изменяет своего значения, и *кососимметричным*, если оно принимает нулевое значение, когда какие-то два из аргументов совпадают.

**Упражнение 3.7.** Покажите, что значение кососимметричного полилинейного отображения изменяет знак при перестановке любых двух аргументов, а над полем характеристики  $\neq 2$  этого условия также и достаточно для кососимметричности.

Симметричные и кососимметричные полилинейные отображения (3-15) составляют в векторном пространстве всех полилинейных отображений  $\text{Hom}(V, \dots, V; U)$  подпространства, которые мы будем обозначать, соответственно, через

$$\text{Sym}^n(V, U) \subset \text{Hom}(V, \dots, V; U) \quad \text{и} \quad \text{Skew}^n(V, U) \subset \text{Hom}(V, \dots, V; U).$$

Взятие композиции фиксированного (косо) симметричного отображения

$$\varphi : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_n \rightarrow U$$

с линейными операторами  $F : U \rightarrow W$  задаёт линейное отображения  $F \mapsto F \circ \varphi$  из  $\text{Hom}(U, W)$  в  $\text{Sym}^n(V, W)$  (соотв. в  $\text{Skew}^n(V, W)$ ). (Косо)симметричное полилинейное отображение  $\varphi$  называется *универсальным*, если это отображение — изоморфизм для всех  $W$ .

Универсальное симметричное полилинейное отображение обозначается через

$$\sigma : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_n \rightarrow S^n V \tag{3-16}$$

и называется *коммутативным произведением* векторов, а модуль  $S^n V$ , в который оно действует, называется *n-той симметрической степенью* модуля  $V$ . Произведение

$$\sigma(v_1, v_2, \dots, v_n)$$

обычно обозначается через  $v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_n$  или просто  $v_1 v_2 \dots v_n$ .

Универсальное кососимметричное полилинейное отображение обозначается через

$$\alpha : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_n \rightarrow \Lambda^n V \tag{3-17}$$

и называется *внешним* (или *суперкоммутативным*) произведением векторов, а модуль  $\Lambda^n V$ , в который оно действует, называется *n-той внешней степенью* модуля  $V$ . Произведение  $\alpha(v_1, v_2, \dots, v_n)$  принято обозначать через  $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$ .

**Упражнение 3.8.** Покажите, что  $S^n V$  и  $\Lambda^n V$  (если они существуют) единственны с точностью до единственного изоморфизма, коммутирующего с универсальным отображением.

Существование универсального (косо)симметричного полилинейного отображения вытекает из существования тензорного произведения: симметрическая и внешняя степени модуля  $V$  получаются из тензорной степени наложением дополнительных соотношений (анти) коммутирования. Это можно сделать одновременно для всех  $n$  беря факторы свободной ассоциативной алгебры по (двусторонним) идеалам, порождённым соотношениями (анти) коммутирования.

**3.3.1. Симметрическая алгебра пространства  $V$ .** Рассмотрим в тензорной алгебре  $TV$  пространства  $V$  двусторонний идеал  $\mathcal{I}_{\text{sym}} \subset TV$ , порождённый линейным подпространством в  $V \otimes V$ , натянутым на всевозможные разности

$$u \otimes w - w \otimes u. \quad (3-18)$$

По определению, он состоит из конечных линейных комбинаций всевозможных тензоров, которые можно получить из тензоров (3-18), умножая их слева и справа (или одновременно и слева и справа) на любые элементы тензорной алгебры. Пересечение этого идеала с однородной компонентой  $V^{\otimes n}$  представляет собою линейную оболочку всевозможных разностей разложимых тензоров вида

$$(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) - (\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots) \quad (3-19)$$

(обозначенные многоточиями фрагменты не меняются), а весь идеал является прямой суммой таких однородных компонент:

$$\mathcal{I}_{\text{sym}} = \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{I}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n}).$$

Фактор алгебра  $SV \stackrel{\text{def}}{=} TV/\mathcal{I}_{\text{sym}}$  называется *симметрической алгеброй* векторного пространства  $V$ , а индуцированное в ней умножение называется *симметрическим умножением* и обозначается точкой (которую принято опускать). Симметрическая алгебра является прямой суммой своих однородных компонент:

$$SV = \bigoplus_{n \geq 0} S^n V, \quad \text{где} \quad S^n V \stackrel{\text{def}}{=} V^{\otimes n}/(\mathcal{I}_{\text{sym}} \cap V^{\otimes n}).$$

Если зафиксировать базис  $e_1, e_2, \dots, e_d \subset V$ , то алгебра  $SV$  можно отождествить с алгеброй  $\mathbb{k}[e_1, e_2, \dots, e_d]$  обычных коммутативных многочленов от базисных векторов  $e_i$ , а подпространство  $S^n V \subset \mathbb{k}[e_1, e_2, \dots, e_d]$  — с пространством однородных полиномов степени  $n$ .

Упражнение 3.9. Найдите  $\dim S^n V$ .

Предложение 3.1

Композиция тензорного умножения с факторизацией по  $\mathcal{I}_{\text{sym}}$ :

$$\sigma : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_n \xrightarrow{\tau} V^{\otimes n} \xrightarrow{\pi} S^n(V) \quad (3-20)$$

является универсальной симметрической полилинейной формой (т. е. коммутативным умножением (3-16)).

Доказательство. Любое полилинейное отображение  $\varphi : V \times V \times \cdots \times V \rightarrow W$  единственным образом разлагается в композицию  $\varphi = F \circ \tau$ , где  $F : V^{\otimes n} \rightarrow W$  линейно. При этом  $F$  пропускается через  $\pi$  тогда и только тогда, когда

$$F(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) = F(\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots),$$

что равносильно тому что  $\varphi(\dots, v, w, \dots) = \varphi(\dots, w, v, \dots)$ .  $\square$

**Упражнение 3.10.** Убедитесь, что  $SV$  является *свободной коммутативной алгеброй*, порождённой  $V$ , в том смысле, что для любой коммутативной  $\mathbb{k}$ -алгебры  $A$  и любого линейного отображения  $f : V \rightarrow A$  существует единственный гомоморфизм алгебр  $\tilde{f} : SV \rightarrow A$  такой, что  $f = \tilde{f} \circ \iota$ , где  $\iota : V \hookrightarrow SV$  вкладывает  $V$  в  $SV$  в качестве многочленов первой степени. Проверьте также, что  $SV$  и  $\iota$  определяются этим универсальным свойством однозначно с точностью до единственного изоморфизма алгебр, перестановочного с  $\iota$ .

**3.3.2. Внешняя алгебра пространства  $V$**  определяется как фактор алгебра

$$\Lambda V \stackrel{\text{def}}{=} TV / \mathcal{I}_{\text{skew}}$$

свободной ассоциативной алгебры  $TV$  по двустороннему идеалу  $\mathcal{I}_{\text{skew}} \subset TV$ , порожденному всеми тензорами вида

$$v \otimes v \in V \otimes V. \quad (3-21)$$

**Упражнение 3.11.** Покажите, что подпространство  $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes 2}$  содержит все суммы

$$v \otimes w + w \otimes v \quad (\text{с любыми } v, w \in V),$$

и если  $1 + 1$  обратимо в  $K$ , то  $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes 2}$  линейно порождается такими суммами.

Как и в симметричном случае, идеал  $\mathcal{I}_{\text{skew}}$  является прямой суммой своих однородных компонент

$$\mathcal{I}_{\text{skew}} = \bigoplus_{n \geq 0} (\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n})$$

и его компонента  $n$ -той степени  $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}$  является линейной оболочкой разложимых тензоров вида  $(\cdots \otimes v \otimes v \otimes \cdots)$  и по упр. 3.11 содержит все суммы вида

$$(\cdots \otimes v \otimes w \otimes \cdots) + (\cdots \otimes w \otimes v \otimes \cdots). \quad (3-22)$$

Фактор алгебра  $\Lambda V$  называется *внешней* (или *гравссмановой*) алгеброй пространства  $V$ . Как и симметрическая алгебра, она является прямой суммой подпространств

$$\Lambda^n V = V^{\otimes n} / (\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^{\otimes n}).$$

**Упражнение 3.12.** Докажите, что композиция тензорного умножения с факторизацией по идеалу  $\mathcal{I}_{\text{skew}}$

$$\alpha : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_n \xrightarrow{\tau} V^{\otimes n} \xrightarrow{\pi} \Lambda^n(V) \quad (3-23)$$

является универсальным кососимметричным полилинейным отображением (3-17).

Индуктированное умножение в алгебре  $\Lambda V$  называется *внешним* (а также *суперкоммутативным* или *гравссмановым*) и обозначается  $v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_n$ . Согласно упр. 3.11 оно меняет знак при перестановке любых двух последовательных сомножителей, и стало быть, при произвольной перестановке сомножителей внешнее произведение умножается на знак перестановки.

**3.3.3. Грассмановы многочлены.** Как и в симметрическом случае, фиксация базиса  $e_1, e_2, \dots, e_d \subset V$  отождествляет внешнюю алгебру с алгеброй *грассмановых многочленов* от базисных векторов  $e_i$

$$\Lambda V \simeq \mathbb{k} \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle .$$

По построению, грассмановы переменные  $e_i$  антисимметричны:  $e_i \wedge e_j = -e_j \wedge e_i$ , и всякий грассманов моном линеен по каждой входящей в него переменной. Таким образом, любой грассманов моном степени  $n$  с точностью до знака можно записать в виде

$$e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}, \quad \text{где } I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \quad \text{и} \quad 1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_n \leq d. \quad (3-24)$$

Лемма 3.3

Мономы (3-24) с  $I$ , пробегающим все строго возрастающие  $n$ -элементные подмножества в  $\{1, 2, \dots, d\}$ , образуют базис пространства  $\Lambda^n V$  однородных грассмановых мономов степени  $n$ . В частности,  $\Lambda^n V = 0$  для  $n > \dim V$ ,  $\dim \Lambda^n V = \binom{d}{n}$ , и  $\dim \mathbb{k} \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle = 2^d$ .

Доказательство. Рассмотрим  $\binom{d}{n}$ -мерное векторное пространство  $U$ , базис которого состоит из символов  $\xi_I$ , где  $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  пробегает все возрастающие  $n$ -элементные подмножества в  $\{1, 2, \dots, d\}$ . Определим кососимметрическое полилинейное отображение

$$\alpha : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_n \rightarrow U : (e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) \mapsto \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \xi_I ,$$

где  $I = (j_{\sigma(1)}, j_{\sigma(2)}, \dots, j_{\sigma(n)})$  — это единственная возрастающая перестановка индексов

$$(j_1, j_2, \dots, j_n) .$$

Проверим, что построенное отображение универсально. Для любого кососимметрического полилинейного отображения

$$\varphi : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_n \rightarrow W$$

правило  $F(\alpha(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n})$  корректно определяет единственно возможный линейный оператор  $U \xrightarrow{F} W$  такой, что  $\varphi = F \circ \alpha$ . Поэтому имеется канонический изоморфизм между  $U$  и  $\Lambda^n V$ , переводящий  $\xi_I$  в  $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} = e_I$ .  $\square$

**Упражнение 3.13.** Проверьте, что  $f(e) \wedge g(e) = (-1)^{\deg(f) \cdot \deg(g)} g(e) \wedge f(e)$  для всех однородных  $f(e), g(e) \in \mathbb{k} \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle$ . В частности, каждый однородный многочлен четной степени коммутирует с любым грассмановым многочленом.

**Упражнение 3.14.** Опишите центр алгебры  $\mathbb{k} \langle e_1, e_2, \dots, e_d \rangle$ , т. е. все грассмановы полиномы, коммутирующие с *каждым* элементом этой алгебры.

Пример 3.3 (линейная замена переменных)

При линейной подстановке  $e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \xi_j$  базисные мономы  $e_I$  меняются на новые базисные мономы  $\xi_I$  следующим образом:

$$\begin{aligned} e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} &= \left( \sum_{j_1} a_{i_1 j_1} \xi_j \right) \wedge \left( \sum_{j_2} a_{i_2 j_2} \xi_j \right) \wedge \cdots \wedge \left( \sum_{j_n} a_{i_n j_n} \xi_j \right) = \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq n} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{i_1 j_{\sigma(1)}} a_{i_2 j_{\sigma(2)}} \cdots a_{i_n j_{\sigma(n)}} \xi_{j_1} \wedge \xi_{j_2} \wedge \cdots \wedge \xi_{j_n} = \sum_J a_{IJ} \xi_J, \end{aligned}$$

где  $a_{IJ}$  — это  $n \times n$ -минор матрицы  $(a_{ij})$ , расположенный в строках с номерами  $i_1, i_2, \dots, i_n$  и столбцах с номерами  $j_1, j_2, \dots, j_n$ , а  $J$  пробегает все возрастающие совокупности индексов *длины*  $\#J = n$ .

Упражнение 3.15. Для всякого строго возрастающего набора индексов  $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  будем называть сумму всех индексов  $|I| \stackrel{\text{def}}{=} \sum_v i_v$  его *весом*, а количество индексов  $\#I \stackrel{\text{def}}{=} n$  — его *длиной*. Проверьте, что

$$e_I \wedge e_{\hat{I}} = (-1)^{|I| + \frac{1}{2}\#I(1+\#I)} \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_d \quad (3-25)$$

для каждого двух *дополнительных* совокупностей индексов  $I$  и  $\hat{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$ .

Пример 3.4 (соотношения Сильвестра)

Фиксируем два дополнительных набора индексов  $I$  и

$$\hat{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{1, 2, \dots, n\} \setminus I$$

и сделаем замену базиса  $e_i = \sum_{j=1}^d a_{ij} \xi_j$  в равенстве (3-25). Его левая часть  $e_I \wedge e_{\hat{I}}$  после замены превратится в

$$\left( \sum_{K: \#K=\#I} a_{IK} \xi_K \right) \wedge \left( \sum_{L: \#L=(d-\#I)} a_{IL} \xi_L \right) = (-1)^{\frac{1}{2}\#I(1+\#I)} \sum_{K: \#K=\#I} (-1)^{|K|} a_{IK} a_{I\hat{K}} \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_d,$$

где  $\hat{K} = \{1, 2, \dots, d\} \setminus K$ , а правая часть — в  $(-1)^{\frac{1}{2}\#I(1+\#I)} (-1)^{|I|} \det(a_{ij}) \xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \cdots \wedge \xi_d$ . Таким образом, для любого набора  $I$  строк произвольной квадратной матрице  $(a_{ij})$  справедливы следующие соотношения:

$$\sum_{K: \#K=\#I} (-1)^{|K|+|I|} a_{IK} \hat{A}_{IK} = \det(a_{ij}), \quad (3-26)$$

где  $\hat{A}_{IK} \stackrel{\text{def}}{=} a_{I\hat{K}}$  обозначает  $(d-n) \times (d-n)$ -минор, дополнительный<sup>1</sup> к  $a_{IK}$ , и суммирование идёт по всем  $(n \times n)$ -минорам  $a_{IK}$ , содержащимся в строках  $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ . Если теперь

<sup>1</sup>т. е. находящимся в дополнительных строках и столбцах

проделать ту же выкладку, взяв вместо  $\hat{I}$  набор  $\hat{J}$ , дополнительный к  $J \neq I$ , то в правой части (3-25) мы будем иметь  $0 = e_I \wedge e_J$ , что приведёт к соотношению

$$\sum_{\substack{K: \\ \#K=\#I}} (-1)^{|K|+|I|} a_{IK} \hat{A}_{JK} = 0 , \quad (3-27)$$

Тождества (3-26) и (3-27) известны как *соотношения Сильвестра* (или теорема о разложении определителя по набору строк и теорема об умножении на чужие алгебраические дополнения). Если как-то упорядочить множество всех мультииндексов  $I$  (например, лексикографически), организовать все  $(n \times n)$ -миноры  $a_{IJ}$  в одну квадратную матрицу  $A^{(n)} \stackrel{\text{def}}{=} (a_{IJ})$  размера  $\binom{d}{n} \times \binom{d}{n}$  и обозначить через  $\hat{A}^{(n)}$  матрицу,  $(IJ)$ -элемент которой равен  $(-1)^{|I|+|J|} \hat{A}_{JI}$ , то все соотношения Сильвестра «упакуются» в одно короткое матричное равенство

$$A^{(n)} \cdot \hat{A}^{(n)} = \det(a_{ij}) \cdot E .$$

Пример 3.5 (приведение гравссмановой квадратичной формы к «нормальным осям»)  
Кососимметричный многочлен, разумеется, нельзя «диагонализовать». Однако любой однородный гравссманов многочлен степени два над любым полем в подходящем базисе может быть записан в виде

$$\xi_1 \wedge \xi_2 + \xi_3 \wedge \xi_4 + \dots + \xi_{2r-1} \wedge \xi_{2r} , \quad (3-28)$$

который мы будем называть *каноническим*, и который в практических приложениях часто бывает гораздо удобнее «суммы квадратов». Для доказательства перенумеруем переменные так, чтобы гравссманова квадратичная форма записывалась в виде

$$q(e) = e_1 \wedge (\alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) + e_2 \wedge (\beta_3 e_3 + \dots + \beta_n e_n) + (\text{члены без } e_1 \text{ и } e_2)$$

где  $\alpha_2 \neq 0$ . Перейдём к новому базису  $\{e_1, \xi_2, e_3, \dots, e_n\}$ , в котором

$$\xi_2 = \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n ,$$

и соответственно,  $e_2 = (\xi_2 - \beta_3 e_3 - \dots - \beta_n e_n) / \alpha_2$ . Получим:

$$\begin{aligned} q &= e_1 \wedge \xi_2 + \xi_2 \wedge (\gamma_3 e_3 + \dots + \gamma_n e_n) + (\text{члены без } e_1 \text{ и } \xi_2) = \\ &= (e_1 - \gamma_3 e_3 - \dots - \gamma_n e_n) \wedge \xi_2 + (\text{члены без } e_1 \text{ и } \xi_2) . \end{aligned}$$

Ещё раз перейдём к новому базису  $\{\xi_1, \xi_2, e_3, \dots, e_n\}$ , в котором  $\xi_1 = e_1 - \gamma_3 e_3 - \dots - \gamma_n e_n$ , и получим

$$q = \xi_1 \wedge \xi_2 + (\text{члены без } \xi_1 \text{ и } \xi_2)$$

Далее вся процедура повторяется по индукции.

**Упражнение 3.16.** Пусть  $q(e) = \sum_{ij} a_{ij} e_i \wedge e_j$  — гравссманова квадратичная форма, ассоциированная с кососимметричной матрицей Грама  $A = (a_{ij})$ ,  $a_{ij} = -a_{ji}$ . Докажите, что число  $2r$  (т. е. количество переменных, входящих в каноническое представление (3-28)) не зависит от выбора базиса и равно рангу  $\text{rk } A$  матрицы  $A$  (в частности,  $\text{rk } A$  всегда чётен).

Всюду далее мы по умолчанию считаем, что  $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$ .

**3.3.4. Симметрические и кососимметрические тензоры.** Симметрическая группа  $S_n$  действует на  $V^{\otimes n}$  перестановками сомножителей в разложимых тензорах. А именно, для каждого  $g \in S_n$  положим

$$g(v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n) = v_{g(1)} \otimes v_{g(2)} \otimes \cdots \otimes v_{g(n)}. \quad (3-29)$$

Поскольку правая часть полилинейно зависит от  $v_1, v_2, \dots, v_n$ , эта формула корректно определяет линейный оператор  $g : V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$ .

**Определение 3.4**

Тензор  $t \in V^{\otimes n}$  называется *симметрическим*, если  $g(t) = t$  для всех перестановок  $g \in S^n$ . Тензор  $t \in V^{\otimes n}$  называется *кососимметрическим*, если  $g(t) = \text{sgn}(g) \cdot t$  для всех перестановок  $g \in S^n$ . Подпространства симметрических и кососимметрических тензоров в  $V^{\otimes n}$  обозначаются через

$$\begin{aligned} \text{Sym}^n V &= \{ t \in V^{\otimes n} \mid \sigma(t) = t \quad \forall g \in S_n \} \\ \text{Skew}^n V &= \{ t \in V^{\otimes n} \mid g(t) = \text{sgn}(g) \cdot t \quad \forall g \in S_n \} \end{aligned}$$

**3.3.5. Стандартные базисы.** Зафиксируем в пространстве  $V$  базис

$$e_1, e_2, \dots, e_d.$$

Поскольку вместе с каждым тензорным мономом в любой симметрический тензор входит (с одним и тем же коэффициентом) вся  $S_n$ -орбита этого монома, *полные симметрические тензоры*  $e_{[m_1, m_2, \dots, m_d]}$ , определённые для каждого набора целых неотрицательных чисел  $(m_1, m_2, \dots, m_d) \subset \sum_v m_v = n$  равенством

$$e_{[m_1, m_2, \dots, m_d]} = \left\{ \begin{array}{l} \text{сумма всех различных тензорных мономов,} \\ \text{содержащих } m_1 \text{ множителей } e_1, m_2 \text{ множителей } e_2, \dots \\ \dots m_d \text{ множителей } e_d \end{array} \right\} \quad (3-30)$$

образуют базис пространства симметрических тензоров  $\text{Sym}^n V$ .

Упражнение 3.17. Убедитесь, что сумма в правой части (3-30) состоит из

$$\frac{n!}{m_1! m_2! \cdots m_d!}$$

слагаемых.

Аналогичным образом, *полные кососимметрические тензоры*

$$e_{\langle i_1, i_2, \dots, i_n \rangle} = \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) \cdot e_{i_{g(1)}} \otimes e_{i_{g(2)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{g(n)}} \quad (3-31)$$

составляют базис в пространстве  $\text{Skew}^n V$  (сумма в правой части состоит из  $n!$  слагаемых).

**3.3.6. Симметризация и альтернирование.** Над полем характеристики нуль легко написать явные формулы для проекторов  $n$ -той тензорной степени  $V^{\otimes n}$  на подпространства симметрических и кососимметрических тензоров. Это операторы *симметризации* и *альтернирования*, действующие по правилам

$$\text{sym}_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} g(t) : V^{\otimes n} \rightarrow \text{Sym}^n(V) \quad (3-32)$$

$$\text{alt}_n(t) = \frac{1}{n!} \sum_{g \in S_n} \text{sgn}(g) \cdot g(t) : V^{\otimes n} \rightarrow \text{Skew}^n(V) \quad (3-33)$$

Упражнение 3.18. Установите для любых тензоров  $t \in V^{\otimes n}$ ,  $s \in \text{Sym}^n(V)$  и  $a \in \text{Skew}^n(V)$  при всех  $n \geq 2$  соотношения  
 а)  $\text{sym}_n(t) \in \text{Sym}^n(V)$     б)  $\text{alt}_n(t) \in \text{Skew}^n(V)$   
 в)  $\text{sym}_n(s) = s$     г)  $\text{alt}_n(a) = a$     д)  $\text{sym}_n(a) = \text{alt}_n(s) = 0$ .

Пример 3.6

При  $n = 2$  симметризация и альтернирование доставляют прямое разложение

$$V^{\otimes 2} = \text{Sym}^2(V) \oplus \text{Skew}^2(V). \quad (3-34)$$

В самом деле, поскольку каждый разложимый тензор представляется в виде суммы

$$u \otimes w = \frac{u \otimes w + w \otimes u}{2} + \frac{u \otimes w - w \otimes u}{2} = \text{sym}_2(u \otimes w) + \text{alt}_2(u \otimes w),$$

образы проекторов  $\text{sym}_2$  и  $\text{alt}_2$  порождают  $V^{\otimes 2}$ , а т. к. каждый из них по упр. 3.18 аннулирует образ другого, эти образы имеют нулевое пересечение. Если интерпретировать  $V^{\otimes 2}$  как пространство билинейных форм на  $V^*$ , разложение (3-34) будет ни чем иным, как каноническим разложением билинейной формы в сумму симметрической и кососимметрической.

Пример 3.7

Сравнение размерностей показывает, что при  $n = 3$  тензор общего вида не является суммой своей симметризации и альтернирования. Чтобы найти в пространстве  $V^{\otimes 3}$  дополнительное к  $\text{Sym}^3(V) \oplus \text{Skew}^3(V)$  подпространство, рассмотрим разность

$$p = E - \text{sym}_3 - \text{alt}_3 = (2E - T - T^2)/3, \quad (3-35)$$

где через  $T : V^{\otimes 3} \rightarrow V^{\otimes 3}$  обозначен оператор, отвечающий циклической перестановке  $|123\rangle \in S_3$ , а через  $E = T^3$  — тождественный оператор. Поскольку

$$p^2 = (4E + T^2 + T - 4T - 4T^2 + 2E)/9 = (2E - T - T^2)/3 = p,$$

оператор  $p$  является проектором.

Упражнение 3.19. Покажите, что  $p \circ \text{alt}_3 = \text{alt}_3 \circ p = p \circ \text{sym}_3 = \text{sym}_3 \circ p = 0$  и выведите отсюда, что  $V^{\otimes 3}$  является прямой суммой  $\text{Sym}^3(V)$ ,  $\text{Skew}^3(V)$  и  $\text{im}(p)$ .

Образ проектора  $p$  изящно описывается в терминах 3-линейных форм на  $V^*$ .

Упражнение 3.20. Покажите, что  $\text{im}(p)$  состоит из 3-линейных форм  $\varphi : V^* \times V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{k}$ , удовлетворяющих  $\forall \xi, \eta, \zeta \in V^*$  тождество Якоби  $\varphi(\xi, \eta, \zeta) + \varphi(\eta, \zeta, \xi) + \varphi(\zeta, \xi, \eta) = 0$ , и приведите явный пример такой формы на двумерном пространстве  $V^*$ .

При больших  $n$  разложение  $V^{\otimes n}$  в прямую сумму подпространств тензоров с различными «типами симметрии» становится более сложным и является предметом теории представлений симметрических групп.

**Предложение 3.2**

Если  $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$ , то ограничение симметрического умножения<sup>1</sup>  $V^{\otimes n} \rightarrow S^n V$  на подпространство  $\text{Sym}^n \subset V^{\otimes n}$  и ограничение внешнего умножения<sup>2</sup>  $V^{\otimes n} \rightarrow \Lambda^n V$  на подпространство кососимметрических тензоров  $\text{Skew}^n \subset V^{\otimes n}$  являются изоморфизмами векторных пространств. Действие этих изоморфизмов на стандартные базисные мономы (3-30) и (3-31) задаётся формулами

$$e_{[m_1, m_2, \dots, m_d]} \longmapsto \frac{(m_1 + m_2 + \dots + m_d)!}{m_1! \cdot m_2! \cdots m_d!} \cdot e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_d^{m_d} \in S^n V \quad (3-36)$$

$$e_{\langle i_1, i_2, \dots, i_d \rangle} \longmapsto n! \cdot e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_d} \in \Lambda^n V \quad (3-37)$$

**Доказательство.** Действительно, проекция каждого из  $n! / (m_1! m_2! \cdots m_d!)$  слагаемых суммы (3-30) в симметрическую алгебру равна коммутативному моному  $e_1^{m_1} e_2^{m_2} \cdots e_d^{m_d}$ , а проекция каждого из  $n!$  слагаемых суммы (3-31) во внешнюю алгебру равна грассманову моному  $n! e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}$ .  $\square$

**3.3.7. Предостережения.** Не смотря на изоморфизмы из предл. 3.2, подпространства  $\text{Sym}^n V$  и  $\text{Skew}^n V$ , содержащиеся в  $V^{\otimes n}$ , ни в коем случае не следует путать с фактор пространствами  $S^n V$  и  $\Lambda^n V$ , которые получаются из  $V^{\otimes n}$  склейкой некоторых тензоров между собою. Над полем положительной характеристики  $\text{char}(\mathbb{k}) = p$  все симметрические тензоры, степень которых является степенью  $p$ , и все кососимметрические тензоры, степень которых больше  $p$ , спроектируются при проекциях  $V^{\otimes n} \rightarrow S^n V$  и  $V^{\otimes n} \rightarrow \Lambda^n V$  в нулевые элементы симметрической и внешней алгебры. Даже в характеристике нуль стандартные базисные векторы тензорных и полиномиальных пространств не отождествляются друг с другом изоморфизмами из предл. 3.2, а переходят лишь в некоторые кратности друг друга. Эти поправочные множители приходится учитывать как при попытке поднять на (супер) симметрические тензоры (супер) коммутативное умножение, которое имеется в симметрической и грассмановой алгебрах, так и при попытке спустить в симметрическую и внешнюю алгебры отображения свёртки, которые имеются между тензорами.

**3.4. Поляризация коммутативных многочленов.** Зафиксируем в пространстве  $V$  базис  $e_1, e_2, \dots, e_d$ , а в двойственном пространстве  $V^*$  – двойственный базис  $x_1, x_2, \dots, x_d$ , и отождествим симметрическую алгебру  $SV^*$  с алгеброй многочленов от координат:

$$SV^* \simeq \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_d].$$

Пользуясь этим изоморфизмом, сопоставим каждому элементу  $f \in S^n V^*$  однородную полиномиальную функцию  $f_m : V \rightarrow \mathbb{k}$  степени  $n$ , значение которой на векторе  $v = \sum \alpha_i e_i \in V$  равно числу

$$f_m(v) = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{k}.$$

---

<sup>1</sup>т. е. отображения факторизации по соотношениям коммутирования (3-19)

<sup>2</sup>т. е. отображения факторизации по соотношениям антикоммутирования (3-22)

Покажем, что над полем характеристики нуль определённый таким образом гомоморфизм  $f \mapsto f_m$  из симметрической алгебры  $S^n V^*$  в алгебру функций  $V \rightarrow \mathbb{k}$  не зависит от выбора базиса.

Согласно предл. 3.2, для каждого элемента  $f \in S^n(V^*)$  существует единственный симметричный тензор  $\tilde{f} \in \text{Sym}^n V^*$ , который проектируется в  $f$  при факторизации по соотношениям коммутирования. Этот тензор задаёт симметричную  $n$ -линейную форму

$$\tilde{f} : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$$

значение которой на наборе векторов  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  равно полной свёртке тензора  $\tilde{f}$  с тензором  $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n$  и определено канонически (без использования базисов). Многочлен  $f_m$  есть не что иное как ограничение этой полилинейной формы на главную диагональ  $\Delta \subset V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$ :

$$f_m(v) = \tilde{f}(v, v, \dots, v) \quad \forall v \in V. \quad (3-38)$$

В самом деле, полная свёртка базисного симметричного тензора  $x_{[m_1, m_2, \dots, m_d]}$  с тензором  $v^{\otimes n}$  представляет собой сумму  $n! / (m_1! \cdot m_2! \cdots m_d!)$  одинаковых произведений

$$x_1(v)^{m_1} x_2(v)^{m_2} \cdots x_d(v)^{m_d}$$

и совпадает со значением на векторе  $v$  полиномиальной функции  $f_m$ , построенной по элементу

$$f = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdots m_d!} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d} \in S^n V^*$$

в которую проектируется тензор  $x_{[m_1, m_2, \dots, m_d]}$ . А так как линейное по  $f$  равенство (3-38) выполнено на базисных элементах, оно выполнено и для любых  $f$ .

Коль скоро сопоставление  $f \mapsto f_m$  не зависит от выбора базиса, мы будем называть элементы симметрической алгебры  $SV^*$  *многочленами*<sup>1</sup> или *полиномиальными функциями* на пространстве  $V$ , и не будем делать разницы между  $f$  и  $f_m$  (в частности, обозначение  $f_m$  больше нигде не будет использоваться).

Симметричная  $n$ -линейная форма  $\tilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n)$ , однозначно связанная с многочленом  $f \in S^n V^*$  соотношением (3-38) называется *полней поляризацией* многочлена  $f$ .

При  $n = 2$  полная поляризация есть не что иное как поляризация квадратичной формы до симметричной билинейной формы, многократно использовавшаяся нами ранее. Для произвольной степени  $n$  полная поляризация каждого базисного монома

$$f = x_1^{m_1} x_2^{m_2} \cdots x_d^{m_d}$$

степени  $\sum m_i = n$ , согласно формуле (3-36) из предл. 3.2, имеет вид

$$\tilde{f} = \frac{m_1! \cdot m_2! \cdots m_d!}{n!} \cdot x_{[m_1, m_2, \dots, m_d]}. \quad (3-39)$$

Полная поляризация произвольного многочлена вычисляется по этим формулам в силу линейности отображения  $f \mapsto \tilde{f}$ .

---

<sup>1</sup>как мы, собственно, и делали это до сих пор

**Пример 3.8 (двойственность)**

Полная свёртка между  $V^{\otimes m}$  и  $V^{*\otimes m}$  индуцирует (в характеристике нуль) двойственность между пространствами многочленов  $S^m V$  и  $S^m V^*$ . По определению, результатом спаривания элементов  $f \in S^n V$  и  $g \in S^n V^*$  является полная свёртка их полных поляризаций  $\tilde{f} \in V^{\otimes m}$  и  $\tilde{g} \in V^{*\otimes m}$ .

**Упражнение 3.21.** Проверьте, что мономы, составленные из элементов двойственных базисов пространств  $V$  и  $V^*$ , спариваются при этом по правилу

$$\langle e_1^{m_1} e_2^{m_2} \dots e_d^{m_d}, x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_d^{m_d} \rangle = \frac{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_d!}{n!} \quad (3-40)$$

(спаривания между всеми остальными парами базисных векторов нулевые).

**3.4.1. Производные и поляры.** Фиксируем вектор  $v \in V$  и рассмотрим отображение свёртки первого тензорного сомножителя в произведении  $V^{*\otimes n}$  с вектором  $v$

$$c_v^1 : V^{*\otimes n} \rightarrow V^{*\otimes(n-1)}$$

(на языке  $n$ -линейных форм на пространстве  $V$  это отображение фиксирует вектор  $v \in V$  в качестве первого аргумента  $n$ -линейной формы). Применяя его к полной поляризации  $\tilde{f}$  многочлена  $f \in S^n(V^*)$  и затем проектируя результат из  $V^{*\otimes(n-1)}$  обратно в симметрическую степень  $S^{n-1}(V^*)$ , мы получаем линейное отображение  $S^n V^* \rightarrow S^{n-1} V^*$ , которое включается в качестве нижней горизонтальной стрелки в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V^{*\otimes n} & \xrightarrow{c_v^1} & \text{Sym}^n V^* \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^n V^* & \xrightarrow{\text{pl}_v} & S^{n-1} V^* \end{array}$$

и переводит многочлен  $f(x) = \tilde{f}(x, x, \dots, x) \in S^n(V^*)$  в многочлен

$$\text{pl}_v f(x) = \tilde{f}(v, x, \dots, x) \in S^{n-1}(V^*), \quad (3-41)$$

который называется *полярой* вектора  $v$  относительно  $f$  и линейно зависит как от многочлена  $f$ , так и от вектора  $v \in V$ . При  $n = 2$  эта конструкция задаёт полярное преобразование относительно квадрики  $f = 0$  в  $\mathbb{P}(V)$  и сопоставляет вектору  $v$  уравнение его полярной гиперплоскости.

В двойственных базисах  $e_1, e_2, \dots, e_d \in V$  и  $x_1, x_2, \dots, x_d \in V^*$  отображение свёртки по первому индексу с базисным вектором  $e_i \in V$  переводит базисный симметрический моном (3-30) в точно такой же базисный моном, но содержащий  $(m_i - 1)$  множителей  $e_i$ , или в нуль, если  $m_i = 0$ . Поэтому, по формуле (3-36) из предл. 3.2

$$\text{pl}_{e_i} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_d^{m_d} = \frac{m_i}{n} x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i-1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d} = = \frac{1}{n} \frac{\partial}{\partial x_i} x_1^{m_1} x_2^{m_2} \dots x_d^{m_d}.$$

Из линейности  $\text{pl}_v f$  по  $v$  и  $f$  мы получаем, что поляра вектора  $v = \sum \alpha_i e_i$  относительно многочлена  $f$  есть делённая на  $\deg f$  производная от  $f$  в направлении вектора  $v$ :

$$\text{pl}_v f = \frac{1}{\deg(f)} \partial_v f = \frac{1}{\deg(f)} \sum \alpha_i \frac{\partial f}{\partial x_i}.$$

Отметим, что из сказанного немедленно вытекает независимость правой части этой формулы от выбора двойственных координат в  $V$  и  $V^*$ , а также коммутирование частных производных между собой:  $\partial_u \partial_w = \partial_w \partial_u$  и замечательное равенство между кратными производными

$$m! \frac{\partial^m f}{\partial u^m}(w) = n! \tilde{f}(\underbrace{u, u, \dots, u}_m, \underbrace{w, w, \dots, w}_n) = (n-m)! \frac{\partial^{n-m} f}{\partial w^{n-m}}(u), \quad (3-42)$$

для любых  $u, w \in V$ , любого  $f \in S^n V^*$  и любого  $m$  в пределах  $0 \leq m \leq n$ .

Упражнение 3.22. Докажите правило Лейбница:  $\partial_v(f \cdot g) = \partial_v(f) \cdot g + f \cdot \partial_v(g)$ .

Поскольку форма  $\tilde{f}$  симметрична, аргументы в среднем члене формулы (3-42) можно писать в любом порядке. Условимся для упрощения обозначений писать

$$\tilde{f}(u^m, w^{n-m}),$$

когда какие-то  $m$  аргументов формы  $\tilde{f}$  равны  $u$ , а остальные  $(n-m)$  равны  $w$  (не важно в каком порядке).

Из полилинейности и симметричности  $\tilde{f}$  дословно тем же рассуждением, что и формула Ньютона для раскрытия скобок в биноме  $(u+w)^n$ , выводится равенство

$$\tilde{f}(u+w, u+w, \dots, u+w) = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} \tilde{f}(u^m, w^{n-m}),$$

где  $n = \deg f$ . С учётом (3-42) его можно переписать как *разложение Тейлора*: для любого многочлена  $f$  и векторов  $u, w$  имеется *точное* равенство

$$f(u+w) = \sum_{m=0}^{\deg f} \frac{1}{m!} \partial_w^m f(u), \quad (3-43)$$

правая часть которого симметрична по  $u$  и  $w$  в силу соотношения (3-42).

Упражнение 3.23. Покажите, что значение полной поляризации многочлена  $f \in S^n V^*$  на заданном наборе векторов описывается в терминах частных производных формулой  $\tilde{f}(v_1, v_2, \dots, v_n) = \frac{1}{n!} \partial_{v_1} \partial_{v_2} \dots \partial_{v_n} f \quad \forall v_1, v_2, \dots, v_n \in V$ .

**3.4.2. Линейный носитель многочлена**  $f \in S^n V^*$  определяются как минимальное подпространство  $W \subset V^*$  такое, что  $f \in S^n W^*$ , и обозначается  $\text{Supp}(f)$ . Очевидно, что это подпространство совпадает с линейным носителем полной поляризации  $\tilde{f} \in \text{Sym}^n V^*$  многочлена  $f$ . По теор. 3.1 последний является образом отображения

$$V^{\otimes(n-1)} \rightarrow V^*$$

задаваемого полной свёрткой<sup>1</sup> с  $\tilde{f}$ . Этот образ порождается всеми линейными формами, которые можно получить из  $f$  всевозможными  $(n-1)$ -кратными дифференцированиями вида

$$\frac{\partial^{m_1}}{\partial x_1^{m_1}} \frac{\partial^{m_2}}{\partial x_2^{m_2}} \dots \frac{\partial^{m_d}}{\partial x_d^{m_d}} f(x), \quad (3-44)$$

<sup>1</sup>из-за симметричности тензора  $\tilde{f}$  отображения свёртки из теор. 3.1 не зависят от выбора последовательности индексов  $J$ , по которым производится свёртка

$\sum m_\nu = n - 1$ . Вклад в коэффициент при  $x_i$  у линейной формы (3-44) даёт ровно один коэффициент многочлена  $f$  — тот, что стоит при мономе  $x_1^{m_1} \dots x_{i-1}^{m_{i-1}} x_i^{m_i+1} x_{i+1}^{m_{i+1}} \dots x_d^{m_d}$ . Поэтому, если записать многочлен  $f$  в виде

$$f = \sum_{\nu_1 + \dots + \nu_d = n} \frac{n!}{\nu_1! \nu_2! \dots \nu_d!} a_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_d} x_1^{\nu_1} x_2^{\nu_2} \dots x_d^{\nu_d}, \quad (3-45)$$

то линейная форма (3-44) будет иметь вид

$$n! \cdot \sum_{i=1}^d a_{m_1 \dots m_{i-1} (m_i+1) m_{i+1} \dots m_d} x_i \quad (3-46)$$

и всего таких форм будет  $\binom{n+d-2}{d-1}$  (количество способов разложить  $n - 1$  в сумму  $d$  занумерованных целых неотрицательных слагаемых  $m_1, m_2, \dots, m_d$ ). Отсюда мы получаем, например, критерий представимости многочлена в виде  $n$ -той степени линейной формы.

### Предложение 3.3

Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  с  $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$  однородный многочлен (3-45) тогда и только тогда является  $n$ -той степенью линейной формы, когда ранг  $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$ -матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм (3-46), равен единице. В этом случае форма  $\varphi$ , такая что  $\varphi^n = f$ , также пропорциональна формам (3-46).

**Доказательство.** В самом деле, из равенства  $f = \varphi^n$  вытекает, что  $\text{Supp}(f)$  — одномерное пространство, порождённое формой  $\varphi$ , и тогда все формы (3-46) пропорциональны форме  $\varphi$ . Наоборот, если все формы (3-46) пропорциональны друг другу, то  $\text{Supp}(f)$  — одномерное пространство  $U = \mathbb{k} \cdot \psi$ , порождённое какой-то формой  $\psi \in V^*$ . Поскольку  $S^n U = \mathbb{k} \cdot \psi^n$  тоже одномерно, условие  $f \in S^n U$  означает, что  $f = \lambda \psi^n$  для некоторого  $\lambda \in \mathbb{k}$ . Если  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто, последнее равенство переписывается как  $f = \varphi^n$  с  $\varphi = \sqrt[n]{\lambda} \cdot \psi$ .  $\square$

**3.4.3. Многообразие Веронезе  $V(n, k)$**  определяется как образ  $k$ -мерного проективного пространства  $\mathbb{P}_k = \mathbb{P}(V^*)$  при отображении Веронезе  $n$ -той степени

$$\mathbb{P}(V^*) \xrightarrow{\varphi \mapsto \varphi^n} \mathbb{P}(S^n V^*) \quad (3-47)$$

или, что то же самое, как множество всех однородных многочленов степени  $n$  от  $k$  переменных<sup>1</sup>, которые являются чистыми  $n$ -тыми степенями линейных.

**Замечание 3.1.** Отметим аналогию между многообразиями Веронезе  $V(n, k)$  и многообразиями Грассмана  $\text{Gr}(n, k)$  (см. п. 3.6 ниже). С алгебраической точки зрения в обоих случаях речь идёт про многочлены степени  $n$  от  $k$  переменных, которые максимально вырождены в том смысле, что они эффективно зависят от минимально возможного числа переменных. В коммутативном случае это минимальное число равно единице, и нас

<sup>1</sup>рассматриваемых, как обычно, с точностью до пропорциональности

интересуют однородные многочлены степени  $n$ , которые линейной заменой координат приводятся к виду  $x_1^n$ . В грассмановом случае минимальное число косокоммутирующих переменных, от которых может эффективно зависеть однородный многочлен  $n$ -той степени, равно  $n$ , и такой многочлен линейной заменой координат приводится к виду  $x_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_n$ .

Следствие 3.1

Образ вложения Веронезе (3-47) является проективным алгебраическим многообразием, задаваемым системой квадратных уравнений – равенством нулю всех  $2 \times 2$  миноров  $d \times \binom{n+d-2}{d-1}$  матрицы, составленной из коэффициентов линейных форм (3-46).  $\square$

Например, однородный многочлен от двух переменных

$$f(x_0, x_1) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot \binom{n}{k} \cdot x_0^{n-k} x_1^k$$

тогда и только тогда имеет вид  $(\alpha_0 x_0 + \alpha_1 x_1)^n$ , когда

$$\text{rk} \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n_1} \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} = 1,$$

что выражается системой квадратных уравнений

$$\det \begin{pmatrix} a_i & a_j \\ a_{i+1} & a_{j+1} \end{pmatrix} = 0$$

на коэффициенты  $a_i$  многочлена  $f$ , и в этом случае  $(\alpha_0 : \alpha_1) = (a_i : a_{i+1})$  для любого  $i$ . Такого что  $a_i a_{i+1} \neq 0$ .

**3.4.4. Поляры и касательные к проективной гиперповерхности.** Рассмотрим проективную гиперповерхность  $S \subset \mathbb{P}(V)$ , заданную однородным уравнением  $F(x) = 0$  степени  $n$ . Пересечение  $S$  с произвольной прямой  $\ell = (pq)$  состоит из таких точек  $\lambda p + \mu q \in \ell$ , что отношение  $(\lambda : \mu)$  удовлетворяет уравнению  $f(\lambda, \mu) = 0$ , которое получается подстановкой  $x = \lambda p + \mu q$  в уравнение гиперповерхности  $F(x) = 0$ . Если основное поле алгебраически замкнуто, и прямая  $\ell$  не лежит на  $S$  целиком (что означало бы тождественное обращение  $f(\lambda, \mu)$  в нуль), то  $\ell$  пересекает  $S$  в конечном наборе точек  $a_1, a_2, \dots, a_k$ , причём если учитывать каждую из них с надлежащей кратностью, то сумма этих кратностей будет равна  $n$ . Для этого кратность пересечения поверхности  $S$  с прямой  $\ell$  в точке  $a_i = (\alpha'_i : \alpha''_i)$  надо определить как показатель, с которым линейный множитель

$$\det \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ \alpha'_i & \alpha''_i \end{pmatrix} = (\alpha''_i \lambda - \alpha'_i \mu)$$

входит в разложение  $f(\lambda, \mu) = \prod (\alpha''_i \mu - \alpha'_i \lambda)^{s_i}$  однородного многочлена  $f(\lambda, \mu)$  на линейные множители.

Показатель  $s_i$  называется *локальным индексом пересечения* поверхности  $S$  с прямой  $\ell$  в точке  $a_i$  и обозначается  $(S, \ell)_{a_i}$ . Прямая  $\ell$  называется *касательной* к  $S$  в точке  $a \in \ell \cap S$ , если  $(S, \ell)_a \geq 2$  или  $\ell \subset S$ .

По формуле Тейлора (3-43) коэффициент при  $\lambda^{n-m}\mu^m$  в уравнении  $f(\lambda, \mu) = 0$  равен

$$\binom{n}{m} \tilde{f}(p^{n-m}, q^m) = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m F}{\partial q^i}(p) = \frac{1}{(n-m)!} \frac{\partial^{n-m} F}{\partial p^{n-m}}(q). \quad (3-48)$$

и если  $p \in S$ , то разложение Тейлора в окрестности  $p$  начинается как

$$F(p + tq) = t \binom{d}{1} \tilde{F}(p^{n-1}, q) + t^2 \binom{d}{2} \tilde{F}(p^{n-2}, q^2) + \dots.$$

Таким образом, прямая  $pq$ , проходящая через точку  $p \in S$ , касается  $S$  в этой точке тогда и только тогда, когда  $\tilde{F}(p^{n-1}, q) = 0$ .

Если  $F(p^{n-1}, x) \not\equiv 0$  как линейная форма от  $x$ , то точки  $q$ , для которых прямая  $(pq)$  касается  $S$  в точке  $p$ , заметут в  $\mathbb{P}(V)$  гиперплоскость, задаваемую линейным уравнением  $F(p^{n-1}, x) = 0$ . Она называется *касательным пространством* к  $S$  в  $p$  и обозначается  $T_p S$ . Точка  $p$  называется в этом случае *гладкой точкой* поверхности  $S$ .

Если  $F(p^{n-1}, x) \equiv 0$ , то поверхность  $S$  называется *особой* в точке  $p$ , а  $p$  называется *особой точкой* поверхности  $S$ . Согласно (3-48), коэффициентами линейной формы

$$F(p^{n-1}, x) = \partial_x F(p)$$

являются частные производные от  $F$ , вычисленные в точке  $p$ , так что особость  $p$  равносильна занулению в  $p$  всех частных производных от уравнения гиперповерхности. В этом случае любая проходящая через  $p$  прямая имеет с  $S$  как минимум двукратное пересечение в  $p$ , и касательное пространство  $T_p S$ , понимаемое как объединение всех прямых, касающихся  $S$  в точке  $p$ , совпадает со всем пространством  $\mathbb{P}(V)$ .

Если  $q$  — гладкая точка на  $S$  или любая точка вне  $S$ , то замыкание множества точек касания с  $S$  всевозможных касательных, опущенных на  $S$  из точки  $q$  образует на поверхности  $S$  фигуру, называемую *контуром* поверхности  $S$ , видимым из точки  $q$ . Видимый контур высекается из  $S$  полярной к  $q$  относительно  $S$  гиперповерхностью  $(n-1)$ -й степени

$$\text{pl}_q S = \{y \in \mathbb{P}(V) \mid \tilde{F}(q, y^{n-1}) = 0\}, \quad (3-49)$$

автоматически отличной от всего пространства. Действительно, условие касания прямой  $(qy)$  поверхности  $S$  в точке  $y$  — это  $\tilde{F}(y^{n-1}, q) = 0$ . Если многочлен  $G(y) = \tilde{F}(y^{n-1}, q)$  тождественно нулевой (как многочлен от  $y$ ), то, взяв  $y = q$ , мы получим  $F(q) = 0$ , откуда  $q \in S$ . С другой стороны, т. к. все производные от  $G$  в этом случае тоже нулевые, мы получаем равенство

$$\tilde{F}(q^{n-1}, y) = \tilde{G}(q^{n-2}, y) = \frac{\partial^{n-2}}{\partial q^{n-2}} G(y) \equiv 0,$$

означающее, что  $q$  — особая точка поверхности  $S$ .

Гиперповерхность  $\text{pl}_q^{n-r} = \{y \in \mathbb{P}(V) \mid \tilde{F}(q^{n-r}, y^r) = 0\}$  называется *полярой  $r$ -й степени* поверхности  $S$  относительно точки  $q$ . Если  $q \in S$  — гладкая точка, то поляра первой степени — эта касательная гиперплоскость  $T_q S$  к  $S$  в точке  $q$ , а каждая поляра степени  $r \geq 2$  — это поверхность степени  $r$ , которая проходит через  $q$  и имеет те же поляры степеней  $< r$  относительно точки  $q$ , что и исходная поверхность  $S$ . Так, квадратичная поляра — это проходящая через  $q$  квадрика, имеющая в точке  $q$  ту же касательную гиперплоскость, что и  $S$ , кубическая поляра — это проходящая через  $q$  кубическая поверхность с той же касательной плоскостью и квадратичной полярой, что и  $S$ , и т. д.

**3.5. Поляризация гравссмановых многочленов.** Хотя гравссманов многочлен  $\omega \in \Lambda V^*$  и не задаёт никакой функции на векторах двойственного пространства  $V$ , большая часть сказанного в предыдущем разделе имеет смысл и для гравссмановых многочленов. А именно, по предл. 3.2 над полем характеристики нуль для любого однородного гравссманова многочлена  $n$ -той степени  $\omega \in \Lambda^n V^*$  существует единственная  $n$ -линейная кососимметричная форма  $\tilde{\omega} \in \text{Skew } {}^n V^* \subset V^{*\otimes n}$ , которая проектируется в этот многочлен при факторизации тензорной алгебры по соотношениям антисимметрирования. Эта форма (равно как и соответствующий ей кососимметрический тензор) называется *полной поляризацией* гравссманова многочлена  $\omega$ .

Согласно формуле (3-37) из предл. 3.2 полная поляризация базисного гравссманова монома  $\omega = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$  равна

$$\tilde{\omega} = \frac{1}{n!} e_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} = \text{alt}_n(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_n}). \quad (3-50)$$

Как и в симметрическом случае, полная поляризация индуцирует двойственность между пространствами гравссмановых многочленов на двойственных пространствах, при которой результатом спаривания между многочленами

$$\omega \in \Lambda^n V^* \quad \text{и} \quad \tau \in \Lambda^n V$$

по определению считается полная свёртка их полных поляризаций  $\langle \tilde{\omega}, \tilde{\tau} \rangle$ .

**Упражнение 3.24.** Покажите, что результатом спаривания двух базисных гравссмановых мономов  $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$  и  $x_J = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n}$  от двойственных базисных векторов пространств  $V$  и  $V^*$  (оба набора индексов  $I$  и  $J$  строго возрастают) является  $1/n!$ , если  $i_v = j_v \forall v$ , и нуль во всех остальных случаях.

### 3.5.1. Частные производные в гравссмановой алгебре.

Рассмотрим отображение

$$\text{pl}_v : \Lambda^n V^* \rightarrow \Lambda^{n-1} V^*,$$

сопоставляющее гравссманову многочлену  $\omega \in \Lambda^n V^*$  проекцию во внешнюю алгебру тензора, получающуюся свёрткой по первому тензорному сомножителю полной поляризации  $\tilde{\omega} \in V^{*\otimes n}$  с вектором  $v \in V$ . Оно включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V^{*\otimes n} \supset \text{Skew } {}^n V^* & \xrightarrow{c_v^1} & \text{Skew } {}^{(n-1)} V^* \subset V^{*\otimes(n-1)} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^n V^* & \xrightarrow{\text{pl}_v} & \Lambda^{n-1} V^* \end{array}$$

горизонтальные стрелки которой суть проекции во внешнюю алгебру (отображения факторизации по соотношениям антисимметрирования), а верхняя горизонтальная стрелка — свёртка первого тензорного сомножителя с вектором  $v$ . По аналогии с симметрическим случаем, определим *гравссманову производную* кососимметричного многочлена  $\omega \in \Lambda^n V^*$  в направлении вектора  $v \in V$  формулой

$$\partial_v \omega \stackrel{\text{def}}{=} \deg \omega \cdot \text{pl}_v \omega.$$

Из билинейности  $\text{pl}_v \omega$  по  $v$  и  $\omega$  мы сразу же получаем, что производная в направлении вектора  $v = \sum \alpha_i e_i$  является линейной комбинацией частных производных вдоль базисных векторов:

$$\partial_v = \sum \alpha_i \partial_{e_i}.$$

Если  $\omega$  не зависит от  $x_j$ , из определений очевидно, что  $\partial_{e_j} \omega = 0$ . Поэтому ненулевой вклад в производную от базисного монома  $\omega = x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n}$  дадут только дифференцирования  $\partial_{e_{i_1}}, \partial_{e_{i_2}}, \dots, \partial_{e_{i_n}}$ . Из формулы (3-50) вытекает, что

$$\partial_{e_{i_1}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n} = x_{i_2} \wedge x_{i_3} \wedge \dots \wedge x_{i_n}$$

вне зависимости от того, образуют ли неповторяющиеся индексы  $I = (i_1, i_2, \dots, i_n)$  строго возрастающую последовательность или нет. Таким образом, частная производная гравссманова монома по направлению первого слева сомножителя действует как  $\partial/\partial x_{i_1}$  (т. е. просто уничтожает этот сомножитель). При дифференцировании по остальным направлениям будут появляться знаки:

$$\begin{aligned} \partial_{e_{i_k}} x_{i_1} \wedge x_{i_2} \wedge \dots \wedge x_{i_n} &= \partial_{e_{i_k}} (-1)^{k-1} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} \partial_{e_{i_k}} x_{i_k} \wedge x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n} = \\ &= (-1)^{k-1} x_{i_1} \wedge \dots \wedge x_{i_{k-1}} \wedge x_{i_{k+1}} \dots x_{i_n}. \end{aligned}$$

Иначе говоря, дифференцирование гравссманова монома по направлению  $k$ -той слева входящей в него переменной ведёт себя как  $(-1)^{k-1} \partial/\partial x_{i_k}$ . Удобно воспринимать это явление как *гравссманово правило Лейбница*:

**Упражнение 3.25.** Докажите, что гравссмановы частные производные удовлетворяют гравссманову правилу Лейбница:  $\partial_v(\omega \wedge \tau) = \partial_v(\omega) \wedge \tau + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge \partial_v(\tau)$ .

Поскольку  $\tilde{\omega}(u, w, *, \dots, *) = -\tilde{\omega}(w, u, *, \dots, *)$  операции  $\text{pl}_u$  и  $\text{pl}_w$  антисимметричны относительно композиции:  $\text{pl}_u \text{pl}_w \omega = -\text{pl}_w \text{pl}_u \omega$ . Поэтому гравссмановы частные производные также антисимметричны:  $\partial_u \partial_w = -\partial_w \partial_u$ . В частности,  $\partial_v^2 \omega \equiv 0$  для любых  $v$  и  $\omega$ .

**3.5.2. Линейный носитель гравссманова многочлена**  $\omega \in \Lambda^n V$  определяется как минимальное подпространство  $W \subset V$ , такое что  $\omega \in \Lambda^n W$ , и обозначается  $\text{Supp}(\omega)$ . Очевидно, что носитель  $\omega$  совпадает с носителем поляризации  $\tilde{\omega}$ , который по теор. 3.1 является образом отображения  $V^{*\otimes(n-1)} \rightarrow V$ , задаваемого полной свёрткой с тензором  $\tilde{\omega}$ . Ввиду кососимметричности тензора  $\tilde{\omega}$  различные отображения свёртки из теор. 3.1 отличаются друг от друга лишь знаком, и поэтому неважно, какую из свёрток взять. Итак, линейный носитель гравссманова многочлена степени  $n$  порождается векторами

$$\partial_J \omega = \partial_{j_1} \partial_{j_2} \dots \partial_{j_{n-1}} \omega,$$

где  $\partial_j = \partial_{x_j}$  и  $J = (j_1, j_2, \dots, j_{n-1})$  пробегает всевозможные наборы из  $(n-1)$  попарно различных индексов<sup>1</sup>. Если разложить  $\omega$  в сумму мономов

$$\omega = \sum_I a_I e_I = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$$

---

<sup>1</sup>В силу кососимметричности гравссмановых частных производных достаточно ограничиться только строго возрастающими наборами

(коэффициенты  $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$  кососимметричны по индексам  $i_1, i_2, \dots, i_n$ ), то вклад в  $\partial_J \omega$  дадут только мономы  $a_I e_I$  с  $I \supset J$ . В результате, с точностью до общего знака, мы получим

$$\partial_J \omega = \pm \sum_{i \notin J} \alpha_{j_1 j_2 \dots j_{n-1} i} e_i. \quad (3-51)$$

Отсюда получается, например, следующий критерий разложимости грассманова многочлена.

**Предложение 3.4**

Следующие условия на грассманов многочлен  $\omega = \sum_{i_1 i_2 \dots i_n} \alpha_{i_1 i_2 \dots i_n} e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$ , где все коэффициенты  $\alpha_{i_1 i_2 \dots i_n}$  кососимметричны по индексам  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , эквивалентны друг другу:

- 1)  $\omega = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_n$  для некоторых  $u_1, u_2, \dots, u_n \in V$
- 2)  $u \wedge \omega = 0 \quad \forall u \in \text{Supp}(\omega)$
- 3) для любых двух наборов неповторяющихся индексов  $i_1, i_2, \dots, i_{m+1}$  и  $j_1, j_2, \dots, j_{m-1}$  выполнено соотношение Плюккера<sup>1</sup>  $\sum_{v=1}^{m+1} (-1)^{v-1} a_{j_1 \dots j_{m-1} i_v} a_{i_1 \dots \hat{i}_v \dots i_{m+1}} = 0$ .

**Доказательство.** Первое условие означает, что многочлен  $\omega$  лежит в самой старшей внешней степени  $\Lambda^{\dim \text{Supp}(\omega)}$  своей линейной оболочки  $\text{Supp}(\omega)$ . Его равносильность второму условию вытекает из следующего общего факта:

**Упражнение 3.26.** Докажите, что  $\omega \in \Lambda U$  тогда и только тогда однороден степени  $\dim U$ , когда  $u \wedge \omega = 0$  для всех  $u \in U$ .

Соотношение Плюккера — это координатная запись второго условия для вектора  $u$  из формулы (3-51), констатирующая обнуление коэффициента при  $e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_{m+1}}$  в  $u \wedge \omega$ . Поскольку векторы (3-51) линейно порождают пространство  $\text{Supp}(\omega)$ , соотношений Плюккера достаточно для выполнения второго, а с ним и первого условий предложения.  $\square$

**Упражнение 3.27.** Выпишите соотношения Плюккера для грассмановой квадратичной формы  $\omega$  от четырёх переменных и выведите из них, что такая форма тогда и только тогда является произведением двух линейных, когда  $\omega \wedge \omega = 0$ .

**3.6. Многообразия Грассмана.** Грассманиан<sup>2</sup>  $\text{Gr}(m, d) = \text{Gr}(m, V)$  определяется как множество всех  $m$ -мерных векторных подпространств в данном  $d$ -мерном векторном пространстве  $V$ . На проективном языке,  $\text{Gr}(m, d)$  есть множество всех  $(m - 1)$ -мерных проективных подпространств в  $\mathbb{P}_{d-1}$ . Алгебраически, грассманианы являются суперкоммутативными аналогами многообразий Веронезе (см. зам. 3.1.). Простейшими примерами грассманианов являются проективные пространства:

$$\text{Gr}(1, V) = \mathbb{P}(V) \quad \text{и} \quad \text{Gr}(d - 1, V) = \mathbb{P}(V^*) = \mathbb{P}_{d-1}^\times$$

<sup>1</sup>«крышка» в  $a_{i_1 \dots \hat{i}_v \dots i_{m+1}}$  означает, что индекс  $i_v$  следует пропустить

<sup>2</sup>обозначение  $\text{Gr}(m, V)$  используется, когда хотят подчеркнуть природу пространства  $V$

(подпространство  $U \subset V$  коразмерности 1 задаётся одним линейным уравнением с точностью до пропорциональности). Вообще, двойственность  $U \leftrightarrow \text{Ann } U$  задаёт каноническое отождествление  $\text{Gr}(m, V) \simeq \text{Gr}(d - m, V^*)$ .

**Упражнение 3.28.** Пусть  $\dim V = 4$ . Всякая невырожденная квадрика  $q \subset \mathbb{P}(V)$  определяет поляритет  $\hat{q} : V \xrightarrow{\sim} V^*$ , который, в свою очередь, задаёт автоморфизм грассманиана  $\text{Gr}(2, 4)$  действующий по описанному выше правилу  $U \mapsto \text{Ann } \hat{q}(U)$ . Покажите, что этот автоморфизм отображает  $\alpha$ -плоскости в  $\beta$ -плоскости и наоборот.

**3.6.1. Плюккерово вложение.** Грассманиан  $\text{Gr}(m, V)$  вкладывается в  $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$  при помощи *отображения Плюккера*

$$\mathfrak{u} : \text{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V), \quad (3-52)$$

которое переводит  $m$ -мерное подпространство  $U \subset V$  в одномерное подпространство  $\Lambda^m U \subset \Lambda^m V$ . Если  $U$  порождается векторами  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ , то с точностью до пропорциональности  $\mathfrak{u}(U) = u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$  — переход к другому базису в  $U$ , скажем к

$$w_i = \sum a_{ij} u_j,$$

заменяет  $u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$  на  $w_1 \wedge w_2 \wedge \dots \wedge w_m = \det(a_{ij}) \cdot u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m$ .

**Предложение 3.5**

Отображение Плюккера (3-52) вкладывает грассманиан в проективное пространство в качестве алгебраического многообразия, задаваемого квадратичными соотношениями (3) из предл. 3.4.

**Доказательство.** Если подпространство  $U \subset V$  имеет базис  $u_1, u_2, \dots, u_m$ , то отображение Плюккера переведёт его в класс пропорциональности грассманова многочлена

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \dots \wedge u_m.$$

Поэтому образ отображения Плюккера состоит из всех разложимых однородных грассмановых форм степени  $m$ , т. е. является пересечением квадрик из п. (3) предл. 3.4. С другой стороны, отображение Плюккера инъективно, поскольку при  $U \neq W$  в  $V$  имеется базис

$$v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, u_2, \dots, u_{m-r}, w_1, w_2, \dots, w_{m-r}, v_{2m-r}, v_{2m-r+1}, \dots, v_n,$$

в котором  $v_1, v_2, \dots, v_r$  образуют базис пересечения  $U \cap W$ , а

$$v_1, v_2, \dots, v_r, u_1, u_2, \dots, u_{m-r} \quad \text{и} \quad v_1, v_2, \dots, v_r, w_1, w_2, \dots, w_{m-r}$$

составляют базисы в  $U$  и  $W$ , так что отображение Плюккера сопоставляет им различные базисные мономы

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge u_1 \wedge \dots \wedge u_{m-r} \neq v_1 \wedge \dots \wedge v_r \wedge w_1 \wedge \dots \wedge w_{m-r}$$

алгебры  $\Lambda V$ . □

**3.6.2. Плюккеровы координаты.** На координатном языке, если зафиксировать в  $V$  базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_d\}$ , точку  $U \in \text{Gr}(m, d)$  можно представлять  $(d \times m)$ -матрицей  $A_U$ , строки которой являются координатами какого-либо набора векторов  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ , порождающих  $U$ . Разумеется, такое представление не единственно: выбору другой системы образующих  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  в  $U$  будет отвечать другая матрица  $A'_U = M_{wu} A_U$ , получающаяся из  $A_U$  умножением слева на невыродленную квадратную  $m \times m$ -матрицу перехода<sup>1</sup>. Таким образом, грассманнан  $\text{Gr}(m, d)$  представляет собой фактор пространство пространства  $\text{Mat}_{m \times d}(\mathbb{k})$  по действию  $\text{GL}_m(\mathbb{k})$  умножениями слева, точно также как  $\mathbb{P}_{d-1}$  является фактор пространством пространства координатных строк по действию группы гомотетий  $\text{GL}_1(\mathbb{k}) = \mathbb{k}^*$ . Матрица  $A_U$  является, таким образом, прямым аналогом однородных координат.

Упражнение 3.29. Убедитесь, что на координатном языке плюккерово вложение сопоставляет  $(d \times m)$ -матрице  $A_U$  набор всех её  $(m \times m)$ -миноров и эквивариантно в том смысле, что при умножении  $A_U$  справа на  $M \in \text{GL}_m$  все  $(m \times m)$ -миноры умножаются на одну и ту же константу  $\det M$ .

**3.6.3. Стандартное аффинное покрытие и аффинные координаты.** Аналогом  $i$ -тое стандартной аффинной карты  $U_i$  проективного пространства<sup>2</sup>  $\mathbb{P}_n = \text{Gr}(1, n)$  на произвольном грассманнане  $\text{Gr}(m, d)$  является множество  $\mathfrak{U}_i$ , всех подпространств  $U \subset V$ , матрица  $A_U$  которых содержит невырожденную  $(m \times m)$ -подматрицу  $A_{U,I} \subset A_U$  в столбцах с номерами  $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$ , так что умножая  $A_U$  слева на  $M = A_{U,I}^{-1} \in \text{GL}_m$ , можно сделать эту подматрицу единичной. Множество  $\mathfrak{U}_i$  является полным прообразом относительно плюккерова вложения (3-52) стандартной аффинной карты  $U_i \subset \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ , в которой отлична от нуля  $I$ -тая координата (вдоль вектора  $e_I = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m}$ ).

Иначе можно сказать, что  $\mathfrak{U}_i$ , состоит из всех  $U \subset V$ , которые изоморфно проектируются на  $I$ -тое координатное подпространство в  $V$ , натянутое на базисные векторы  $e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}$ , вдоль всех остальных базисных векторов  $e_j$  с  $j \notin I$ . В качестве системы образующих такого подпространства можно взять прообразы базисных векторов  $e_i$ ,  $i \in I$ , относительно упомянутой проекции. Соответствующая матрица  $A_U$  как раз и будет содержать единичную подматрицу в  $I$ -столбцах. Таким образом, такая матрица однозначно определяется по  $U$ . Мы будем обозначать её  $A^I(U)$  и использовать  $m(d-m)$  её матричных элементов  $(a_{ij}^I(U))$  с  $j \notin I$  (стоящих вне столбцов  $(i_1, i_2, \dots, i_m)$  в  $A^I(U)$ ) в качестве аффинных координат в карте  $\mathfrak{U}_i \subset \text{Gr}(m, d)$ . Карты  $\mathfrak{U}_i$  называются *стандартными* и покрывают весь  $\text{Gr}(m, d)$ , когда  $I$  пробегает все возрастающие подмножества длины  $m$  в  $\{1, 2, \dots, d\}$ .

Упражнение 3.30. Если вы знакомы с основными понятиями дифференциальной топологии, проверьте, что действительные и комплексные грассманнаны являются гладкими (более того, аналитическими) многообразиями.

<sup>1</sup>она определяется соотношением  $\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = M_{wu} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}$

<sup>2</sup>напомним, что она состоит из всех векторов,  $i$ -тая координата которых отлична от нуля, так что её можно сделать равной 1, умножая на подходящую константу

**3.6.4. Клеточное разбиение.** Метод Гаусса для решения систем линейных однородных уравнений показывает, что любое подпространство  $U \subset V$  порождается **единственным** набором векторов  $\{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ , матрица координат которого имеет *строгий ступенчатый вид* (такой, что в столбцах, содержащих углы ступенек, стоит единичная ( $m \times m$ )-подматрица).

Упражнение 3.31. Докажите, что различные строго ступенчатые матрицы действительно задают разные подпространства в  $V$ .

Таким образом, мы имеем биекцию между  $\text{Gr}(m, d)$  и множеством всех строго ступенчатых  $(m \times d)$ -матриц. Последнее является дизъюнктым объединением непересекающихся аффинных пространств, т. к. все ступенчатые матрицы с фиксированной формой ступенек образуют аффинное пространство, размерность которого равна числу «свободных» клеток, не занятых «обязательными» нулями и единицами, предписанными данной формой ступенек.

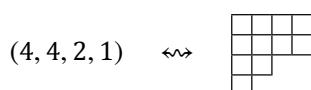
Форма ступенек однозначно определяется возрастающим набором  $I = (i_1, i_2, \dots, i_m)$  номеров столбцов, в которых располагаются углы ступенек. В частности, имеется ровно  $\binom{d}{m}$  разных форм ступенек. Строго ступенчатая матрица с данной формой ступенек  $I$  имеет  $m(d - m)$  клеток вне единичной подматрицы, стоящей в  $I$ -столбцах, и в левой части  $v$ -той строки есть ещё  $i_v - v$  «обязательных» нулей, стоящих вне этой единичной подматрицы. Таким образом, матрица с формой ступенек  $I$  имеет

$$m(d-m) - \sum_{\nu=1}^m (i_\nu - \nu) = \dim \mathrm{Gr}(m,d) - \left( |I| - \frac{m(m+1)}{2} \right)$$

«свободных клеток», т. е. соответствующий страт грассамиана представляет собой аффинное пространство коразмерности  $|I| - m(m + 1)/2$ .

Другим общепринятым способом описания формы ступенек являются *диаграммы Юнга*, или *разбиения*. Сопоставим ступенчатой матрице неубывающую последовательность неотрицательных целых чисел  $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ , в которой число  $\lambda_v$  указывает на сколько клеток угол ступеньки, стоящей в  $v$ -той считая снизу строке, сдвинут вправо от самого левого возможного своего положения. Таким образом, углы ступенек в матрице типа  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$  находятся в столбцах с номерами  $i_v = (m + 1 - v) + \lambda_{m+1-v}$ .

Диаграммы Юнга обычно рисуют в виде выровненных по левому краю клетчатых полосочек, длины которых равны последовательным элементам соответствующего разбиения, например:



На грассманиане  $\mathrm{Gr}(4, 10)$  этой диаграмме отвечает 13-мерное аффинное пространство строго ступенчатых матриц вида

нулевому разбиению  $(0, 0, 0, 0)$  отвечает самое левое из всех возможных положений ступенек, которое описывает 24-мерное пространство матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \end{pmatrix}$$

(стандартную аффинную карту  $\mathfrak{U}_{(1,2,3,4)}$  грассманиана  $\text{Gr}(4, 10)$ ), а разбиение  $(6, 6, 6, 6)$  описывает нульмерное аффинное пространство — ровно одну матрицу, ступеньки которой находятся в самом правом положении:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

**Упражнение 3.32.** Убедитесь, что имеется биекция между  $m$ -элементными возрастающими подмножествами  $I \subset \{1, 2, \dots, d\}$  и диаграммами Юнга  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ , содержащимися в прямоугольнике размером  $m \times (d - m)$ .

Итак, в терминах диаграмм Юнга, грассманиан  $\text{Gr}(m, d)$  разлагается в объединение непересекающихся аффинных клеток  $\overset{\circ}{\sigma}_\lambda$ , которые называются (открытыми) *клетками Шуберта* и занумерованы всевозможными диаграммами Юнга, умещающимися в прямоугольнике  $m \times (d - m)$ . Клетка  $\overset{\circ}{\sigma}_\lambda$  состоит из всех матриц с формой ступенек  $\lambda$ , изоморфна  $\mathbb{A}^{m(d-m)-|\lambda|}$  и имеет коразмерность<sup>1</sup>  $|\lambda| = \sum \lambda_\nu$ . Замыкание  $\sigma_\lambda$  клетки  $\overset{\circ}{\sigma}_\lambda$  называется (замкнутым) *циклом Шуберта*.

**Пример 3.9 (гомологии комплексных грассманианов)**

Над полем  $\mathbb{C}$  циклы Шуберта  $\sigma_\lambda$  образуют свободный базис группы целочисленных гомологий  $\Lambda(m, d) \stackrel{\text{def}}{=} H_*(\text{Gr}(m, \mathbb{C}^d), \mathbb{Z})$ , поскольку построенное нами клеточное разбиение не содержит клеток нечётных (вещественных) размерностей, и все граничные операторы клеточного цепного комплекса будут нулевыми.

**Упражнение 3.33\*.** Опишите из каких клеток  $\sigma_\mu$  состоит замыкание данной клетки  $\sigma_l$  и попытайтесь точно вычислить граничный оператор клеточного цепного комплекса на вещественном грассманиане  $\text{Gr}(m, \mathbb{R}^d)$ .

Топологическое пересечение циклов задаёт на  $\mathbb{Z}$ -модуле  $\Lambda(m, d)$  структуру коммутативного кольца. В частности, гомологический класс пересечения циклов Шуберта можно явно представить в виде целочисленной линейной комбинации циклов Шуберта. В общем случае ответ даётся в виде набора довольно нетривиальных комбинаторных правил преобразования диаграмм, который известен как *исчисление Шуберта*<sup>2</sup>. Говоря формально,

<sup>1</sup>Число  $|\lambda| = \sum \lambda_\nu$  обычно называют *весом* диаграммы  $\lambda$ ; множество всех диаграмм данного веса  $n$  описывает все способы разбить  $n$  в сумму неупорядоченных целых неотрицательных слагаемых, откуда и происходит термин «разбиение»

<sup>2</sup>см. книги: *W. Fulton Young Tableaux* (CUP, LMS Stud. Texts 35), *Ф. Гриффитс, Дж. Харрис Принципы алгебраической геометрии, I* (Мир, 1982), *У. Фултон Теория пересечений* (Мир, 1989), *И. Макдоналд Симметрические функции и многочлены Холла* (Мир, 1985)

кольцо  $\Lambda(m, d)$  изоморфно усечённому кольцу симметрических многочленов — фактору

$$\Lambda(m, d) = \mathbb{Z}[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_m]/(\eta_{d-m+1}, \dots, \eta_{d-1}, \eta_d)$$

где через  $\varepsilon_i$  обозначен  $i$ -тый элементарный симметрический многочлен<sup>1</sup>, а через  $\eta_i$  —  $i$ -тый полный симметрический многочлен<sup>2</sup>, который, согласно основной теореме об элементарных симметрических функциях, является многочленом от  $\varepsilon_i$ . Циклу Шуберта  $\sigma_\lambda$  при этом изоморфизме отвечает класс (по модулю  $h_j(e)$ ) симметрического многочлена Шура<sup>3</sup>  $s_\lambda$  (выраженного в виде многочлена от  $\varepsilon_i$ ). Однако доказательство этого, а главное, явное описание соответствующих правил разложения одних многочленов через другие, ушло бы нас далеко за рамки этого курса (см. цитированные выше книги). Вместо этого мы, в качестве иллюстрации, явно вычислим кольцо пересечений грассманнiana  $\text{Gr}(2, 4)$ .

**Упражнение 3.34.** Проверьте, что 6 циклов Шуберта на квадрике Плюккера  $\text{Gr}(2, 4) \simeq P \subset \mathbb{P}_5$  суть:  $\sigma_{00} = P; \sigma_{22} = p = (0 : 0 : 0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}_5; \sigma_{10} = P \cap T_p P; \sigma_{11} = \pi_\alpha(O)$ , где  $O = (0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}_3; \sigma_{20} = \pi_\beta(\Pi)$ , где  $\Pi \subset \mathbb{P}_3$  задано уравнением  $x_0 = 0$ ;  $\sigma_{21} = \pi_\alpha(O) \cap \pi_\beta(\Pi)$ .

Очевидно, что циклы, суммарная коразмерность которых меньше четырёх, имеют нулевые пересечения. Пересечение циклов дополнительной разности уже было вычислено нами в § 2.6.1 и упр. 2.21:  $\sigma_{10}\sigma_{21} = \sigma_{20}^2 = \sigma_{11}^2 = \sigma_{22}$ , и  $\sigma_{20}\sigma_{11} = 0$ . Те же геометрические соображения показывают, что  $\sigma_{10}\sigma_{20} = \sigma_{10}\sigma_{11} = \sigma_{21}$ . Для вычисления  $\sigma_{10}^2$  реализуем  $\sigma_{10}$  как

$$\sigma_{10}(\ell) = P \cap T_{\mathbf{u}(\ell)} P = \{\ell'' \subset \mathbb{P}_3 \mid \ell \cap \ell'' \neq \emptyset\}.$$

Тогда  $\sigma_{10}^2$  гомологичен пересечению  $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell')$ , которое при общем положении пары прямых  $\ell, \ell'$  представляет собой неособую квадрику Сегре с рис. 2◦11. Однако если про деформировать прямую  $\ell'$  так, чтобы она стала пересекаться с  $\ell$ , эта квадрика про деформируется в своём классе гомологий в пару пересекающихся плоскостей —  $\alpha$ -связку с центром  $O = \ell \cap \ell'$  и  $\alpha$ -связку в плоскости  $\Pi$ , натянутой на  $\ell$  и  $\ell'$ :  $\sigma_{10}(\ell) \cap \sigma_{10}(\ell') = \pi_\alpha(O) \cup \pi_\beta(\Pi)$ , т. е.  $\sigma_{10}^2 = \sigma_{20} + \sigma_{11}$ .

Например, мы получаем ещё одно, «топологическое» решение задачи о том, сколько прямых пересекает заданные 4 попарно скрещивающиеся прямые в  $\mathbb{P}_3$ : если данные 4 прямые  $\ell_i$  находятся в достаточно общем положении (таком, что пересечение циклов  $\sigma_{10}(\ell_i)$  вычисляется четырёхкратным самопересечением  $\sigma_{10}^4$ ), ответ находится формальным вычислением в  $\Lambda(2, 4)$ :

$$\sigma_{10}^4 = (\sigma_{20} + \sigma_{11})^2 = \sigma_{20}^2 + \sigma_{11}^2 = 2\sigma_{22}$$

что означает, что есть ровно 2 таких прямых.

<sup>1</sup>т. е. сумма всех полилинейных мономов степени  $i$  от  $m$  формальных переменных  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$

<sup>2</sup>т. е. сумма вообще всех мономов степени  $i$  от  $m$  формальных переменных  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$

<sup>3</sup>т. е. сумма всех мономов степени  $|\lambda|$ , которые можно получить перемножением  $m$  формальных переменных  $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ , расставленных (с повторениями) во все клетки диаграммы  $\lambda$  так, чтобы номера переменных неубывали слева направо вдоль строк и строго возрастали сверху вниз вдоль столбцов; в частности,  $\sigma_{(i)} = \eta_i$ , а  $\sigma_{(11\dots1)} = \varepsilon_i$

### Задачи для самостоятельного решения к §3

**Задача 3.1.** Пусть  $A \in \text{Hom}(U, V) \simeq U^* \otimes V$ ,  $B \in \text{Hom}(V, W) \simeq V^* \otimes W$  — два линейных отображения, разложенные как  $A = \sum \alpha_\nu \otimes a_\nu$ ,  $B = \sum \beta_\mu \otimes b_\mu$  с  $\alpha_\nu \in U^*$ ,  $a_\nu \in V$ ,  $\beta_\mu \in V^*$ ,  $b_\mu \in W$ . Разложите аналогично их произведение  $B \circ A \in \text{Hom}(U, W) \simeq U^* \otimes W$ .

**Задача 3.2.** Пусть  $e_i \in V$  и  $x_i \in V^*$  — двойственные базисы. В какой эндоморфизм пространства  $V$  переходит при изоморфизме  $\text{End}V \simeq V^* \otimes V$  тензор Казимира

$$\sum x_i \otimes e_i = x_1 \otimes e_1 + x_2 \otimes e_2 + \cdots + x_n \otimes e_n \in V^* \otimes V$$

**Задача 3.3.** Рассмотрим корреляцию  $\tau : \text{End}(V) \rightarrow \text{End}(V)^*$ , которая переводит вектор  $\xi \otimes v \in V^* \otimes V \simeq \text{End}(V)$  в линейную форму  $\text{End}(V) \rightarrow \mathbb{k}$ , значение которой на разложимом операторе  $v' \otimes \xi' \in V^* \otimes V \simeq \text{End}(V)$  равно  $\xi(v') \cdot \xi'(v)$ . Какой билинейной форме на  $\text{Hom}(V, V)$  отвечает эта корреляция? Вырождена ли эта форма? Симметрична ли она? Какая квадратичная форма ей соответствует? Напишите формулу, вычисляющую значение этой формы на операторах  $A$  и  $B$ , используя только буквы  $A$  и  $B$  и операции над матрицами (не прибегая к выбору базисов и рассмотрению матричных элементов).

**Задача 3.4.** Постройте для конечномерных пространств  $U, V, W$  канонические изоморфизмы а)  $U^* \otimes V^* \simeq (U \otimes V)^*$  б)  $\text{Hom}(\text{Hom}(U, V), W) \simeq \text{Hom}(V, U \otimes W)$

**Задача 3.5.** Покажите, что для любых конечномерных векторных пространств  $U, V$  над произвольным полем пространства

$$\text{Hom}(U \otimes \text{Hom}(U, W), W), \text{End}(\text{Hom}(U, W)), \text{Hom}(U, W \otimes \text{Hom}(U, W)^*)$$

канонически изоморфны друг другу и выясните, какому эндоморфизму пространства  $\text{Hom}(U, W)$  отвечает при этом изоморфизме отображение  $c : U \otimes \text{Hom}(U, W) \rightarrow W$ , действующее на разложимые тензоры по правилу  $c(u \otimes \varphi) = \varphi(u)$ . Верно ли, что оператор  $\tilde{c} : U \rightarrow \text{Hom}(U, W)^* \otimes W$ , который соответствует оператору  $c$ , всегда инъективен?

**Задача 3.6.** Для любых конечномерных векторных пространств  $U, V, W$  постройте канонический изоморфизм пространства  $\text{End}(U \otimes V \otimes W)$  с пространством

$$\text{Hom}(\text{Hom}(U, V) \otimes \text{Hom}(V, W), \text{Hom}(U, W))$$

и выясните, какому линейному отображению  $\text{Hom}(U, V) \otimes \text{Hom}(V, W) \rightarrow \text{Hom}(U, W)$  отвечает тождественный эндоморфизм пространства  $U \otimes V \otimes W$ .

**Задача 3.7.** Явно предъявите тензор  $t \in V^{\otimes 3}$ , не являющийся суммой кососимметричного и симметричного.

**Задача 3.8.** Найдите размерность пространства 3-линейных форм  $\varphi : V \times V \times V \rightarrow \mathbb{k}$ , удовлетворяющих  $\forall u, v, w \in V$  условиям: а)  $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, w, u) = \varphi(w, u, v)$   
б)  $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, u, w)$  в)  $\varphi(u, v, v) = \varphi(u, u, v) = 0$  г)  $\varphi(u, u, u) = 0$   
д)  $\varphi(u, v, w) + \varphi(v, w, u) + \varphi(w, u, v) = 0$  е)  $\varphi(u, v, w) = \varphi(v, w, u)$

**Задача 3.9.** Для любых  $U, W \subset V$  проверьте, что а)  $S^n U \cap S^n W = S^n(U \cap W)$  в  $S^n V$

$$6) \Lambda^n U \cap \Lambda^n W = \Lambda^n(U \cap W) \text{ v } \Lambda^n V.$$

Задача 3.10. Покажите, что подпространство  $\mathcal{I}_{\text{sym}} \cap V \otimes V$  из (3-18), порождающее идеал соотношений коммутирования в  $TV$ , и подпространство  $\mathcal{I}_{\text{skew}} \cap V^* \otimes V^*$  из (3-21), порождающее идеал соотношений антикоммутирования в тензорной алгебре  $TV^*$  двойственного к  $V$  пространства  $V^*$ , являются аннуляторами друг друга при каноническом спаривании между  $V \otimes V$  и  $V^* \otimes V^*$ , задаваемом полной свёрткой.

Задача 3.11. Выберем какой-нибудь базисный вектор  $\eta$  в одномерном пространстве  $\Lambda^n V$  (где  $n = \dim V$ ) и зададим между пространствами  $\Lambda^k V$  и  $\Lambda^m V$ , такими что  $k + m = n$ , спаривание  $\langle *, * \rangle : \Lambda^k V \times \Lambda^m V \rightarrow \mathbb{k}$  правилом

$$\omega_1 \wedge \omega_2 = \langle \omega_1, \omega_2 \rangle \cdot \eta, \quad \text{где } \omega_1 \in \Lambda^k V, \omega_2 \in \Lambda^m V.$$

- а) покажите, что это спаривание невырождено для всех  $m$  и  $k$  с  $k + m = n$   
 б) выясните, как устроен оператор  $v^* : \Lambda^k V \rightarrow \Lambda^{k-1} V$ , двойственный относительно  
 этого спаривания к оператору левого внешнего умножения на данный вектор  $v \in V$ :

$$\Lambda^m V \xrightarrow{\xi \mapsto v \wedge \xi} \Lambda^{m+1} V.$$

Задача 3.12. Над полем  $\mathbb{k}$  с  $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$  постройте канонические изоморфизмы между пространствами:

- а) симметричных  $n$ -линейных форм  $\varphi : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$   
 б) функций  $f : V \rightarrow \mathbb{k}$ , задаваемых однородным многочленом степени  $n$  от линейных координат в каком-нибудь (а значит, и в любом) базисе  
 в)  $\text{Sym}^n(V^*)$                                     г)  $\text{Sym}^n(V)^*$                                     д)  $(S^n V)^*$                                     е)  $(S^n V^*)^*$   
 Какие из построенных изоморфизмов останутся таковыми и над всеми полями конечной характеристики?

Задача 3.13. Над полем  $\mathbb{k}$  с  $\text{char}(\mathbb{k}) = 0$  постройте канонические изоморфизмы между пространствами:

- а) кососимметричных  $n$ -линейных форм  $\varphi : V \times V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{k}$   
 б)  $\text{Skew}^n(V^*)$                             в)  $\text{Skew}^n(V)^*$                             г)  $(\Lambda^n V)^*$                             д)  $(\Lambda^n V^*)$

Какие из построенных изоморфизмов останутся таковыми и над всеми полями конечной характеристики?

**Задача 3.14 (принцип Аронгольда).** Пусть  $V$  – конечномерное векторное пространство над полем характеристики нуль. Покажите, что пространство симметрических тензоров  $\text{Sym}^n(V) \subset V^{\otimes n}$  линейно порождается тензорами вида  $v^{\otimes n} = v \otimes v \otimes \dots \otimes v$  со всеми возможными  $v \in V$  и явно выразите через тензоры вида  $v^{\otimes 3}$  симметрический кубический тензор  $u \otimes w \otimes w + w \otimes u \otimes w + w \otimes w \otimes u$ , где  $u, w \in V$  – два произвольных линейно независимых вектора.

Задача 3.15. Можно ли обратимой линейной заменой переменных преобразовать многочлен  $9x^3 - 15yx^2 - 6zx^2 + 9xy^2 + 18z^2x - 2y^3 + 3zy^2 - 15z^2y + 7z^3$  в многочлен от  $\leq 2$  переменных?

Задача 3.16. Покажите, что многочлен  $\det(A)$  на пространстве  $n \times n$ -матриц имеет следующее разложение Тейлора:  $\det(\lambda A + \mu B) = \sum_{p+q=n} \lambda^p \mu^q \cdot \text{tr} (\Lambda^p A \cdot \Lambda^q B^t)$ , где  $\Lambda^p A$  и  $\Lambda^q B$  суть

внешние степени<sup>1</sup> матриц  $A$  и  $B$ .

Задача 3.17. Обозначим через  $S \subset \mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^2 V^*)$  множество всех вырожденных квадрик на  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ . Покажите, что

- а)  $S$  является алгебраической гиперповерхностью, и точка  $Q \in S$  является неособой точкой поверхности  $S$  тогда и только тогда, когда соответствующая квадрика  $Q \subset \mathbb{P}_n$  имеет единственную особую точку  $p \in Q$
- б) касательная гиперплоскость  $T_Q S \subset \mathbb{P}_N$  в такой неособой точке  $Q \in S$  состоит из всех квадрик на  $\mathbb{P}_n$ , проходящих через особую точку  $p$  квадрики  $Q \subset \mathbb{P}_n$ .

Задача 3.18. Найдите все особые точки следующих трёх кривых на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(\mathbb{C}^3)$ :

- а)  $(x_0 + x_1 + x_2)^3 = 27 x_0 x_1 x_2$
  - б)  $x^2 y + x y^2 = x^4 + y^4$
  - в)  $(x^2 - y + 1)^2 = y^2(x^2 + 1)$
- (последние две кривые заданы аффинным уравнением в стандартной карте  $U_0$  и речь в задаче идёт про их проективные замыкания).

Задача 3.19. Напишите явную рациональную параметризацию квадрики

$$(x_0^2 + x_1^2)^2 + 3 x_0^2 x_1 x_2 + x_1^3 x_2 = 0,$$

в  $\mathbb{P}_2(\mathbb{C})$ , воспользовавшись проекцией из особой точки на какую-нибудь прямую.

Задача 3.20 (комплексы Кошуля и Де Рама). Фиксируем в  $V$  базис  $e_1, e_2, \dots, e_n$  и обозначим через  $x_i$  и  $\xi_i$  классы вектора  $e_i$  в симметрической и внешней алгебре соответственно. Покажите, что

- а) операторы

$$\begin{aligned} \Lambda^{k+1} V \otimes S^{m-1} V &\xleftarrow{d} \Lambda^k V \otimes S^m V \xrightarrow{\partial} \Lambda^{k-1} V \otimes S^{m+1} V \\ d = \sum_v \xi_v \otimes \frac{\partial}{\partial x_v} : \omega \otimes f &\mapsto \sum_v \frac{\partial \omega}{\partial \xi_v} \otimes x_v \cdot f \\ \partial = \sum_v \frac{\partial}{\partial \xi_v} \otimes x_v : \omega \otimes f &\mapsto \sum_v \xi_v \wedge \omega \otimes \frac{\partial f}{\partial x_v} \end{aligned} \quad (3-53)$$

не зависят от выбора базиса и имеют  $d^2 = 0$  и  $\partial^2 = 0$

б) оператор  $d\partial + \partial d$  действует на  $\Lambda^k V \otimes S^m V$  как  $(k+m) \cdot \text{Id}$ .

в) Вычислите  $\ker d / \text{im } d$  и  $\ker \partial / \text{im } \partial$

Задача 3.21 (грассманова экспонента). Над полем любой характеристики для разложимого  $\omega \in \Lambda^{2m}$  положим  $e^\omega \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \omega$  и продолжим это определение на разложимые грассмановы многочлены правилом  $e^{\sum \omega_i} = \prod e^{\omega_i}$ . Покажите, что

- а) определение  $e^f$  корректно (не зависит ни от способа представления  $f$  в виде суммы разложимых мономов, ни от порядка расположения сомножителей в стоящем в правой части грассмановом произведении)
- б) экспоненциальное отображение  $\Lambda^{\text{even}} V \hookrightarrow \Lambda^{\text{even}} V$  является инъективным гомоморфизмом из аддитивной группы всех чётных грассмановых многочленов в мультиплексивную группу чётных грассмановых многочленов со свободным членом 1.

Задача 3.22. Выполняется ли в условиях предыдущей задачи над полем характеристики

<sup>1</sup>т. е. матрицы операторов, индуцированных операторами  $A$  и  $B$  на пространствах однородных грассмановых многочленов от базисных векторов степеней  $p$  и  $q$  соответственно (см. зад. 3.29); матричные элементы этих матриц суть миноры порядков  $p$  и  $q$  матриц  $A$  и  $B$ , занумерованные так, чтобы дополнительные миноры имели одинаковые номера

нуль равенства: а)  $\partial_v e^f = e^f \wedge \partial_v f$  б)  $e^f = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} f^{\wedge k}$

Задача 3.23. Выясните, разложима ли грассманова кубическая форма от четырёх переменных  $-\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_3 + 2\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \xi_4 + 4\xi_1 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4 + 3\xi_2 \wedge \xi_3 \wedge \xi_4$  (если да, то напишите какое-нибудь из разложений явно, если нет — объясните, почему).

Задача 3.24 (тензорное произведение операторов). Пусть между векторными пространствами  $V_1, V_2, \dots, V_n$  и  $W_1, W_2, \dots, W_n$  действуют линейные операторы  $f_i : V_i \rightarrow W_i$

а) Покажите, что существует единственный линейный оператор

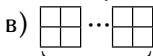
$$f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_n : V_1 \otimes V_2 \otimes \cdots \otimes V_n \rightarrow W_1 \otimes W_2 \otimes \cdots \otimes W_n$$

действующий на разложимые тензоры по правилу

$$v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_n \mapsto f_1(v_1) \otimes f_2(v_2) \otimes \cdots \otimes f_n(v_n)$$

- б) Пусть  $f : U \rightarrow U$  имеет матрицу  $F$  в базисе  $u_1, u_2, \dots, u_n$ , а  $g : W \rightarrow W$  имеет матрицу  $G$  в базисе  $w_1, w_2, \dots, w_m$ . Опишите матрицу оператора  $F \otimes G : U \otimes W \rightarrow U \otimes W$  в базисе из векторов  $u_\nu \otimes w_\mu$  в терминах матриц  $F$  и  $G$ .
- в) Пусть  $F : U \hookrightarrow W$  вложение,  $U \neq 0$ , и  $E : V \hookrightarrow U$  тождественный оператор. Покажите, что  $F \otimes E : U \otimes V \rightarrow W \otimes V$  тоже вложение.

Задача 3.25. Опишите цикловой тип<sup>1</sup> тензорного квадрата  $N^{\otimes 2} = N \otimes N : V^{\otimes 2} \rightarrow V^{\otimes 2}$  нильпотентного оператора  $N : V \rightarrow V$  через цикловой тип  $N$ . Если общий случай вызывает затруднения, решите задачу для операторов циклового типа

а)     б)     в) 

Задача 3.26. Вычислите собственные числа всех тензорных степеней  $F^{\otimes n}$  диагонализуемого линейного оператора  $F : V \rightarrow V$  с собственными числами  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ .

Задача 3.27. Дан конечный набор  $F_1, F_2, \dots, F_m$  ненулевых линейных операторов на произвольном векторном пространстве  $V$  над любым полем  $\mathbb{K}$ . Можно ли подобрать ненулевые константы  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in \mathbb{K}$  так, чтобы  $\forall n \in \mathbb{N} \quad \lambda_1 F_1^{\otimes n} + \lambda_2 F_2^{\otimes n} + \cdots + \lambda_m F_m^{\otimes n} = 0$ .

- Задача 3.28. В условиях зад. 3.26 выразите через коэффициенты характеристического многочлена оператора  $F$  величины а)  $\text{tr } F^{\otimes 2}$  б)  $\text{tr } F^{\otimes 3}$  в)  $\det F^{\otimes 2}$  г)  $\det F^{\otimes 3}$   
д) след и определитель оператора  $G \mapsto FGF^{-1}$  на  $\text{Hom}(V, V)$   
е) след и определитель оператора  $\varphi(x) \mapsto \varphi(F^{-1}x)$  на  $S^2 V^*$ .

Задача 3.29. Убедитесь, что всякий линейный оператор  $F : V \rightarrow V$  корректно индуцирует операторы  $S^k F : S^k V \rightarrow S^k V$  и  $\Lambda^k F : \Lambda^k V \rightarrow \Lambda^k V$ , действующие на разложимые тензоры по правилам

$$\begin{aligned} F(v_1 \cdot v_2 \cdot \cdots \cdot v_k) &= F(v_1) \cdot F(v_2) \cdot \cdots \cdot F(v_k) \\ F(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_k) &= F(v_1) \wedge F(v_2) \wedge \cdots \wedge F(v_k) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>т. е. набор длин жордановых цепочек

Для диагонализуемого оператора  $F$  выразите все собственные значения всех степеней  $S^nF$  и  $\Lambda^nF$  через собственные значения  $F$  и покажите, что над произвольным полем  $\mathbb{k}$  характеристики нуль в кольце  $\mathbb{k}[[t]]$  справедливы формулы

$$\text{a) } \frac{1}{\det(E - tF)} = \sum_{k \geq 0} \operatorname{tr}(S^k F) \cdot t^k \quad \text{б) } \det(E + tF) = \sum_{k=0}^{\dim V} \operatorname{tr}(\Lambda^k F) \cdot t^k.$$

Задача 3.30. Докажите для любой квадратной матрицы  $A$  равенство  $e^{A \otimes E + E \otimes A} = e^A \otimes e^A$ , где  $E$  — единичная матрица.

Задача 3.31. Докажите в кольце формальных степенных рядов с рациональными коэффициентами от матричных элементов  $n \times n$  матрицы  $A$  равенство

$$\ln \det(E - A) = \operatorname{tr} \ln(E - A)$$

и убедитесь, что над полем  $\mathbb{C}$  для всех достаточно малых комплексных  $A$  оно выполняется также и численно.

## §4. Аффинная алгебраическая геометрия

**4.1. Порция коммутативной алгебры.** Всюду в этом параграфе слово «кольцо» означает по умолчанию *коммутативное кольцо с единицей*, а гомоморфизмы колец всегда предполагаются отображающими единицу в единицу.

**4.1.1. Нетеровость.** Любое множество  $M \subset A$  элементов произвольного коммутативного кольца  $A$  порождает в  $A$  идеал  $(M)$ , состоящий из всевозможных конечных сумм

$$g_1f_1 + g_2f_2 + \cdots + g_mf_m,$$

в которых  $g_\nu \in A$ , а  $f_\nu \in M$ . Как  $A$ -модуль, идеал  $(M)$  представляет собою  $A$ -линейную оболочку элементов множества  $M$ .

Для произвольного идеала  $I \subset A$  элементы  $f_1, f_2, \dots, f_m \in I$  называются *образующими* этого идеала, если  $I = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ , т. е.  $f_1, f_2, \dots, f_m$  линейно порождают  $I$  как  $A$ -модуль. Коммутативное кольцо  $A$  называется *нётеровым*, если каждый его идеал допускает конечное множество образующих. Условие нётеровости можно переформулировать несколькими равносильными способами:

**Лемма 4.1**

Следующие свойства коммутативного кольца  $A$  попарно эквивалентны:

- (1) любое множество элементов  $M \subset A$  содержит некоторое конечное подмножество, порождающее тот же идеал, что и  $M$
- (2) любой идеал в  $A$  допускает конечное множество образующих
- (3) для любой бесконечной цепочки вложенных идеалов  $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \dots$  существует  $n \in \mathbb{N}$  такое, что  $I_\nu = I_n \quad \forall \nu \geq n$ .

**Доказательство.** Ясно, что (1)  $\Rightarrow$  (2). Для доказательства импликации (2)  $\Rightarrow$  (3) заметим, что объединение  $I = \bigcup_\nu I_\nu$  всех идеалов возрастающей цепочки также является идеалом, и стало быть линейно порождается над  $A$  конечным числом элементов  $f_1, f_2, \dots, f_m \in I$ . Все эти элементы содержатся в некотором идеале  $I_n$  из цепочки. Следовательно,  $I_\nu = I_n = I \quad \forall \nu \geq n$ . Чтобы вывести (1) из (3), рассмотрим цепочку идеалов  $I_n = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ , которая строится по индукции следующим образом: в качестве  $f_1$  возьмём произвольный элемент множества  $M$ . При  $i > 1$  и  $(M) \neq (f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$  в качестве  $f_i$  возьмём любой элемент из  $M$ , не лежащий в  $(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})$ . Тогда идеалы  $I_{i-1} \subsetneq I_i$  будут строго возрастать, что в силу (3) не может продолжаться бесконечно, т. е. на каком-то шагу мы столкнёмся с включением  $M \subset (f_1, f_2, \dots, f_i)$  и равенством  $(M) = (f_1, f_2, \dots, f_i)$ .  $\square$

**Теорема 4.1**

Если  $A$  нётерово, то кольцо многочленов  $A[x]$  также нётерово.

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный идеал  $I \subset A[x]$  и обозначим через  $L_d \subset A$  множество старших коэффициентов всех многочленов степени  $\leq d$  из  $I$ , объединённое с нулём, а через  $L_\infty = \bigcup_d L_d$  — множество старших коэффициентов вообще всех многочленов из  $I$ , также объединённое с нулём.

**Упражнение 4.1.** Убедитесь, что все  $L_d$  (включая  $L_\infty$ ) являются идеалами в  $A$ .

Поскольку кольцо  $A$  нётерово, все идеалы  $L_d$  конечно порождены. Для каждого  $d$  (включая  $d = \infty$ ) обозначим через  $f_1^{(d)}, f_2^{(d)}, \dots, f_{m_d}^{(d)} \in A[x]$  многочлены, старшие коэффициенты которых порождают соответствующий идеал  $L_d$  в  $A$ . Пусть наибольшая из степеней многочленов  $f_i^{(\infty)}$ , старшие коэффициенты которых порождают идеал  $L_\infty \subset A$ , равна  $D \in \mathbb{N}$ . Покажем, что идеал  $I$  порождается многочленами  $f_i^\infty$  и многочленами  $f_j^{(d)}$  с  $0 \leq d < D$ .

Произвольный многочлен  $g \in I$  сравним по модулю многочленов  $f_1^{(\infty)}, f_2^{(\infty)}, \dots, f_{m_\infty}^{(\infty)}$  с многочленом, степень которого строго меньше  $D$ . В самом деле, поскольку старший коэффициент многочлена  $g$  лежит в идеале  $L_\infty$ , он имеет вид  $\sum \lambda_i a_i$ , где  $\lambda_i \in A$ , а  $a_i$  — старшие коэффициенты многочленов  $f_i^{(\infty)}$ . При  $\deg g \geq D$  все разности

$$m_i = \deg g - \deg f_i^{(\infty)}$$

неотрицательны, и мы можем образовать многочлен  $h = g - \sum \lambda_i \cdot f_i(x) \cdot x_i^{m_i}$ , сравнимый с  $g$  по модулю  $I$  и имеющий строго меньшую, чем  $g$  степень. Заменим  $g$  на  $h$  и повторим эту процедуру, пока не получим многочлен  $h \equiv g \pmod{(f_1^{(\infty)}, f_2^{(\infty)}, \dots, f_{m_\infty}^{(\infty)})}$  степени  $\deg h < D$ . Теперь старший коэффициент многочлена  $h$  находится в идеале  $L_d$  с  $d < D$ . Тем же способом вычитая из него подходящие комбинации многочленов  $f_j^{(d)}$  с  $0 \leq d < D$ , мы сможем сокращать его старший член и строго уменьшать степень до тех пор, пока не получим нуль.  $\square$

#### Следствие 4.1

Если  $A$  нётерово, то  $A[x_1, x_2, \dots, x_n]$  тоже нётерово.

#### Следствие 4.2

Всякая конечно порождённая алгебра над полем нётерова.

**Доказательство.** Алгебра  $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , где  $\mathbb{k}$  — поле, нётерова по предыдущему следствию. Любая ее фактор алгебра  $A$  также нётерова, поскольку полный прообраз любого идеала  $I \subset A$  при эпиморфизме  $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow A$  является конечно порождённым идеалом в  $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , и образы его образующих в  $A$  порождают  $I$ .  $\square$

**Замечание 4.1.** Подкольцо нётерова кольца не обязательно является нётеровым. Так, заменяя в доказательстве теор. 4.1 старшие члены на младшие, нетрудно убедиться, что кольцо формальных степенных рядов  $A[[t]]$  с коэффициентами в нётеровом кольце  $A$  тоже нётерово. В частности, кольцо  $\mathbb{C}[[t]]$  нётерово. Однако его подкольцо, образованное рядами, сходящимися всюду в  $\mathbb{C}$ , нётеровым не является (см. зад. 4.5 на стр. 115).

**4.1.2. Целые элементы.** Рассмотрим пару вложенных колец  $A \subset B$ . Элемент  $b \in B$  называется *целым* над  $A$ , если он удовлетворяет условиям идущей следом лем. 4.2.

#### Лемма 4.2

Следующие три свойства элемента  $b \in B$  попарно эквивалентны:

- (1)  $b^m = a_1 b^{m-1} + \dots + a_{m-1} b + a_m$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$  и некоторых  $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ ;
- (2)  $A$ -линейная оболочка всех целых неотрицательных степеней  $b^m$ ,  $m \geq 0$ , линейно порождается над  $A$  конечным числом элементов;

- (3) существует конечно порождённый  $A$ -подмодуль  $M \subset B$ , такой что  $bM \subset M$  и для каждого  $b' \in B$  из  $b'M = 0$  вытекает, что  $b' = 0$  (это последнее условие иногда называют  $B$ -точностью подмодуля  $M$ )

**Доказательство.** Импликации  $(1) \Rightarrow (2) \Rightarrow (3)$  очевидны. Покажем, что  $(1) \Rightarrow (3)$ . Пусть элементы  $e_1, e_2, \dots, e_m$  порождают  $M$  над  $A$  и  $A$ -линейный оператор умножения на  $b$ :

$$M \xrightarrow{m \mapsto bm} M$$

действует на них матрицей  $Y \in \text{Mat}_{m \times m}(A)$ :

$$(be_1, be_2, \dots, be_m) = (e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot Y. \quad (4-1)$$

Из матричного тождества  $\det X \cdot E = X \cdot X^\vee$ , где  $X$  — произвольная квадратная матрица,  $E$  — единичная матрица того же размера, что и  $X$ , а  $X^\vee$  — присоединённая к матрице  $X$  матрица из алгебраических дополнений к элементам матрицы  $X^t$ , вытекает, что образ оператора умножения на  $\det X$  содержится в линейной оболочке столбцов матрицы  $X$ . Поэтому образ оператора умножения всех элементов модуля  $M$  на число  $\det(bE - Y) \in B$  содержится в линейной оболочке векторов  $(e_1, e_2, \dots, e_m) \cdot (bE - Y)$ , которая равна нулю согласно (4-1). Таким образом,  $\det(bE - Y) \cdot M = 0$ , откуда  $\det(bE - Y) = 0$  в силу  $B$ -точности  $M$ . Так как все элементы матрицы  $Y$  лежат в  $A$ , соотношение  $\det(bE - Y) = 0$  имеет вид, требуемый в условии (1).  $\square$

#### Определение 4.1

Множество всех  $b \in B$ , целых над данным подкольцом  $A \subset B$ , называется *целым замыканием*  $A$  в  $B$ . Если оно не содержит ничего, кроме элементов самого  $A$ , то  $A$  называется *целозамкнутым* в  $B$ . Наоборот, если все  $b \in B$  целы над  $A$ , то  $B$  называется *целым расширением* кольца  $A$  или *целой A-алгеброй*.

#### Предложение 4.1

Целое замыкание  $\bar{A} \subset B$  любого подкольца  $A \subset B$  является подкольцом в  $B$ . Для любого кольца  $C \supset B$  всякий элемент  $c \in C$ , целый над  $\bar{A}$ , цел и над  $A$ .

**Доказательство.** Если  $p^m = x_{m-1} p^{m-1} + \dots + x_1 p + x_0$ ,  $q^n = y_{n-1} q^{n-1} + \dots + y_1 q + y_0$  для  $p, q \in B$ ,  $x_\nu, y_\mu \in A$ , то  $A$ -модуль, натянутый на  $p^i q^j$  с  $0 \leq i < m$ ,  $0 \leq j < n$ , является  $B$ -точным (ибо содержит 1) и переходит в себя при умножении как на  $p + q$ , так и на  $pq$ . Аналогично, если

$$c^r = z_{r-1} c^{r-1} + \dots + z_1 c + z_0, \quad z_k^{m_k} = a_{k,m_k-1} z^{m_k-1} + \dots + a_{k,1} z_k + a_{k,0}$$

где  $0 \leq k \leq (r-1)$  и все  $a_{k,\ell} \in A$ , то умножение на  $c$  сохраняет  $B$ -точный  $A$ -подмодуль, порождённый произведениями  $c^i z_1^{j_1} z_2^{j_2} \dots z_r^{j_r}$  с  $0 \leq i < r$  и  $0 \leq j_k < m_k$ .  $\square$

#### Следствие 4.3 (лемма Гаусса – Кронекера – Дедекинда)

Пусть  $A \subset B$  — произвольное расширение коммутативных колец, и  $f, g \in B[x]$  — приведённые<sup>1</sup> многочлены положительной степени. Тогда все коэффициенты произведения

$$h(x) = f(x)g(x)$$

целы над  $A$ , если и только если все коэффициенты и у  $f(x)$ , и у  $g(x)$  целы над  $A$ .

---

<sup>1</sup>т. е. со старшим коэффициентом единица

**Доказательство.** Если коэффициенты  $f$  и  $g$  целы над  $A$ , то коэффициенты  $fg$  тоже целы над  $A$ , так как целые элементы образуют кольцо. Чтобы показать обратное, рассмотрим какое-нибудь кольцо  $C \supset B$ , над которым  $f$  и  $g$  полностью разлагаются на линейные множители<sup>1</sup>:  $f(x) = \prod(x - \alpha_\nu)$  и  $g(x) = \prod(x - \beta_\mu)$  для некоторых  $\alpha_\nu, \beta_\mu \in C$ . Если все коэффициенты  $h(x) = \prod(x - \alpha_\nu) \prod(x - \beta_\mu)$  целы над  $A$ , то  $\alpha_\nu, \beta_\mu$  целы над целым замыканием  $A$  в  $C$ , а значит и целы и над самим  $A$ . Поскольку коэффициенты  $f$  и  $g$  являются многочленами от  $\alpha_\nu$  и  $\beta_\mu$ , они тоже целы над  $A$ .  $\square$

**Пример 4.1** ( $\mathbb{Z}$  целозамкнуто в  $\mathbb{Q}$ )

Если дробь  $p/q$  с взаимно простыми  $p, q \in \mathbb{Z}$  такова, что

$$\frac{p^m}{q^m} = a_1 \frac{p^{m-1}}{q^{m-1}} + \dots + a_{m-1} \frac{p}{q} + a_m$$

с  $a_i \in \mathbb{Z}$ , то  $p^m = a_1 qp^{m-1} + \dots + a_{m-1} q^{m-1} p + a_m q^m$  делится на  $q$ , что при взаимно простых  $p$  и  $q$  возможно только если  $q = \pm 1$ . Таким образом, целое замыкание  $\mathbb{Z}$  в  $\mathbb{Q}$  есть  $\mathbb{Z}$ .

**Пример 4.2** (целые алгебраические числа)

Пусть  $K \supset \mathbb{Q}$  – поле, конечномерное как векторное пространство над  $\mathbb{Q}$ . Элементы  $z \in K$  называются *алгебраическими числами*. Условие (3) лем. 4.2 означает, что алгебраическое число  $z$  является целым над  $\mathbb{Z}$  тогда и только тогда, когда существует инвариантное относительно умножения на  $z$  подпространство<sup>2</sup>  $W \subset K$  и некоторый базис в нём, такие что оператор умножения на  $z$

$$z : W \xrightarrow{x \mapsto zx} W$$

записывается в этом базисе целочисленной матрицей. Именно таким образом *целые алгебраические числа* и были впервые определены в XIX веке Дедекином. Введённое выше понятие *целого элемента* появилось позже как обобщение определения Дедекинда на произвольные коммутативные кольца.

Произвольное алгебраическое число  $\xi \in K$  всегда можно сделать целым, умножив его на подходящее число из  $\mathbb{Z}$ : если  $\xi$  удовлетворяет уравнению

$$a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \dots + a_{n-1} \xi + a_n = 0$$

с целыми коэффициентами  $a_i \in \mathbb{Z}$ , то  $n$ -тая степень числа  $\zeta = a_0 \xi$  выражается через меньшие свои степени с целыми коэффициентами:

$$\zeta^n = a_0^n \xi^n = -a_0^n a_1 \xi^{n-1} - a_0^n a_2 \xi^{n-2} - \dots - a_0^n a_n = -a_0 a_1 \cdot \zeta^{n-1} - a_0^2 a_2 \cdot \zeta^{n-2} - \dots - a_0^n a_n \cdot \zeta^0.$$

В частности, у любого конечномерного как векторное пространство над  $\mathbb{Q}$  поля  $K \supset \mathbb{Q}$  всегда можно выбрать базис над  $\mathbb{Q}$ , состоящий из целых алгебраических чисел.

<sup>1</sup>такое кольцо  $C$  можно построить индукцией по  $\deg h$ : если  $h \neq 1$ , то  $B$  вкладывается в фактор кольцо  $F = B[x]/(h)$  как подкольцо классов констант, и поскольку класс  $x \pmod h \in F$  является корнем  $h$ , то  $h(x) = (x - \kappa) \cdot h_1(x)$  в  $F[x]$ , и либо  $h_1 = 1$ , либо по индукции  $h_1 = \prod(x - c_\nu)$  над некоторым кольцом  $C \supset F \supset B$

<sup>2</sup>понимаемое как векторное пространство над полем  $\mathbb{Q}$

Пример 4.3 (инварианты конечной группы)

Пусть конечная группа  $G$  действует на кольце  $B$  кольцевыми автоморфизмами

$$g : B \rightarrow B, \quad g \in G.$$

Подкольцо  $B^G \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in B \mid ga = a \ \forall g \in G\}$  называется *кольцом инвариантов* действия  $G$  на  $B$ . Если  $G$ -орбита элемента  $b \in B$  состоит из элементов  $b_1 = b, b_2, b_3, \dots, b_n$ , то элемент  $b$  является корнем приведённого многочлена

$$B(t) = \prod (t - b_i) \in B^G[t].$$

Таким образом,  $B$  цело над подкольцом инвариантов  $B^G \subset B$ .

Предложение 4.2

Пусть кольцо  $B$  цело над подкольцом  $A \subset B$ . Если  $B$  — поле, то  $A$  также является полем. Наоборот, если  $A$  — поле, и в  $B$  нет делителей нуля, то  $B$  — поле.

Доказательство. Если  $B$  — поле, целое над  $A$ , то обратный элемент  $a^{-1} \in B$  к произвольному ненулевому  $a \in A$  удовлетворяет уравнению

$$a^{-m} = \alpha_1 a^{1-m} + \dots + \alpha_{m-1} a^{-1} + \alpha_0, \quad \alpha_\nu \in A.$$

Умножая обе части на  $a^{m-1}$ , получаем  $a^{-1} = \alpha_1 + \dots + \alpha_{m-1} a^{m-2} + \alpha_0 a^{m-1} \in A$ .

Обратно, если  $A$  — поле, и  $B$  — целая  $A$ -алгебра, то все неотрицательные целые степени  $b^i$  любого  $b \in B$  порождают конечномерное векторное пространство  $V$  над  $A$ . Если  $b \neq 0$ , и в  $B$  нет делителей нуля, то линейный оператор умножения на  $b: V \xrightarrow{x \mapsto bx} V$  не имеет ядра, и тем самым биективен. Прообраз  $1 \in V$  относительно этого оператора есть  $b^{-1}$ .  $\square$

Следствие 4.4

Если поле  $\mathbb{F}$  является конечномерным векторным пространством над своим подполем  $\mathbb{k} \subset \mathbb{F}$ , то все элементы  $\mathbb{F}$  алгебраичны над  $\mathbb{k}$ , и  $\mathbb{k}$ -подалгебра в  $\mathbb{F}$ , порождённая любым набором элементов  $a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{F}$ , является полем.

**4.1.3. Конечно порождённые  $\mathbb{k}$ -алгебры.** Когда кольцо  $A = \mathbb{k}$  является полем, всякое кольцо  $B \supset \mathbb{k}$  называется *коммутативной  $\mathbb{k}$ -алгеброй*. Такая  $\mathbb{k}$ -алгебра называется *конечно порождённой*, если она является фактором алгебры многочленов  $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , т. е. когда имеется эпиморфизм  $\mathbb{k}$ -алгебр  $\pi : \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \twoheadrightarrow B$ . В этом случае образы переменных  $b_i = \pi(x_i) \in B$  называются *образующими* алгебры  $B$ , а ядро  $\ker \pi \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  называется *идеалом соотношений* между ними.

Любой набор элементов  $b_1, b_2, \dots, b_m$  любой  $\mathbb{k}$ -алгебры  $B$  порождает  $\mathbb{k}$ -подалгебру

$$\mathbb{k}[b_1, b_2, \dots, b_m] \subset B$$

которая представляет собою образ гомоморфизма вычисления

$$\text{ev}_{b_1, b_2, \dots, b_m} : \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_m] \xrightarrow{f \mapsto f(b_1, b_2, \dots, b_m)} B, \quad (4-2)$$

и состоит из всех элементов, которые можно получить из  $\mathbb{k}$  и  $b_1, b_2, \dots, b_m$  при помощи операций сложения и умножения. Это наименьшая  $\mathbb{k}$ -подалгебра в  $B$ , содержащая  $\mathbb{k}$  и все  $b_i$ .

Целостность над  $\mathbb{k}$  элемента  $b \in B$  равносильна его *алгебраичности* над  $\mathbb{k}$ , т. е. тому, что  $b$  удовлетворяет какому-нибудь – необязательно приведённому – уравнению  $f(b) = 0$  с ненулевым  $f \in \mathbb{k}[x]$ . Алгебраичность элемента  $b \in B$  над  $\mathbb{k}$ , в свою очередь, равносильна тому, что *гомоморфизм вычисления*

$$\text{ev}_b : \mathbb{k}[x] \xrightarrow{f \mapsto f(b)} B \quad (4-3)$$

имеет ненулевое ядро. Если элемент  $b \in B$  не является алгебраическим, то он называется *трансцендентным* над  $\mathbb{k}$ . В этом случае гомоморфизм вычисления (4-3) является изоморфием подалгебры  $\mathbb{k}[b] \subset B$  с кольцом многочленов  $\mathbb{k}[x]$ . В частности, алгебра  $\mathbb{k}[b]$  в этом случае бесконечномерна как векторное пространство над  $\mathbb{k}$  и не является полем.

Если элемент  $b \in B$  алгебраичен над  $\mathbb{k}$ , то ядро гомоморфизма вычисления (4-3), будучи идеалом в кольце главных идеалов  $\mathbb{k}[x]$ , представляет собой ненулевой главный идеал  $\ker(\text{ev}_b) = (\mu_b)$ , образующая которого  $\mu_b \in \mathbb{k}[x]$  однозначно определяется по  $b$  как приведённый многочлен наименьшей степени, аннулирующий  $b$ . Этот многочлен называется *минимальным многочленом* элемента  $b$  над  $\mathbb{k}$ . Алгебра  $\mathbb{k}[b] = \mathbb{k}[x]/(\mu_b)$  в этом случае конечномерна как векторное пространство над  $\mathbb{k}$  и  $\dim_{\mathbb{k}} \mathbb{k}[b] = \deg \mu_b$ . Если в  $\mathbb{k}[b]$  нет делителей нуля (что так, если в  $B$  нет делителей нуля), то алгебра  $\mathbb{k}[b]$  является полем по предл. 4.2.

#### Теорема 4.2

Конечно порождённая  $\mathbb{k}$ -алгебра  $B$  может быть полем только при условии, что все её элементы алгебраичны над  $\mathbb{k}$ , и в этом случае алгебра  $B$  конечномерна как векторное пространство над  $\mathbb{k}$ .

**Доказательство.** Пусть  $B$  имеет образующие  $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$  и является полем. Доказывать алгебраичность  $B$  будем индукцией по  $m$ . Случай  $m = 1$ ,  $B = \mathbb{k}[b]$  уже был разобран выше: если  $b$  трансцендентен, то гомоморфизм (4-3) отождествляет  $B$  с кольцом многочленов  $\mathbb{k}[x]$ , которое не является полем, а если  $b$  алгебраичен, то алгебра  $\mathbb{k}[b]$  конечномерна.

Пусть  $m > 1$ . Если  $b_m$  алгебраичен над  $\mathbb{k}$ , то  $\mathbb{k}[b_m]$  – поле и  $B$  алгебраично над  $\mathbb{k}[b_m]$  по предположению индукции. Тогда по предл. 4.1 алгебра  $B$  алгебраична и над  $\mathbb{k}$ . Поскольку она получается присоединением к  $\mathbb{k}$  конечного числа алгебраических элементов, она конечномерна как векторное пространство над  $\mathbb{k}$ .

Таким образом, достаточно показать, что элемент  $b_m$  алгебраичен над  $\mathbb{k}$ . Допустим, что он трансцендентен. Тогда гомоморфизм (4-3) продолжается до изоморфизма поля рациональных функций  $\mathbb{k}(x)$  с наименьшим подполем  $\mathbb{k}(b_m) \subset B$ , содержащим  $b_m$ . По предположению индукции,  $B$  алгебраично над  $\mathbb{k}(b_m)$ , так что каждая из образующих  $b_1, b_2, \dots, b_{m-1}$  удовлетворяет некоторому полиномиальному уравнению с коэффициентами из  $\mathbb{k}(b_m)$ . Умножая эти уравнения на подходящие многочлены от  $b_m$ , мы можем добиться того, чтобы все их коэффициенты лежали в  $\mathbb{k}[b_m]$ , а также сделать все их старшие коэффициенты равными одному и тому же многочлену, который мы обозначим через  $p(b_m) \in \mathbb{k}[b_m]$ . В результате поле  $B$  оказывается целым над подалгеброй  $F = \mathbb{k}[b_m, 1/p(b_m)] \subset B$ , порождённой над  $\mathbb{k}$  элементами  $b_m$  и  $1/p(b_m)$ . По предл. 4.2 эта подалгебра

$F$  является полем, в частности, элемент  $1 + p(b_m)$  обратим в  $F$ , т. е. найдётся такой многочлен  $g \in \mathbb{k}[x_1, x_2]$ , что  $g(b_m, 1/p(b_m)) \cdot (1 + p(b_m)) = 1$ . Записывая рациональную функцию  $g(x, 1/p(x))$  в виде  $h(x)/p^k(x)$ , где  $h \in \mathbb{k}[x]$  не делится на  $p$ , и умножая обе части предыдущего равенства на  $p^k(b_m)$ , мы приходим к полиномиальному уравнению  $h(b_m) \cdot (p(b_m) + 1) = p^{k+1}(b_m)$  на  $b_m$ . Оно нетривиально, поскольку  $h(x)(1 + p(x))$  не делится на  $p(x)$  в  $\mathbb{k}[x]$ . Тем самым,  $b_m$  не может быть трансцендентен.  $\square$

**4.1.4. Базисы трансцендентности.** Пусть  $\mathbb{k}$ -алгебра  $A$  не имеет делителей нуля. Мы обозначаем через  $Q_A$  её поле частных, а через  $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A$  — наименьшее подполе, содержащее заданные элементы  $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ .

Элементы  $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$  называются *алгебраически независимыми* над  $\mathbb{k}$ , если между ними нет никаких полиномиальных соотношений вида  $f(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$ , где  $f \in \mathbb{A}[x_1, x_2, \dots, x_m]$ , т. е. когда отображение вычисления

$$\text{ev}_{(a_1, a_2, \dots, a_m)} : \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_m] \xrightarrow{x_i \mapsto a_i} A$$

инъективно. В этом случае отображение вычисления продолжается до изоморфизма полей

$$\mathbb{k}(x_1, x_2, \dots, x_m) \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m) \subset Q_A,$$

переводящего рациональную функцию  $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$  в её значение  $f(a_1, a_2, \dots, a_m)$  на элементах  $a_i$ .

Алгебраически независимый набор элементов  $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$  называется *базисом трансцендентности* алгебры  $A$  над  $\mathbb{k}$ , если любой  $p \in A$  алгебраичен над  $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ . В этом случае все дроби  $q \in Q_A$  также алгебраичны над  $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , поскольку по предл. 4.2 целое замыкание  $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m)$  в  $Q_A$  является полем, содержащим  $A$ , а значит, и  $Q_A$ . Любое собственное подмножество базиса трансцендентности алгебраически независимо, однако, не является базисом трансцендентности. Поэтому базис трансцендентности можно иначе определить как минимальный по включению набор  $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ , такой что алгебра  $A$  алгебраична над  $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , или же как максимальный по включению алгебраически независимый набор  $a_1, a_2, \dots, a_m \in A$ .

#### Лемма 4.3

Любой набор элементов  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ , такой что  $A$  алгебраична над  $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , содержит в себе некоторый базис трансцендентности  $A$  над  $\mathbb{k}$  (пустой, если алгебра  $A$  алгебраична над  $\mathbb{k}$ ). В частности, любая система образующих  $A$  как  $\mathbb{k}$ -алгебры содержит в себе некоторый базис трансцендентности.

Доказательство. Если имеется полиномиальное соотношение  $f(a_1, a_2, \dots, a_m) = 0$ , скажем, содержащее  $a_m$ , то мы удалим  $a_m$ . Если остающиеся  $a_1, a_2, \dots, a_{m-1}$  удовлетворяют полиномиальному соотношению, содержащему  $a_{m-1}$ , мы удалим  $a_{m-1}$  и т. д. В конечном счете мы получим либо алгебраически независимый набор элементов, скажем,  $a_1, a_2, \dots, a_r$ , либо все  $a_i$ , а значит, и вся алгебра  $A$ , окажутся алгебраичны над  $\mathbb{k}$ . В первом случае все выкинутые  $a_i$  (а значит, и алгебра  $A$ ) алгебраичны над  $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_r)$ .  $\square$

#### Лемма 4.4

Если  $A$  алгебраична над  $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_m)$ , где  $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ , то любой алгебраически независимый набор элементов  $b_1, b_2, \dots, b_n \in A$  состоит из  $n \leq m$  элементов и может

быть дополнен до базиса трансцендентности  $A$  над  $\mathbb{k}$  подходящими элементами из набора  $a_1, a_2, \dots, a_m$ .

**Доказательство.** По лем. 4.3 набор  $a_1, a_2, \dots, a_m$  содержит базис трансцендентности. Будем считать, что это  $a_1, a_2, \dots, a_r$ . Поскольку  $b_1$  алгебраичен над  $\mathbb{k}(a_1, a_2, \dots, a_r)$ , имеется полиномиальное соотношение  $f(b_1, a_1, a_2, \dots, a_r) = 0$ . Так как  $b_1$  трансцендентен, а  $a_1, a_2, \dots, a_r$  алгебраически независимы, в этом соотношении реально присутствуют как  $b_1$ , так и какие-нибудь  $a_i$ , например,  $a_1$ . Тогда  $a_1$  алгебраичен над  $\mathbb{k}(b_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$ , а значит, алгебра  $A$  алгебраична над  $\mathbb{k}(b_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$ . Элементы  $b_1, a_2, a_3, \dots, a_r$  алгебраически независимы, поскольку  $a_2, a_3, \dots, a_r$  алгебраически независимы и  $b_1$  не может быть алгебраичен над  $\mathbb{k}(a_2, a_3, \dots, a_r)$ : в противном случае  $A$  была бы алгебраична над  $a_2, a_3, \dots, a_r$ , и элементы  $a_1, a_2, \dots, a_r$  были бы алгебраически зависимы. Тем самым, набор  $b_1, a_2, a_3, \dots, a_r$  тоже является базисом трансцендентности для  $A$ .

Элемент  $b_2$  алгебраичен над  $\mathbb{k}(b_1, a_2, a_3, \dots, a_r)$ , и значит, существует полиномиальное соотношение  $f(b_1, b_2, a_2, a_3, \dots, a_r) = 0$ . Так как  $b_2$  трансцендентен, а набор  $b_1, b_2$  и каждое собственное подмножество набора  $b_1, a_2, a_3, \dots, a_r$  алгебраически независимы, в этом соотношении реально присутствуют как  $b_2$ , так и какие-нибудь из  $a_i$  — скажем,  $a_2$ . Тогда  $a_2$  алгебраичен над  $\mathbb{k}(b_1, b_2, a_3, \dots, a_r)$ , а значит, алгебра  $A$  алгебраична над  $\mathbb{k}(b_1, b_2, a_3, \dots, a_r)$ . Элементы  $b_1, b_2, a_3, \dots, a_r$  алгебраически независимы, поскольку  $b_1, a_3, \dots, a_r$  алгебраически независимы и  $b_2$  не может быть алгебраичен над  $\mathbb{k}(b_1, a_3, \dots, a_r)$ : в противном случае  $A$  была бы алгебраична над  $b_1, a_3, \dots, a_r$ , и элементы  $b_1, a_2, a_3, \dots, a_r$  были бы алгебраически зависимы. Поэтому набор  $b_1, b_2, a_3, \dots, a_r$  тоже является базисом трансцендентности для  $A$ .

Продолжая в том же духе (и, если необходимо, перенумеровывая по ходу дела элементы  $a_i$ ), мы по индукции получим для каждого  $i \leq n$  базис трансцендентности

$$b_1, \dots, b_i, a_{i+1}, \dots, a_r$$

алгебры  $A$  над  $\mathbb{k}$ . Отсюда получаются неравенства  $n \leq r \leq m$ , и при  $i = n$  мы приходим к искомому базису трансцендентности вида  $b_1, \dots, b_n, a_{n+1}, \dots, a_r$ .  $\square$

#### Следствие 4.5

Все базисы трансцендентности конечно порождённой коммутативной алгебры  $A$  над полем  $\mathbb{k}$  состоят из одинакового числа элементов (это число называется *степенью трансцендентности* алгебры  $A$  над  $\mathbb{k}$  и обозначается  $\text{tr deg}_{\mathbb{k}} A$ ).  $\square$

**4.1.5. Нормальность.** Коммутативное кольцо  $A$  без делителей нуля называется *нормальным*, если оно целозамкнуто в своём поле частных  $Q_A$ . Отметим, что любое поле нормально. Дословно также, как в примере прим. 4.1, устанавливается, что любое факториальное<sup>1</sup> кольцо  $A$  нормально: многочлен  $a_0 t^m + a_1 t^{m-1} + \dots + a_{m-1} t + a_m \in A[t]$

<sup>1</sup>напомним, что кольцо  $A$  называется *факториальным*, если в нём нет делителей нуля, и каждый необратимый элемент  $a \in A$  является произведением конечного числа неприводимых, причём для любых двух разложений  $a = p_1 p_2 \cdots p_n = q_1 q_2 \cdots q_m$  в произведение неприводимых множителей  $m = n$  и (после надлежащей перенумерации)  $p_i = s_i q_i$  для некоторых обратимых  $s_i \in A$ ; например, факториальными являются любое поле, любое кольцо главных идеалов (в частности, кольцо целых чисел  $\mathbb{Z}$ ) и кольца многочленов  $K[x_1, x_2, \dots, x_n]$  над любым факториальным кольцом  $K$

аннулирует дробь  $p/q \in Q_A$  с  $\dots(p, q) = 1$ , только если  $q|a_0$  и  $p|a_m$ , поэтому из  $a_0 = 1$  вытекает, что  $q = 1$ . В частности, кольцо многочленов от любого числа переменных над факториальным кольцом нормально.

Прямо из определений и леммы Гаусса – Кронекера – Дедекинда (сл. 4.3) вытекают следующие полезные свойства, отчасти проясняющие эпитет «нормальный».

**Предложение 4.3 (лемма Гаусса – 2)**

Пусть  $A$  – нормальное кольцо с полем частных  $Q_A$ . Если многочлен  $f \in A[x]$  раскладывается в  $Q_A[x]$  в произведение приведённых множителей, то эти множители лежат в  $A[x]$ .  $\square$

**Лемма 4.5**

Пусть  $\mathbb{k} = Q_A$  является полем частных коммутативного кольца  $A$  без делителей нуля. Если элемент  $b$  какой-либо  $Q_A$ -алгебры  $B$  цел над  $A$ , то он алгебраичен над  $Q_A$  и все коэффициенты его минимального многочлена  $\mu_b \in Q_A[x]$  целы над  $A$ .

**Доказательство.** Поскольку  $b$  цел над  $A$ , он удовлетворяет уравнению  $f(b) = 0$ , в котором  $f \in A[x]$  приведён. Тем самым,  $\ker \text{ev}_b \neq 0$  и  $f = \mu_b \cdot q$  в кольце  $Q_A[x]$ . По сл. 4.3 все коэффициенты  $\mu_b$  целы над  $A$ .  $\square$

**Следствие 4.6**

Пусть  $A$  – нормальное кольцо с полем частных  $Q_A$ , и  $B$  – произвольная  $Q_A$ -алгебра. Если элемент  $b \in B$  цел над  $A$ , то его минимальный многочлен над полем  $Q_A$  лежит в  $A[x]$ .  $\square$

**4.2. Системы полиномиальных уравнений.** Любая система полиномиальных уравнений

$$f_\nu(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad f_\nu \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n], \quad (4-4)$$

эквивалентна системе, левые части которой образуют в  $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  идеал  $J = (f_\nu)$ , порождённый многочленами  $f_\nu$ . Эта большая система получается добавлением к уравнениям (4-4) всех уравнений, которые можно получить умножая уравнения (4-4) на произвольные полиномы и складывая их друг с другом. В силу нётеровости кольца многочленов такая большая система, в свою очередь, эквивалентна конечной системе уравнений, левые части которых порождают идеал  $J$ , причём этот конечный набор уравнений может быть выбран из уравнений первоначальной системы (4-4). Таким образом, любая (в том числе бесконечная) система полиномиальных уравнений равносильна, с одной стороны, некоторой своей конечной подсистеме, а с другой стороны, системе, левые части которой образуют в кольце многочленов идеал.

Множество всех решений системы (4-4), левые части которой пробегают идеал  $J \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  изображается в аффинном координатном пространстве  $\mathbb{A}^n$  фигурой, которая обозначается  $V(J) = \{a \in \mathbb{A}^n \mid f(a) = 0 \quad \forall f \in J\}$  и называется *аффинным алгебраическим многообразием*, задаваемым идеалом  $J$ . Отметим, что эта фигура может оказаться пустым множеством, как это происходит, например, когда  $J = (1) = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  совпадает со всем кольцом и содержит уравнение  $1 = 0$ .

С другой стороны, для произвольной фигуры  $\Phi \subset \mathbb{A}^n$  множество всех многочленов, тождественно зануляющихся на  $\Phi$ , образует в кольце многочленов идеал, который обозначается  $I(\Phi) = \{f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f(p) = 0 \quad \forall p \in \Phi\}$ . Множество нулей этого идеала

$V(I(\Phi))$  представляет собою наименьшее аффинное алгебраическое многообразие, содержащее  $\Phi$ .

Для любого идеала  $J \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  имеется тавтологическое включение  $J \subset I(V(J))$ . Вообще говоря, это включение строгое. Например, при  $n = 1$  для идеала  $J = (x^2)$  многообразие  $V(J) = \{0\}$ , а идеал  $I(V(J)) = (x) \supsetneq (x^2) = J$ .

**Теорема 4.3 (Nullstellensatz, или теорема Гильберта о нулях)**

Для любого идеала  $J \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  над произвольным алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  справедливы следующие утверждения

- (1) *слабая теорема о нулях:*  $V(J) = \emptyset \iff 1 \in J$  ;
- (2) *сильная теорема о нулях:*  $f \in I(V(J)) \iff f^m \in J$  для некоторого  $m \in \mathbb{N}$  .

**Доказательство.** Чтобы доказать первое утверждение, достаточно для каждого собственного<sup>1</sup> идеала  $J \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  указать точку  $p \in \mathbb{A}^n$ , в которой зануляются все многочлены из  $J$ . Поскольку увеличение идеала  $J$  только усложняет эту задачу, мы без ограничения общности можем считать, что идеал  $J$  *максимальен*, т. е. любой многочлен  $g \notin J$  обратим по модулю  $J$ . Действительно, если найдётся необратимый по модулю  $J$  многочлен  $g \notin J$ , то уравнение  $gh + f = 1$  будет неразрешимо относительно  $h \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  и  $f \in J$ , а значит, идеал  $J' = (J, g)$  не будет содержать 1, но будет строго больше, чем  $J$ , так что мы можем расширить  $J$  до  $J' \supsetneq J$ . В силу нётеровости кольца многочленов после конечного числа таких расширений мы получим собственный идеал  $J$ , такой что  $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/J$  является полем, что мы и будем далее предполагать.

Так как поле  $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/J \supset \mathbb{k}$  конечно порождено как  $\mathbb{k}$ -алгебра, каждый элемент  $\vartheta$  этого поля по теор. 4.2 алгебраичен над  $\mathbb{k}$ , т. е. удовлетворяет уравнению  $\mu(\vartheta) = 0$ , где  $\mu(t) \in \mathbb{k}[t]$  — неприводимый приведённый многочлен. Поскольку поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто, многочлен  $\mu$  линеен, т. е.  $\vartheta + c = 0$  для некоторого  $c \in \mathbb{k}$ , откуда  $\vartheta = c \in \mathbb{k}$ . Таким образом,  $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/J = \mathbb{k}$ , т. е. любой многочлен  $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  сравним по модулю идеала  $J$  с некоторой константой.

Обозначим через  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{A}^n$  точку, координаты которой суть константы  $p_i \in \mathbb{k}$ , с которыми сравнимы по модулю  $J$  линейные одночлены  $x_i$ . Так как редукция по модулю  $J$   $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \twoheadrightarrow \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/J = \mathbb{k}$  является *гомоморфизмом*, константа, с которой сравним по модулю  $J$  многочлен  $f$ , равна значению этого многочлена в  $p$ :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv f(p_1, p_2, \dots, p_n) \pmod{J},$$

т. е. гомоморфизм редукции по модулю  $J$  представляет собою гомоморфизм вычисления значений многочленов в точке  $p$ . Поэтому  $f(p) = 0 \ \forall f \in J$ , что и требовалось.

Докажем теперь второе утверждение. Поскольку при  $J = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  и  $V(J) = \emptyset$  оно тривиально, мы будем считать, что  $V(J) \neq \emptyset$  и  $J \neq (1)$ . Вложим  $\mathbb{A}^n$  в большее пространство  $\mathbb{A}^{n+1}$  с координатами  $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$  в качестве гиперплоскости  $t = 0$ . Если многочлен

$$f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n] \subset \mathbb{k}[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$$

тождественно обращается в нуль на  $V(J)$ , то идеал  $J' \subset \mathbb{k}[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$ , порождённый  $J$  и многочленом  $g(t, x) = 1 - t f(x)$ , имеет пустое множество нулей в  $\mathbb{A}^{n+1}$ , поскольку

---

<sup>1</sup>т. е. отличного от всего кольца многочленов

$g(x, t) \equiv 1$  вдоль цилиндра  $V(J) \subset \mathbb{A}^{n+1}$ . Тем самым, по слабой теореме о нулях, идеал  $J'$  содержит единицу, т. е. существуют  $q_0, q_1, \dots, q_s \in \mathbb{k}[t, x_1, x_2, \dots, x_n]$  и  $f_1, f_2, \dots, f_s \in J$ , такие что  $q_0(x, t) \cdot (1 - tf(x)) + q_1(t, x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(x, t) \cdot f_s(x) = 1$ .

Применим к этому равенству гомоморфизм  $\mathbb{k}[t, x_1, x_2, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , заданный правилами  $t \mapsto 1/f(x)$ ,  $x_\nu \mapsto x_\nu$ . Получим в поле рациональных функций  $\mathbb{k}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  равенство  $q_1(1/f(x), x) \cdot f_1(x) + \dots + q_s(1/f(x), x) \cdot f_s(x) = 1$ . Так как идеал  $J$  не содержит единицы, некоторые из  $q_\nu(1/f(x), x)$  имеют нетривиальные знаменатели, причём в качестве общего знаменателя всех  $q_\nu(1/f(x), x)$  можно взять некоторую степень  $f^m$ . Умножая обе части равенства на  $f^m$  получаем искомое выражение  $f^m(x) = \tilde{q}_1(x) \cdot f_1(x) + \dots + \tilde{q}_s(x) \cdot f_s(x)$  с  $\tilde{q}_\nu \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .  $\square$

**4.2.1. Системы результантов.** Рассмотрим систему полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ f_m(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (4-5)$$

в которой многочлены  $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$  однородны. При фиксированных размерности  $n$ , числе уравнений  $m$  и степенях  $d_i = \deg f_i$  наборы многочленов

$$(f_1, f_2, \dots, f_m) \in S^{d_1}V^* \times S^{d_2}V^* \times \dots \times S^{d_m}V^*,$$

для которых система (4-5) обладает ненулевым решением, образуют в произведении проективных пространств  $\mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \mathbb{P}(S^{d_2}V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*)$  фигуру

$$\mathcal{R}(n; d_1, d_2, \dots, d_m) \subset \mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \mathbb{P}(S^{d_2}V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*),$$

которая называется *результантным многообразием* системы (4-5).

Например, если число уравнений равно числу переменных и все уравнения линейны, система (4-5) превращается в систему однородных линейных уравнений с квадратной матрицей

$$\begin{cases} a_{00}x_0 + a_{01}x_1 + \dots + a_{0n}x_n = 0 \\ a_{10}x_0 + a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{20}x_0 + a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{n0}x_0 + a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

которая имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда  $\det(a_{ij}) = 0$ . Таким образом, при  $m = (n + 1)$  и  $d_1 = d_2 = \dots = d_{n+1} = 1$  результантное многообразие

$$\mathcal{R}(n; 1, 1, \dots, 1) \subset \mathbb{P}_n^* \times \mathbb{P}_n^* \times \dots \times \mathbb{P}_n^*$$

представляет собою гиперповерхность, заданную одним неприводимым полиномиальным уравнением степени  $(n + 1)$  на коэффициенты  $a_{i,j}$  многочленов  $f_1, f_2, \dots, f_{n+1}$ .

Говоря геометрически, ненулевые решения системы (4-5) изображаются в проективном пространстве  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$  с однородными координатами  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  проективным алгебраическим многообразием  $\Phi = V(f_1, f_2, \dots, f_m) = \bigcap_i S_i$  где  $S_i = V(f_i)$ . Результаントное многообразие

$$\mathcal{R}(n; d_1, d_2, \dots, d_m) \subset \mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \mathbb{P}(S^{d_2}V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*) \quad (4-6)$$

состоит из всевозможных наборов гиперповерхностей

$$(S_1, S_2, \dots, S_m) \in \mathbb{P}(S^{d_1}V^*) \times \mathbb{P}(S^{d_2}V^*) \times \dots \times \mathbb{P}(S^{d_m}V^*)$$

с непустым пересечением  $\bigcap_i S_i = V(f_1, f_2, \dots, f_m) \neq \emptyset$ .

Покажем, что результаントное многообразие (4-6) задаётся конечной системой полиномиальных уравнений на коэффициенты многочленов  $(f_1, f_2, \dots, f_m)$ , однородных по каждому многочлену и зависящих только от  $n, m$  и  $d_1, d_2, \dots, d_m$ . Для этого рассмотрим идеал  $I \subset \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n]$ , порождённый многочленами  $f_\nu$ . Отсутствие у системы (4-5) ненулевых решений означает, что аффинное алгебраическое многообразие  $V(I) \subset \mathbb{A}(V)$  либо пусто, либо совпадает с началом координат. В обоих случаях каждая из координатных функций  $x_i$  тождественно зануляется на  $V(I)$ , и значит, существует  $m$ , такое что  $x_i^m \in I$  для всех  $i$ . Наоборот, если  $I$  содержит некоторую степень каждой из переменных, то система уравнений с левыми частями из идеала  $I$  содержит уравнения  $x_0^m = x_1^m = \dots = x_n^m = 0$ , имеющие только нулевое решение.

Таким образом, отсутствие ненулевых решений у системы (4-5) равносильно тому, что для некоторого  $m$  идеал  $I$  содержит все  $x_i^m$ . Последнее означает, что любой многочлен, степень которого больше  $(n+1)(m-1)$ , лежит в  $I$ , т. е.  $I$  содержит все  $S^dV^*$  с  $d \gg 0$ .

Пересечение  $I \cap S^dV^*$  представляет собою образ линейного отображения

$$\mu_d : S^{d-d_1}V^* \oplus S^{d-d_2}V^* \oplus \dots \oplus S^{d-d_m}V^* \xrightarrow{(g_0, g_1, \dots, g_n) \mapsto \sum g_\nu f_\nu} S^d. \quad (4-7)$$

В стандартных базисах из мономов это отображение задаётся матрицей, элементы которой линейно зависят от коэффициентов многочленов  $f_\nu$ . При  $d \gg 0$  размерность левой части (4-7) ведёт себя как  $\sum_{\nu=1}^m \binom{n+d-d_\nu}{n} \sim \frac{m}{n!} d^n$  и становится больше, чем размерность правой части, ведущая себя как  $\binom{n+d}{n} \sim \frac{1}{n!} d^n$ . Поэтому при  $d \gg 0$  несюръективность отображения (4-7), т. е. неравенство  $I \cap S^dV^* \neq S^dV^*$ , означает зануление всех максимальных миноров матрицы  $\mu_d$ .

Итак, наличие ненулевых решений у системы (4-5) равносильно обращению в нуль всех максимальных миноров матриц  $\mu_d$  для всех  $d$ , таких что размерность левой части (4-7) не меньше, чем размерность правой. В силу нётеровости кольца многочленов, эта бесконечная система полиномиальных уравнений эквивалентна некоторой конечной подсистеме. Эта конечная система детерминантных условий на матрицы (4-7) называется *системой результантов*.

**4.3. Аффинный алгебро-геометрический словарик.** Всюду далее мы по умолчанию считаем, что основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто.

**4.3.1. Регулярные отображения.** Аффинные алгебраические многообразия, определённые над полем  $\mathbb{K}$ , образуют категорию  $\mathbf{Aff}_{\mathbb{K}}$ , морфизмами в которой являются *регулярные отображения*. По определению, отображение множеств  $\varphi : X \rightarrow Y$  из аффинного алгебраического многообразия  $X \subset \mathbb{A}^n$  в аффинное алгебраическое многообразие  $Y \subset \mathbb{A}^m$  называется *регулярным* (или *полиномиальным*), если оно переводит точку

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X \subset \mathbb{A}^n$$

в точку  $y = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in Y \subset \mathbb{A}^m$ , координаты которой  $y_i = \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$  суть некоторые многочлены  $\varphi_i \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ .

В частности, функция  $f : X \rightarrow \mathbb{k}$  регулярна, если она является ограничением на  $X$  некоторого многочлена  $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ . Регулярные функции на  $X$  образуют конечно порождённую  $\mathbb{k}$ -алгебру без нильпотентов<sup>1</sup>, которая обозначается

$$\mathbb{k}[X] \stackrel{\text{def}}{=} \text{Hom}_{\mathcal{A}ff_{\mathbb{k}}}(X, \mathbb{k}) \simeq \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X), \quad (4-8)$$

где  $I(X) = \{f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f|_X \equiv 0\}$ , как и выше, обозначает идеал всех многочленов, тождественно зануляющихся на  $X$ . Алгебры и кольца без нильпотентов называются *приведёнными*.

### Лемма 4.6

Всякая конечно порождённая приведённая алгебра  $A$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  является координатной алгеброй  $A = \mathbb{k}[X]$  некоторого аффинного алгебраического многообразия  $X$ .

Доказательство. Зададим алгебру  $A$  образующими и соотношениями, т. е. представим её в виде фактор алгебры  $A = \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n] / I$ . Приведённость алгебры  $A$  означает, что (для любого  $f \in \mathbb{K}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ )  $f^n \in I \Rightarrow f \in I$ . Иными словами, идеал соотношений  $I$  радикален:  $I = \sqrt{I}$  и, по сильной теореме о нулях,  $I = I(V(I))$  является идеалом аффинного алгебраического многообразия  $X = V(I) \subset \mathbb{A}^n$ .  $\square$

**4.3.2. Гомоморфизм поднятия.** Со всяким отображением множеств  $\varphi : X \rightarrow Y$  связан *гомоморфизм поднятия*, который действует из алгебры  $\mathbb{k}^Y$  всех функций на  $Y$  со значениями в  $\mathbb{k}$  в алгебру  $\mathbb{k}^X$  всех функций  $X$  со значениями в  $\mathbb{k}$  и переводит функцию  $f : Y \rightarrow \mathbb{k}$  в её композицию с отображением  $\varphi$ :

$$\varphi^* : \mathbb{k}^Y \xrightarrow{f \mapsto f \circ \varphi} \mathbb{k}^X . \quad (4-9)$$

Если отображение алгебраических многообразий  $\mathbb{A}^n \supset X \xrightarrow{\varphi} Y \subset \mathbb{A}^m$ , задано правилом  $(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n))$ , то его гомоморфизм поднятия переводит образующую  $y_i \pmod{I(Y)}$  координатной алгебры  $\mathbb{k}[Y]$  в функцию

$$\varphi_j(x_1, x_2, \dots, x_n)|_X.$$

<sup>1</sup>напомним, что ненулевой элемент  $a$  в кольце называется *нильпотентом*, если  $a^n = 0$  для некоторого  $n \in \mathbb{N}$ ; поскольку любая степень ненулевой функции со значениями в поле также является ненулевой функцией, в кольце таких функций нет нильпотентов

Таким образом, регулярность теоретико множественного отображения  $\varphi : X \rightarrow Y$  равносильна тому, что гомоморфизм поднятия  $\varphi^* : \mathbb{k}^Y \rightarrow \mathbb{k}^X$  переводит подалгебру регулярных функций  $\mathbb{k}[Y] \subset \mathbb{k}^Y$  в подалгебру регулярных функций  $\mathbb{k}[X] \subset \mathbb{k}^X$ , т. е. задаёт корректно определённый гомоморфизм  $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ . Это наблюдение является общематематическим принципом, выходящим за рамки алгебраической геометрии.

**Упражнение 4.2.** Проверьте, что теоретико множественное отображение топологических пространств (соотв. гладких или аналитических многообразий)  $X \rightarrow Y$  является непрерывным (соотв. гладким или аналитическим) тогда и только тогда, когда его гомоморфизм поднятия переводит подалгебру непрерывных функций  $C^0(Y) \subset \mathbb{R}^Y$  (соотв. подалгебру гладких или аналитических функций на  $Y$ ) в подалгебру непрерывных функций  $C^0(X)$  (соотв. в подалгебру гладких или аналитических функций на  $X$ ).

**4.3.3. Антиэквивалентность категорий.** Мы собираемся показать, что категория  $\mathcal{A}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}$  аффинных алгебраических многообразий над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  антиэквивалентна категории  $\mathcal{A}\mathcal{G}_{\mathbb{k}}$  конечно порождённых приведённых  $\mathbb{k}$ -алгебр с единицей. Квазиобратные друг другу антиэквивалентности между  $\mathcal{A}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}$  и  $\mathcal{A}\mathcal{G}_{\mathbb{k}}$  задаются функторами

$$X \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}}(X, \mathbb{A}^1) = \mathbb{k}[X], \quad (4-10)$$

$$A \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{G}_{\mathbb{k}}}(A, \mathbb{k}), \quad (4-11)$$

где объект  $\mathbb{A}^1 = \mathbb{k}$  в первом случае рассматривается как многообразие (аффинная прямая), а во втором — как  $\mathbb{k}$ -алгебра. То, что этот объект несёт на себе сразу обе структуры — алгебраического многообразия над  $\mathbb{k}$  и  $\mathbb{k}$ -алгебры без нильпотентов — позволяет наделить множество  $\text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}}(X, \mathbb{A}^1)$  из (4-10) (канонической) структурой  $\mathbb{k}$ -алгебры, а множество  $\text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{G}_{\mathbb{k}}}(A, \mathbb{k})$  из (4-11) — (неканонической) структурой алгебраического многообразия. Первое мы уже обсудили выше, вторым займёмся сейчас.

**4.3.4. Максимальный спектр.** С каждой точкой  $p \in X$  аффинного алгебраического многообразия  $X$  связан гомоморфизм вычисления<sup>1</sup>

$$\text{ev}_p : \mathbb{k}[X] \xrightarrow{f \mapsto f(p)} \mathbb{k}.$$

Он переводит единицу в единицу, а значит, эпиморфен и представляет собой факторизацию по модулю своего ядра  $\mathfrak{m}_p \stackrel{\text{def}}{=} \ker \text{ev}_p = I(\{p\}) = \{f \in \mathbb{k}[X] \mid f(p) = 0\}$

$$\text{ev}_p : \mathbb{k}[X] \twoheadrightarrow \frac{\mathbb{k}[X]}{\mathfrak{m}_p} \simeq \mathbb{k}, \quad f \mapsto f \pmod{\mathfrak{m}_p}.$$

Так как фактор  $\mathbb{k}[X]/\mathfrak{m}_p \simeq \mathbb{k}$  является полем, идеал  $\mathfrak{m}_p \subset \mathbb{k}[X]$  максимальен. Он называется *максимальным идеалом точки  $p \in X$* . Множество всех максимальных идеалов данной  $\mathbb{k}$ -алгебры  $A$  называется её *максимальным спектром* и обозначается  $\text{Spec}_m(A)$ . Каждой точке спектра  $\mathfrak{m} \in \text{Spec}_m A$  отвечает гомоморфизм факторизации

$$\pi_{\mathfrak{m}} : A \xrightarrow{a \mapsto a \pmod{\mathfrak{m}}} A/\mathfrak{m},$$

<sup>1</sup>Это специальный случай гомоморфизма поднятия, отвечающий вложению в  $X$  одноточечного множества  $\{p\} \hookrightarrow X$

принимающий значения в поле  $A/\mathfrak{m} \supset \mathbb{k}$ , которое конечно порождено как  $\mathbb{k}$ -алгебра. Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  это влечёт за собой равенство  $A/\mathfrak{m} = \mathbb{k}$ , что позволяет интерпретировать элементы алгебры  $A$  как функции на  $\text{Spec}_{\mathfrak{m}} A$  со значениями в поле  $\mathbb{k}$ .

#### Лемма 4.7

Для любого аффинного алгебраического многообразия  $X$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  соответствия  $p \longleftrightarrow \text{ev}_p \longleftrightarrow \mathfrak{m}_p = \ker(\text{ev}_p)$  устанавливают биекции между точками многообразия  $X$ , гомоморфизмами  $\mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}$ , тождественными на  $\mathbb{k}$ , и максимальными идеалами алгебры  $\mathbb{k}[X]$ .

**Доказательство.** Биективность второго соответствия мы уже проверили выше<sup>1</sup>. Сопоставление точке  $p \in X \subset \mathbb{A}^n$  её максимального идеала  $\mathfrak{m}_p = \ker \text{ev}_p = I(\{p\})$  вкладывает множество точек в множество максимальных идеалов, поскольку для  $p \neq q$  всегда (в том числе, над не замкнутым полем) можно указать аффинно линейную функция  $f : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{k}$  зануляющуюся в  $p$  и отличную от нуля в  $q$ . Чтобы показать, что над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  любой максимальный идеал  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[X] = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I(X)$  имеет вид  $\mathfrak{m}_p = \ker \text{ev}_p$  для некоторой точки  $p \in X$ , рассмотрим полный прообраз  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  идеала  $\mathfrak{m}$ . Поскольку  $\mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/\tilde{\mathfrak{m}} = \mathbb{k}[X]/\mathfrak{m} = \mathbb{k}$ , идеал  $\tilde{\mathfrak{m}}$  является собственным, максимальным и содержит  $I(X)$ . По слабой теореме о нулях  $V(\tilde{\mathfrak{m}}) \neq \emptyset$ , т. е.  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathfrak{m}_p$  для некоторой точки  $p \in \mathbb{A}^n$ , причём  $p \in X$  (поскольку  $I(X) \subset \tilde{\mathfrak{m}}$ ), а значит  $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_p$  (поскольку  $\mathfrak{m}$  максимальен).  $\square$

**4.3.5. Поднятия гомоморфизмов алгебр.** Предыдущие две леммы показывают, что любая приведённая  $\mathbb{k}$ -алгебра  $A$  имеет вид  $\text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}}(X, \mathbb{k})$  для некоторого аффинного алгебраического многообразия  $X$ , причём при применении к такой алгебре  $A$  функтора

$$A \mapsto \text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{G}_{\mathbb{k}}}(A, \mathbb{k})$$

мы получаем в точности множество точек многообразия  $X$ . С другой стороны, всякому гомоморфизму алгебр  $\psi : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$  также отвечает морфизм поднятия

$$X = \text{Spec}_{\mathfrak{m}} \mathbb{k}[X] \xrightarrow{\psi^*} \text{Spec}_{\mathfrak{m}} \mathbb{k}[Y] = Y,$$

который сопоставляет гомоморфизму вычисления  $\text{ev} : \mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}$  с ядром  $\mathfrak{m} \in \text{Spec}_{\mathfrak{m}} \mathbb{k}[X]$  гомоморфизм вычисления  $\psi^*(\text{ev}) = \text{ev} \circ \psi$  с ядром  $\psi^*\mathfrak{m} = \psi^{-1}(\mathfrak{m}) \in \text{Spec}_{\mathfrak{m}} \mathbb{k}[X]$ .

Упражнение 4.3. Убедитесь, что соответствия

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}}(X, Y) \xrightleftharpoons[\quad]{\varphi \leftrightarrow \varphi^*} \text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{G}_{\mathbb{k}}}(\mathbb{k}[Y], \mathbb{k}[X])$$

<sup>1</sup>отметим, что сопоставление  $\varphi \mapsto \ker \varphi$  и над произвольным (не обязательно алгебраически замкнутым) полем  $\mathbb{k}$  вкладывает множество гомоморфизмов  $A \xrightarrow{\varphi} \mathbb{k}$ , тождественных на  $\mathbb{k}$ , в множество максимальных идеалов алгебры  $A$ ; однако, над незамкнутым полем не все максимальные идеалы в  $A$  являются ядрами гомоморфизмов вычисления со значениями в поле  $\mathbb{k}$ ; напри-

мер, ядро гомоморфизма вычисления  $\text{ev}_{\sqrt{-1}} : \mathbb{R}[x] \xrightarrow{f \mapsto f(\sqrt{-1})} \mathbb{C}$  является максимальным идеалом  $\mathbb{R}$ -алгебры  $\mathbb{R}[x]$ , но его нельзя реализовать как ядро вычисления  $\mathbb{R}[x] \rightarrow \mathbb{R}$ , поскольку  $\text{codim}_{\mathbb{R}} \ker \text{ev}_{\sqrt{-1}} = 2$

являются взаимно обратными биекциями (т. е. что  $\varphi^{**} = \varphi$ ).

Таким образом, функтор (4-11), сопоставляющий конечно порождённой приведённой коммутативной  $\mathbb{k}$ -алгебре её спектр, устанавливает биекцию между гомоморфизмами алгебр и (идущими в противоположном направлении) регулярными морфизмами их спектров. При этом поле  $\mathbb{k} = \mathbb{k}[*]$ , рассматриваемое как алгебра, отвечает одноточечному множеству  $* = \text{Spec}_m \mathbb{k}$ , а различные гомоморфизмы  $\mathbb{k}[X] \rightarrow \mathbb{k}$  – различным точкам  $* \hookrightarrow X$ . Мы ещё раз получаем равенство

$$\text{Spec}_m X = \text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}}(*, X) = \text{Hom}_{\mathcal{A}\mathcal{G}_{\mathbb{k}}}(\mathbb{k}[X], \mathbb{k}).$$

На множестве  $\text{Spec}_m(A)$  имеется много разных, но изоморфных друг другу структур аффинного алгебраического многообразия, если понимать под таковой структурой вложение  $\varphi : \text{Spec}_m(A) \hookrightarrow \mathbb{A}^n$ , образом которого является алгебраическое многообразие  $X \subset \mathbb{A}^n$ , а гомоморфизм поднятия  $\varphi^* : \mathbb{k}[\mathbb{A}^n] \rightarrow A$  является композицией факторизации  $\mathbb{k}[\mathbb{A}^n] \twoheadrightarrow \mathbb{k}[X]$  по модулю  $I(X)$  и изоморфизма  $\mathbb{k}[X] \xrightarrow{\sim} A$ . Фиксация такой структуры равносильна выбору конкретного способа задания алгебры  $A$  образующими и соотношениями, т. е. фиксации изоморфизма  $A \simeq \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/I$ . Для того чтобы превратить (4-11) в функтор, принимающий значения в категории аффинных алгебраических многообразий, а не в категории множеств, мы должны зафиксировать для каждой алгебры  $A$  одно из таких представлений и наделить  $\text{Spec}_m A$  структурой многообразия, индуцированной биекцией  $\text{Spec}_m A \simeq V(I) \subset \mathbb{A}^n$ .

В результате мы получаем функтор  $\text{Spec}_m : \mathcal{A}\mathcal{G}_{\mathbb{k}} \rightarrow \mathcal{A}\mathcal{F}_{\mathbb{k}}$ , который оборачивает стрелки и биективно отображает Ном между алгебрами на Ном между соответствующими им многообразиями, и таков, что каждое аффинное алгебраическое многообразие оказывается (неканонически) изоморфным какому-нибудь многообразию из образа этого функтора. В этой ситуации говорят, что категории аффинных алгебраических многообразий и приведённых  $\mathbb{k}$ -алгебр *антиэквивалентны* посредством *квазиобратных* друг другу функторов (4-11) и (4-10).

#### Пример 4.4 (прямая и гипербола)

Точки спектра  $\text{Spec}_m \mathbb{k}[t]$  биективно соответствуют точкам аффинной прямой  $\mathbb{A}^1 = \mathbb{k}$ , поскольку всякий гомоморфизм  $\text{ev} : \mathbb{k}[t] \rightarrow \mathbb{k}$  однозначно определяется заданием образа<sup>1</sup>  $\text{ev}(t) = \lambda \in \mathbb{k}$ . Аналогично, спектр алгебры полиномов Лорана  $\text{Spec}_m \mathbb{k}[t, t^{-1}]$  отождествляется с дополнением до нуля  $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = \mathbb{k}^*$ , поскольку  $\lambda = \text{ev}(t) = 1/(\text{ev}(t^{-1}))$  теперь должно быть обратимым элементом поля  $\mathbb{k}$ . С другой стороны, алгебру полиномов Лорана можно задать образующими и соотношениями: имеется изоморфизм  $\varphi^* : \mathbb{k}[t, t^{-1}] \xrightarrow{\sim} \mathbb{k}[x, y]/(xy - 1)$ , переводящий  $t$  в  $x$ , а  $t^{-1}$  – в  $y$ . Правая алгебра – это координатная алгебра гиперболы  $xy = 1$  в  $\mathbb{A}^2$ . Отображение поднятия  $\varphi : V(xy - 1) \rightarrow \mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$  проектирует гиперболу на координатную ось.

Упражнение 4.4. На какую –  $x$  или  $y$  ?

**4.3.6. Прямые произведения.** В категории  $\mathcal{A}\mathcal{G}_{\mathbb{k}}$  имеется *копроизведение*: для любых двух  $\mathbb{k}$ -алгебр  $A, B$  существует  $\mathbb{k}$ -алгебра  $A \otimes B$  с парой гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{\alpha} A \otimes B \xleftarrow{\beta} B, \quad (4-12)$$

<sup>1</sup>соответственно, максимальные идеалы  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[t]$  – это главные идеалы вида  $((t - \lambda))$

которые универсальны<sup>1</sup> в том смысле, что для любой пары гомоморфизмов

$$A \xrightarrow{\varphi} C \xleftarrow{\psi} B$$

существует единственный гомоморфизм  $\varphi \otimes \psi : A \otimes B \rightarrow C$  со свойствами

$$\varphi = (\varphi \otimes \psi) \circ \alpha, \quad \psi = (\varphi \otimes \psi) \circ \beta.$$

Как векторное пространство над  $\mathbb{k}$ , алгебра  $A \otimes B$  является тензорным произведением векторных пространств<sup>2</sup>  $A$  и  $B$  (например,  $\mathbb{k}[x] \otimes \mathbb{k}[y] \simeq \mathbb{k}[x,y]$ ), умножение задаётся формулой

$$(a_1 \otimes b_1) \cdot (a_2 \otimes b_2) = (a_1 a_2) \otimes (b_1 b_2),$$

а универсальные гомоморфизмы (4-12) действуют по правилам

$$A \xrightarrow{\alpha : a \mapsto a \otimes 1} A \otimes B \xleftarrow{\beta : b \mapsto 1 \otimes b} B$$

**Упражнение 4.5.** Выполните из универсальности тензорного произведения векторных пространств выполнение в  $A \otimes B$  всех аксиом коммутативной  $\mathbb{k}$ -алгебры и универсальное свойство копроизведения алгебр.

При антиэквивалентности (4-10) копроизведение алгебр переходит в прямое произведение аффинных алгебраических многообразий, согласованное с их теоретико-множественным прямым произведением.

#### Лемма 4.8

Тензорное произведение  $A \otimes B$  любых двух конечно порождённых приведённых  $\mathbb{k}$ -алгебр является конечно порождённой приведённой  $\mathbb{k}$ -алгеброй, максимальный спектр которой является теоретико множественным прямым произведением максимальных спектров сомножителей:  $\text{Spec}_m(A \otimes B) = \text{Spec}_m(A) \times \text{Spec}_m(B)$ .

**Доказательство.** Биекция множеств  $\text{Spec}_m(A) \times \text{Spec}_m(B) \simeq \text{Spec}_m(A \otimes B)$  переводит любую точку  $(p, q)$ , представленную парой эпиморфизмов вычисления

$$\text{ev}_p : A \rightarrow \mathbb{k}, \quad \text{ev}_q : B \rightarrow \mathbb{k},$$

в эпиморфизм вычисления  $A \otimes B \rightarrow \mathbb{k}$ , предписываемый универсальным свойством тензорного произведения. Алгебра  $A \otimes B$  порождается над  $\mathbb{k}$  всевозможными попарными тензорными произведениями образующих алгебр  $A$  и  $B$ , коих имеется конечное число. Чтобы показать, что  $A \otimes B$  приведена, достаточно убедиться в том, что всякий элемент  $h \in A \otimes B$ , задающий нулевую функцию на  $\text{Spec}_m(A \otimes B)$ , равен нулю. Для этого запишем

<sup>1</sup>и однозначно определяются этой универсальностью

<sup>2</sup>хотя конечно порождённые  $\mathbb{k}$ -алгебры могут быть бесконечномерны как векторные пространства, они всегда обладают не более чем счётным базисом (т. е. образованы всевозможными конечными линейными комбинациями  $\sum \lambda_v e_v$  каких-то элементов из не более чем счётного набора базисных векторов  $e_i$ ); большинство конструкций полилинейной алгебры из §3 дословно переносится на такие пространства; так,  $A \otimes B$  состоит из всевозможных конечных сумм  $\sum a_v \otimes b_v$  с  $a_v \in A, b_v \in B$  и однозначно (с точностью до канонического изоморфизма) определяется стандартным универсальным свойством тензорного произведения векторных пространств

такой элемент  $h$  в виде  $\sum f_\nu \otimes g_\nu$  с линейно независимыми над  $\mathbb{k}$  элементами  $g_\nu \in B$ . Из равенства  $(\text{ev}_p \otimes \text{ev}_q)h = 0$ , справедливого для всех  $(p, q) \in \text{Spec}_m(A \otimes B)$ , вытекает, что при произвольно зафиксированном  $p \in \text{Spec}_m A$  линейная комбинация

$$\sum f_\nu(p) \cdot g_\nu \in B$$

является тождественно нулевой функцией на  $\text{Spec}_m B$  и, стало быть, равна нулю, т. к. алгебра  $B$  приведена. Это означает, что все константы  $f_\nu(p)$  нулевые для всех  $p$ , т. е.  $f_\nu \in A$  задают нулевые функции на  $\text{Spec}_m A$ . Поскольку  $A$  приведена,  $f_\nu = 0$ , а значит, и  $h = 0$ .  $\square$

**4.4. Топология Зарисского и структурный пучок.** На множестве  $X = \text{Spec}_m A$  имеется каноническая топология, внутренним образом отражающая алгебраические свойства алгебры  $A$ . Эта топология называется *топологией Зарисского* и имеет в качестве замкнутых подмножеств алгебраические подмногообразия в  $X$ , т. е. множества вида

$$V(I) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \quad \forall f \in I\} = \{\mathfrak{m} \in \text{Spec}_m A \mid I \subset \mathfrak{m}\},$$

для всевозможных идеалов  $I \subset A$ .

**Упражнение 4.6.** Проверьте, что  $V(I)$  удовлетворяют аксиоматике замкнутых множеств топологии, а именно:  $\emptyset = V(1); X = V(0); \bigcap V(I_\nu) = V(\sum I_\nu)$ , где  $\sum I_\nu$  состоит из всех конечных сумм  $\sum f_\nu$  с  $f_\nu \in I_\nu; V(I) \cup V(J) = V(IJ)$ , где  $IJ$  есть идеал, натянутый на все произведения  $ab$  с  $a \in I, b \in J$ .

#### Лемма 4.9

Всякий регулярный морфизм алгебраических многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$  непрерывен в топологии Зарисского.

**Доказательство.** Прообраз  $\varphi^{-1}(Z)$  замкнутого  $Z = V(I) \subset Y$  состоит из всех  $x \in X$ , для которых  $0 = f(\varphi(x)) = \varphi^*f(x) \quad \forall f \in I$ , т. е. является множеством нулей идеала, порождённого в  $\mathbb{k}[X]$  образом  $\varphi^*(I)$  идеала  $I$  при гомоморфизме поднятия  $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$ .  $\square$

**4.4.1. Компактность.** Топология Зарисского имеет чисто алгебраическую природу: окрестности Зарисского отражают скорее отношения делимости, нежели «близости», и мы увидим ниже, что её свойства довольно далеки от интуитивно привычных свойств метрической топологии. Первое из отличий скорее приятное. А именно, поскольку всякий идеал  $I \subset \mathbb{k}[X]$  конечно порождён, каждое замкнутое множество является пересечением конечного набора гиперповерхностей:

$$V(I) = V(f_1, f_2, \dots, f_m) = \bigcap_\nu V(f_\nu).$$

Тем самым, любое открытое множество является *конечным объединением главных открытых* множеств

$$\mathcal{D}(f) \stackrel{\text{def}}{=} X \setminus V(f) = \{x \in X \mid f(x) \neq 0\}.$$

В частности, любое аффинное многообразие  $X$  компактно в том смысле, что любое его открытое покрытие содержит конечное подпокрытие.

**4.4.2. Неприводимые компоненты.** Топологическое пространство  $X$  называется *приводимым*, если оно представляется в виде объединения  $X = X_1 \cup X_2$  своих непустых замкнутых подмножеств  $X_1, X_2 \subsetneq X$ . В обычной метрической топологии это понятие бессодержательно — почти все пространства, очевидно, приводимы. В топологии Зарисского приводимость многообразия  $X$  равносильна наличию делителей нуля в алгебре  $\mathbb{k}[X]$ . В самом деле, разложение  $X = X_1 \cup X_2$ , в котором оба  $X_i \neq X, \emptyset$ , означает существование ненулевых  $f_1, f_2 \in \mathbb{k}[X]$  таких, что  $f_1$  обращается в нуль на  $X_1$ , а  $f_2$  обращается в нуль на  $X_2$ , и поскольку произведение  $f_1 f_2$  тождественно зануляется на всём  $X$ , оно равно нулю  $\mathbb{k}[X]$ .

В частности, аффинная гиперповерхность  $\{g(x) = 0\} \subset \mathbb{A}^n$  неприводима тогда и только тогда, когда  $g$  является степенью неприводимого многочлена. Следующая теорема показывает, что неприводимые алгебраические многообразия являются аналогами (степеней) простых чисел в арифметике.

#### Теорема 4.4

Каждое аффинное алгебраическое множество имеет единственное разложение  $X = \bigcup X_i$  в конечное объединение таких собственных замкнутых неприводимых подмножеств<sup>1</sup>  $X_i \subset X$ , что  $X_i \not\subset X_j$  ни при каких  $i \neq j$ .

**Доказательство.** Разложение строится индуктивно: если  $X$  приводимо, мы в качестве первого шага представим его в виде  $X = Z_1 \cup Z_2$ , где  $Z_{1,2}$  — собственные замкнутые подмножества. Если после нескольких шагов мы получим разложение  $X = \bigcup Z_v$  в котором все  $Z_v$  неприводимы, процесс заканчивается, и, выкидывая неприводимые компоненты, содержащиеся в других неприводимых компонентах, мы получим требуемое разложение. В противном случае мы делаем следующий шаг, заменяя приводимые  $Z_v$  объединениями их собственных замкнутых подмножеств. Если эта процедура не остановится через конечное число шагов, мы сможем построить бесконечную цепочку строго вложенных замкнутых подмножеств  $X \supseteq Y_1 \supseteq Y_2 \supseteq \dots$ , идеалы которых составят бесконечную строго возрастающую цепочку  $(0) \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots$ , что противоречит нётеровости  $\mathbb{k}[X]$ .

Единственность следует из того, что включение  $Y \subset Z_1 \cup Z_2$  означает разложение  $Y = (Y \cap Z_1) \cup (Y \cap Z_2)$ , и из неприводимости  $Y$  вытекает, что  $Y \subset Z_1$  или  $Y \subset Z_2$ . Тем самым, равенство двух разложений в объединение неприводимых компонент  $X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n = Y_1 \cup Y_2 \cup \dots \cup Y_m$  означает, что  $X_1 \subset Y_\alpha \subset X_\beta$  для некоторых  $\alpha, \beta$ , откуда  $X_1 = Y_\alpha = X_\beta$ . Выкидываем  $X_1$  и  $Y_\alpha$  и применяем предположение индукции к замыканиям того, что осталось.  $\square$

#### Пример 4.5 («большие» открытые множества)

Топология Зарисского довольно груба, в частности, нехаусдорфова. Если  $X$  неприводимо, любые два открытых подмножества  $U_1, U_2 \subset X$  имеют непустое пересечение, поскольку в противном случае  $X = (X \setminus U_1) \cup (X \setminus U_2)$ . Таким образом, всякое непустое открытое подмножество неприводимого многообразия всюду плотно.

**Упражнение 4.7.** Пусть  $X$  неприводимо и  $f, g \in \mathbb{k}[X]$ . Докажите, что если  $f|_U = g|_U$  для некоторого непустого открытого  $U \subset X$ , то  $f = g$  в  $\mathbb{k}[X]$ .

---

<sup>1</sup>они называются *неприводимыми компонентами* многообразия  $X$

Пример 4.6 (сравнение с топологией произведения)

Топология Зарисского на  $X \times Y$  тоньше произведения топологий Зарисского на  $X$  и  $Y$ , поскольку замкнутые  $Z \subset X \times Y$  не исчерпываются произведениями замкнутых подмножеств в  $X$ ,  $Y$ . Например, если  $X = Y = \mathbb{A}^1$ , то любая кривая, скажем, гипербола  $V(xy - 1)$ , замкнута в топологии Зарисского на  $\mathbb{A}^1 \times \mathbb{A}^1 = \mathbb{A}^2$ , в то время как произведения замкнутых множеств на  $\mathbb{A}^1$  исчерпываются конечными объединениями изолированных точек и координатных прямых.

**4.4.3. Локальные регулярные функции.** Рассмотрим непустое открытое подмножество  $U$  аффинного алгебраического многообразия  $X$ . Функция  $f : U \rightarrow \mathbb{k}$  называется *регулярной* в точке  $u \in U$ , если существуют  $p, q \in \mathbb{k}[X]$ , такие что  $q(u) \neq 0$  и  $f(x) = p(x)/q(x) \forall x \in \mathcal{D}(q) \cap U$ . Функции  $f : U \rightarrow \mathbb{k}$ , регулярные в каждой точке  $u \in U$ , образуют коммутативное кольцо, обозначаемое  $\mathcal{O}_x(U)$  или  $\Gamma(U, \mathcal{O}_x)$ . Оно называется *кольцом локальных регулярных функций* на  $U \subset X$ .

Лемма 4.10

Если  $X$  неприводимо, то  $\mathcal{O}_x(\mathcal{D}(h)) = \mathbb{k}[X][h^{-1}] \forall h \in \mathbb{k}[X]$ . Иными словами, каждая регулярная функция  $f \in \mathcal{O}_x(\mathcal{D}(h))$  записывается в виде  $f(x) = r(x)/h^d(x)$  с подходящими  $r \in \mathbb{k}[X]$ ,  $d \in \mathbb{N}$  (в частности, для  $h \equiv 1$ , мы получим  $\mathcal{O}_x(X) = \mathbb{k}[X]$ ).

Доказательство. Если  $f \in \mathcal{O}_x(\mathcal{D}(h))$ , то  $\forall u \in \mathcal{D}(h)$  найдутся такие  $p_u, q_u \in \mathbb{k}[X]$ , что  $q_u(u) \neq 0$  и  $f(x) = p_u(x)/q_u(x) \forall x \in \mathcal{D}(q_u) \cap \mathcal{D}(h)$ . Поскольку  $\bigcap_{u \in U} V(q_u) \subset V(h)$ , по теореме Гильберта о нулях найдутся  $u_1, u_2, \dots, u_m \in \mathcal{D}(h)$ , такие что  $h^d = \sum q_{u_\nu} g_\nu$  для подходящих  $g_1, g_2, \dots, g_m \in \mathbb{k}[X]$  и  $d \in \mathbb{N}$ . В то же время, для каждого  $\nu$  мы имеем равенство

$$f(x) q_{u_\nu}(x) = p_{u_\nu}(x),$$

которое выполняется для всех  $x \in \mathcal{D}(h)$ , включая те, для которых  $q_{u_\nu}(x) = 0$ . Действительно, пусть  $q_{u_\nu}(w) = 0$  для некоторого  $w \in \mathcal{D}(h)$ . Тогда, переписывая  $f = p_{u_\nu}/q_{u_\nu}$  как  $p_w/q_w$  с  $q_w(w) \neq 0$ , мы получим  $p_{u_\nu}(x) q_w(x) = q_{u_\nu}(x) p_w(x)$  для всех  $x \in \mathcal{D}(h \cdot q_{u_\nu} \cdot q_w)$ , а значит (см. упр. 4.7), вообще для всех  $x \in X$ . В частности,

$$p_{u_\nu}(w) = q_{u_\nu}(w) p_w(w)/q_w(w) = 0 = f(w) q_{u_\nu}(w).$$

Таким образом,  $fh^d = \sum f q_{u_\nu} g_\nu = \sum p_{u_\nu} g_\nu \in \mathbb{k}[X]$ . □

Следствие 4.7

Каждое главное открытое подмножество неприводимого аффинного многообразия  $X$

$$\mathcal{D}(f) = \text{Spec}_m \mathbb{k}[X][f^{-1}] = \text{Spec}_m \mathbb{k}[X][t]/(1 - tf)$$

является аффинным алгебраическим многообразием и вкладывается в виде замкнуто-го подмногообразия в  $X \times \mathbb{A}^1$ . Включение  $\mathcal{D}(f) \hookrightarrow X$  является регулярным морфизмом, отвечающим вложению алгебр  $\mathbb{k}[X] \hookrightarrow \mathbb{k}[X][f^{-1}]$ .

**4.4.4. Структурный пучок.** Соответствие<sup>1</sup>  $\mathcal{O}_X : U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$  называется *структурным пучком* аффинного алгебраического многообразия  $X$ . Отметим, что функция  $f : U \rightarrow \mathbb{k}$  на объединении открытых множеств  $U = \bigcup W_i$  регулярна тогда и только тогда, когда регулярно каждое ограничение  $f|_{W_i}$ , и наоборот, для любого набора локальных регулярных функций  $f_i : W_i \rightarrow \mathbb{k}$ , таких что  $f_i \equiv f_j$  на  $W_i \cap W_j$ , существует единственная регулярная функция  $f \in \mathcal{O}_X(\cup W_i)$ , ограничение которой на каждое  $W_i$  совпадает с  $f_i$  — последнее условие, собственно, и означает, что предпучок<sup>2</sup>  $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$  является пучком.

Отметим, что хотя следствие сл. 4.7 и утверждает, что открытые множества являются локально аффинными, произвольное открытое подмножество  $U$  аффинного алгебраического многообразия  $X$  обычно аффинным алгебраическим многообразием не является: во-первых, алгебра  $\mathcal{O}_X(U)$  может оказаться не конечно порождённой, во-вторых, даже когда она конечно порождена, биекции между  $\text{Spec}_m \mathcal{O}_X(U)$  и точками  $U$  может и не быть.

Упражнение 4.8. Пусть  $U = \mathbb{A}^n \setminus O$  — дополнение к началу координат. Покажите, что  $\mathcal{O}_{\mathbb{A}^n}(U) = \mathbb{k}[\mathbb{A}^n]$  при  $n \geq 2$ .

Упражнение 4.9. Покажите, что открытое подмножество  $U$  аффинного многообразия является аффинным, если и только если найдутся  $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathcal{O}_X(U)$ , такие что идеал  $(f_1, f_2, \dots, f_m) = \mathcal{O}_X(U)$  и каждое из подмножеств  $U_i = \{p \in U \mid f_i(p) \neq 0\}$  является аффинным многообразием.

#### 4.5. Геометрические свойства гомоморфизмов алгебр.

Любой гомоморфизм  $\mathbb{k}$ -алгебр

$$\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$$

канонически разлагается в композицию эпиморфизма и вложения:

$$\mathbb{k}[Y] \twoheadrightarrow \mathbb{k}[Y]/\ker(\varphi^*) = \text{im}(\varphi^*) \hookrightarrow \mathbb{k}[X]. \quad (4-13)$$

Поскольку алгебра  $\mathbb{k}[Y]$  конечно порождена, а алгебра  $\mathbb{k}[X]$  приведена, алгебра

$$\mathbb{k}[Y]/\ker(\varphi^*) = \text{im}(\varphi^*) \subset \mathbb{k}[X]$$

тоже является конечно порождённой приведённой  $\mathbb{k}$ -алгеброй, отвечающей аффинному многообразию

$$Z = \text{Spec}_m (\text{im}(\varphi^*)) \simeq V(\ker(\varphi^*)) \subset Y.$$

Инъективность гомоморфизма  $\varphi_1^* : \mathbb{k}[Z] \rightarrow \mathbb{k}[X]$  означает отсутствие ненулевых функций  $f \in \mathbb{k}[Z]$ , зануляющихся на  $\varphi_1(X) \subset Z$ , т. е. плотность  $\varphi_1(X)$  в  $Z$ . Таким образом,

$$Z = \overline{\varphi(X)} \subset Y,$$

и алгебраическому разложению (4-13) на геометрическом языке отвечает разложение регулярного морфизма многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$  в композицию

$$X \xrightarrow{\varphi_1} Z = \overline{\varphi(X)} \xrightarrow{\varphi_2} Y.$$

<sup>1</sup>понимаемое как контравариантный функтор из категории открытых подмножеств  $U \subset X$  в категорию  $\mathbb{k}$ -алгебр

<sup>2</sup>напомним, что *предпучком* колец (групп, множеств и т. п.) на топологическом пространстве  $X$  называется любой контравариантный функтор из категории открытых подмножеств в  $X$  (морфизмами в которой служат вложения) в категорию колец (групп, множеств и т. п.)

**4.5.1. Доминантные морфизмы.** Если  $X$  неприводимо и гомоморфизм алгебр

$$\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow \mathbb{k}[X]$$

инъективен, то соответствующий морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  называется *доминантным*. Как мы видели выше, инъективность гомоморфизма поднятия означает, что  $\overline{\varphi(X)} = Y$ . Если  $X$  приводимо, то морфизм  $\varphi$  называется *доминантным*, если доминантно его ограничение на каждую неприводимую компоненту многообразия  $X$ .

**4.5.2. Замкнутые вложения.** Морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  называется *замкнутым вложением*, если его гомоморфизм поднятия  $\varphi^* : \mathbb{k}[Y] \rightarrow k[X]$  сюръективен. Геометрически это значит, что  $\varphi$  является изоморфизмом  $X$  с замкнутым подмногообразием  $V(\ker \varphi^*) \subset Y$ .

Упражнение 4.10. Покажите, что любой доминантный морфизм неприводимых аффинных многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$  раскладывается в композицию

$$X \xhookrightarrow{\psi} Y \times \mathbb{A}^m \xrightarrow{\pi} Y , \quad (4-14)$$

где  $\psi$  — замкнутое вложение, а  $\pi$  — естественная проекция вдоль  $\mathbb{A}^m$ .

**4.5.3. Конечные морфизмы.** Наличие регулярного морфизма  $\varphi : X \rightarrow Y$  позволяет рассматривать  $\mathbb{k}[X]$  как алгебру над  $\varphi^*(\mathbb{k}[Y]) = \mathbb{k}[\varphi(X)] \subset \mathbb{k}[X]$ . Морфизм  $\varphi$  называется *конечным*, если алгебра  $\mathbb{k}[X]$  является целой над своей подалгеброй  $\varphi^*(k[Y])$  или, что то же самое, если  $\mathbb{k}[X]$  является конечно порождённым  $\varphi^*(k[Y])$ -модулём<sup>1</sup>.

Лемма 4.11

Любой конечный морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  аффинных алгебраических многообразий переводит всякое замкнутое подмножество  $Z \subset X$  в замкнутое подмножество  $\varphi(Z) \subset Y$ , и индуцированный морфизм  $\varphi|_Z : Z \rightarrow \varphi(Z)$  также будет конечен. Кроме того, если  $X$  неприводимо, то  $\varphi(Z) \neq Y$  ни для какого замкнутого  $Z \neq X$ .

Доказательство. Пусть  $I = I(Z) \subset \mathbb{k}[X]$  — идеал замкнутого подмножества  $Z \subset X$ . Ограничение  $\varphi|_Z : Z \rightarrow Y$  отвечает сквозному гомоморфизму алгебр

$$\varphi_Z^* : k[Y] \xrightarrow{\varphi^*} k[X] \rightarrow \mathbb{k}[X]/I .$$

Поскольку алгебра  $\mathbb{k}[X]$  конечно порождена как  $\varphi^*(k[Y])$ -модуль, алгебра  $\mathbb{k}[Z] = \mathbb{k}[X]/I$  также конечно порождена как модуль над  $\mathbb{k}[\varphi(Z)] = \varphi|_Z^*(k[Y]) = \varphi^*(k[Y])/(I \cap \varphi^*(k[Y]))$ .

Тем самым,  $Z \rightarrow \overline{\varphi(Z)}$  — конечный морфизм.

Равенство  $\varphi(Z) = \overline{\varphi(Z)}$  достаточно доказывать отдельно для каждой неприводимой компоненты  $Z$ , причём ввиду предыдущего можно заменить  $X$  на  $Z$ , а  $Y$  на  $\overline{Z}$ . Итак, достаточно показать, что всякий конечный доминантный морфизм  $\varphi : Z \rightarrow Y$  неприводимого аффинного многообразия  $Z$  сюръективен. На алгебраическом языке это означает, что для любого расширения алгебр  $\mathbb{k}[Y] \subset \mathbb{k}[Z]$ , такого что  $\mathbb{k}[Z]$  не имеет делителей нуля и является конечно порождённым  $\mathbb{k}[Y]$  модулём, всякий максимальный идеал  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[Y]$  имеет вид  $\tilde{\mathfrak{m}} \cap \mathbb{k}[Y]$  для некоторого собственного максимального идеала  $\tilde{\mathfrak{m}} \subset \mathbb{k}[Z]$ . Если

<sup>1</sup>т. е. существуют  $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{k}[X]$ , такие что любой  $h \in \mathbb{k}[X]$  может быть записан как  $h = \sum \varphi^*(g_i) f_i$  с подходящими  $g_i \in \mathbb{k}[Y]$

идеал  $\mathfrak{m} \cdot \mathbb{k}[Z]$ , порождённый  $\mathfrak{m}$  в  $\mathbb{k}[Z]$ , является собственным в  $\mathbb{k}[Z]$ , то в качестве  $\tilde{\mathfrak{m}}$  можно взять любой максимальный идеал, содержащий  $\mathfrak{m} \cdot \mathbb{k}[Z]$ . Таким образом, мы должны показать, что  $\mathfrak{m} \cdot \mathbb{k}[Z] \neq \mathbb{k}[Z]$  ни для какого максимального идеала  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[Y]$ .

Пусть это не так, и  $\mathfrak{m} \cdot \mathbb{k}[Z] = \mathbb{k}[Z]$  для некоторого собственного идеала  $\mathfrak{m} \subset \mathbb{k}[Y]$ . Выберем какую-нибудь систему функций  $f_1, f_2, \dots, f_m$ , порождающих  $\mathbb{k}[Z]$  как  $\mathbb{k}[Y]$ -модуль. Согласно нашему предположению, каждую из них можно записать в виде

$$f_i = \sum \beta_{iv} f_v \quad \text{с} \quad \beta_{iv} \in \mathfrak{m}.$$

Это означает, что  $(f_1, f_2, \dots, f_m) \cdot (E - B) = 0$ , где  $B = (\beta_{vi})$ , а  $E$  — единичная  $m \times m$  матрица. Иначе говоря, нулевой  $\mathbb{k}[Y]$ -линейный эндоморфизм модуля  $\mathbb{k}[Z]$  представляется в образующих  $\{f_v\}$  умножением на матрицу  $E - B$ . Но тогда умножение на  $\det(E - B)$  также аннулирует<sup>1</sup>  $\mathbb{k}[Z]$ . Поскольку в  $\mathbb{k}[Z]$  нет делителей нуля, мы заключаем, что  $\det(E - B) = 0$ . Раскладывая определитель, получаем, что  $1 \in \mathfrak{m}$ , т. е.  $\mathfrak{m} = \mathbb{k}[Y]$  не является собственным.

Для доказательства неравенства  $\varphi(Z) \neq Y$  при  $Z \subsetneq X$  рассмотрим какую-нибудь ненулевую функцию  $f \in \mathbb{k}[X]$ , тождественно зануляющуюся вдоль  $Z$ , и запишем для неё целое уравнение над  $\varphi^*(k[Y])$  минимальной возможной степени:

$$f^m + \varphi^*(g_1)f^{m-1} + \dots + \varphi^*(g_{m-1})f + \varphi^*(g_m) = 0.$$

Вычисляя его левую часть в точках  $z \in Z$ , получим  $\varphi^*(g_m)|_z = g_m|_{\varphi(z)} \equiv 0$ , но при этом  $g_m \neq 0$  в  $\mathbb{k}[Y]$ , т. к. иначе мы могли бы сократить уравнение на  $f$  (ибо в  $\mathbb{k}[X]$  нет делителей нуля). Таким образом,  $\varphi(Z) \subset V(g_m) \subsetneq Y$ .  $\square$

**4.5.4. Нормальные многообразия.** Если аффинное многообразие  $Y$  неприводимо, алгебра  $\mathbb{k}[Y]$  не имеет делителей нуля. Её поле частных обозначается в этом случае  $\mathbb{k}(Y)$  и называется *полям рациональных функций* на  $Y$ . Неприводимое аффинное алгебраическое многообразие  $Y$  называется *нормальным*, если алгебра  $\mathbb{k}[Y]$  нормальна, т. е. все рациональные функции  $f \in \mathbb{k}(Y)$ , целые над  $\mathbb{k}[Y]$ , лежат в  $\mathbb{k}[Y]$ . Например, аффинное пространство  $\mathbb{A}^n$  нормально (как и любое другое многообразие с факториальной координатной алгеброй).

#### Лемма 4.12

Всякий сюръективный конечный морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  в нормальное многообразие  $Y$  открыт (т. е.  $\varphi(U)$  открыто в  $Y$  для любого открытого  $U \subset X$ ) и сюръективно отображает на  $Y$  каждую неприводимую компоненту многообразия  $X$ .

**Доказательство.** Отождествим  $\mathbb{k}[Y]$  с подалгеброй в  $\mathbb{k}[X]$  при помощи  $\varphi^*$ . Для проверки первого утверждения достаточно доказать, что образ каждого главного открытого множества  $\mathcal{D}(f) \subset X$  целиком содержит некоторую главную открытую окрестность каждой своей точки. Иначе говоря, для любой функции  $f \in \mathbb{k}[X]$  и любой точки  $p \in X$ , где  $f(p) \neq 0$ , мы должны подобрать функцию  $a \in \mathbb{k}[Y]$ , такую что  $\varphi(p) \in \mathcal{D}(a) \subset \varphi(\mathcal{D}(f))$  на  $Y$ . Для этого рассмотрим отображение

$$\psi = \varphi \times f : X \xrightarrow{p \mapsto (\varphi(p), f(p))} Y \times \mathbb{A}^1.$$

---

<sup>1</sup>в силу равенства  $\det(E - B) \cdot E = (E - B) \cdot (E - B)^\vee$ , где  $(E - B)^\vee$  — присоединённая к  $(E - B)$  матрица (транспонированная к матрице алгебраических дополнений)

Оно регулярно и конечно, поскольку гомоморфизм поднятия

$$\psi^* : \mathbb{k}[Y \times \mathbb{A}^1] = \mathbb{k}[Y][t] \xrightarrow{t \mapsto f} k[X]$$

есть ни что иное, как вычисление полиномов от  $t$  с коэффициентами в  $\mathbb{k}[Y]$  на элементе  $f \in \mathbb{k}[X]$ , и конечно порождённый  $\mathbb{k}[Y]$ -модуль  $\mathbb{k}[X]$  будет тем более конечно порождён как модуль над  $\mathbb{k}[Y][t]$ . Согласно следствию из сл. 4.6, минимальный многочлен  $\mu_f$  элемента  $f$  над полем частных  $\mathbb{k}(Y)$  алгебры  $\mathbb{k}[Y]$  лежит в координатной алгебре  $\mathbb{k}[Y]$ . Поэтому  $\ker \psi^* = (\mu_f)$  является главным идеалом в  $\mathbb{k}[Y][t]$ . Иными словами, образ морфизма  $\psi$  является в  $Y \times \mathbb{A}^1$  гиперповерхностью, заданной уравнением  $\mu_f = 0$ . Пусть

$$\mu_f = \mu_f(y; t) = t^m + a_1(y)t^{m-1} + \dots + a_m(y).$$

Принадлежность точки  $q \in Y$  образу множества  $\mathcal{D}(f)$  означает наличие у многочлена  $\mu_f(q; t)$  ненулевого корня  $t$ , что равносильно не обращению в нуль в этой точке хотя бы одного из коэффициентов  $a_i$ . В частности,  $a_i(\varphi(p)) \neq 0$  для каждого  $i$ . Но тогда

$$\varphi(p) \in \mathcal{D}(a_i) \subset \varphi(\mathcal{D}(f)),$$

что и требовалось. Что касается ограничения  $\varphi$  на компоненты неприводимого разложения  $X = \bigcup X_\nu$ , то для каждого  $i$  множество

$$U_i = X \setminus \bigcup_{\nu \neq i} X_\nu = X_i \setminus \bigcup_{\nu \neq i} (X_i \cap X_\nu)$$

открыто в  $X$  и плотно в  $X_i$ . Поскольку  $\varphi(U_i)$  открыто, а  $Y$  неприводимо,  $\varphi(U_i)$  плотно в  $Y$ , т. е.  $\varphi(X_i) = \overline{\varphi(U_i)} = Y$ .  $\square$

#### Задачи для самостоятельного решения к §4

**Задача 4.1.** Пусть элементы  $m_1, m_2, \dots, m_r$  порождают модуль  $M$  над кольцом  $A$ , и эндоморфизм  $\varphi : M \rightarrow M$  действует на них по правилу

$$\varphi : m_i \mapsto \sum_j m_j \cdot \varphi_{ji},$$

где  $(\varphi_{ji}) \in \text{Mat}_{r \times r}(A)$ . Докажите, что а)  $\varphi(M) \supset \det(\varphi_{ji}) \cdot M$  б)  $\mathfrak{a} \cdot M \neq M$  ни для какого собственного идеала  $\mathfrak{a} \subset A$  при условии, что  $M$  точен<sup>1</sup>.

**Задача 4.2.** Пусть  $d \in \mathbb{Z}$  не делится на квадраты. Опишите целое замыкание  $\mathbb{Z}$  в

$$\mathbb{Q}[\sqrt{d}] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{Q}[x]}{(x^2 - d)}.$$

<sup>1</sup>т. е.  $aM = 0 \Rightarrow a = 0$  для  $a \in A$

Если общий случай вызывает затруднения, рассмотрите сначала по-отдельности случаи  $d = -1, d = 2, d = 3$  и  $d = 5$ .

Задача 4.3. Покажите, что факториальное кольцо целозамкнуто в своём поле частных.

Задача 4.4. Цело ли кольцо  $A$  над своим подкольцом  $B \subset A$ , если

- а)  $A = \mathbb{k}[x, y]$  (где  $\mathbb{k}$  – поле),  $B = \{f \in A : \left. \frac{\partial}{\partial x} \right|_{(0,0)} f = 0\}$
- б)  $A = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$  (кольцо непрерывных функций),  $B = \{f \in A \mid f(1, 0) = f(0, 1)\}$

Задача 4.5. Какие из перечисленных колец нётеровы: а)  $A[[t]]$ , где  $A$  нётерово

- б)  $f(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ , сходящиеся всюду в  $\mathbb{C}$
- в)  $\{p(z)/q(z) \in \mathbb{C}(z) \mid q(z) \neq 0$  при  $|z| \leq 1\}$
- г)  $\{f \in \mathbb{C}[x, y] \mid \left. \frac{\partial^{i+j}}{\partial x^i \partial y^j} f \right| = 0$  при  $0 \leq i + j \leq n\}$  ( $n \in \mathbb{N}$  фиксировано).

д<sup>\*</sup>) произвольная подалгебра  $A \subset \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ , имеющая конечную коразмерность как векторное пространство над полем  $\mathbb{k}$ .

Задача 4.6. Пусть  $A$  – нормальное кольцо<sup>1</sup> с полем частных  $\mathbb{F}$ . Покажите, что

- а) произведение двух приведённых многочленов из  $\mathbb{F}[x]$  лежит в  $A[x]$  тогда и только тогда, когда оба множителя лежат в  $A[x]$
- б) если элемент  $b$  какой-либо  $\mathbb{F}$ -алгебры  $B$  цел над  $A$ , то его минимальный многочлен над  $\mathbb{F}$  лежит в  $A[x]$  (т. е. является заодно и уравнением целой зависимости).

Задача 4.7. Покажите, что кольцо многочленов над нормальным кольцом тоже нормально.

Задача 4.8. Покажите, что любое поле, конечно порождённое как  $\mathbb{Z}$ -алгебра<sup>2</sup>, является конечным множеством.

Задача 4.9. Пусть  $B \supset A$  – целое расширение колец. Покажите, что любой гомоморфизм  $A \rightarrow \mathbb{k}$  в алгебраически замкнутое поле  $\mathbb{k}$  продолжается до гомоморфизма  $B \rightarrow \mathbb{k}$ .

Задача 4.10. Для двух идеалов  $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$  кольца  $A$  обозначим через  $\mathfrak{ab}$  идеал, порождённый произведениями  $ab$  с  $a \in \mathfrak{a}, b \in \mathfrak{b}$ . Верно ли что а) всевозможные произведения  $ab$  уже и сами по себе образуют идеал б)  $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$  в)  $\mathfrak{ab} = \mathfrak{a} \cup \mathfrak{b}$ , когда  $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = A$ .

Задача 4.11. Покажите, что радикал  $\sqrt{I} \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n \in I\}$  любого идеала  $I \subset A$  также является идеалом.

Задача 4.12. Для пары идеалов  $I, J$  кольца  $A = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  положим

$$K = \{ab \mid a \in I, b \in J\}$$

и обозначим через  $IJ$  идеал, порождённый множеством  $K$ . Верно ли, что

- а)  $K = IJ$  итак уже является идеалом б)  $K = I \cap J$  (кстати, является ли идеалом  $I \cap J$ ?)
- в)  $IJ = I \cap J$  г)  $1 \in I + J \Rightarrow IJ = I \cap J$  д)  $V(I) \cup V(J) = V(IJ) = V(I \cap J)$
- е)  $\sqrt{IJ} = \sqrt{I \cap J}$  ж)  $\sqrt{IJ} = \sqrt{I}\sqrt{J}$  з)  $(I = \sqrt{I} \& J = \sqrt{J}) \Rightarrow IJ = \sqrt{IJ}$ .

Задача 4.13. Пусть  $J = (xy, yz, zx) \subset \mathbb{k}[x, y, z]$ . Опишите  $V(J) \subset \mathbb{A}^3$  и  $I(V(J)) \subset \mathbb{k}[x, y, z]$ .

Можно ли задать многообразие  $V(J)$  двумя полиномиальными уравнениями?

Задача 4.14. Найдите какой-нибудь многочлен  $f \in I(V(J)) \setminus J$  для идеала

$$J = (x^2 + y^2 - 1, y - 1) \subset \mathbb{k}[x, y].$$

<sup>1</sup>напомню (см. п° 4.1.5), что кольцо называется *нормальным*, если в нём нет делителей нуля и оно целозамкнуто в своём поле частных

<sup>2</sup>с тавтологическим действием  $m \cdot a \stackrel{\text{def}}{=} a + a + \dots + a$  (сумма  $m$  одинаковых слагаемых)

Задача 4.15. Опишите  $V(J) \subset \mathbb{A}^3$  и  $I(V(J)) \subset \mathbb{k}[x, y, z]$  для идеала

$$\text{а) } J = (xy, (x - y)z) \quad \text{б) } J = (xy + yz + zx, x^2 + y^2 + z^2)$$

Задача 4.16. Пусть  $A = \mathcal{C}^0(X)$  — кольцо непрерывных (вещественных или комплексных) функций на компактном хаусдорфовом топологическом пространстве  $X$ . Покажите, что отображение

$$X \xrightarrow{x \mapsto \ker \text{ev}_x} \text{Spec}_m A$$

биективно и топология Зарисского на  $\text{Spec}_m A$  индуцирует исходную топологию на  $X$ .

Задача 4.17. Всякий ли простой идеал кольца  $\mathcal{C}^0([0, 1])$  вещественных непрерывных функций на отрезке максимален?

Задача 4.18. Пусть  $X = \text{Spec}_m A$  — аффинное алгебраическое многообразие. Покажите, что разложимость  $A$  в прямое произведение<sup>1</sup>  $A = A_1 \times A_2$  равносильна разложимости  $X$  в дизъюнктное объединение  $X = X_1 \sqcup X_2$  двух собственных замкнутых подмножеств.

Задача 4.19. Пусть над алгебраически замкнутым полем многочлен  $f$  обращается в нуль в каждой точке гиперповерхности  $V(g) \subset \mathbb{A}^n$ . Покажите, что каждый неприводимый сомножитель многочлена  $g$  делит многочлен  $f$ .

Задача 4.20. Докажите, что максимальный спектр любой конечномерной как векторное пространство над  $\mathbb{k}$   $\mathbb{k}$ -алгебры является конечным множеством и выведите отсюда, что любой конечный морфизм имеет не более, чем конечные слои.

Задача 4.21. Докажите, что проекция аффинной гиперповерхности  $V(f) \subset \mathbb{A}^n$  из любой точки  $p \notin V(f)$  на любую гиперплоскость  $H \not\ni p$  доминантна.

Задача 4.22. Покажите, что образ регулярного доминантного морфизма содержит открытое плотное множество.

Задача 4.23 (лемма Нётер о нормализации). Покажите, что любая гиперповерхность  $V(f)$  в  $\mathbb{A}^n$  допускает конечную сюръекцию на некоторую гиперплоскость  $\mathbb{A}^{n-1} \subset \mathbb{A}^n$ .

Задача 4.24. Для аффинных алгебраических многообразий  $X \subset \mathbb{A}^n$ ,  $Y \subset \mathbb{A}^m$ , уравнения которых известны, опишите систему уравнений, реализующих  $X \times Y$  в качестве подмногообразия в  $\mathbb{A}^{n+m}$  и покажите, что  $X \times Y$  неприводимо, если  $X$  и  $Y$  неприводимы.

Задача 4.25. Может ли алгебра регулярных функций  $\mathcal{O}_x(U)$  на открытом подмножестве  $U$  аффинного алгебраического многообразия  $X$  над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$

- а) не быть конечно порождённой  $\mathbb{k}$ -алгеброй?
- б) быть конечно-порождённой  $\mathbb{k}$ -алгеброй, но иметь  $\text{Spec}_m \mathcal{O}_x(U) \neq U$ ?

Задача 4.26. Пусть конечная группа  $\mathfrak{G}$  действует регулярными автоморфизмами на аффинном алгебраическом многообразии  $X$  над алгебраически замкнутым полем характеристики нуль. Обозначим через  $R = \mathbb{k}[X]^{\mathfrak{G}} \subset \mathbb{k}[X]$  подалгебру инвариантов.

а) Убедитесь, что  $\mathbb{k}$ -линейный оператор усреднения  $\natural : \mathbb{k}[X] \rightarrow R$ , переводящий функцию  $f \in \mathbb{k}[X]$  в центр тяжести её  $\mathfrak{G}$ -орбиты  $f^{\natural} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{|\mathfrak{G}|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{G}} \sigma f$ , обладает для всех  $f \in \mathbb{k}[X]$

---

<sup>1</sup>напомним, что для разложимости алгебры (даже не обязательно коммутативной) в прямое произведение двух подалгебр необходимо и достаточно разложения единицы в сумму двух независимых идемпотентов:  $1 = e_1 + e_2$ , где  $e_1^2 = e_1$ ,  $e_2^2 = e_2$ ,  $e_1 e_2 = e_2 e_1 = 0$

и всех  $h \in R$  свойствами: (1)  $f^\natural \in R$  (2)  $h^\natural = h$  (3)  $(fh)^\natural = f^\natural h$ .

- б) Покажите, что алгебра  $R$  конечно порождена<sup>1</sup> и не имеет нильпотентов.
- в) Постройте аффинное алгебраическое многообразие  $X/\mathfrak{G}$  и конечную регулярную сюръекцию  $\pi : X \rightarrow X/\mathfrak{G}$ , слоями которой являются в точности  $\mathfrak{G}$ -орбиты и которая универсальна в следующем смысле: для любого регулярного морфизма аффинных алгебраических многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$ , такого что  $\varphi(\sigma x) = \varphi(x)$  для всех  $\sigma \in \mathfrak{G}$  и  $x \in X$ , существует единственный регулярный морфизм  $\psi : X/\mathfrak{G} \rightarrow Y$ , такой что  $\psi \circ \pi = \varphi$ .
- г) Опишите явными уравнениями в подходящем аффинном пространстве построенный выше фактор  $X/\mathfrak{G}$  для  $X = \mathbb{C}^2$  и  $\mathfrak{G} = \mathbb{Z}/(n)$ , действующей на  $\mathbb{C}^2$  по правилу

$$k \pmod{n} : (x, y) \mapsto (e^{2\pi ik/n} x, e^{2\pi ik/n} y).$$

---

<sup>1</sup>подсказка: рассмотрите идеал  $I \subset \mathbb{k}[X]$ , порождённый всеми непостоянными функциями из  $R$ , выберете в этом идеале конечный набор образующих из  $R$  и при помощи предыдущего свойства (3) покажите, что они порождают  $R$  как  $\mathbb{k}$ -алгебру

## §5. Алгебраические многообразия

Всюду в этом параграфе мы продолжаем по умолчанию считать, что основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто.

**5.1. Определение и примеры многообразий и их морфизмов.** Алгебраические многообразия определяются по той же схеме, что и топологические, гладкие или аналитические многообразия, т. е. как топологические пространства, каждая точка которых обладает окрестностью, гомеоморфной некоторой «стандартной локальной модели», и любые две таких окрестности должны регулярным образом согласовываться на их пересечении. Нюансов два: в отличие от топологии и дифференциальной геометрии, где обычно ограничиваются какой-нибудь одной локальной моделью (пространством  $\mathbb{R}^n$  или шаром в  $\mathbb{R}^n$ ), в алгебраической геометрии в качестве локальных моделей допускаются *любые*<sup>1</sup> аффинные алгебраические многообразия, а «регулярность» согласования двух таких локальных моделей на их пересечении понимается в смысле № 4.3.1 и № 4.4.3. Точные определения таковы.

Открытое подмножество  $U \subset X$  топологического пространства  $X$  называется *алгебраической аффинной картой*, если существует аффинное алгебраическое многообразие  $X_u$  и гомеоморфизм<sup>2</sup>  $\varphi_u : X_u \xrightarrow{\sim} U$ .

Две алгебраических карты  $\varphi_u : X_u \xrightarrow{\sim} U$  и  $\varphi_w : X_w \xrightarrow{\sim} W$  на  $X$  называются *совместимыми*, если гомеоморфизм склейки  $\varphi_{wu} = \varphi_w^{-1} \circ \varphi_u$ , отождествляющий между собою прообразы пересечения  $U \cap W$  в многообразиях  $X_u$  и  $X_w$

$$\varphi_{wu} : \varphi_u^{-1}(U \cap W) \xrightarrow{\sim} \varphi_w^{-1}(U \cap W)$$

является *регулярным изоморфизмом* в том смысле, что его гомоморфизм поднятия переводит локальные регулярные функции на  $X_w$ , определённые на  $\varphi_w^{-1}(U \cap W)$ , в локальные регулярные функции на  $X_u$ , определённые на  $\varphi_u^{-1}(U \cap W)$ :

$$\varphi_{wu}^* : \mathcal{O}_{X_w}(\varphi_w^{-1}(U \cap W)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_u}(\varphi_u^{-1}(U \cap W)).$$

Открытое покрытие  $X = \bigcup U_v$  попарно совместимыми алгебраическими картами называется *алгебраическим атласом* на  $X$ . Два алгебраических атласа называются *эквивалентными*, если их объединение также представляет собой алгебраический атлас. Топологическое пространство  $X$ , с зафиксированным на нём классом эквивалентных алгебраических атласов называется *алгебраическим многообразием*. Алгебраические многообразия, обладающие конечным атласом, называются многообразиями *конечного типа*.

**Упражнение 5.1.** Убедитесь, что грассманнаны (в частности, проективные пространства) являются алгебраическими многообразиями конечного типа в смысле данного выше определения.

**5.1.1. Прямое произведение  $X \times Y$**  алгебраических многообразий  $X, Y$  является алгебраическим многообразием. Его атлас состоит из всех попарных произведений  $U \times W$ , где  $U \subset X, W \subset Y$  суть аффинные алгебраические карты на  $X, Y$ .

**Упражнение 5.2.** Проверьте, что прямое произведение  $\mathbb{P}_{n_1} \times \mathbb{P}_{n_2} \times \dots \times \mathbb{P}_{n_m}$ , а также любое его подмножество, задаваемое набором однородных по каждой группе переменных

---

<sup>1</sup>в том числе «особые», такие как крест  $\mathrm{Spec}_m(\mathbb{k}[x, y]/(xy))$

<sup>2</sup> $X_u$  рассматривается как топологическое пространство с топологией Зарисского

полиномиальных уравнений на  $m$  групп по  $n_1, n_2, \dots, n_m$  переменных, является алгебраическими многообразиями.

**5.1.2. Регулярные функции и морфизмы.** Функция  $f : X \rightarrow \mathbb{k}$  называется *регулярной* в точке  $x$ , если её подъём на какую-нибудь<sup>1</sup> аффинную карту  $X_u$ , порывающую  $x$ , является локальной регулярной функцией  $X_u$ , определённой в какой-нибудь открытой окрестности точки  $x$ . Функции  $U \rightarrow \mathbb{k}$  на открытом подмножестве  $U \subset X$ , регулярные в каждой точке этого подмножества, образуют коммутативное кольцо  $\mathcal{O}_X(U)$ . Соответствие  $U \mapsto \mathcal{O}_X(U)$  называется *структурным пучком* многообразия  $X$ .

Отображение алгебраических многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$  называется *регулярным*, если  $\forall x \in X$  и любой локальной регулярной функции  $f \in \mathcal{O}_Y(W)$ , определённой в какой-либо окрестности  $W$  точки  $\varphi(x)$ , существует окрестность  $U \subset \varphi^{-1}(W)$  точки  $x$ , такая что  $\varphi^*(f) \in \mathcal{O}_X(U)$ . Иными словами, над каждым открытым  $U \subset Y$  гомоморфизм поднятия должен быть корректно определённым гомоморфизмом колец локальных регулярных функций. Например, множество регулярных морфизмов  $X \rightarrow \mathbb{A}^1$  совпадает с  $\mathcal{O}_X(X)$ .

**5.1.3. Замкнутые подмногообразия.** Каждое замкнутое подмножество  $Z \subset X$  алгебраического многообразия  $X$  имеет естественную структуру алгебраического многообразия. А именно, для каждой аффинной карты  $U$  пересечение  $Z \cap U$  есть замкнутое подмножество  $U$ , т. е. аффинное алгебраическое множество  $\text{Spec}_m(\mathcal{O}_X(U)/\mathcal{I}_z(U))$ , где

$$\mathcal{I}_z(U) = \{f \in \mathcal{O}_X(U) \mid f|_{Z \cap U} \equiv 0\}$$

есть идеал аффинного подмногообразия  $Z \cap U \subset U$ . Соответствие  $U \mapsto \mathcal{I}_z(U)$  называется *пучком идеалов* замкнутого подмногообразия  $Z \subset X$ . Он является подпучком структурного пучка и состоит из всех локальных регулярных функций, тождественно обращающихся в нуль на  $Z$ .

Регулярный морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  называется *замкнутым вложением*, если  $\varphi(X) \subset Y$  является замкнутым подмногообразием и  $\varphi$  устанавливает изоморфизм между  $X$  и  $\varphi(X)$ . Будем называть многообразие  $X$  *аффинным* (соотв. *проективным*), если оно допускает замкнутое вложение  $X \hookrightarrow \mathbb{A}^m$  (соотв.  $X \hookrightarrow \mathbb{P}_m$ ) для некоторого  $m$ .

Упражнение 5.3. Убедитесь, что аффинные (соотв. проективные) алгебраические многообразия, понимаемые как подмножества в аффинном (соотв. проективном) пространстве, заданные системой полиномиальных (соотв. однородных полиномиальных) уравнений, являются аффинными (соотв. проективными) многообразиями в смысле предыдущего определения.

#### Пример 5.1 (семейства подмногообразий)

Каждый регулярный морфизм  $\pi : X \rightarrow Y$  может восприниматься как семейство замкнутых подмногообразий  $X_y = \pi^{-1}(y) \subset X$ , параметризованное точками  $y \in Y$ . Если  $\pi : X \rightarrow Y$ ,  $\pi' : X' \rightarrow Y$  — два семейства с одной и той же базой, то регулярный морфизм  $\varphi : X \rightarrow X'$  называется *морфизмом семейств* (или *морфизмом над  $Y$* ), если он переводит  $X_y$  в  $X'_y$  для каждого  $y \in Y$ , т. е. если  $\pi = \pi' \circ \varphi$ . Семейство  $\pi : X \rightarrow Y$  называется *постоянным* или *тривидальным*, если оно изоморфно над  $Y$  прямому произведению  $\pi_Y : X_0 \times Y \rightarrow Y$  для некоторого многообразия  $X_0$ .

<sup>1</sup>а в силу согласованности какрт — и на любую

Пример 5.2 (раздутье точки в  $\mathbb{P}_n$ )

Прямые, проходящие через заданную точку  $p \in \mathbb{P}_n$ , образуют проективное пространство  $E \simeq \mathbb{P}_{n-1}$ , которое можно отождествить с любой не содержащей  $p$  гиперплоскостью  $H \subset \mathbb{P}_n$ . График инцидентности  $\mathcal{B}_p = \{(\ell, q) \in E \times \mathbb{P}_n \mid q \in \ell\}$  называется *раздутьем* точки  $p \in \mathbb{P}_n$ . Проекция  $\sigma_p : \mathcal{B}_p \rightarrow \mathbb{P}_n$  биективна всюду над  $\mathbb{P}_n \setminus \{p\}$ , однако прообраз самой точки  $p$  совпадает с  $E$ , и тем самым, имеет коразмерность 1 в  $\mathcal{B}_p$ . Он называется *исключительным дивизором*. Вторая проекция  $\varrho_E : \mathcal{B}_p \rightarrow E$  реализует  $\mathcal{B}_p$  как *линейное расслоение* над  $E$ , слой которого над точкой  $q \in E$  — это прямая  $(pq) \subset \mathbb{P}_n$ . Это расслоение называется *тавтологическим линейным расслоением* над  $E$ .

Наглядно раздутье точки  $p$  можно представлять себе как результат выкалывания этой точки с последующей вклейкой в образовавшееся точечное отверстие целого проективного пространства  $E$ , параметризующего все проходящие через  $p$  прямые, так чтобы при подходе к точке  $p$  вдоль любой прямой мы попадали в отвечающую этой прямой точку пространства  $E$ .

Если фиксировать однородные координаты  $(t_0 : t_1 : \dots : t_n)$  на  $\mathbb{P}_n$  так, чтобы  $p = (1 : 0 : \dots : 0)$ , и отождествить  $E$  с гиперплоскостью  $H = \{(0 : q_1 : \dots : q_n)\} \subset \mathbb{P}_n$ , то условие  $(q, t) \in \mathcal{B}_p$  будет равносильно системе квадратичных уравнений

$$\text{rk} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & q_1 & \cdots & q_n \\ t_0 & t_1 & \cdots & t_n \end{pmatrix} = 2, \quad \text{или} \quad q_i t_j = q_j t_i \quad \forall 1 \leq i < j \leq n.$$

Таким образом,  $\mathcal{B}_p$  есть замкнутое подмногообразие  $H \times \mathbb{P}_n$ .

**5.1.4. Отделимость.** Стандартный атлас на  $\mathbb{P}_1$  состоит из двух карт

$$\varphi_i : \mathbb{A}^1 \xrightarrow{\sim} U_i \subset \mathbb{P}_1, \quad i = 0, 1.$$

Их пересечение видно внутри каждой из них как дополнение к началу координат:

$$\varphi_0^{-1}(U_0 \cap U_1) = \varphi_1^{-1}(U_0 \cap U_1) = \mathbb{A}^1 \setminus \{0\} = \{t \in \mathbb{A}^1 \mid t \neq 0\}.$$

Карты склеены по этому пересечению посредством отображения склейки

$$\varphi_{01} : t \mapsto 1/t. \tag{5-1}$$

Если вместо этого отображения воспользоваться тождественным отображением

$$\tilde{\varphi}_{01} : t \mapsto t, \tag{5-2}$$

получится другое многообразие — «прямая с раздвоенной точкой»:

$$\overline{\phantom{x}} : \overline{\phantom{x}}.$$

Такая патология называется *неотделимостью*. Причина её возникновения в том, что правило склейки (5-2) «не замкнуто»: его можно «продолжить по непрерывности» с  $\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}$  на всё  $\mathbb{A}^1 = \overline{\mathbb{A}^1 \setminus \{0\}}$ .

В общем случае явление (не)отделимости формализуется так. Включения

$$U_0 \hookrightarrow U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_1$$

задают вложение  $U_0 \cap U_1 \hookrightarrow U_0 \times U_1$ . Так, правило (5-1) задаёт вложение  $(\mathbb{A}^1 \setminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$  по формуле  $t \mapsto (t, t^{-1})$ , которое отождествляет пересечение  $U_0 \cap U_1$  с замкнутым подмножеством  $V(xy - 1) \subset \mathbb{A}^2 = U_0 \times U_1$ . А правило (5-2) задаёт вложение  $(\mathbb{A}^1 \setminus O) \hookrightarrow \mathbb{A}^2$  по формуле  $t \mapsto (t, t)$ , и его образ не замкнут — это открытое подмножество  $\Delta \setminus \{(0, 0)\}$  диагонали  $\Delta = V(x - y) \subset \mathbb{A}^2$ .

Алгебраическое многообразие  $X$  называется *отделенным*, если для любой пары аффинных карт  $U, W$  на  $X$  образ канонического вложения  $U \cap W \hookrightarrow U \times W$  замкнут. Поскольку этот образ есть не что иное, как пересечение диагонали  $\Delta \subset X \times X$  с аффинной картой  $U \times W$  на  $X \times X$ , многообразие  $X$  отделено, если и только если диагональ  $\Delta \subset X \times X$  замкнута в  $X \times X$ .

Например,  $\mathbb{A}^n$  и  $\mathbb{P}_n$  отделены, поскольку диагонали в  $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$  и в  $\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n$  задаются, соответственно, уравнениями  $x_i = y_i$  и  $x_i y_j = x_j y_i$ . Замкнутое подмногообразие  $X \subset Y$  отделенного многообразия  $Y$  тоже отделено, ибо диагональ в  $X \times X$  является прообразом диагонали в  $Y \times Y$  при вложении  $X \times X \hookrightarrow Y \times Y$ . В частности, всякое аффинное или проективное многообразие отделено и имеет конечный тип.

#### Пример 5.3 (график морфизма)

Пусть  $\varphi : X \rightarrow Y$  — регулярный морфизм. Прообраз диагонали  $\Delta \subset Y \times Y$  при индуцированном морфизме  $\varphi \times \text{Id}_Y : X \times Y \rightarrow Y \times Y$  называется *графиком*  $\varphi$  и обозначается через  $\Gamma_\varphi$ . Геометрически,  $\Gamma_\varphi = \{(x, f(x))\} \subset X \times Y$ . Если  $Y$  отделено, то график замкнут. Например, график регулярного морфизма аффинных многообразий  $\varphi : \text{Spec}_m(A) \rightarrow \text{Spec}_m(B)$  задаётся в  $A \otimes B$  системой уравнений  $1 \otimes f = \varphi^*(f) \otimes 1$ , где  $f$  пробегает  $B$ .

**5.1.5. Рациональные отображения.** Регулярный морфизм  $\varphi : U \rightarrow Y$ , определённый на некотором открытом плотном подмножестве  $U$  алгебраического многообразия  $X$ , называется *рациональным отображением* из  $X$  в  $Y$ .

Формально говоря, рациональное отображение не является отображением «из  $X$ » в теоретико-множественном смысле, т. к. определено не везде. В частности, композиция рациональных отображений не определена, когда образ первого отображения оказывается целиком вне области определения второго. Тем не менее, рациональные отображения часто возникают в алгебраической геометрии.

#### Пример 5.4 (проекция $\mathbb{A}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$ )

Имеется естественная проекция  $\mathbb{A}(V) \dashrightarrow \mathbb{P}(V)$  переводящая точку  $A \in \mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$  в прямую  $(OA) \subset \mathbb{A}(V)$ , рассматриваемую как точка в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ . Это сюръективный рациональный морфизм, определенный на  $U = \mathbb{A}^n \setminus O$ . В стандартной аффинной карте

$$\varphi_i : \mathbb{A}^n \rightarrow U_i = \{(t_0, t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{P}_n \mid t_i = 1\},$$

соответствующий гомоморфизм поднятия

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}_n}(U_i) = \mathbb{k}[t_1, t_2, \dots, t_n] \xrightarrow{\pi^*} \mathbb{k}[x_0, x_1, \dots, x_n] [t_i^{-1}] = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}}(\mathcal{D}(t_i)) = \mathcal{O}_{\mathbb{A}^{n+1}}(\pi^{-1}(U_i))$$

переводит  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  в  $\tilde{f}(t_0, t_1, \dots, t_n) = f(t_0/t_i, \dots, t_{i-1}/t_i, t_{i+1}/t_i, \dots, t_n/t_i)$ .

**5.2. Геометрические схемы.** Максимальный спектр  $\text{Spec}_m A$  можно образовать для любой, в том числе не обязательно приведённой  $\mathbb{k}$ -алгебры  $A$ . Над алгебраически замкнутым полем  $\mathbb{k}$  каждый элемент  $a \in A$  при этом по-прежнему можно интерпретировать как функцию на  $\text{Spec}_m A$ , значение которой в точке  $\mathfrak{m} \in \text{Spec}_m A$  равно  $a \pmod{\mathfrak{m}} \in A/\mathfrak{m} = \mathbb{k}$ . Это даёт гомоморфизм из алгебры  $A$  в алгебру функций на спектре со значениями в  $\mathbb{k}$ . Но так как в  $\mathbb{k}$  нет нильпотентов, все нильпотентны алгебры  $A$  при этом гомоморфизме переходят в тождественно нулевые функции на спектре. Нильпотентные элементы алгебры  $A$  образует идеал<sup>1</sup>

$$\mathfrak{n}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \{a \in A \mid \exists n \in \mathbb{N} : a^n = 0\}, \quad (5-3)$$

который называется *нильрадикалом* алгебры  $A$ . Из предыдущего следует, что нильрадикал  $\mathfrak{n}(A)$  содержится в пересечении всех максимальных идеалов алгебры  $A$  и

$$\text{Spec}_m A = \text{Spec}_m A_{\text{red}}, \quad \text{где } A_{\text{red}} \stackrel{\text{def}}{=} A / \mathfrak{n}(A)$$

(отметим, что алгебра  $A_{\text{red}}$  редуцирована). Если поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто, то пересечение всех максимальных идеалов в  $A_{\text{red}}$  нулевое, ибо оно состоит из функций, тождественно обращающихся в нуль на аффинном алгебраическом многообразии

$$X = \text{Spec}_m A_{\text{red}},$$

и пересечение всех максимальных идеалов в  $A$  совпадает в этом случае с  $\mathfrak{n}(A)$ .

**Упражнение 5.4.** Покажите, что нильрадикал произвольного коммутативного кольца совпадает с пересечением всех простых идеалов этого кольца.

### Определение 5.1

Пара  $(A, \text{Spec}_m A)$ , где  $A$  — произвольная (не обязательно приведённая) конечно порождённая алгебра над алгебраически замкнутым полем, называется *аффинной геометрической схемой*. Регулярный морфизм геометрических схем  $F : (A, \text{Spec}_m A) \rightarrow (B, \text{Spec}_m B)$  определяется как пара  $F = (\varphi, \varphi^*)$ , где  $\varphi^* : B \rightarrow A$  — гомоморфизм  $\mathbb{k}$ -алгебр, а

$$\varphi = \varphi^{**} : \text{Spec}_m A \rightarrow \text{Spec}_m B$$

индуктированный им регулярный морфизм спектров<sup>2</sup>, переводящий точку  $\text{ev} : A \rightarrow \mathbb{k}$  в точку  $\text{ev} \circ \varphi^* : B \rightarrow \mathbb{k}$ .

Интуитивно, аффинная геометрическая схема — это аффинное алгебраическое многообразие  $X = \text{Spec}_m A_{\text{red}}$ , кольцо регулярных функций которого расширено при помощи идеала нильпотентов, кодирующих те или иные «инфinitезимальные» геометрические характеристики  $X$ .

### Пример 5.5 (пересечения)

Определим пересечение аффинных многообразий  $X, Y \subset \mathbb{A}^n$  как геометрическую схему, заданную объединением всех уравнений, задающих  $X$  и  $Y$ :  $X \cap Y \stackrel{\text{def}}{=} V(I(X) + J(Y))$ . Если

<sup>1</sup>т. к.  $a^n = b^m = 0 \Rightarrow (a - b)^{m+n-1} = 0$

<sup>2</sup>подчеркнём, что морфизм геометрических схем полностью определяется гомоморфизмом алгебр, но, вообще говоря, не определяется регулярным морфизмом подлежащих спектров

пересечение не трансверсально, фактор алгебра  $A = \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]/(I(X) + J(X))$  не является приведённой. Например, если  $X, Y \subset \mathbb{A}^2$  заданы уравнениями  $y - x^2 = 0$  и  $y = 0$ , то  $A = \mathbb{k}[x, y]/(y - x^2, y) \simeq \mathbb{k}[x]/(x^2)$  не приведена, а само пересечение в этом случае естественно считать *двойной* точкой  $x = y = 0$  (теоретико множественно совпадающей со  $\text{Spec}_m A_{\text{red}}$ ). В общем случае, пересечение  $X \cap Y$  как множество тоже исчерпывается точками аффинного алгебраического многообразия  $\text{Spec}_m A_{\text{red}}$ , но заменяя пару  $(A, \text{Spec}_m A)$  на  $\text{Spec}_m A$  мы можем потерять важную информацию о характере пересечения. В частности, если мы хотим развить, скажем, теорию *кратностей пересечений*, мы должны рассматривать пересечения именно как *схемы*, а не только как алгебраические многообразия. Это формализуется при помощи следующей конструкции.

**5.2.1. Послойные произведения.** Пусть даны два семейства  $Y_1 \xrightarrow{\pi_1} X, Y_2 \xrightarrow{\pi_2} X$  алгебраических многообразий над  $X$  (см. прим. 5.1). Их *послойное* (или *расслоенное*) произведение над  $X$  представляет собой семейство над  $X$ , каждый слой которого является произведением соответствующих слоёв семейств  $Y_1$  и  $Y_2$ .

С алгебраической точки зрения, конструкция послойного произведения в категории геометрических схем двойственна тензорному произведению алгебр, но не над основным полем  $\mathbb{k}$ , а над некоторой  $\mathbb{k}$ -алгеброй. Точнее, пусть  $X = \text{Spec}_m K, Y_i = \text{Spec}_m A_i$ , где  $K, A_1, A_2$  суть конечно порождённые  $\mathbb{k}$ -алгебры. Наличие на  $Y_i$  структуры семейства  $\pi_i : Y_i \rightarrow X$  над  $X$  двойственна наличию на  $A_i$  структуры  $K$ -алгебры, задаваемой гомоморфизмом поднятия  $\pi_i^* : K \rightarrow A_i$ . Тензорное произведение над алгеброй  $K$

$$A_1 \underset{K}{\otimes} A_2$$

определяется как фактор алгебры  $A_1 \underset{K}{\otimes} A_2$  по идеалу, порождённому всеми разностями  $(\kappa a_1) \otimes a_2 - a_1 \otimes (\kappa a_2)$  с  $\kappa \in K$  и  $a_i \in A_i$ .

**Упражнение 5.5.** Проверьте, что  $A_1 \underset{K}{\otimes} A_2$  является *копроизведением* в категории  $K$ -алгебр, т. е. удовлетворяет в этой категории универсальными свойствами, перечисленными перед упр. 4.5 на стр. 107.

На геометрическом языке универсальные свойства копроизведения над  $K$  означают, что геометрическая схема

$$Y_1 \underset{X}{\times} Y_2 = \left( A_1 \underset{K}{\otimes} A_2, \text{Spec}_m (A_1 \underset{K}{\otimes} A_2)_{\text{red}} \right) \quad (5-4)$$

обладает следующим универсальным свойством: для любого семейства  $f : Z \rightarrow X$  над  $X$  и любых двух морфизмов семейств  $g_1 : Z \rightarrow Y_1$  и  $g_2 : Z \rightarrow Y_2$  над  $X$  существует единственный морфизм семейств  $g_1 \underset{X}{\times} g_2 : Z \rightarrow Y_1 \underset{X}{\times} Y_2$  над  $X$ , такой что  $g_i = \alpha_i \circ (g_1 \underset{X}{\times} g_2)$  для  $i = 1, 2$ .

Подчеркнём, что в отличие от «абсолютных» произведений над основным полем  $\mathbb{k}$  произведения над  $\mathbb{k}$ -алгеброй  $K$  могут содержать нильпотенты даже тогда, когда оба сомножителя редуцированы. В таких ситуациях послойное произведение многообразий  $Y_1 \underset{X}{\times} Y_2$  по умолчанию всегда рассматривается как *геометрическая схема* (5-4) со структурной алгеброй  $\mathbb{k}[Y_1] \underset{k[X]}{\otimes} k[Y_2]$ .

**5.2.2. Замена базы, схемное пересечение и схемный прообраз.** Любое семейство  $\pi : Y \rightarrow X$  можно поднять вдоль произвольного морфизма<sup>1</sup>  $f : X' \rightarrow X$  до семейства

$$f^*(\pi) : Y \times_X X' \rightarrow X' ,$$

что изображается коммутативной диаграммой замены базы

$$\begin{array}{ccc} Y \times_X X' & \longrightarrow & Y \\ f^*(\pi) \downarrow & & \downarrow \pi \\ X' & \xrightarrow{f} & X \end{array}$$

В геометрии и топологии эта процедура называется *заменой базы*. В алгебре и теории представлений она больше известна как *расширение скаляров*<sup>2</sup> или *индукрование*.

Подъём произвольного семейства  $f : Y \rightarrow X$  вдоль замкнутого вложения  $\varphi : Z \hookrightarrow X$ , т. е. замена базы

$$f^*(\varphi) : Y \times_Z Z \rightarrow Z ,$$

обычно называется *схемным ограничением* семейства  $Y$  на замкнутое подмногообразие  $Z \subset X$ . То же самое послойное произведение, но со структурой семейства, задаваемой другой<sup>3</sup> проекцией

$$f^*(\varphi) : Z \times_X Y \hookrightarrow Y ,$$

обычно называется *схемным прообразом* замкнутого подмногообразия  $Z \subset X$  относительно морфизма  $f : Y \rightarrow X$ .

Если  $X$  аффинно, а  $Z$  задано идеалом  $I \subset k[X]$ , то геометрически  $f^*(\varphi) : Z \times_X Y \hookrightarrow Y$  представляет собою замкнутое вложение  $\text{Spec}_m \left( (k[X]/I) \otimes_{k[X]} k[Y] \right)_{\text{red}}$  в  $Y$ , отождествляющее  $f^{-1}(Z)$  с множеством нулей идеала, порождённого  $f^*(I)$ . При этом структурная алгебра  $(k[X]/I) \otimes_{k[X]} k[Y]$ , вообще говоря, не приведена.

Например, схемный прообраз полукубической параболы  $Z \subset \mathbb{A}_2$ , заданной уравнением  $y^2 = x^3$  вдоль отображения

$$\mathbb{A}_1 \xrightarrow{t \mapsto (t, t^2)} \mathbb{A}_2 ,$$

образ которого — парабола  $y = x^2$ , состоит из двух точек  $t = 0$  и  $t = 1$ , но снабжается неприведённой структурной алгеброй  $\mathbb{k}[t] \otimes_{\mathbb{k}[x,y]} (\mathbb{k}[x,y]/(y^2 - x^3)) = \mathbb{k}[t]/(t^4 - t^3)$ , т. к.  $x$  и  $y$  действуют на  $\mathbb{k}[t]$  как  $t$  и  $t^2$ .

<sup>1</sup>хотя термины «семейство» и «морфизм» математически означают одно и то же, мы умышленно используем тут разные слова, чтобы подчеркнуть различие в *геометрическом смысле* этих отображений; важно однако понимать, что с *алгебраической* точки зрения они совершенно симметричны

<sup>2</sup>таков, например, переход от  $\mathbb{R}$ -алгебры  $V$  к её комплексификации  $\mathbb{C} \times_{\mathbb{R}} V$

<sup>3</sup>т. е. рассматриваемое как подъём замкнутого вложения  $f$  вдоль произвольного морфизма  $\varphi$

**5.3. Замкнутые морфизмы.** Регулярный морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  называется *замкнутым*, если  $\varphi(Z) \subset Y$  замкнуто для любого замкнутого  $Z \subset X$ . Любое замкнутое вложение замкнуто. Из лем. 4.11 вытекает, что всякий конечный морфизм аффинных многообразий замкнут.

**Лемма 5.1**

Проекция  $\pi : \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$  замкнута.

**Доказательство.** Зафиксируем однородные координаты  $t$  на  $\mathbb{P}_n$  и аффинные координаты  $x$  на  $\mathbb{A}^n$ . Замкнутое подмножество  $X \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$  задаётся некоторой системой полиномиальных уравнений  $f_\nu(t, x) = 0$  (однородных по  $t$ ). Его образ  $\pi(X) \subset \mathbb{A}^n$  состоит из всех точек  $p$ , при подстановке которых вместо  $x$  будет получаться система однородных уравнений  $f_\nu(t, p) = 0$  на  $t$ , задающая непустое подмногообразие в  $\mathbb{P}_n$ . Как мы видели в п° 4.2.1, последнее условие равносильно тому, что коэффициенты форм  $f_\nu(t, p)$ , являющиеся полиномами от  $p$ , удовлетворяют системе результантных полиномиальных уравнений.  $\square$

**Следствие 5.1**

Если многообразие  $X$  проективно, то проекция  $X \times Y \rightarrow Y$  замкнута для любого многообразия  $Y$ .

**Доказательство.** Ограничиваюсь аффинными картами в  $Y$ , мы можем считать  $Y$  аффинным. Тогда  $X \times Y$  является замкнутым подмногообразием в  $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ , и наша проекция получается ограничением замкнутой проекции  $\mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^n$  на замкнутое подмножество  $X \times Y \subset \mathbb{P}_m \times \mathbb{A}^n$ .  $\square$

**Следствие 5.2**

Если  $X$  проективно, а  $Y$  отдельимо, то любой морфизм  $\varphi : X \rightarrow Y$  замкнут.

**Доказательство.** Для каждого замкнутого  $Z \subset X$  произведение  $Z \times Y$  замкнуто в  $X \times Y$ . Поскольку  $Y$  отдельимо, график  $\Gamma_\varphi \subset X \times Y$  тоже замкнут. Но  $\varphi(Z)$  есть образ  $\Gamma_\varphi \cap (Z \times Y)$  при проекции  $X \times Y \rightarrow Y$ , которая замкнута.  $\square$

**Следствие 5.3**

Любое регулярное отображение из связного проективного многообразия  $X$  в любое аффинное многообразие постоянно (стягивает  $X$  в одну точку). В частности,  $\mathcal{O}_X(X) = \mathbb{k}$ .

**Доказательство.** Достаточно рассмотреть отображения  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{A}^n$ . Беря композицию такого отображения с координатными формами  $x_i : \mathbb{A}^n \rightarrow \mathbb{A}^1$ , мы сводим утверждение к случаю  $n = 1$ . Отождествляя  $\mathbb{A}^1$  с аффинной картой на  $\mathbb{P}_1$ , получаем регулярное несюръективное отображение  $X \rightarrow \mathbb{P}_1$ , образ которого замкнут и связан, т. е. является одной точкой.  $\square$

**5.3.1. Конечные морфизмы.** Регулярный морфизм алгебраических многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$  называется *конечным*, если прообраз  $W = \varphi^{-1}(U)$  любой аффинной карты  $U \subset Y$  является аффинной картой на  $X$ , и ограничение  $\varphi_w : W \rightarrow U$  является конечным морфизмом аффинных многообразий в смысле п° 4.5.3 на стр. 112. Из лем. 4.11 на стр. 112 следует, что каждый конечный морфизм замкнут и ограничение конечного морфизма

на замкнутое подмногообразие  $Z \subset X$  также является конечным морфизмом. Более того, если  $X$  неприводимо, то собственное замкнутое подмножество  $Z \subset X$  переходит в *собственное* замкнутое подмножество  $Y$ .

**Пример 5.6 (проекция из точки на гиперплоскость)**

Проекция любого проективного многообразия  $X \subset \mathbb{P}_n$  из любой точки  $p \notin X$  на любую гиперплоскость  $H \ni p$  является конечным морфизмом. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим аффинную карту  $U \subset H$  и зафиксируем на  $\mathbb{P}_n$  однородные координаты  $(t_0 : t_1 : \dots : t_n)$ , в которых

$$\begin{aligned} p &= (1 : 0 : \dots : 0) \\ H &= \{(0 : q_1 : \dots : q_n)\} \\ U &= \{u = (0 : u_1 : \dots : u_{n-1} : 1)\} \end{aligned}$$

(как в прим. 5.2 на стр. 120). Поскольку  $p \notin X$ , прообраз  $Y = \pi_p^{-1}(U) \subset X$  лежит внутри проколотого конуса над  $U$  с выколотой вершиной  $p$ , который изоморден как алгебраическое многообразие аффинному пространству  $\mathbb{A}^n = U \times \mathbb{A}^1$ . Изоморфизм задаётся ограничением на проколотый конус морфизма раздутья  $\mathcal{B}_p \xrightarrow{\sigma_p} \mathbb{P}_n$  и в терминах координат представляет собою подстановку  $t = \vartheta p + u$ , где  $\vartheta \in \mathbb{A}^1$ ,  $u \in U$ . Если  $X$  задаётся системой однородных уравнений  $f_\nu(t) = 0$ , то в аффинных координатах  $(u, \vartheta)$  на  $U \times \mathbb{A}^1$  прообраз  $Y = \pi_p^{-1}(U)$  будет описываться уравнениями

$$f_\nu(\vartheta p + u) = \alpha_0^{(\nu)}(u) \vartheta^m + \alpha_1^{(\nu)}(u) \vartheta^{m-1} + \dots + \alpha_m^{(\nu)}(u) = 0. \quad (5-5)$$

Тем самым,  $Y$  является аффинным алгебраическим многообразием. Чтобы убедиться в том, что алгебра  $\mathbb{k}[Y] = \mathbb{k}[u][\vartheta] / (f_\nu(\vartheta p + u))$  конечно порождена как  $\mathbb{k}[u]$ -модуль, достаточно найти в идеале, порождённом уравнениями (5-5), хотя бы одно уравнение со старшим коэффициентом  $\alpha_0(u) \equiv 1$  (ибо тогда после факторизации по одному только этому уравнению мы уже получим конечно порождённый  $\mathbb{k}[u]$ -модуль).

Существование такого уравнения означает, что идеал, порождённый в  $\mathbb{k}[u]$  старшими коэффициентами  $\alpha_0^{(\nu)}(u)$  всех уравнений (5-5), содержит единицу, что по теореме Гильберта равносильно отсутствию у многочленов  $\alpha_0^{(\nu)}(u)$  общих нулей в  $U$ . Но если бы такой общий нуль  $u_0$  существовал, то однородные версии уравнений<sup>1</sup> (5-5):

$$f_\nu(\vartheta_0 p + \vartheta_1 u_0) = \alpha_0^{(\nu)}(u_0) \vartheta_0^m + \alpha_1^{(\nu)}(u_0) \vartheta_0^{m-1} \vartheta_1 + \dots + \alpha_m^{(\nu)}(u_0) \vartheta_1^m = 0$$

имели бы общий корень  $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$  над точкой  $u_0 \in U$ . Но эти однородные уравнения описывают  $X \cap (pu_0)$  в терминах однородных координат  $(\vartheta_0 : \vartheta_1)$  на прямой  $(pu_0) = \{\vartheta_0 p + \vartheta_1 u_0\}$ , и корень  $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (1 : 0)$  отвечает самой точке  $p$ , которая не лежит в  $X$ .

**Упражнение 5.6.** Проверьте, что композиция конечных морфизмов конечна и докажите, что каждое проективное многообразие допускает конечный сюръективный морфизм на проективное пространство.

<sup>1</sup>они получаются подстановкой  $t = \vartheta_0 p + \vartheta_1 u$  в уравнения, описывающие  $X$  в  $\mathbb{P}_n$ , и связаны с уравнениями (5-5) подстановкой  $(\vartheta_0 : \vartheta_1) = (\vartheta : 1)$

**Следствие 5.4**

Каждое аффинное многообразие  $X$  допускает конечный сюръективный морфизм на аффинное пространство.

**Доказательство.** Пусть  $X \subsetneq \mathbb{A}^n$ , где  $\mathbb{A}^n$  вложено в  $\mathbb{P}_n$  как стандартная карта  $U_0$ . Положим  $H_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}_n \setminus U_0$  и обозначим через  $\bar{X} \subset \mathbb{P}_n$  проективное замыкание аффинного многообразия  $X$ . Проекция  $\bar{X}$  из любой точки  $p \in H_\infty \setminus \bar{X}$  на любую гиперплоскость  $L \ni p$ , видимую в аффинной карте  $U$  как  $\mathbb{A}^{n-1} = L \cap H_\infty$ , индуцирует конечный морфизм из  $X = \bar{X} \cap H_\infty$  в это  $\mathbb{A}^{n-1}$  (видимый в аффинной карте  $U$  как параллельная проекция в направлении вектора  $p$ ). Если он окажется не сюръективным, повторим процедуру.  $\square$

**5.4. Размерность.** Максимальное  $n \in \mathbb{N}$ , для которого существует цепочка неприводимых замкнутых подмножеств

$$\{x\} = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \dots \subsetneq X_{n-1} \subsetneq X_n \subset X, \quad (5-6)$$

называется *размерностью* алгебраического многообразия  $X$  в данной точке  $x \in X$  и обозначается через  $\dim_x X$ . Разумеется, когда  $X$  неприводимо, во всякой такой максимальной цепочке мы будем иметь  $X_n = X$ . Если же  $X$  приводимо, то  $\dim_x X$  равна максимуму из размерностей всех проходящих через  $x$  неприводимых компонент.

**Упражнение 5.7.** Покажите, что  $\dim_p X = \dim_p U$  для каждой аффинной карты  $U \ni p$ .

**Упражнение 5.8.** Для любого сюръективного морфизма неприводимых многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$  и любой точки  $x \in X$  докажите неравенство  $\dim_x X \geq \dim_{\varphi(x)} Y$ .

**Предложение 5.1**

Пусть  $\varphi : X \rightarrow Y$  — конечный морфизм неприводимых многообразий, и  $x \in X$ . Тогда  $\dim_x X \leq \dim_{\varphi(x)} Y$  и равенство равносильно тому, что  $\varphi(X) = Y$ .

**Доказательство.** Согласно упр. 5.7 достаточно считать  $X$  и  $Y$  аффинными. Утверждение из лем. 4.11 показывает, что каждая цепочка (5-6) в  $X$  порождает цепочку

$$\dots \subsetneq \varphi(X_i) \subsetneq \varphi(X_{i+1}) \subsetneq \dots$$

строго вложенных замкнутых неприводимых подмногообразий в  $Y$ , что даёт нужное нам неравенство. В случае  $\varphi(X) = Y$  упр. 5.8 даёт противоположное неравенство.  $\square$

**Следствие 5.5**

$\dim_p \mathbb{A}^n = n$  в любой точке  $p \in \mathbb{A}^n$ .

**Доказательство.** Ясно, что  $\dim \mathbb{A}^0 = 0$  и  $\forall p \in \mathbb{A}^n \dim_p \mathbb{A}^n \geq n$ , поскольку имеется цепочка вида (5-6), образованная проходящими через  $p$  аффинными подпространствами. Неравенство  $\dim_p \mathbb{A}^n \leq n$  получается по индукции: последний отличный от  $\mathbb{A}_n$  элемент цепочки (5-6) допускает конечный сюръективный морфизм на собственное аффинное подпространство в  $\mathbb{A}_n$ , и поэтому по индукции его размерность (а значит, и его номер в цепочке) строго меньше  $n$ .  $\square$

**Следствие 5.6**

Пусть  $X$  — неприводимое аффинное многообразие и  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{A}^m$  — сюръективный конечный морфизм. Тогда  $\dim_p X = m$  в каждой точке  $p \in X$ . В частности,  $m$  не зависит от выбора  $\varphi$ , а  $\dim_p X$  одна и та же для всех  $p \in X$ .

**5.4.1. Размерность как степень трансцендентности.** Пусть  $X$  — неприводимое аффинное многообразие. Конечная сюръекция  $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}^m$  из следствия сл. 5.4 соответствует целому расширению  $\mathbb{k}[X] \supset \mathbb{k}[u_1, u_2, \dots, u_m] = \mathbb{k}[\mathbb{A}^m]$ . Таким образом, аффинные координатные функции  $u_1, u_2, \dots, u_n$  образуют базис трансцендентности  $\mathbb{k}[X]$  над  $\mathbb{k}$  и  $\dim X$  равна степени трансцендентности  $\mathbb{k}[X]$  над  $\mathbb{k}$ .

Упражнение 5.9. Докажите, что  $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$  для любых неприводимых многообразий  $X, Y$ .

Упражнение 5.10. Пусть  $f \in \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$  неприводим и не константа. Покажите, что  $\dim V(f) = (n - 1)$  в  $\mathbb{A}^n$ .

**5.4.2. Размерности подмногообразий.** Если многообразие  $X$  приводимо, скажем, является объединением двух неприводимых компонент  $X = X_1 \cup X_2$  одинаковой размерности, то непостоянная функция  $f$ , зануляющаяся сразу на целой компоненте, допустим, на  $X_1$ , задаёт в  $X$  гиперповерхность той же размерности, что и само  $X$ .

Обращение функции  $f$  в нуль на неприводимой компоненте аффинного многообразия  $X$  равносильно тому, что  $f$  является делителем нуля в  $\mathbb{k}[X]$ . Последовательность необратимых функций  $f_1, f_2, \dots, f_m \in \mathbb{k}[X]$  называется *регулярной*, если ни при каком  $i$  функция  $f_i (\text{mod}(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})) \in \mathbb{k}[X]/(f_1, f_2, \dots, f_{i-1}) = \mathbb{k}[V(f_1, f_2, \dots, f_{i-1})]$  не делит нуль в этой фактор алгебре. В регулярной последовательности уравнений на аффинном многообразии  $X$  никакое из уравнений  $f_i$  не зануляется тождественно ни на одной из неприводимых компонент подмногообразия  $V(f_1, f_2, \dots, f_{i-1}) \subset X$ . В этом случае добавление каждого нового уравнения уменьшает размерность такого подмногообразия в точности на единицу, как показывает

Предложение 5.2

Если  $X$  неприводимо, то  $\dim_p V(f) = \dim_p(X) - 1$  для любой непостоянной регулярной функции  $f \in \mathcal{O}_X(X)$  и любой точки  $p \in V(f)$ .

Доказательство. Мы можем предполагать  $X$  аффинным. Фиксируем некоторую конечную сюръекцию  $\pi : X \rightarrow \mathbb{A}^m$  и рассмотрим (как при доказательстве лем. 4.12) отображение

$$\varphi = \pi \times f : X \xrightarrow{x \mapsto (\pi(x), f(x))} \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1.$$

Оно конечно и сюръективно отображает  $X$  на аффинную гиперповерхность

$$V(\mu_f) \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1,$$

уравнением которой является минимальный многочлен функции  $f$  над полем  $\mathbb{k}(\mathbb{A}^m)$ :

$$\mu_f(u, t) = t^n + \alpha_1(u)t^{n-1} + \dots + \alpha_n(u) \in \mathbb{k}[u_1, u_2, \dots, u_m][t].$$

Теперь  $V(f) = \varphi^{-1}(H \cap V(\mu_f))$ , где  $H \subset \mathbb{A}^m \times \mathbb{A}^1$  — гиперплоскость, заданная уравнением  $t = 0$ . Пересечение  $H \cap V(\mu_f)$  является в аффинном пространстве  $H = \mathbb{A}^m$  гиперповерхностью, заданной уравнением  $\alpha_n(u) = 0$ , и согласно упр. 5.10, имеет размерность  $m - 1$ . Остаётся применить предл. 5.1 к конечной сюръекции  $\varphi|_{V(f)} : V(f) \rightarrow V(\alpha_n)$ .  $\square$

Следствие 5.7

На произвольном многообразии  $X$  для любого  $f \in \mathbb{k}[X]$  в каждой точке  $p \in V(f)$  выполнено неравенство  $\dim_p V(f) \geq \dim_p(X) - 1$ .

**Следствие 5.8**

Для любых замкнутых аффинных многообразий  $X_1, X_2 \subset \mathbb{A}^n$  в каждой точке  $x \in X_1 \cap X_2$  выполняется неравенство  $\dim_x(X_1 \cap X_2) \geq \dim_x(X_1) + \dim_x(X_2) - n$ .

**Доказательство.** Пусть  $\varphi_1 : X_1 \rightarrow \mathbb{A}^n$  и  $\varphi_2 : X_2 \rightarrow \mathbb{A}^n$  — замкнутые вложения. Тогда  $X_1 \cap X_2$  является прообразом диагонали  $\Delta \subset \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$  при отображении  $\varphi_1 \times \varphi_2 : X_1 \times X_2 \hookrightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ . Внутри  $X_1 \times X_2$  он задаётся  $n$  уравнениями  $(\varphi_1 \times \varphi_2)^*(x_i) = (\varphi_1 \times \varphi_2)^*(y_i)$ , которые являются поднятиями линейных уравнений  $x_i = y_i$ , задающих диагональ  $\Delta$  в  $\mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^n$ . Осталось применить сл. 5.7.  $\square$

**Следствие 5.9**

Если замкнутые проективные многообразия  $X_1, X_2 \subset \mathbb{P}_n$  удовлетворяют неравенству  $\dim(X_1) + \dim(X_2) \geq n$ , то  $X_1 \cap X_2 \neq \emptyset$ .

**Доказательство.** Пусть  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ . Рассмотрим в  $\mathbb{A}^{n+1} = \mathbb{A}(V)$  аффинные конусы  $X'_1, X''_2$  образованные одномерными векторными подпространствами в  $V$ , составляющими точки проективных многообразий  $X_1$  и  $X_2$  (эти конусы имеют те же самые уравнения, что и  $X_1, X_2$ , но только теперь эти уравнения рассматриваются как аффинные). По предыдущему утверждению  $\dim_o(X'_1 \cap X''_2) \geq \dim_o(X_1) + 1 + \dim_o(X_2) + 1 - n - 1 \geq 1$ . Таким образом,  $X'_1 \cap X''_2$  не исчерпывается точкой  $O$ .  $\square$

**5.4.3. Размерности слоёв регулярных морфизмов.** В алгебраической геометрии, в отличие от дифференциальной геометрии и топологии, размерность прообраза при регулярном отображении контролируется почти столь же жёстко, как в линейной алгебре.

**Теорема 5.1**

Для любого доминантного морфизма  $\varphi : X \rightarrow Y$  неприводимых алгебраических многообразий в каждой точке  $x \in X$  выполняется неравенство  $\dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geq \dim X - \dim Y$  и существует плотное открытое подмножество  $U \subset Y$ , над которым

$$\dim_x \varphi^{-1}(y) = \dim_x X - \dim_y Y$$

в каждой точке  $x \in \varphi^{-1}(y)$  для всех  $y \in U$ .

**Доказательство.** Беря композицию  $\varphi$  с конечным сюръективным морфизмом какой-нибудь аффинной окрестности точки  $\varphi(x)$  на пространство  $\mathbb{A}^m$ , мы сводим первое утверждение теоремы к случаю  $Y = \mathbb{A}^m = \text{Spec}_m \mathbb{K}[u_1, u_2, \dots, u_m]$ ,  $\varphi(x) = 0$ . Но тогда  $\varphi^{-1}(0)$  является пересечением  $m$  гиперповерхностей  $V(\varphi^*(u_i)) \subset X$ , и требуемое неравенство получается индуктивным применением сл. 5.7.

В доказательстве второго утверждения мы, не ограничивая общности, можем считать оба многообразия аффинными:  $X = \text{Spec}_m A$ ,  $Y = \text{Spec}_n B$ , а морфизм  $\varphi$  — ограничением проекции  $\pi : Y \times \mathbb{A}^m \rightarrow Y$  на замкнутое подмногообразие  $X \subset Y \times \mathbb{A}^m$  (см. разложение (4-14) из упр. 4.10 на стр. 112). Мы собираемся применить к слоям этой проекции следствие сл. 5.4.

Для этого рассмотрим проективное замыкание  $\bar{X} \subset Y \times \mathbb{P}_m$ , выберем гиперплоскость  $H \subset \mathbb{P}_m$  и точку  $p \in \mathbb{P}_m \setminus H$  так, чтобы сечение  $Y \times \{p\} \subset Y \times \mathbb{P}_m$  не содержалось в  $\bar{X}$ . Тогда послойная проекция из  $p$  на  $H$  будет удовлетворять условиям прим. 5.6 во всех слоях, расположенных над открытым подмножеством  $U \subset Y$ , дополнительным к  $\bar{\pi}((Y \times \{p\}) \cap \bar{X})$ ,

где  $\bar{\pi} : Y \times \mathbb{P}_m \rightarrow Y$  — проекция вдоль  $\mathbb{P}_m$ . Таким образом, заменяя  $Y$  его открытым подмножеством  $U$  (которое можно выбрать главным, т. е. тоже аффинным), мы можем повторить рассуждения из сл. 5.4 послойно (одновременно во всех слоях проекции  $\pi$ ) и построить конечную сюръекцию  $\psi : X \rightarrow Y \times \mathbb{A}^n$ , ограничение которой на каждый слой  $\varphi^{-1}(y)$  конечно и эпиморфно отображает  $\varphi^{-1}(y)$  на  $\{y\} \times \mathbb{A}^n$ . Конечность  $\psi$  влечёт равенство  $n = \dim X - \dim Y$ , а конечность его ограничений на слоях — равенство  $\dim_x \varphi^{-1}(y) = n$ .  $\square$

**Следствие 5.10 (теорема Шевалле о полуунпрерывности)**

Для любого морфизма алгебраических многообразий  $\varphi : X \rightarrow Y$  множества

$$X_k \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in X \mid \dim_x \varphi^{-1}(\varphi(x)) \geq k\}$$

замкнуты в  $X$  при всех  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Доказательство.** Мы можем предполагать  $X$  и  $Y$  неприводимыми. Если  $\dim Y = 0$  (т. е.  $Y$  — точка) теорема тривиально верна для всех  $k$ . Пусть теперь  $\dim Y = m$  и для всех  $Y$  меньшей размерности теорема верна при всех  $k$ . Покажем, что она верна для  $Y$ . Если  $k \leq \dim(X) - \dim(Y)$ , то  $X_k = X$  по предыдущей теореме. Для  $k > \dim(X) - \dim(Y)$  заменим  $Y$  на  $Y' = Y \setminus U$ , где  $U$  взято из теор. 5.1, а  $X$  — на  $X' = \varphi^{-1}(Y')$ . Тогда  $X_k \subset X'$ ,  $\dim Y' < \dim Y$ , и применимо индуктивное предположение.  $\square$

**Следствие 5.11**

Для любого замкнутого морфизма  $\varphi : X \rightarrow Y$  множество  $Y_k \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in Y \mid \dim \varphi^{-1}(y) \geq k\}$  замкнуто в  $Y$  при всех  $k \in \mathbb{Z}$ .

**Теорема 5.2 (размерностный критерий неприводимости)**

Пусть  $\varphi : X \rightarrow Y$  — замкнутый эпиморфизм с неприводимыми слоями одной и той же размерности. Если  $Y$  неприводимо, то  $X$  также неприводимо.

**Доказательство.** Пусть  $X = X_1 \cup X_2$  приводимо. Каждый слой  $\varphi$ , будучи неприводимым, должен целиком содержаться либо в  $X_1$ , либо в  $X_2$ , т. е.  $Y = Y_1 \cup Y_2$ , где

$$Y_1 = \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_1\}, \quad Y_2 = \{y \in Y \mid \varphi^{-1}(y) \subset X_2\}.$$

Поскольку и  $X_1$ , и  $X_2$  отличны от  $X$ , оба подмножества  $Y_1, Y_2 \subset Y$  являются собственными. По предыдущему следствию, оба они замкнуты:  $Y_i$  можно описать как множество точек в  $Y$ , над которыми слои ограничения  $X_i \rightarrow Y$  имеют максимально возможную размерность. Значит,  $Y$  тоже приводимо.  $\square$

**5.5. Рабочий пример: прямые на поверхностях.** Мы хотим изучить множество прямых, лежащих на данной поверхности  $S \subset \mathbb{P}_3$  заданной степени  $d$ .

**Упражнение 5.11.** Опишите это множество для  $d = 2$ , т. е. когда  $S$  — квадрика (рассмотрите все возможные значения  $\text{rk } S$ ).

Для произвольно заданного  $d$  множество всех поверхностей степени  $d$  в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$  представляет собою проективное пространство  $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$ . Множество всех прямых в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$  представляет собою грассманнан  $\text{Gr}(2, 4) = \text{Gr}(2, V)$ , который можно отождествить с квадрикой Плюккера  $Q_P \subset \mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ . Обозначим через

$$\Gamma \stackrel{\text{def}}{=} \{(S, \ell) \in \mathbb{P}_N \times Q_P \mid \ell \subset S\} \subset \mathbb{P}_N \times Q_P$$

множество инцидентности между прямыми и поверхностями.

**Предложение 5.3**

$\Gamma$  является замкнутым подмногообразием в  $\mathbb{P}_N \times Q_P$ .

**Доказательство.** Линейная оболочка векторов  $u, w \in V$  является образом (удвоенного) отображения свёртки  $V^* \rightarrow V$ , переводящего  $\xi \in V^*$  в  $\partial_\xi(u \wedge w) = (\xi, u \otimes w - w \otimes u)$ . Поэтому прямая  $\ell = (uw)$  лежит на поверхности  $S$ , заданной уравнением  $F = 0$ , тогда и только тогда, когда  $F(\partial_\xi(u \wedge w)) = 0$  тождественно по  $\xi \in V^*$ . Пусть векторы  $e_\nu$  образуют базис в  $V$ . Обозначим через  $\xi_\nu$  координаты ковектора  $\xi$  в двойственном базисе пространства  $V^*$ , и пусть  $u = \sum u_i e_i$ ,  $w = \sum v_i e_i$ . Тогда  $u \wedge w = \sum_{\mu \neq \nu} p_{\mu\nu} e_\mu \wedge e_\nu$ , где  $p_{\mu\nu} = -p_{\nu\mu} = (u_\mu v_\nu - u_\nu v_\mu)$  суть плюккеровы координаты на  $\mathbb{P}_5 = \mathbb{P}(\Lambda^2 V)$ , и

$$\partial_\xi(u \wedge w) = \sum_\eta \sum_{\mu \neq \nu} \xi_\eta p_{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial e_\eta} (e_\mu \wedge e_\nu) = \sum_\nu \left( \sum_{\mu \neq \nu} p_{\mu\nu} \xi_\mu \right) \cdot e_\nu .$$

Подставим  $x_\nu = \sum_{\mu \neq \nu} p_{\mu\nu} \xi_\mu$  в  $F(x)$  и разложим результат по степеням  $\xi$ . Условие

$$F(\partial_\xi(u \wedge w)) \equiv 0$$

означает, что все коэффициенты этого разложения равны нулю, что и даёт явную систему полиномиальных уравнений на коэффициенты  $F$  и плюккеровы координаты  $p_{ij}$ , описывающую  $\Gamma \subset Q_P$  как замкнутое алгебраическое подмногообразие в  $\mathbb{P}_N \times \mathbb{P}_5$ .  $\square$

**Предложение 5.4**

Проекция  $\pi_2 : \Gamma \rightarrow Q_P$  сюръективна, все её слои являются проективными пространствами размерности  $\frac{1}{6} d(d+1)(d+5) - 1$ , и, тем самым,  $\Gamma$  является неприводимым проективным многообразием размерности  $\frac{1}{6} d(d+1)(d+5) + 3$ .

**Доказательство.** Пусть прямая  $\ell \subset \mathbb{P}(V)$  задана уравнениями  $x_0 = x_1 = 0$ . Тогда  $S \supset \ell$ , если и только если  $S$  задаётся уравнением вида  $x_2 \cdot F_2(x) + x_3 \cdot F_3(x) = 0$ , в котором  $F_2, F_3 \in S^{d-1}V^*$ . Такие уравнения образуют векторное пространство  $W$ , являющееся образом линейного оператора

$$S^{d-1}V^* \oplus S^{d-1}V^* \xrightarrow{(f,g) \mapsto x_2 f + x_3 g} S^d V^* ,$$

ядро которого состоит из всех  $(f, g)$  таких, что  $x_2 f = -x_3 g$ , т. е.  $f = x_3 h$ ,  $g = -x_2 h$  для некоторого  $h \in S^{d-2}V^*$ . Таким образом, ядро изоморфно  $S^{d-2}V^*$ , и

$$\begin{aligned} \dim W &= 2 \dim(S^{d-1}V^*) - \dim(S^{d-1}V^*) = \\ &= \frac{1}{6} \left( 2d(d+1)(d+2) - (d-1)d(d+1) \right) = \frac{1}{6} d(d+1)(d+5). \end{aligned}$$

Неприводимость  $\Gamma$  вытекает из теор. 5.2, а  $\dim \Gamma$  вычисляется по теор. 5.1.  $\square$

**Предложение 5.5**

Общая<sup>1</sup> поверхность  $S_d \subset \mathbb{P}_3$  степени  $d \geq 4$  не содержит прямых.

**Доказательство.** Множество всех поверхностей, содержащих хотя бы одну прямую, совпадает с образом проекции  $\pi_1 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}_N$ . По следствию сл. 5.2 этот образ является замкнутым неприводимым подмногообразием в  $\mathbb{P}_N = \mathbb{P}(S^d V^*)$ . По теореме теор. 5.1, его размерность получается вычитанием из  $\dim \Gamma$  минимума размерностей непустых слоев проекции  $\pi_1$ . В частности, когда  $\dim \Gamma < N$ , образ заведомо является собственным подмногообразием. В развёрнутом виде последнее неравенство выглядит как

$$\frac{1}{6} d(d+1)(d+5) + 3 < \frac{1}{6} (d+1)(d+2)(d+3), \quad (5-7)$$

и выполняется для всех  $d \geq 4$ .  $\square$

**Предложение 5.6**

Каждая кубическая поверхность  $S_3 \subset \mathbb{P}_3$  содержит хотя бы одну прямую, причём для общей кубики множество лежащих на ней прямых конечно.

**Доказательство.** При  $d = 3$  неравенство (5-7) превращается в равенство: в этом случае  $\dim \Gamma = N = 19$ . Чтобы доказать сюръективность проекции  $\pi_1$ , достаточно указать хоть один её непустой нульмерный слой — тогда неприводимое замкнутое подмногообразие  $\pi_1(\Gamma) \subset \mathbb{P}_{19}$  будет 19-мерным, а стало быть, совпадёт со всем  $\mathbb{P}_{19}$ .

Выясним, например, какие прямые лежат на проективном замыкании кубики  $C$  с аффинным уравнением  $xuz = 1$ . В рассматриваемой аффинной части прямых вообще нет, поскольку прямая с параметрическим уравнением  $x = x_0 + \alpha t$ ,  $y = y_0 + \beta t$ ,  $z = z_0 + \gamma t$  лежит на  $C$ , если и только если

$$\begin{cases} \alpha\beta\gamma = 0 \\ \alpha\beta z_0 + \beta\gamma x_0 + \gamma\alpha y_0 = 0 \\ \alpha y_0 z_0 + \beta x_0 z_0 + \gamma x_0 y_0 = 0 \\ x_0 y_0 z_0 = 1 \end{cases}$$

что невозможно<sup>2</sup>. На бесконечности  $C$  задаётся уравнением<sup>3</sup>  $x_1 x_2 x_3 = 0$ , т. е. является объединением трёх прямых  $x_i = x_0 = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ).  $\square$

**Упражнение 5.12.** Найдите все прямые на кубике Ферма  $C_F$ , заданной однородным уравнением  $\sum x_i^3 = 0$ .

**5.5.1. Прямые на гладкой кубике.** Рассмотрим гладкую<sup>4</sup> кубическую поверхность  $S \subset \mathbb{P}_3$ , заданную уравнением  $F(x) = 0$ .

<sup>1</sup>т. е. любая из некоторого плотного по Зарисскому открытого подмножества в пространстве всех гиперповерхностей

<sup>2</sup>скажем,  $\alpha = 0 \Rightarrow (\beta = 0 \text{ или } \gamma = 0) \Rightarrow \beta = \gamma = 0$

<sup>3</sup>мы подставили  $x = x_1/x_0$ ,  $y = x_2/x_0$ ,  $z = x_3/x_0$ , домножили на  $x_0^3$  и положили  $x_0 = 0$

<sup>4</sup>о гладкости проективных гиперповерхностей, а также кастельных и полярах к ним см. в § 3.4.4 на стр. 76 выше

**Предложение 5.7**

Всякое приводимое плоское сечение  $S$  распадается либо в объединение прямой и гладкой коники, либо в объединение трёх различных прямых.

**Доказательство.** Покажем, что плоское сечение  $\pi \cap S$  не может содержать двойную прямую. Если такая двойная прямая  $\ell \subset \pi \cap S$  имеется, возьмем координаты, в которых плоскость  $\pi$  задаётся уравнением  $x_2 = 0$ , а  $\ell$  – уравнениями  $x_2 = x_3 = 0$ . Тогда  $F(x) = x_2 Q(x) + x_3^2 L(x) = 0$  с линейным  $L$  и квадратичным  $Q$ . Прямая  $\ell$  пересекается с квадрикой  $Q(x) = 0$  в некоторой точке  $a$ . Тогда  $x_2(a) = x_3(a) = Q(a) = 0$  и все частные производные  $\partial F / \partial x_i$  равны нулю в точке  $a$ , т. е.  $S$  особы в  $a$ .  $\square$

**Следствие 5.12**

В одной точке поверхности  $S$  может пересекаться не более трёх лежащих на  $S$  прямых, причём все они должны находиться в одной плоскости.

**Доказательство.** Все проходящие через  $p \in S$  прямые, лежащие на  $S$ , принадлежат  $S \cap T_p S$ .  $\square$

**Предложение 5.8**

Для данной прямой  $\ell \subset S$  существуют ровно 5 различных плоскостей  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_5$ , содержащих  $\ell$  и пересекающих  $S$  по тройке прямых. Более того, если  $\pi_i \cap S = \ell \cup \ell'_i \cup \ell''_i$ , то  $\ell'_i \cap \ell_j = \ell_i \cap \ell'_j = \ell'_i \cap \ell''_j = \emptyset \forall i \neq j$  (в частности, на  $S$  есть скрещивающиеся прямые) и любая лежащая на  $S$  прямая, скрещивающаяся с  $\ell$ , при каждом  $i$  пересекает ровно одну из двух прямых  $\ell'_i, \ell''_i$ .

**Доказательство.** Фиксируем базис  $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$  в  $V$  так, что прямая  $\ell = (e_0 e_1)$ , заданная уравнениями  $x_2 = x_3 = 0$ , лежит на  $S$ . Тогда уравнение  $F(x) = 0$ , задающее  $S$ , имеет в этом базисе вид

$$L_{00}(x_2, x_3) \cdot x_0^2 + 2L_{01}(x_2, x_3) \cdot x_0 x_1 + L_{11}(x_2, x_3) \cdot x_1^2 + 2Q_0(x_2, x_3) \cdot x_0 + 2Q_1(x_2, x_3) \cdot x_1 + R(x_2, x_3) = 0, \quad (5-8)$$

где  $L_{ij}, Q_\nu, R \in k[x_2, x_3]$  являются однородными многочленами степени 1, 2, 3 соответственно. Запараметризуем пучок плоскостей, проходящих через  $\ell$ , точками

$$e_\vartheta = \vartheta_2 e_2 + \vartheta_3 e_3 \in (e_2 e_3)$$

и рассмотрим в плоскости  $\pi_\vartheta = (e_0 e_1 e_\vartheta)$  однородные координаты  $(t_0 : t_1 : t_2)$  относительно этих трёх точек. Уравнение плоской коники  $(\pi_\vartheta \cap S) \setminus \ell$  получается подстановкой  $x = (t_0 : t_1 : \vartheta_2 t_2 : \vartheta_3 t_2)$  в уравнение (5-8) с последующим сокращением на общий множитель  $t_2$ . Матрица Грама этой коники в координатах  $(t_0 : t_1 : t_2)$  имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} L_{00}(\vartheta) & L_{01}(\vartheta) & Q_0(\vartheta) \\ L_{01}(\vartheta) & L_{11}(\vartheta) & Q_1(\vartheta) \\ Q_0(\vartheta) & Q_1(\vartheta) & R(\vartheta) \end{pmatrix}$$

а её определитель

$$\begin{aligned} D(\vartheta_2, \vartheta_3) = & L_{00}(\vartheta)L_{11}(\vartheta)R(\vartheta) + 2L_{01}(\vartheta)Q_0(\vartheta)Q_1(\vartheta) - \\ & - L_{11}(\vartheta)Q_0^2(\vartheta) - L_{00}(\vartheta)Q_1^2(\vartheta) - L_{01}(\vartheta)^2R(\vartheta) \in k[\vartheta_2, \vartheta_3] \end{aligned} \quad (5-9)$$

является однородным многочленом от  $\vartheta = (\vartheta_2 : \vartheta_3)$  степени 5, и стало быть, обращается в нуль в пяти точках, учтённых с кратностями. Мы должны показать, что все эти кратности равны единице.

Каждый нуль детерминанта (5-9) соответствует вырождению коники в пару прямых, точка пересечения которых лежит либо на  $\ell$ , либо вне  $\ell$ .

В первом случае мы выберем базис так, чтобы эти две прямые были  $\ell' = (e_0 e_2)$  и  $\ell'' = (e_0 (e_1 + e_2))$  с уравнениями  $x_3 = x_1 = 0$  и  $x_3 = (x_1 - x_2) = 0$ . Такое вырождение отвечает корню  $\vartheta = (1 : 0)$  уравнения  $D(\vartheta_2, \vartheta_3) = 0$ , и кратность этого корня равна наибольшей степени  $\vartheta_3$ , на которую делится  $D(\vartheta_2, \vartheta_3)$ . Поскольку  $\ell, \ell', \ell'' \subset S$ , уравнение (5-8) принимает вид

$$x_1 x_2 (x_1 - x_2) + x_3 \cdot q(x) = 0$$

с квадратичным  $q(x)$ , и единственными элементами  $G$ , не делящимися на  $\vartheta_3$ , могут быть лишь  $L_{11} \equiv x_2 \pmod{\vartheta_3}$  и  $Q_1 \equiv -x_2^2/2 \pmod{\vartheta_3}$ . Таким образом,  $D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{00} Q_1^2 \pmod{\vartheta_3^2}$ , и этот член имеет порядок 1 по  $\vartheta_3$ , если и только если мономы  $x_1 x_2^2$  и  $x_0^2 x_2$  входят в (5-8) с ненулевыми коэффициентами. Но это действительно так, поскольку первый из них — это единственный моном, который вносит ненулевой вклад в  $\partial F / \partial x_1$  в точке  $e_2 \in S$ , а второй — это единственный моном, который вносит ненулевой вклад в  $\partial F / \partial x_2$  в точке  $e_0 \in S$ .

Во втором случае мы выберем базис так, чтобы  $\ell' = (e_0 e_2)$ ,  $\ell'' = (e_1 e_2)$  задавались уравнениями  $x_3 = x_1 = 0$  и  $x_3 = x_0 = 0$ . Этому вырождению отвечает тот же самый корень  $\vartheta = (1 : 0)$ . Теперь (5-8) имеет вид  $x_0 x_1 x_2 + x_3 \cdot q(x) = 0$  и ненулевым по модулю  $\vartheta_3$  элементом  $G$  является только  $L_{01} \equiv x_2/2 \pmod{\vartheta_3}$ . Таким образом,  $D(\vartheta_2, \vartheta_3) \equiv -L_{01}^2 R \pmod{\vartheta_3^2}$  имеет порядок 1 по  $\vartheta_3$ , если и только если мономы  $x_2^2 x_3$  и  $x_0 x_1 x_2$  действительно присутствуют в (5-8). Но если бы второй моном не входил в  $F$ , то  $F$  делится бы на  $x_3$  и кубика была бы приводима (а значит, особа). А первый моном — это единственный моном, дающий ненулевой вклад в  $\partial F / \partial x_3$ , вычисленную в точке  $e_2 \in S$ .

Оставшиеся утверждения о пересечениях прямых вытекают из сл. 5.12, предл. 5.7 и замечания, что каждая прямая в  $\mathbb{P}_3$  пересекает любую плоскость.  $\square$

#### Предложение 5.9

Ни через какие четыре попарно скрещивающиеся прямые, лежащие на  $S$ , нельзя провести квадрику, и для любой такой четвёрки прямых всегда найдётся одна или две (но не более!) прямые, лежащие на  $S$  и пересекающие каждую прямую из четвёрки.

**Доказательство.** Если четыре попарно скрещивающиеся прямые на  $S$  лежат на квадрике, то это — гладкая квадрика Сегре<sup>1</sup>, заметаемая двумя семействами прямых, и наша четвёрка прямых находится в одном из этих семейств. Но тогда все прямые другого семейства (а стало быть, и сама квадрика) лежат на  $S$ , ибо всякая прямая, проходящая через 4 различных точки  $S$ , лежит на  $S$  целиком. Тем самым, поверхность  $S$  приводима, и значит, особа.  $\square$

**5.5.2. Конфигурация 27 прямых.** Зафиксируем на  $S$  пару скрещивающихся прямых  $a, b \subset S$  и построим 5 пар прямых  $\ell_i, \ell'_i$  причём в каждой паре обозначим через  $\ell_i$  ту прямую, которая пересекает  $b$ , а через  $\ell'_i$  — ту, которая скрещивается с  $b$ . Далее, обозначим

<sup>1</sup> см. № 2.4.1 на стр. 42

через  $\ell''_i$  ещё 5 прямых, образующих вместе с прямыми  $\ell_i$  пять пар прямых, ассоциированных согласно утверждению из предл. 5.8 с  $\ell = b$ . Таким образом, каждая из прямых  $\ell''_i$  пересекается с  $b$ , но скрещивается с  $a$  и со всеми  $\ell_j$  с  $j \neq i$ , и стало быть, пересекает все  $\ell'_j$  с  $j \neq i$ .

Любая прямая  $c \subset S$ , отличная от 17 только что названных, скрещивается и с  $a$ , и с  $b$ , но при каждом  $i$  пересекает ровно одну из двух прямых  $\ell_i, \ell'_i$ . Из утверждения предл. 5.9 вытекает, что все лежащие на  $S$  прямые, пересекающие  $\geq 4$  прямых  $\ell_i$ , исчерпываются парой прямых  $a, b$ . С другой стороны, если лежащая на  $S$  прямая  $c$  пересекает  $\leq 2$  прямых  $\ell_i$ , то с точностью до перестановки индексов, мы можем считать, что она пересекает три прямые  $\ell'_1, \ell'_2, \ell'_3$  и ещё либо прямую  $\ell'_4$ , либо  $\ell_5$ . В обоих случаях из утверждения предл. 5.9 вытекает, что  $c$  — это одна из двух прямых  $a, \ell''_5$ .

Итак, всякая лежащая на  $S$  прямая  $c$ , отличная от 17 прямых  $a, b, \ell_i, \ell'_i, \ell''_i$ , пересекает в точности 3 прямые  $\ell_i$ . Покажем, что на  $S$  имеется ровно 10 таких прямых, взаимно однозначно соответствующих  $\binom{5}{3} = 10$  тройкам  $\{i < j < k\} \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . Действительно, для каждой тройки прямых  $\ell_i$  имеется самое большее одна прямая  $c$ , отличная от  $a$ , и пересекающая заданные три прямые  $\ell_i$  и оставшиеся прямые  $\ell'_j$  (поскольку все 5 попарно скрещиваются). С другой стороны, по утверждению предл. 5.8, для каждого  $i$  на  $S$  лежит ровно 10 прямых, пересекающих  $\ell_i$  — это 4 прямых  $a, b, \ell'_i$  и  $\ell''_i$ , а оставшиеся 6 должны, как мы знаем, пересекать ещё ровно две из оставшихся четырёх прямых  $\ell_j$ . Но таких пар и имеется ровно  $\binom{4}{2} = 6$ , что и приводит к требуемому взаимно однозначному соответствию между прямыми  $c$  и тройками  $(i, j, k)$ .

### Теорема 5.3

Каждая гладкая кубическая поверхность  $S \subset \mathbb{P}_3$  содержит ровно 27 прямых, причём комбинаторика их попарных пересечений на всех  $S$  одинакова.  $\square$

**Упражнение 5.13.** Найдите порядок подгруппы  $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{S}_{27}$ , состоящей из всех перестановок 27 прямых, сохраняющих все их попарные пересечения.

**Упражнение 5.14.** Рассмотрим поле из 4 элементов:  $\mathbb{F}_4 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{F}_2[\omega]/(\omega^2 + \omega + 1)$ , где  $\mathbb{F}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

Подобно расширению  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ , расширение  $\mathbb{F}_2 \subset \mathbb{F}_4$  обладает автоморфизмом сопряжения:  $z \mapsto \bar{z} \stackrel{\text{def}}{=} z^2$ , который оставляет на месте подполе  $\mathbb{F}_2$  и переставляет друг с другом пару корней многочлена  $\omega^2 + \omega + 1$ . Покажите, что проективная унитарная группа<sup>1</sup>  $\mathbb{P}\mathrm{U}_4(\mathbb{F}_4)$  канонически вкладывается в группу  $\mathfrak{G}$  из упр. 5.13 как (нормальная) подгруппа индекса 2.

### Задачи для самостоятельного решения к §5

**Задача 5.1.** Покажите, что правило  $(t_0 : t_1 : t_2) \mapsto (t_0^{-1} : t_1^{-1} : t_2^{-1})$  продолжается до рационального отображения  $\kappa : \mathbb{P}_2 \dashrightarrow \mathbb{P}_2$ , определённого всюду кроме 3 точек. Найдите

<sup>1</sup>т. е. фактор группы матриц  $M \in \mathrm{Mat}_{4 \times 4}(\mathbb{F}_4)$ , таких что  $\overline{M}M^t = E$ , по подгруппе скалярных матриц

эти точки, объясните, как действует  $\iota$  на тройке прямых, соединяющих эти точки, и опишите  $\text{im } \iota$ .

**Задача 5.2** (график рационального отображения). Графиком  $\Gamma_\psi \subset X \times Y$  рационального отображения  $\psi : X \dashrightarrow Y$ , определённого на некотором открытом плотном  $U \subset X$ , называется замыкание множества точек  $\{(x, \psi(x)) \in X \times Y \mid x \in U\}$ .

а) Убедитесь, что график проекции аффинного пространства на его проективизацию из прим. 5.4 представляет собою раздутье  $\mathbb{A}^{n+1}$  в начале координат.

б) Опишите график квадратичного преобразования из зад. 5.1 (в частности, опишите слои его проекций на оба сомножителя).

**Задача 5.3** (результатант). Зафиксируем  $(n+1)$  натуральных степеней  $d_0, d_1, \dots, d_n$ , обозначим через  $\mathbb{P}_{N_i} = \mathbb{P}(S^{d_i}V^*)$  пространство гиперповерхностей степени  $d_i$  в  $\mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ , и пусть  $\Gamma = \{(S_0, S_1, \dots, S_n, p) \in \mathbb{P}_{N_0} \times \dots \times \mathbb{P}_{N_n} \times \mathbb{P}_n \mid p \in S_0 \cap S_1 \cap \dots \cap S_n\}$ . Покажите что

а)  $\Gamma$  – неприводимое проективное многообразие и найдите  $\dim \Gamma$

б) существует единственный с точностью до пропорциональности неприводимый полином  $R$  от коэффициентов однородных форм  $F_0, F_1, \dots, F_n$  заданных степеней от  $(n+1)$  переменных, который обращается в нуль тогда и только тогда, когда система  $(n+1)$  уравнений  $F_v = 0$  имеет ненулевое решение<sup>1</sup>.

**Задача 5.4** (геометрическое определение размерности). Убедитесь в том, что размерность неприводимого проективного многообразия  $X \subset \mathbb{P}_n$  можно определить любым из следующих эквивалентных способов:

а) наибольшее  $d \in \mathbb{Z}$ , такое что  $X \cap L \neq \emptyset$  для любого  $(n-d)$ -мерного проективного подпространства  $L \subset \mathbb{P}_n$

б) наименьшее  $d \in \mathbb{Z}$ , для которого найдётся  $(n-d-1)$ -мерное проективное подпространство  $L \subset \mathbb{P}_n$ , не пересекающее  $X$

в) наименьшее  $d \in \mathbb{Z}$ , такое что  $X \cap L = \emptyset$  для общего<sup>2</sup>  $(n-d-1)$ -мерного проективного подпространства  $L \subset \mathbb{P}_n$ .

**Задача 5.5.** Дано  $d$ -мерное проективное многообразие  $X \subset \mathbb{P}_n = \mathbb{P}(V)$ . Покажите, что множество  $(n-d)$ -мерных проективных подпространств  $H \subset \mathbb{P}(V)$ , пересекающих  $X$  по конечному множеству точек, составляют плотное открытое (по Зарисскому) подмножество грассманниана  $\text{Gr}(n+1-d, V)$ , параметризующего все  $(n-d)$ -мерные проективные подпространства в  $\mathbb{P}(V)$ . (Подсказка: рассмотрите многообразие инцидентности  $\Gamma = \{(x, H) \in X \times \text{Gr}(n+1-d, V) \mid x \in H\}$ ; с помощью проекции  $\Gamma \rightarrow X$  покажите, что оно проективно и неприводимо, и вычислите его размерность; затем рассмотрите проекцию  $\Gamma \rightarrow \text{Gr}(n+1-d, V)$ .)

**Задача 5.6** ( $k$ -детерминанталь). Обозначим  $\mathcal{D}_k(m, n) \subset \mathbb{P}(\text{Mat}_{m \times n})$  проективное многообразие матриц  $M$  из  $m$  строк и  $n$  столбцов, имеющих  $\text{rk } M \leq k$ . С помощью подходящего многообразия инцидентности  $\Gamma = \{(L, M) \mid L \subset \ker M\}$  (где  $L$  – подпространство, а  $M$  – матрица) покажите, что  $\mathcal{D}_k(m, n)$  является неприводимым проективным многообразием и найдите  $\dim \mathcal{D}_k(m, n)$ .

**Задача 5.7.** Покажите, что множество всех поверхностей 4-й степени  $S \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(V)$ , на

<sup>1</sup>кстати, как выглядит этот многочлен, когда все степени равны единице?

<sup>2</sup>т. е. лежащего в открытом плотном подмножестве грассманниана  $\text{Gr}(n-d, V)$ , параметризующего все  $(n-d-1)$ -мерные проективные подпространства в  $\mathbb{P}(V)$

которых имеется хоть одна прямая, образует неприводимую алгебраическую гиперповерхность в пространстве  $\mathbb{P}(S^4V^*)$  всех поверхностей 4-й степени.

**Задача 5.8 (многообразие Фано гладкой квадрики).** Покажите, что множество  $n$ -мерных проективных подпространств, лежащих на гладкой  $(2n+1)$ -мерной квадрике в  $\mathbb{P}_{2n+2}$  (соотв. на гладкой  $2n$ -мерной квадрике в  $\mathbb{P}_{2n+1}$ ) является неприводимым проективным многообразием (соотв. дизъюнктным объединением двух изоморфных друг другу проективных многообразий) и выясните размерности этих многообразий (они называются *многообразиями Фано гладких квадрик или изотропными грасманианами*).

**Задача 5.9.** Покажите, что изолированные точки слоёв морфизма  $\varphi : X \rightarrow Y$  образуют открытое (но, возможно, пустое) подмножество в  $X$ .

**Задача 5.10 (теорема Шевалле о конструктивности).** Докажите, что образ регулярного морфизма алгебраических многообразий *конструктивен* в том смысле, что его можно получить конечным числом операций пересечения, объединения и разности из конечного числа открытых и замкнутых подмножеств.

**Задача 5.11.** Может ли гладкая кубическая поверхность  $S \subset \mathbb{P}_3$  иметь плоское сечение, распадающееся в объединение гладкой коники и ее касательной?

**Задача 5.12.** Покажите, что любая гладкая кубическая поверхность  $S \subset \mathbb{P}_3$  может быть задана в подходящей координатной системе уравнением  $\varphi_1\varphi_2\varphi_3 + \psi_1\psi_2\psi_3 = 0$ , где  $\varphi_i$  и  $\psi_j$  суть линейные однородные формы. (Подсказка: используйте прямую  $\ell \subset S$  и 5 плоскостей, проходящих через неё и пересекающих  $S$  в тройке различных прямых.)

**Задача 5.13.** Зафиксируем на  $\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}(V)$  шестёрку точек  $\{p_1, p_2, \dots, p_6\}$ , так чтобы никакие три из них не были коллинеарны и ни одна не лежала бы на квадрике, проходящей через 5 других. Обозначим через  $W = \{F \in S^3V^* \mid F(p_i) = 0 \forall i = 1, 2, \dots, 6\}$  пространство кубических форм на  $V$ , задающих кривые, проходящие через наши 6 точек. Рассмотрим отображение

$$\psi : \mathbb{P}_2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\} \rightarrow \mathbb{P}(W^*), \quad (5-10)$$

которое отправляет точку  $p \notin \{p_1, p_2, \dots, p_6\}$  в подпространство коразмерности 1 в  $W$ , образованное всеми кубическими формами из  $W$ , зануляющимися в точке  $p$ . Покажите, что

- a)  $\dim W = 4$
- б)  $S = \psi(\mathbb{P}_2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\})$  есть кубическая поверхность в  $\mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(W^*)$
- в) отображение (5-10) продолжается до регулярного изоморфизма  $\sigma_{p_1, p_2, \dots, p_6}^{-1} \mathbb{P}_2 \xrightarrow{\sim} S$  между  $S$  и раздущием  $\mathbb{P}_2$  в заданных 6 точках.
- г) Явно опишите 27 пучков плоских кубических кривых, которые проходят через точки  $p_1, p_2, \dots, p_6$  и переводятся изоморфизмом (5-10) в 27 прямых на  $S$ .

**Задача 5.14 (двойная шестёрка Шлефли).** Рассмотрим в  $\mathbb{P}_3$  шесть прямых  $[0], [1], \dots, [5]$ , таких что прямые  $[1], \dots, [5]$  попарно скрещиваются между собой и ни одна из них не касается квадрики<sup>1</sup>, проведённой через любые 3 другие, а прямая  $[0]$  пересекается со всеми пятью прямыми  $[1], \dots, [5]$ . Верно ли, что:

- а)  $\forall i = 1, \dots, 5$  существует единственная прямая  $[i'] \neq [0]$  такая, что  $[i'] \cap [j] \neq \emptyset \forall j \neq i$
- б)  $[i'] \cap [i] = [i'] \cap [j'] = \emptyset$  для всех  $i = 1, \dots, 5$  и для всех  $j \neq i$
- в) ни одна из прямых  $[1'], \dots, [5']$  не касается и не лежит на квадрике, проходящей

<sup>1</sup>в частности, не лежит на ней

через какие-нибудь 3 другие из этих прямых

- г) существует единственная прямая  $[0']$ , которая пересекает каждую из  $[1'], \dots, [5']$   
(Подсказка: пусть прямые  $[0'_1] \neq [1]$  и  $[0'_2] \neq [2]$  пересекают все  $[1'], \dots, [5']$ , кроме, соответственно,  $[1']$  и  $[2']$ ; покажите, что они пересекают прямые  $[3'], [4'], [5']$  в одних и тех же трёх точках, однозначно описываемых в терминах одних только прямых  $[3], [4], [5], [3'], [4'], [5']$  и  $[0]$ .)

Задача 5.15. Покажите, что двойная шестёрка прямых из предыдущей задачи лежит на некоторой гладкой кубической поверхности и объясните, как получить ещё 15 прямых, лежащих на этой же кубике.

## §6. Векторные расслоения и линейные системы

Всюду в этом параграфе мы продолжаем по умолчанию считать, что основное поле  $\mathbb{k}$  алгебраически замкнуто.

**6.1. Векторные расслоения.** Алгебраическое векторное расслоение над алгебраическим многообразием  $X$  это алгебраическое семейство векторных пространств над  $X$ , т. е. регулярное отображение алгебраических многообразий  $\pi : E \rightarrow X$ , слой которого  $\pi^{-1}(x)$  над любым  $x \in X$  имеет структуру векторного пространства над  $\mathbb{k}$ , причём эта структура алгебраически зависит от  $x$  в том смысле, что все три имеющиеся в  $E$  послойные операции: нулевое сечение<sup>1</sup>  $X \rightarrow E$ , сложение векторов в слоях  $\underset{x}{\times} E \rightarrow E$  и умножение векторов в слоях на константы<sup>2</sup>  $I \times E \rightarrow E$  должны быть регулярными морфизмами семейств над  $X$ .

Два векторных расслоения  $\pi_1 : E_1 \rightarrow X$  и  $\pi_2 : E_2 \rightarrow X$  называются *изоморфными*, если существует изоморфизм алгебраических многообразий  $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$  такой, что<sup>3</sup>  $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$  и  $\forall x \in X$  ограничение  $\varphi|_{\pi_1^{-1}(x)} : \pi_1^{-1}(x) \rightarrow \pi_2^{-1}(x)$  является линейным изоморфизмом векторных пространств.

**6.1.1. Пучок сечений.** Всякий локальный регулярный морфизм  $s : U \rightarrow E$ , заданный на открытом  $U \subset X$  и обратный справа к прекции<sup>4</sup>:  $\pi \circ s = \text{Id}_x$ , называется *локальным сечением* расслоения  $E$ . Послойное сложение и умножение на числа наделяют множество локальных сечений, определённых над  $U$ , структурой модуля над алгеброй  $\mathcal{O}_x(U)$  локальных регулярных функций на  $U$ . Этот модуль обозначается через  $\Gamma(U, E)$  или  $E(U)$ .

Соответствие  $U \mapsto \Gamma(U, E)$  задаёт на  $X$  пучок модулей над структурным пучком  $\mathcal{O}_x$ . Он называется *пучком сечений* расслоения  $E$  и обычно обозначается одноимённой прописной буквой<sup>5</sup>  $\mathcal{E}$ .

Отметим, что каждое векторное расслоение имеет каноническое глобальное *нулевое сечение*, сопоставляющее каждой точке  $x \in X$  нулевой вектор из слоя над  $x$ .

**6.1.2. Локально тривиальные расслоения.** Векторное расслоение называется *тривиальным* ранга  $d$ , если оно изоморфно прямому произведению  $X \times \mathbb{A}^d$  со стандартной (не зависящей от  $x \in X$ ) структурой векторного пространства на  $\mathbb{A}^d = \mathbb{k}^{\oplus d}$ .

Это условие равносильно существованию  $d$  регулярных сечений  $s_i : X \rightarrow E$  таких, что векторы  $s_1(x), \dots, s_d(x)$  образуют базис в слое  $\pi^{-1}(x)$  для всех  $x \in X$ . Действительно, послойные координатные функции на  $E$ , соответствующие этим базисным векторам, дают требуемый изоморфизм  $E \cong X \times \mathbb{A}^d$  над  $X$ . Пучок сечений тривиального расслоения ранга  $d$  представляет собою свободный  $\mathcal{O}_x$ -модуль  $\mathcal{E} = \mathcal{O}_x^d = \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_x \cdot s_i$  ранга  $d$ .

Векторное расслоение  $\pi : E \rightarrow X$  называется *локально тривиальным* ранга  $d$ , если каждая точка  $x \in X$  обладает такой открытой окрестностью  $U \ni x$ , что ограничение расслоения  $E$  на эту окрестность тривиально ранга  $d$ , т. е. имеет  $d$  локальных базисных сечений  $s_1^{(U)}, s_2^{(U)}, \dots, s_d^{(U)} : U \rightarrow \pi^{-1}(U)$ .

<sup>1</sup>сопоставляющее каждой точке  $x \in X$  нулевой вектор  $\vec{0}(x) \in \pi^{-1}(x)$

<sup>2</sup> $I = X \times \mathbb{A}^1 \rightarrow X$  обозначает *тривиальное* расслоение со слоем  $\mathbb{k} = \mathbb{A}^1$

<sup>3</sup>т. е.  $E_1$  и  $E_2$  изоморфны как семейства над  $X$ , см. прим. 5.1 на стр. 119

<sup>4</sup>т. е. отображающий каждую точку  $x \in X$  в слой  $\pi^{-1}(x)$  над нею

<sup>5</sup>другое употребительное обозначение:  $\mathcal{O}_x(E)$

Иначе можно сказать, что раслоение  $E$  локально тривиально ранга  $d$  тогда и только тогда, когда его пучок сечений  $\mathcal{E}$  локально свободен ранга  $d$ , т. е. модуль его локальных сечений  $E(U)$  над достаточно малыми открытыми  $\subset X$ , покрывающими  $X$ , является свободным  $\mathcal{O}_X(U)$ -модулем ранга  $d$ :  $E(U) = \mathcal{O}_X(U)^d = \bigoplus_{i=1}^d \mathcal{O}_X(U) \cdot s_i^{(U)}$ .

С каждой парой таких локальных тривиализаций  $(s_1^{(U)}, s_2^{(U)}, \dots, s_d^{(U)})$  и  $(s_1^{(V)}, s_2^{(V)}, \dots, s_d^{(V)})$ , заданных над открытыми множествами  $U$  и  $V$  соответственно, связана обратимая  $d \times d$ -матрица  $\varphi_{vu} = \varphi_{vu}(x)$ , зависящая от точки  $x \in U \cap V$  и выражющая один базис в слое над  $x$  через другой<sup>1</sup>:  $(s_1^{(U)}, s_2^{(U)}, \dots, s_d^{(U)}) = (s_1^{(V)}, s_2^{(V)}, \dots, s_d^{(V)}) \cdot \varphi_{vu}$ . Матричные элементы как самой этой матрицы, так и обратной к ней матрицы являются регулярными функциями на  $U \cap V$ . Возникающие таким образом регулярные отображения

$$\varphi_{vu} : U \cap V \rightarrow \mathrm{GL}_d(k)$$

называются *функциями перехода* между двумя тривиализациями. Они удовлетворяют соотношениям:

$$\begin{aligned} \varphi_{vv}\varphi_{vu} &= 1 \quad \forall U, V : U \cap V \neq \emptyset \\ \varphi_{vu}\varphi_{uw}\varphi_{wv} &= 1 \quad \forall U, V, W : U \cap V \cap W \neq \emptyset \end{aligned} \tag{6-1}$$

При выборе других локальных базисов  $(\tilde{s}_1^{(U)}, \tilde{s}_2^{(U)}, \dots, \tilde{s}_d^{(U)}) = (s_1^{(U)}, s_2^{(U)}, \dots, s_d^{(U)}) \cdot \psi_u$ , где  $\psi_u = \psi_u(x)$  — обратимые матрицы размера  $d \times d$ , задающие регулярные отображения

$$\psi_u : U \rightarrow \mathrm{GL}_d(k),$$

функции перехода меняются на  $\tilde{\varphi}_{vu} = \psi_v^{-1} \varphi_{vu} \psi_u$ .

### 6.1.3. Коциклы Чеха.

Набор локальных регулярных матричных функций

$$\varphi_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathrm{GL}_d(k),$$

привязанный к некоторому фиксированному покрытию  $X = \cup U_\nu$ , называется *1-коциклом Чеха* этого покрытия со значениями в  $\mathrm{GL}_d(k)$ , если  $\forall \alpha, \beta, \gamma$

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\alpha} &= 1 \quad \text{всюду над } U_\alpha \cap U_\beta \\ \varphi_{\alpha\beta}\varphi_{\beta\gamma}\varphi_{\gamma\alpha} &= 1 \quad \text{всюду над } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \end{aligned} \tag{6-2}$$

Ограничав функции  $\varphi_{\alpha\beta}$  на меньшие открытые множества, мы можем образовать из такого коцикла коциклы, ассоциированные с любыми более мелкими<sup>2</sup> покрытиями, вписанными в исходное покрытие. Два чеховских 1-коцикла называются *эквивалентными* (или *когомологичными*), если существует некоторое общее измельчение  $X = \cup U_\nu$  тех двух покрытий, на которых они первоначально были заданы, и такой набор локальных регулярных отображений<sup>3</sup>  $\psi_\nu : U_\nu \rightarrow \mathrm{GL}_d(k)$ , что функции  $\varphi_{\alpha\beta}$  и  $\tilde{\varphi}_{\alpha\beta}$ , индуцированные двумя рассматриваемыми 1-коциклами на этом измельчении, связаны соотношением<sup>4</sup>

$$\tilde{\varphi}_{\alpha\beta} = \psi_\alpha^{-1} \varphi_{\alpha\beta} \psi_\beta \quad \text{всюду над каждым пересечением } U_\alpha \cap U_\beta.$$

<sup>1</sup>  $i$ -й столбец  $\varphi_{vu}$  содержит координаты сечения  $s_i^{(U)}(x)$  в базисе  $\{s_1^{(V)}(x), \dots, s_d^{(V)}(x)\}$

<sup>2</sup> покрытие  $X = \cup W_\nu$  называется *более мелким*, чем покрытие  $X = \cup U_\nu$ , если  $\forall \nu \exists \mu : W_\nu \subset U_\mu$

<sup>3</sup> всякий такой набор отображений называется *чеховской 0-коцепью со значениями в  $\mathrm{GL}_d(k)$*

<sup>4</sup> т. е. отличаются на чеховскую *кограницу* коцепи  $\{\psi_\nu\}$

Множество классов эквивалентности 1-коциклов Чеха обозначается  $H^1(X, \mathrm{GL}_d(k))$ , а его элементы называются *первыми когомологиями Чеха*<sup>1</sup> со значениями в  $\mathrm{GL}_d(k)$ .

Предложение 6.1

Классы изоморфизмов локально тривиальных векторных расслоений ранга  $d$  находятся во взаимно однозначном соответствии с первыми когомологиями Чеха

$$\varphi_{\alpha\beta} \in H^1(X, \mathrm{GL}_d(k)).$$

Доказательство. Локально тривиальное векторное расслоение  $E$ , отвечающее данному коциклу  $\varphi_{\alpha\beta}$ , как многообразие, склеивается из карт  $U_\alpha \times \mathbb{A}^d$  вдоль их попарных пересечений  $(U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{A}^d$  по правилу  $U_\alpha \times \mathbb{A}^d \ni (x, v) \mapsto (x, \varphi(\alpha\beta)(x) \cdot v) \in U_\beta \times \mathbb{A}^d$ , где  $v \in \mathbb{A}^d$  есть вектор-столбец. Условия коцикличности (6-2) гарантируют, что таким образом получается алгебраический атлас, а из линейности  $\varphi(\alpha\beta)(x)$  по слою следует, что структуры векторных пространств на локальных  $\mathbb{A}^d$  согласуются друг с другом при склейке. Наоборот, функции перехода (6-1) локально тривиального расслоения составляют, как мы видели, чеховский коцикл, причём при смене тривиализации или послойно линейном автоморфизме расслоения (что, в сущности, то же самое) этот коцикл заменяется на когомологичный.  $\square$

Пример 6.1 (тавтологическое расслоение)

Тавтологическое векторное расслоение  $S$  на проективном пространстве  $\mathbb{P}(V)$  определяется геометрически как векторное подрасслоение  $S \subset \mathbb{P}(V) \times V$  ранга 1, слой которого над  $v \in \mathbb{P}(V)$  является тем самым 1-мерным подпространством в  $V$ , которое порождается вектором  $v$ . Над каждой аффинной картой  $U_\alpha = \{v \in \mathbb{P}(V) \mid \alpha(v) \neq 0\}$ , где  $\alpha \in V^*$ , это расслоение тривиализуется сечением  $s^{(\alpha)}(v) = (v, v/\alpha(v)) \in \mathbb{P}(V) \times V$ , которое представляет собой корректно определённую регулярную функцию  $s^{(\alpha)} : U_\alpha \rightarrow S \subset \mathbb{P}(V) \times V$ . Поскольку  $\forall v \in U_\alpha \cap U_\beta s^{(\alpha)}(v) = s^{(\beta)}(v) \cdot (\beta(v)/\alpha(v))$ , функции перехода между этими тривиализациями имеют вид  $\varphi_{\beta\alpha}(v) = \beta(v)/\alpha(v)$  и являются корректно определёнными регулярными отображениями  $U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathrm{GL}_1(k) = \mathbb{k}^*$ .

Более общим образом, тавтологическое векторное расслоение  $S \rightarrow \mathrm{Gr}(m, V)$  над грасманианом  $m$ -мерных подпространств  $W \subset V$  представляет собою векторное подрасслоение  $S \subset \mathrm{Gr}(m, V) \times V$  ранга  $m$ , слой которого над  $W \in \mathrm{Gr}(m, V)$  есть само  $m$ -мерное подпространство  $W \subset V$ . Если мы фиксируем базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  в  $V$  и для каждого  $I = (i_1 < i_2 < \dots < i_m) \subset (1, 2, \dots, n)$  рассмотрим стандартную аффинную карту  $U_I \subset \mathrm{Gr}(m, V)$ , состоящую из всех  $W$ , изоморфно проектирующихся на линейную оболочку  $\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_m}\}$ , то  $S$  можно тривиализовать над  $U_I$  при помощи  $m$  сечений  $s^{(I)}_v(W) \subset W$ , образующих тот единственный базис  $W$ , матрица которого  $M_I(W)$  (состоящая из координат  $m$  базисных векторов, записанных в  $m$  столбцов высоты  $n$ ) содержит единичную  $m \times m$ -подматрицу в строках  $I$ .

Поскольку для любого  $W \in U_I \cap U_J$  мы имеем  $M_I(W) = M_J(W) \cdot \varphi_{JI}(W)$ , где  $\varphi_{JI}(W)$  это обратная матрица к  $m \times m$  подматрице матрицы  $M_J$ , расположенной в строках  $J$ , функции

<sup>1</sup>тех, кто знаком с топологическими теориями когомологий, уместно предупредить, что группа коэффициентов в нашем случае некоммутативна, что влечёт за собой ряд трудностей: например, на  $H^1(X, \mathrm{GL}_d(k))$  нет групповой структуры (это просто множество), а следующая группа  $H^2(X, \mathrm{GL}_d(k))$  вообще не может быть определена традиционным «чеховским» способом

перехода между двумя тривиализациями  $s_\nu^{(I)}(W)$  и  $s_\nu^{(J)}(W)$  задаются отображениями

$$W \mapsto \varphi_{IJ}(W) \in \mathrm{GL}_m(k).$$

Очевидно, эти отображения регулярны и корректно определены везде в  $U_I \cap U_J$ .

**6.1.4. Линейные конструкции с векторными расслоениями.** Пусть даны два локально тривиальных векторных расслоения  $E, F$  рангов  $r, s$ , представленные коциклами Чеха  $\varphi_{\alpha\beta}, \psi_{\alpha\beta}$  над одним и тем же открытым покрытием  $X = \cup U_\nu$ . Тогда можно образовать их послойную прямую сумму  $E \oplus F$  и тензорное произведение  $E \otimes F$ , которые имеют ранги  $r+s, rs$  соответственно, и представлены коциклами  $\varphi_{\alpha\beta} \oplus \psi_{\alpha\beta}$  и  $\varphi_{\alpha\beta} \otimes \psi_{\alpha\beta}$  (прямая сумма и тензорное произведение линейных операторов).

Подобным же образом к локально тривиальным расслоениям можно применять и другие тензорные конструкции: скажем, брать послойные внешние степени  $\Lambda^m E$  или симметрические степени  $S^m E$  степени расслоения  $E$ .

Если локально тривиальное векторное расслоение  $E \twoheadrightarrow X$  имеет слой  $V \simeq \mathbb{k}^r$  и матрицы перехода  $\varphi_{\alpha\beta}$ , то *двойственное* расслоение  $E^* \twoheadrightarrow X$  имеет в качестве слоя двойственное пространство  $V^* \simeq \mathbb{k}^r$  (отождествление с  $\mathbb{k}^r$  производится выбором двойственного базиса к базису в  $V$ ) и функции перехода  ${}^t\varphi_{\alpha\beta}^{-1}$  (транспонированные к обратным) – при таком выборе склейки послойное спаривание  $V \times V^* \rightarrow \mathbb{k}$  принимает значения в тривиальном одномерном расслоении  $I = X \times \mathbb{A}^1$ .

**6.1.5. Поднятие.** Как и всякое семейство, любое расслоение  $E \twoheadrightarrow Y$  можно поднять вдоль любого регулярного отображения  $f : X \rightarrow Y$  до векторного расслоения

$$f^*(E) \stackrel{\text{def}}{=} \underset{Y}{X \times E} \twoheadrightarrow X$$

над  $X$ , которое называется *обратным образом*  $E$  относительно  $f$ . Если  $E$  локально тривиально и представлено коциклом Чеха  $\varphi_{\alpha\beta}$  над некоторым открытым покрытием  $Y = \cup U_\nu$ , то  $f^*E$  представляется коциклом  $f^*(\varphi_{\alpha\beta}) = \varphi_{\alpha\beta} \circ f$  над индуцированным открытым покрытием  $X = \cup f^{-1}(U_\nu)$ .

Упражнение 6.1. Пусть  $p : \mathrm{Gr}(m, V) \hookrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$  вложение Плюккера. Проверьте, что поднятие  $p^*S_{\mathbb{P}}$  тавтологического линейного расслоения на  $\mathbb{P}(\Lambda^m V)$  изоморфно старшей внешней степени  $\Lambda^m S_{\mathrm{Gr}}$  тавтологического линейного расслоения на  $\mathrm{Gr}(m, V)$ .

**6.2. Группа Пикара.** Классы изоморфных локально тривиальных алгебраических векторных расслоений ранга один<sup>1</sup> на алгебраическом многообразии  $X$  образуют абелеву группу относительно тензорного произведения. Эта группа называется *группой Пикара* и обозначается  $\mathrm{Pic}(X)$ . Если линейные расслоения  $L, N$  задаются чеховскими коциклами  $\varphi_{\alpha\beta}, \psi_{\alpha\beta}$ , которые в данном случае являются обычными «числовыми» функциями  $U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{k}^*$ , то их произведение  $L \otimes N$  задаётся коциклом  $\varphi_{\alpha\beta} \cdot \psi_{\alpha\beta}$ , равным обычному произведению этих функций. Нулевым элементом группы  $\mathrm{Pic}(X)$  является тривиальное линейное расслоение  $I = X \times \mathbb{A}^1$  с коциклом  $\psi_{\alpha\beta} \equiv 1$ . Противоположным элементом к линейному расслоению  $L$  с коциклом  $f_{\alpha\beta}$  является двойственное расслоение  $L^* = \mathrm{Hom}(L, I)$  с коциклом  $\varphi_{\alpha\beta}^{-1}$ .

<sup>1</sup>расслоения ранга 1 часто называют *линейными расслоениями*, имея в виду, что слоями такого расслоения являются прямые линии

**Предложение 6.2**

Если  $X$  аффинно и  $\mathbb{k}[X]$  факториально, то  $\text{Pic}(X) = 0$  (т. е. всякое линейное расслоение над  $X$  тривиально).

**Доказательство.** Без ограничения общности мы можем считать, что тривиализующее покрытие  $X = \cup U_\alpha$  конечно и состоит из главных открытых множеств  $U_\alpha = \mathcal{D}(f_\alpha)$  для некоторого набора  $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathbb{k}[X]$ . Пусть линейное расслоение  $L$  тривиализуется над  $U_\alpha$  сечением  $s_\alpha : U_\alpha \rightarrow L$  и имеет функции перехода

$$\varphi_{\beta\alpha} = s_\beta / s_\alpha : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \mathbb{k}^*,$$

представляющие собою обратимые<sup>1</sup> элементы кольца

$$\mathcal{O}_x(U_\alpha \cap U_\beta) = \mathbb{k}[X][1/(f_\alpha f_\beta)].$$

Тем самым, в разложении  $\varphi_{\beta\alpha}$  на простые множители могут участвовать только простые делители функций  $f_\alpha, f_\beta$ .

Попарно неассоциированные простые делители функций  $f_1, f_2, \dots, f_n$  образуют конечное множество. Для каждого элемента  $q$  из этого множества мы собираемся модифицировать тривиализующие сечения  $s_\nu$  так, чтобы  $q$  полностью исчез из разложений всех функций перехода  $\varphi_{\beta\alpha}$ . После конечного числа таких модификаций все функции перехода станут обратимыми элементами кольца  $\mathbb{k}[X]$ .

**Упражнение 6.2.** Покажите, что линейное расслоение на неприводимом многообразии  $X$ , функции перехода которого являются глобальными обратимыми обратимыми функциями на  $X$ , тривиально.

Чтобы изгнать данный неприводимый элемент  $q \in \mathbb{k}[X]$  из разложения всех функций перехода, обозначим через  $m_{\beta\alpha} \in \mathbb{Z}$  степень, с которой  $q$  входит в разложение рациональной функции  $\varphi_{\beta\alpha}$ . Если хоть одна из этих степеней ненулевая, разобьём наши открытые множества на две непустых группы: множества  $U_\beta$ , у которых  $f_\beta$  делится на  $q$ , и множества  $U_\gamma$ , у которых  $f_\gamma$  не делится на  $q$ .

Тогда для каждого фиксированного индекса  $\beta$  показатель  $m_{\gamma\beta}$  не зависит от  $\gamma$ , поскольку  $q$  должно сократиться в дроби  $\varphi_{\gamma_1\gamma_2} = \varphi_{\gamma_1\beta}/\varphi_{\gamma_2\beta}$ . Обозначим этот показатель через  $m_\beta$  и заменим все тривиализующие сечения  $s_\beta$  на сечения  $s'_\beta = q^{m_\beta} \cdot s_\beta$ , которые также тривиализируют  $L$  над  $U_\beta$ , ибо  $V(q) \subset V(f_\beta)$ . После такой замены множитель  $q$  исчезнет не только из всех функций перехода  $\varphi_{\gamma\beta}$  (что очевидно), но и из всех  $\varphi_{\beta_1\beta_2} = \varphi_{\gamma\beta_2}/\varphi_{\gamma\beta_1}$ . В функции  $f_{\gamma_1\gamma_2}$  множитель  $q$  не входил с самого начала. Мы достигли цели.  $\square$

**Следствие 6.1**

$$\text{Pic}(\mathbb{A}^n) = 0.$$

$\square$

**Предложение 6.3**

$$\text{Pic}(\mathbb{P}_n) = \mathbb{Z} \text{ и порождается тавтологическим расслоением } S.$$

**Доказательство.** По предыдущему следствию, любое линейное расслоение  $L$  на  $\mathbb{P}_n$  тривиально над каждой из стандартных аффинных карт. Зафиксируем однородные координаты  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  на  $\mathbb{P}_n$ , обозначим через  $t_v^{(i)}$ ,  $v \neq i$ , ограничения линейных форм

<sup>1</sup>в частности, нигде на  $U_\alpha \cap U_\beta$  не обращающиеся в нуль

$x_v$ , на аффинную гиперплоскость  $x_i = 1$  в  $\mathbb{A}^{n+1}$  и используем их как аффинные координаты в карте  $U_{x_i}$ . Функции перехода  $\varphi_{ij} = s_i/s_j \in k(U_{x_i})$  между базисными сечениями  $s_i$  расслоения  $L$  над  $U_{x_i}$  представляются тогда рациональными функциями от  $t_v^{(i)}$  без нулей и полюсов на  $U_{x_i} \setminus V(t_j^{(i)})$ . Тогда, по теореме Гильберта о нулях,  $\varphi_{ij} = c_{ij}(t_j^{(i)})^{d_{ij}}$  для некоторой ненулевой константы  $c_{ij}$  и целого  $d_{ij}$ . Умножая все  $s_i$  на подходящие ненулевые константы, мы можем добиться того, чтобы все эти сечения совпали над точкой  $(1 : 1 : \dots : 1)$ . Но тогда все  $c_{ij}$  станут равны 1, а поскольку  $t_k^{(j)} = x_k/x_j = (x_k/x_i) : (x_j/x_i) = t_k^{(i)}/t_j^{(i)}$ , из условий коцикличности  $\varphi_{ij} = 1/\varphi_{ji}$ ,  $\varphi_{jk} = \varphi_{ik}/\varphi_{ij}$  мы заключаем, что все  $d_{ij} = d_{ji}$  равны одному и тому же числу  $d$  для всех  $i, j$ .

С другой стороны, для любого  $d \in \mathbb{Z}$  функции  $\varphi_{ij} = (t_j^{(i)})^d = (x_j/x_i)^d$  образуют 1-коцикл Чеха, т. е. определяют линейное расслоение, которое мы обозначим через  $\mathcal{O}(-d)$ .

Упражнение 6.3. Убедитесь, что  $\mathcal{O}(-d) = S^{\otimes d}$ .

Нам осталось показать, что все расслоения  $\mathcal{O}(d)$  попарно не изоморфны. Для этого мы вычислим размерность пространства глобальных регулярных сечений расслоения  $\mathcal{O}(d)$ .

Локальное сечение, определённое всюду на  $U_{x_0}$ , имеет вид  $s = f(t_1^{(0)}, t_2^{(0)}, \dots, t_n^{(0)}) \cdot s_0$ , где  $f$  произвольный многочлен от  $n$  переменных. В карте  $U_{x_i}$  это сечение задаётся над точками пересечения  $U_{x_i} \cap U_{x_0}$  формулой  $s = f\left(\left(t_1^{(i)}/t_0^{(i)}\right), \dots, \left(t_n^{(i)}/t_0^{(i)}\right)\right) \cdot \left(t_0^{(i)}\right)^d \cdot s_i$  и продолжается на всю карту  $U_{x_i}$  тогда и только тогда, когда  $\deg f \leq d$ . Следовательно, расслоение  $\mathcal{O}(d)$  вообще не имеет ненулевых глобальных сечений, если  $d < 0$ , а если  $d \geq 0$ , пространство глобальных сечений имеет размерность  $\binom{n+d}{d}$  (неоднородные многочлены степени  $\leq d$  от  $n$  переменных). Таким образом, все положительные расслоения  $\mathcal{O}(d)$  попарно различны и не изоморфны отрицательным. А поскольку  $\mathcal{O}(-d) = \mathcal{O}(d)^*$ , все отрицательные расслоения  $\mathcal{O}(d)$  также попарно различны.  $\square$

Упражнение 6.4. Докажите, что всякий регулярный алгебраический автоморфизм проективного пространства индуцируется линейным автоморфизмом подлежащего векторного пространства.

Предложение 6.4

$\text{Pic}(\text{Gr}(m, n)) = \mathbb{Z}$  и порождается старшей внешней степенью  $\Lambda^m S$  тавтологического расслоения.

Доказательство. Рассуждение параллельно предыдущему. Пусть — в обозначениях из прим. 6.1 — локальное сечение  $s_i$  тривиализует данное линейное расслоение  $L$  над картой  $U_I$ , в которой в качестве аффинных координат мы используем матричные элементы матрицы  $M_I(W)$ , стоящие вне единичной  $k \times k$ -подматрицы, образованной  $I$ -строками.

Функции перехода  $\varphi_{IJ} = s_i/s_j \in k(U_I)$  расслоения  $L$  являются рациональными функциями от этих матричных элементов, определёнными всюду на пересечении  $I$ -той и  $J$ -той карт и нигде не обращающимися на этом пересечении в нуль. Это пересечение является главным открытым подмножеством аффинного пространства  $U_I$ , дополнительным к гиперповерхности  $V(D_{IJ})$ , где  $D_{IJ} \stackrel{\text{def}}{=} \det M_{IJ}$  — детерминант  $m \times m$ -подматрицы  $M_{IJ}$ , образованной  $J$ -строками «координатной» матрицы в  $M_I$  (как и в прим. 6.1).

Поскольку полином  $D_{IJ}$  неприводим, числитель и знаменатель рациональной функции  $\varphi_{IJ}$  являются его степенями:  $\varphi_{IJ} = D_{IJ}^{m_{IJ}}$  для некоторого  $m_{IJ} \in \mathbb{Z}$ . Как и выше, из условия коцикличности вытекает, что степень  $m_{IJ}$  одна и та же для всех  $I, J$ . Действительно,

так как  $M_J = M_I \cdot M_{IJ}^{-1}$ , то для любого  $K$  мы должны иметь  $\varphi_{JK} = D_{JK}^{m_{JK}} = (D_{IK} \cdot D_{IJ}^{-1})^{m_{JK}}$ . С другой стороны, из  $\varphi_{JK} = \varphi_{IK}/\varphi_{IJ}$  вытекает, что  $D_{JK}^{m_{JK}} = D_{IK}^{m_{IK}} D_{IJ}^{-m_{IJ}}$ , и сравнение степеней неприводимых множителей показывает, что  $m_{IK} = m_{JK} = m_{IJ}$ .

Это же самое рассуждение показывает, что для любого  $d \in \mathbb{Z}$  функции  $\varphi_{IJ} = D_{IJ}^d$  образуют 1-коцикл Чеха, и определяют линейное расслоение, которое, как и выше, обозначается  $\mathcal{O}(-d)$ . Итак, всякое линейное расслоение на грассманиане имеет вид  $\mathcal{O}(d)$ . Для завершения доказательства необходимо сделать те же две проверки, что и раньше.  $\square$

**Упражнение 6.5.** Проверьте, что  $\mathcal{O}(-d) = (\Lambda^m S)^{\otimes d}$  и что все расслоения  $\mathcal{O}(d)$  попарно неизоморфны.

**6.3. Модули и пучки сечений.** Рассмотрим локально тривиальное векторное расслоение  $\pi : E \rightarrow X$  над неприводимым аффинным многообразием  $X = \text{Spec}_m A$  и обозначим через  $P_E = \Gamma(E, X)$  пространство его глобальных сечений. Оно является модулем над кольцом  $A$  глобальных регулярных функций на  $X$ . Следующая лемма показывает, что  $E$  однозначно восстанавливается по  $A$ -модулю  $P_E$ .

**Лемма 6.1**

Для любого  $g \in \mathbb{k}[X]$  модуль локальных сечений  $\Gamma(\mathcal{D}(g), E)$  изоморден локализации<sup>1</sup>

$$\mathbb{k}[[X][g^{-1}]] \underset{\mathbb{k}[X]}{\otimes} P_E$$

модуля глобальных сечений. Модуль глобальных сечений  $P_E$  конечно порождён и не имеет кручения<sup>2</sup>. Расслоение  $E$  тривиально, если и только если  $P_E$  свободен.

**Доказательство.** Первое утверждение означает, что всякое локальное сечение

$$s \in \Gamma(\mathcal{D}(g), E)$$

имеет вид  $s = \tilde{s}/g^m$ , где  $\tilde{s} \in P_E$  является глобальным сечением расслоения  $E$ .

Чтобы построить такое  $\tilde{s}$ , тривизализуем  $E$  над каким-нибудь главным открытым покрытием  $X = \cup \mathcal{D}(f_\nu)$  и выберем локальный базис  $s_1^{(\nu)}, s_2^{(\nu)}, \dots, s_r^{(\nu)}$  модуля  $\Gamma(\mathcal{D}(f_\nu), E)$  над кольцом  $\mathcal{O}_x(\mathcal{D}(f_\nu)) = \mathbb{k}[X][f_\nu^{-1}]$ . Ограничение сечения  $s$  на  $\mathcal{D}(g) \cap \mathcal{D}(f_\nu) = \mathcal{D}(gf_\nu)$  записывается в виде

$$s|_{\mathcal{D}(gf_\nu)} = \sum_{i=1}^r \frac{h_i}{(gf_\nu)^{m_\nu}} \cdot s_i^{(\nu)}|_{\mathcal{D}(gf_\nu)}$$

Это означает, что  $\tilde{s} = g^{\max m_\nu} \cdot s$  регулярно продолжается на всё множество  $\mathcal{D}(f_\nu)$  для каждого  $\nu$ , т. е. является глобальным сечением  $E$ , и  $s = \tilde{s}/g^m$ , как и требуется.

Чтобы построить конечную систему образующих модуля глобальных сечений над  $\mathbb{k}[X]$ , представим каждое из задействованных выше локальных базисных сечений в виде

$$s_i^{(\nu)} = \tilde{s}_i^{(\nu)}/f_\nu^{m_{i\nu}},$$

<sup>1</sup>относительно мультипликативного множества  $\{f^k\}$

<sup>2</sup> $A$ -модуль  $M$  называется модулем *без кручения*, если  $am = 0 \Rightarrow a = 0$  или  $m = 0$  для  $a \in A$ ,  $m \in M$

где  $\tilde{s}_i^{(\nu)} \in P_E$  являются глобальными сечениями. Покажем, что набор глобальных сечений  $\tilde{s}_i^{(\nu)}$  порождает  $P_E$  над  $\mathbb{k}[X]$ .

Для любого  $s \in P_E$  и любого  $\nu$  мы можем записать ограничение  $s|_{\mathcal{D}(f_\nu)}$  как

$$s|_{\mathcal{D}(f_\nu)} = \frac{1}{f_\nu^m} \sum_i g_i^{(\nu)} \cdot \tilde{s}_i^{(\nu)}$$

с  $g_i^{(\nu)} \in \mathbb{k}[X]$  и  $m \in \mathbb{N}$ . Таким образом,  $f_\nu^m \cdot s = \sum_i g_i^{(\nu)} \cdot \tilde{s}_i^{(\nu)}$  является  $\mathbb{k}[X]$ -линейной комбинацией сечений  $\tilde{s}_i^{(\nu)}$ . С другой стороны, поскольку у функций  $f_\nu$  нет общих нулей, имеется разложение единицы  $1 = \sum_\nu h_\nu f_\nu^m$  с  $h_\nu \in \mathbb{k}[X]$ . Поэтому

$$s = \sum_\nu h_\nu f_\nu^m \cdot s = \sum_{\nu i} h_\nu g_i^{(\nu)} \cdot \tilde{s}_i^{(\nu)}.$$

Отсутствие кручения в  $P_E$  очевидно: так как  $X$  неприводимо, любое ненулевое сечение расслоения и любая ненулевая функция на  $X$  одновременно отличны от нуля на некотором плотном в  $X$  открытом подмножестве, и их произведение на этом подмножестве тоже ненулевое.

Если же  $P_E$  свободен с базисом  $s_1, s_2, \dots, s_r$ , то ограничения этих базисных сечений на любое главное открытое множество  $\mathcal{D}(f)$  образуют, согласно предыдущему, базис модуля  $\Gamma(\mathcal{D}(f), E)$  над кольцом  $\mathcal{O}_X(\mathcal{D}(f))$ . Таким образом,  $r$  совпадает с рангом  $E$ , а  $s_1, s_2, \dots, s_r$  образуют базис векторного пространства  $\pi^{-1}(x)$  в каждом слое<sup>1</sup>.  $\square$

### Следствие 6.2

Каждое локально тривиальное алгебраическое векторное расслоение над  $\mathbb{A}^1$  тривиально.

**Доказательство.** Это следует из того, что всякий конечно порождённый  $\mathbb{k}[t]$ -модуль является прямой суммой свободного модуля и модуля кручения<sup>2</sup>.  $\square$

**Упражнение 6.6.** Покажите, что любое нигде не обращающееся в 0 регулярное сечение векторного расслоения над  $\mathbb{A}^1$  может быть вложено в некоторую систему регулярных сечений, образующую базис в каждом слое.

### Теорема 6.1 (теорема Биркгофа – Гrotендика)

Каждое локально тривиальное алгебраическое векторное расслоение  $E$  над  $\mathbb{P}_1$  является

прямой суммой линейных расслоений:  $E = \bigoplus_{i=1}^{\text{rk } E} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(d_i)$ .

<sup>1</sup>локальное сечение, проходящее через не лежащий в линейной оболочке векторов  $s_i(x)$  вектор слоя над  $x$  не может быть являться  $\mathcal{O}_X$ -линейной комбинацией сечений  $s_i$ -х

<sup>2</sup>это верно не только для  $\mathbb{k}[t]$ , но для любой области главных идеалов  $A$ , и следует из теоремы о взаимном базисе: представим модуль  $M$  в виде  $F / K$ , где  $F = A^{\oplus n}$  свободный модуль, натянутый на образующие  $M$ , а  $K \subset F$  модуль линейных соотношений между ними (ядро канонической сюръекции  $F \rightarrow M$ ); методом Гаусса в  $F$  можно построить такой базис  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , что некоторые кратности  $u_i = f_i \cdot e_i$  его первых  $m \leq n$  базисных векторов составят базис для  $K$ ; отсюда  $M = A^{n-m} \oplus \left( \bigoplus_i A/(f_i) \right)$  (детали см. в §12 моих лекций по алгебре на <http://vyshka.math.ru/pspdf/textbooks/gorodentsev/algebra-1.pdf>)

**Доказательство.** Обозначим через  $t$  и  $w = 1/t$  аффинные координаты в стандартных картах  $\mathbb{A}_{(0)}^1 = \mathbb{P}_1 \setminus \{\infty\}$  и  $\mathbb{A}_{(\infty)}^1 = \mathbb{P}_1 \setminus \{0\}$ . По предыдущему следствию над этими картами расслоение  $E$  тривиально. Зафиксируем локальные базисы для  $E$  над  $\mathbb{A}_{(0)}^1$  и  $\mathbb{A}_{(\infty)}^1$ :

$$e_1^0, e_2^0, \dots, e_r^0 \quad \text{и} \quad e_1^\infty, e_2^\infty, \dots, e_r^\infty. \quad (6-3)$$

Над  $\mathbb{A}_{(0)}^1 \setminus \{0\}$  они связаны друг с другом по формуле

$$(e_1^\infty, e_2^\infty, \dots, e_r^\infty) = (e_1^0, e_2^0, \dots, e_r^0) \cdot \varphi. \quad (6-4)$$

Матричные элементы матрицы перехода  $\varphi$  являются рациональными функциями от  $t$  без нулей и полюсов в  $\mathbb{A}_{(0)}^1 \setminus \{0\}$  и, стало быть, представляют собой полиномы от  $t$  и  $t^{-1}$ . При замене расслоения  $E$  «подкрученным» расслоением  $E(m) \stackrel{\text{def}}{=} E \otimes \mathcal{O}(m)$  каждый матричный элемент матрицы  $\varphi$  умножается на  $t^m$ . С помощью такой подкрутки мы можем добиться того, чтобы первый столбец матрицы  $\varphi$  (состоящий из коэффициентов разложения вектора  $e_1^\infty$  через базис  $e^0$ ), не содержал отрицательных степеней  $t$ , но и не обращается при  $t = 0$  в нулевой столбец. Тогда  $e_1^\infty$  станет *глобальным сечением*  $E(m)$ , не обращающимся в нуль ни в одной точке  $\mathbb{P}_1$ .

**Упражнение 6.7.** Покажите, что при  $m \ll 0$  у расслоения  $E(m)$  вообще нет ненулевых глобальных сечений.

Таким образом, существует минимальное  $m$ , такое что у расслоения  $E(m)$  существует глобальное сечение  $e$ , нигде не обращающееся в нуль. Поскольку утверждение теоремы инвариантно относительно подкруток, мы можем заменить  $E$  на это  $E(m)$ , что и сделаем.

Далее, индукция по рангу расслоения позволяет нам считать, что фактор расслоение  $Q = E/e \cdot \mathcal{O}$  является прямой суммой линейных:  $Q = \mathcal{O}(d_2) \oplus \mathcal{O}(d_3) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}(d_r)$ . В терминах самого  $E$  это означает наличие таких тривиализаций (6-3), что  $e_1^0 = e_1^\infty = e$ , а переход (6-4) имеет вид:

$$(e_1^\infty, e_2^\infty, \dots, e_r^\infty) = (e_1^0, e_2^0, \dots, e_r^0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & f_2 & f_3 & \dots & f_r \\ 0 & t^{d_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & t^{d_3} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & t^{d_r} \end{pmatrix}$$

где  $f_\nu = f_\nu(t, t^{-1})$  — какие-то полиномы Лорана от  $t, t^{-1}$ . Прибавление к столбцам этой матрицы первого столбца, умноженного на произвольный многочлен от  $t^{-1}$ , соответствует регулярной обратимой замене тривиализации над  $\mathbb{A}_{(\infty)}^1$ . При помощи таких замен мы можем сократить в полиномах  $f_i$  все мономы  $t^d$  с  $d \leq 0$ . После этого все диагональные элементы  $t^{d_i}$  матрицы перехода обязаны иметь  $d_\nu \leq 0$ , так как иначе возник бы столбец, являющийся полиномом от  $t$  и делящийся на  $t$ , который давал бы нигде не обращающееся в нуль глобальное сечение расслоения  $E(-\ell)$  с  $\ell > 0$ , что противоречит предыдущим договорённостям.

Теперь мы можем обнулить все  $f_i$ , прибавляя к первой строке остальные строки, умноженные на подходящие полиномы от  $t$  (этому соответствуют регулярные обратимые замены тривиализации над картой  $\mathbb{A}_{(0)}^1$ ). В результате матрица перехода станет диагональной, как и требовалось.  $\square$

**6.4. Линейные системы сечений.** Зафиксируем на многообразии  $X$  какое-нибудь линейное раслоение  $L$  с ненулевым модулем глобальных сечений. Проективизация  $\mathbb{P}(W)$  любого ненулевого подпространства  $W \subset \Gamma(X, L)$  в пространстве глобальных сечений раслоения  $L$  называется *линейной системой* (или *линейным рядом*) на  $X$  и по-традиции обозначается  $|W|$ . Линейная система всех сечений  $\mathbb{P}(\Gamma(X, L))$  называется *полной*. Размерность проективного пространства  $\mathbb{P}(W)$  называется *размерностью* линейной системы. Если эта размерность больше нуля (т. е. при  $\dim W \geq 2$ ), система называется *подвижной*; 1-мерные и 2-мерные и 3-мерные линейные системы по-старинке называют (*линейными*) *пучками, связками и сетями* соответственно. Точка  $x \in X$  называется *базисной* (или *осо-бой*) точкой данной линейной системы, если все сечения последней обращаются в этой точке в нуль.

Геометрически, каждое сечение  $s \in \Gamma(X, L)$  определяет в  $X$  подсхему

$$V(s) = \{x \in X \mid s(x) = 0\},$$

которая называется *дивизором нулей* сечения  $s$ . На учёном языке,  $V(s)$  является *схемным прообразом*<sup>1</sup> относительно морфизма  $s : X \rightarrow L$  замкнутой подсхемы  $X \subset L$ , вложенной в  $L$  как нулевое сечение. Иначе говоря, мы имеем диаграмму замены базы

$$\begin{array}{ccc} V(s) = X \times_X X & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow \text{нулевое сечение} \\ X & \xrightarrow{s} & L \end{array}$$

Локально, в каждой аффинной карте  $U \subset X$ , где  $L$  тривиализуется посредством базисного сечения  $e_u$ , сечение  $s$  представляется в виде  $s = f_u \cdot e_u$ , где  $f_u \in \mathcal{O}_X(U)$  является регулярной функцией на  $U$ . Поэтому  $V(s) \cap U = V(f_u)$  локально является гиперповерхностью нулей функции  $f_u$ . Функция  $f_u$  называется *локальным уравнением дивизора*  $V(s)$ .

При выборе другой тривиализации  $e'_u$  локальное уравнение умножается на регулярную и нигде на  $U$  не обращающуюся функцию на  $U$ . Это не меняет идеала  $(f_u) \subset \mathcal{O}_X(U)$ . Идеалы  $(f_u)$  составляют *пучок идеалов*  $\mathcal{J}(s) \subset \mathcal{O}_X$  в пучке регулярных функций, и подсхема  $V(s) \subset X$  иначе может описана как множество нулей этого пучка идеалов.

Пучок идеалов  $\mathcal{J}(s)$  локально свободен ранга 1: он тривиализуется локальными сечениями  $f_u$  над теми же открытыми множествами, над которыми тривиализуется  $L$ , при чём равенство  $s = f_u e_u = f_v e_v$  над  $U \cap V$  показывает, что функции перехода пучка  $\mathcal{J}(s)$  обратны к функциям перехода пучка сечений  $\mathcal{L}$  раслоения  $L$ . Таким образом,  $\mathcal{J}(s) = \mathcal{L}^*$  является пучком сечений линейного раслоения  $L^*$ , двойственного к  $L$ .

Поскольку пропорциональные сечения имеют одинаковые схемы нулей, дивизоры нулей сечений  $s \in W$ , как геометрические фигуры внутри  $X$ , определяются точками проективного пространства  $|W|$ . Таким образом, линейные системы дивизоров обобщают те игры с пучками кривых, которыми мы занимались на первых лекциях.

Пример 6.2 (полная линейная система  $|\mathcal{O}(d)|$  на  $\mathbb{P}(V)$ )

Пространство проективных гиперповерхностей степени  $d$  на  $\mathbb{P}(V)$  это не что иное как полная линейная система  $|\mathcal{O}(d)| \simeq \mathbb{P}(S^d V^*)$ . В самом деле, будучи тривализовано какими-

<sup>1</sup>см. п. 5.2.2 на стр. 124

либо сечениями  $e_\alpha$  над аффинными картами<sup>1</sup>  $U_\alpha$  (с  $\alpha \in V^*$ ), расслоение  $\mathcal{O}(d)$  задаётся коциклом

$$f_{\alpha\beta} = \frac{e_\beta}{e_\alpha} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^d \quad (6-5)$$

и пучок его сечений можно отождествить с пучком однородных степени  $d$  рациональных функций от однородных координат на  $\mathbb{P}(V)$ , сечения которого над  $U$  представляют собой стандартные классы эквивалентности дробей  $f(x)/g(x)$  с однородными  $f, g$ , такими что  $\deg f - \deg g = d$  и  $g(x) \neq 0 \quad \forall x \in U$ . В самом деле, в терминах однородных координат,  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(V)}(U_\alpha)$  отождествляется с кольцом однородных рациональных функций степени нуль от однородных координат без полюсов на  $U_\alpha$ , а функции степени  $d$  без полюсов на  $U_\alpha$  представляют собой свободный модуль ранга 1 над этой алгеброй, порождённый образующей  $\alpha^d$ , и функции перехода между этими образующими совпадают с коциклом (6-5). В частности, глобальные сечения пучка  $\mathcal{O}(d)$  это в точности глобально определённые однородные рациональные функции, т. е. однородные многочлены степени  $d$ .

На этом языке особенно хорошо видно, чем сечения линейных расслоений отличаются от функций: мы не можем вычислить «значение» сечения, поскольку это лишь вектор в одномерном пространстве над  $\mathbb{k}$ , но не число из поля  $\mathbb{k}$ . Числом же является координата этого вектора в каком-то базисе, т. е. «отношение двух сечений». Именно поэтому «однородная функция» степени  $d$  на  $\mathbb{P}_n$  это вовсе не функция, так как она не соотносится числа точке  $\mathbb{P}_n$ . Однако отношение двух таких сечений уже будет функцией, т. е. сечением пучка  $\mathcal{O}$ , и может вычисляться в  $\mathbb{k}$ .

**6.4.1. Проективные морфизмы  $X \rightarrow \mathbb{P}(W^*)$ .** Каждая подвижная линейная система  $|W|$  на  $X$  канонически задаёт рациональное отображение

$$X \setminus \{\text{базисные точки } W\} \xrightarrow{x \mapsto \text{Ann}_W(x)} \mathbb{P}(W^*), \quad (6-6)$$

переводящее точку  $x \in X$  в линейное подпространство  $\text{Ann}_W(x) = \{s \in W \mid s(x) = 0\}$  коразмерности 1 в  $W$ , т. е. в точку двойственного проективного пространства  $|W|^\times$ .

Убедиться в том, что  $\text{Ann}_W(x)$  является подпространством коразмерности 1, можно зафиксировав какое-нибудь локальное сечение  $e$ , тривидализующее расслоение  $L$  в некоторой окрестности  $U$  точки  $x$ , и записав каждое  $s \in W$  в виде  $s = f_s \cdot e$  с  $f_s \in \mathcal{O}_x(U)$ . Отображение вычисления координат сечения в точке  $x$

$$\text{ev}_{x,e} : W \xrightarrow{s \mapsto f_s(x)} \mathbb{k}$$

является линейной формой на пространстве сечений. Если точка  $x$  не базисная, эта линейная форма эпиморфна, и если к тому же  $\dim W \geq 2$ , ядро этой формы является ненулевым подпространством коразмерности 1 в  $W$ .

**6.4.2. Ещё раз про 27 прямых на кубической поверхности.** Рассмотрим шесть не лежащих на одной конике точек  $p_1, p_2, \dots, p_6 \in \mathbb{P}_2$ , никакие три из которых не коллинеарны, и обозначим через  $|W| \subset |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)|$  линейную систему всех плоских кубических кривых проходящих через эти 6 точек.

Упражнение 6.8. Убедитесь, что  $\dim |W| = 3$  (а  $\dim W = 4$ ).

<sup>1</sup>Напомним, что  $U_\alpha = \mathbb{P}(V) \setminus V(\alpha)$  это дополнение до гиперплоскости, заданной линейной формой  $\alpha \in V^*$

Конструкция (6-6) задаёт регулярный морфизм  $w : \mathbb{P}_2 \setminus \{p_1, p_2, \dots, p_6\} \rightarrow \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(W^*)$ , который можно продолжить до регулярного морфизма проективных многообразий, раздлив 6 точек  $p_1, p_2, \dots, p_6$ . Мы получим диаграмму:

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ \sigma \swarrow & & \searrow \tilde{w} \\ \mathbb{P}_2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}(W^*) \end{array} \quad (6-7)$$

в которой  $\sigma$  — проекция раздутья  $X$  на исходное  $\mathbb{P}_2$ , а  $w$  — проективный морфизм, задаваемый линейной системой  $W$  и понимаемый как рациональное отображение, определённое вне базисных точек  $p_1, p_2, \dots, p_6$ , а  $\tilde{w}$  — проективный морфизм, ассоциированный с линейной системой  $\tilde{W}$  на  $X$ , натянутой на собственные прообразы<sup>1</sup> всех кривых из  $W$ . Последняя линейная система уже не имеет базисных точек, так как для любого  $\tau \in \sigma^{-1}(p_i)$  можно указать кубику из  $W$ , собственный прообраз которой через  $\tau$  не проходит<sup>2</sup>. Итак, мы имеем замкнутое проективное подмногообразие

$$S \stackrel{\text{def}}{=} \overline{w(\mathbb{P}_2 \setminus \{p_0, p_1, \dots, p_6\})} = \tilde{w}(X) \subset \mathbb{P}_3 = \mathbb{P}(W^*) .$$

**Упражнение 6.9.** Убедитесь, что отображение  $\tilde{w}$  инъективно, а  $S$  это поверхность.

Заметим теперь, что прямые в  $\mathbb{P}(W^*)$ , понимаемые как пересечения пучков плоскостей, взаимно однозначно соответствуют прямым в  $|W|$  (ибо точка в  $|W|$  это плоскость в  $\mathbb{P}(W^*)$ ), причём точка  $w(x) \in S$  тогда и только тогда лежит на прямой  $\ell^\times \subset \mathbb{P}(W^*)$ , являющейся пересечением пучка плоскостей  $\ell \subset |W|$ , когда все кубические кривые из пучка  $\ell$  проходят через точку  $x \in \mathbb{P}_2$ .

**Упражнение 6.10.** Убедитесь, что  $\deg S = 3$ , т. е.  $S$  является кубической поверхностью в  $\mathbb{P}_3$ .

Итак, мы получаем совершенно ручную модель кубической поверхности, на которой, среди прочего, видны те 27 прямых, что мы не без труда построили в § 5.5.1. Так, 15 прямых отвечают пучкам распавшихся кубик, образованных прямой  $(p_i p_j)$  и пучком коника, проходящих через остальные 4 точки  $p_v$  с  $v \neq i, j$  (это в частности образы прямых  $(p_i p_j) \subset \mathbb{P}_2$  при отображении  $w$  или, что то же самое, образы их собственных  $\sigma$ -прообразов  $(\widetilde{p_i p_j}) \subset X$  при отображении  $\tilde{w}$ ). Ещё 6 прямых отвечают пучкам распавшихся кубик, образованных пучком прямых через  $p_i$  и коникой  $Q_i$  через остальные пять точек  $p_v$  с  $v \neq i$  (это в частности образы коника  $Q_i \subset \mathbb{P}_2$  при отображении  $w$  или, что то же самое, образы их собственных  $\sigma$ -прообразов  $\widetilde{Q}_i \subset X$  при отображении  $\tilde{w}$ ).

**Упражнение 6.11.** Найдите остальные 6 прямых на  $S$  и (не опираясь на вычисления из § 5.5.1) опишите попарные пересечения всех 27 прямых. Можете ли Вы что-нибудь сказать об их тройных пересечениях?

<sup>1</sup>собственным прообразом подмногообразия  $Z \subset \mathbb{P}_n$  при раздутьи  $X \xrightarrow{\sigma} \mathbb{P}_n$  какого-то множества точек  $M \subset \mathbb{P}_n$  называется замыкание  $\widetilde{Z} \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^{-1}(Z \setminus M)$ ; иначе говоря, для каждой точки  $p \in M \cap Z$  мы включаем в  $\widetilde{Z}$  не весь исключительный дивизор  $\sigma^{-1}(p)$ , а только те его точки, которые отвечают геометрическим касательным к  $Z$  в точке  $p$

<sup>2</sup>например, объединение коники, проходящей через остальные пять точек  $p_v$ , с любой прямой, проходящей через  $p_i$  и отличной от  $\tau$

### Задачи для самостоятельного решения к §6

**Задача 6.1.** Покажите, что в подвижной линейной системе всегда можно отыскать дивизор, проходящий через любую наперёд заданную небазисную точку.

**Задача 6.2.** Пусть  $\dim |W| = m$  и  $s_0, s_1, \dots, s_m$  составляют базис в  $W$ . Покажите, что в однородных координатах относительно двойственного базиса пространства  $W^*$  отображение (6-6) корректно задаётся формулой

$$x \mapsto \left( f_{s_0}(x) : f_{s_1}(x) : \dots : f_{s_m}(x) \right),$$

где  $f_{s_i} = s_i/e \in \mathcal{O}_X(U)$  суть координаты сечений  $s_i$  в какой-нибудь локальной тривиализации  $e : U \hookrightarrow L$  расслоения  $L$  над окрестностью  $U \ni x$ .

**Задача 6.3.** Сравните отображение (6-6) задаваемое полной линейной системой  $|\mathcal{O}(d)|$  на  $X = \mathbb{P}(V)$  с отображением Веронезе  $\mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(S^n V)$ .

**Задача 6.4.** Сравните отображение (6-6) задаваемое на  $X = \mathrm{Gr}(m, V)$  полной линейной системой  $|\Lambda^m S^*|$  (двойственной к старшей внешней степени тавтологического расслоения) с отображением Плюккера  $\mathrm{Gr}(m, V) \rightarrow \mathbb{P}(\Lambda^m V)$ .

**Задача 6.5.** Пусть  $w : X \rightarrow \mathbb{P}(W^*)$  проективный морфизм (6-6) ассоциированный с подвижной линейной системой  $W \subset \Gamma(X, L)$  без базисных точек,  $\mathcal{L}$  пучок сечений расслоения  $L$ , и  $\mathcal{O}(1)$  пучок сечений линейного расслоения на  $\mathbb{P}(W^*)$ , двойственного к тавтологическому. Покажите, что обратный образ  $w^* \mathcal{O}(1)$  совпадает с подпучком в  $\mathcal{L}$ , линейно порождённым над  $\mathcal{O}_X$  глобальными сечениями из  $W$  (в частности, для полной линейной системы  $W = \Gamma(X, L)$  получаем равенство  $w^* \mathcal{O}(1) = L$ , как в упр. 6.1).

**Задача 6.6.** Убедитесь, что наклонная стрелка  $\tilde{w}$  на диаграмме из форм. (6-7) на стр. 150 является регулярным изоморфизмом между  $X$  и  $S$ .

## Ответы и указания к некоторым упражнениям

Упр. 1.2. В правой части стоит геометрическая прогрессия  $q^n + q^{n-1} + \dots + q + 1$ , а слева — количество ненулевых векторов в  $(n+1)$ -мерном пространстве, делённое на количество ненулевых векторов в одномерном пространстве, т. е.  $(q^{n+1} - 1)/(q - 1)$ .

Упр. 1.3. Это очевидно из подобия прямоугольных треугольников на рис. 1♦2 на стр. 6, а также из соотношения  $(s : 1) = (x_0 : x_1) = (1 : t)$ .

Упр. 1.9. В качестве точек  $q$  и  $r$ , задающих такую прямую, можно взять компоненты  $u, w$  разложения любого вектора  $v \in V$ , отвечающего точке  $p \in \mathbb{P}(V)$ . Наоборот, если  $v$  лежит в двумерном векторном подпространстве с базисом  $u, v$ , где  $u \in U$  и  $w \in W$ , то компоненты разложения вектора  $v$  по  $U$  и  $W$  пропорциональны  $u$  и  $w$  в силу единственности такого разложения.

Упр. 1.11. Пусть  $L_1 = \mathbb{P}(U), L_2 = \mathbb{P}(W), p = \mathbb{P}(\mathbb{k} \cdot e)$ . Поскольку  $p \notin L_2, V = W \oplus \mathbb{k} \cdot e$ . Центральная проекция из  $p$  индуцирована линейной проекцией  $V$  на  $W$  вдоль  $\mathbb{k} \cdot e$ . Так как  $p \notin L_1$ , ограничение этой проекции на подпространство  $U$  имеет нулевое ядро и, стало быть, является линейным изоморфизмом.

Упр. 1.12. Это частный случай упр. 1.11.

Упр. 1.13. Строим перекрёстную ось  $\ell$  (соединяющую точки  $(a_1 b_2) \cap (b_1, a_2)$  и  $(c_1 b_2) \cap (b_1, c_2)$ ) и берём в качестве  $\varphi(x)$  точку пересечения прямой  $\ell_2$  с прямой, соединяющей точки  $b_1$  и  $\ell \cap (x, b_2)$ .

Упр. 1.14. Пусть  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$  и дробно линейные автоморфизмы

$$\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1 \quad \text{и} \quad \varphi_q : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$$

таковы, что прообразами точек  $\infty, 0, 1$  являются, соответственно,  $p_1, p_2, p_3$  и  $q_1, q_2, q_3$ . Тогда  $\varphi_p(p_4) = \varphi_q(q_4)$  и  $\varphi_q^{-1} \circ \varphi_p$  переводит  $p_1, p_2, p_3, p_4$  в  $q_1, q_2, q_3, q_4$ . Наоборот, если  $\varphi_p : \mathbb{P}_1 \xrightarrow{\sim} \mathbb{P}_1$  переводит  $p_1, p_2, p_3$  в  $\infty, 0, 1$ , а  $\varphi_{qp}$  переводит  $p_1, p_2, p_3, p_4$  в  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , то  $\varphi_p \circ \varphi_{qp}^{-1}$  переводит  $q_1, q_2, q_3, q_4$ , соответственно, в  $\infty, 0, 1, [p_1, p_2, p_3, p_4]$ , откуда  $[p_1, p_2, p_3, p_4] = [q_1, q_2, q_3, q_4]$ .

Упр. 2.12. см. п.° 1.3.2 на стр. 10.

Упр. 2.13. При выборе другой прямой  $\ell'$  проекция  $P : C_{\text{ver}} \rightarrow \ell'$  будет композицией исходной проекции  $P : C_{\text{ver}} \rightarrow \ell$  и перспективы  $P : \ell \rightarrow \ell'$ , которая сохраняет двойные отношения. Аналогично, при выборе другой точки  $P' \in C_{\text{ver}}$  проекция  $P' : C_{\text{ver}} \rightarrow \ell$  будет композицией исходной проекции  $P : C_{\text{ver}} \rightarrow \ell$  и отображения  $\ell \rightarrow \ell$ , являющегося композицией проекции  $P : \ell \rightarrow C_{\text{ver}}$  прямой  $\ell$  на конику Веронезе из точки  $P$ , а затем проекции  $P' : C_{\text{ver}} \rightarrow \ell$  коники Веронезе обратно на прямую  $\ell$  из точки  $P'$ . Это отображение биективно и рационально, и стало быть, является дробно линейным автоморфизмом прямой  $\ell$ , а значит, сохраняет двойные отношения.

Упр. 2.15. Правило  $x' \leftrightarrow x'' \iff (x' x'') \ni s$  задаёт на  $C$  инволюцию, действие которой совпадает с действием  $\sigma$  на четырёх точках  $a', a'', b', b''$ .

Упр. 2.17. Вложим прямую в  $\mathbb{P}_2$  в качестве коники Веронезе  $C_{\text{ver}}$ . Всякие две различных инволюции  $\sigma_1, \sigma_2 : C_{\text{ver}} \xrightarrow{\sim} C_{\text{ver}}$  высекаются пучками прямых с центрами в двух различных точках  $s_1, s_2 \notin C_{\text{ver}}$  и одинаково действуют на единственную пару точек  $(s_1 s_2) \cap C_{\text{ver}}$ .

Упр. 2.21. (Ср. с общей теорией из прим. 2.6.) Рассмотрим конус  $C = P \cap T_p P$ . Он имеет вершину в  $p$  и состоит из всех прямых, проходящих через  $p$  и лежащих на  $P$ . Фиксируем 3-мерную гиперплоскость  $H \subset T_p P$ , которая не содержит  $p$ . Тогда  $G = C \cap H$  есть невырожденная квадрика на  $H$ . Таким образом, любая прямая, проходящая через  $p$ , имеет вид  $(pp') = \pi_\alpha \cap \pi_\beta$ , где  $p' \in G$  и плоскости  $\pi_\alpha, \pi_\beta$  натянутые на  $p$  и две прямые, проходящие через  $p'$  в  $G$  (см. рис. 2♦11).

Упр. 3.3. Дословно годится рассуждение, использованное в п° 2.4.1 перед формулой (2-11) на стр. 42

Упр. 3.4. Зафиксируем в пространствах  $U$  и  $W$  базисы  $u_1, u_2, \dots, u_n$  и  $w_1, w_2, \dots, w_m$ . Тогда  $m n$  разложимых тензоров  $u_i^* \otimes w_j$ , где  $u_1^*, u_2^*, \dots, u_n^* \in U^*$  — двойственный к  $u_1, u_2, \dots, u_n$  базис пространства  $U^*$ , составляют тензорного произведения  $U^* \otimes V$ , соответствующие им операторы действуют на базисные векторы пространства  $U$  по правилу

$$u_i^* \otimes w_j : u_k \longmapsto \begin{cases} w_j & \text{при } k = i \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

т. е. матрица оператора  $u_i^* \otimes w_j$  в выбранных нами базисах — это стандартная базисная матрица с единицей в пересечении  $j$ -той строки и  $i$ -того столбца и с нулями в остальных местах. Таким образом, стандартный базис тензорного произведения  $U^* \otimes V$  переводится в стандартный базис пространства операторов.

Упр. 3.5. Для любого линейного отображения  $f : V \rightarrow A$  отображение

$$V \times V \times \dots \times V \rightarrow A,$$

переводящее  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  в произведение  $\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \dots \cdot \varphi(v_n) \in A$  полилинейно, и значит, корректно определяет для каждого  $n \in \mathbb{N}$  линейное отображение  $V^{\otimes n} \rightarrow A$ , которые все вместе задают гомоморфизм алгебр  $TV \rightarrow A$ , продолжающий  $f$ , причём всякий гомоморфизм  $TV \rightarrow A$ , продолжающий  $f$ , должен переводить разложимый тензор  $v_1 \otimes v_2 \otimes \dots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$  в  $\varphi(v_1) \cdot \varphi(v_2) \cdot \dots \cdot \varphi(v_n) \in A$ , и стало быть, должен совпадать с построенным продолжением. Это доказывает выполнение универсального свойства. Тот факт, что  $SV$  и  $\iota$  однозначно определяются этим универсальным свойством, доказывается дословно также, как в лем. 3.1 на стр. 56.

Упр. 3.6. Поскольку разложимые тензоры линейно порождают  $V^{*\otimes n}$  и формула

$$i_v \varphi(w_1, w_2, \dots, w_{n-1}) = \varphi(v, w_1, w_2, \dots, w_{n-1})$$

линейна по  $v$  и по  $\varphi$ , достаточно проверять её для форм  $\varphi$ , переводимых изоморфизмом (3-11) в разложимые тензоры вида  $\xi_1 \otimes \xi_2 \otimes \dots \otimes \xi_n$ , а для таких форм она очевидна из построения.

Упр. 3.7. Для любых  $v, w$  имеем

$$0 = \varphi(\dots, (v + w), \dots, (v + w), \dots) = \varphi(\dots, v, \dots, w, \dots) + \varphi(\dots, w, \dots, v, \dots)$$

Наоборот, равенство  $\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots) = -\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots)$  влечёт при  $1 \neq -1$  равенство  $\varphi(\dots, v, \dots, v, \dots) = 0$ .

Упр. 3.8. Годятся дословно те же формальные соображения, что и в доказательстве лем. 3.1 на стр. 56

Упр. 3.9. Ответ:  $\binom{n+d-1}{d-1}$ , или число решений уравнения  $m_1 + m_2 + \dots + m_d = n$  в неотрицательных целых числах  $m_1, m_2, \dots, m_d$ .

Упр. 3.10. Для любого линейного отображения  $f : V \rightarrow A$  отображение

$$V \times V \times \dots \times V \rightarrow A,$$

переводящее  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$  в произведение  $\prod \varphi(v_i)$  в  $A$  полилинейно и симметрично, и значит, корректно определяет для каждого  $n \in \mathbb{N}$  линейное отображение  $S^n V \rightarrow A$ , которые все вместе задают гомоморфизм алгебр  $SV \rightarrow A$ , продолжающий  $f$ . Наоборот, любой гомоморфизм  $SV \rightarrow A$ , продолжающий  $f$ , должен переводить разложимый тензор  $\prod v_i \in S^n V$  в  $\prod \varphi(v_i) \in A$ , и стало быть, будет совпадать с построенным продолжением. Это доказывает выполнение универсального свойства. Тот факт, что  $SV$  и  $\iota$  однозначно определяются этим универсальным свойством, доказывается дословно также, как в лем. 3.1 на стр. 56.

Упр. 3.11. Первое вытекает из равенства  $0 = (v + w) \otimes (v + w) = v \otimes w + w \otimes v$ , второе — из того, что равенство  $v \otimes v + v \otimes v = 0$  при  $1 + 1 \neq 0$  влечёт равенство  $v \otimes v = 0$ .

Упр. 3.12. Модифицируйте доказательство предл. 3.1 на стр. 64.

Упр. 3.17. Стабилизатор каждого слагаемого в симметрической группе  $S_n$  состоит из

$$m_1! m_2! \dots m_d!$$

независимых перестановок одинаковых сомножителей между собою. Остается применить формулу для длины орбиты.

Упр. 3.18. Для  $t \in V^{\otimes n}$  и  $g \in S_n$  обозначим через  $g(t)$  результат действия  $g$  на  $t$  перестановкой тензорных сомножителей, как в (3-29). Утверждения (а) и (б) вытекают из того, что для каждого  $h \in S_n$  выполняются равенства

$$\begin{aligned} h\left(\sum_{g \in S_n} g(t)\right) &= \sum_{g \in S_n} hg(t) = \sum_{g' \in S_n} g'(t) \\ h\left(\sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot g(t)\right) &= \operatorname{sgn}(h) \cdot \sum_{g \in S_n} \operatorname{sgn}(hg) \cdot hg(t) = \operatorname{sgn}(h) \cdot \sum_{g' \in S_n} \operatorname{sgn}(g) \cdot g'(t) \end{aligned}$$

(ибо отображение  $g \mapsto g' = hg$  взаимно однозначно), мы заключаем, что

$$h(\operatorname{sym}_n(t)) = \operatorname{sym}_n(t) \quad \text{и} \quad h(\operatorname{alt}_n(t)) = \operatorname{sgn}(h) \cdot \operatorname{alt}_n(t).$$

Утверждения (в) и (г) очевидны (обе суммы состоят из  $n!$  одинаковых слагаемых). В (д) суммы по чётным и по нечётным перестановкам будут состоять из одних и тех же (и одинаковых внутри каждой из сумм) слагаемых, отличающихся знаком.

Упр. 3.19. Первое проверяется прямым вычислением. Что касается второго, то из равенства  $\operatorname{sym}_3 + \operatorname{alt}_3 + p = E$  вытекает, что образы  $\operatorname{im}(\operatorname{sym}_3) = \operatorname{Sym}^3(V)$ ,  $\operatorname{im}(\operatorname{alt}_3) = \operatorname{Skew}^3(V)$  и  $\operatorname{im}(p)$  линейно порождают  $V^{\otimes 3}$ , поскольку любой  $t \in V^{\otimes 3}$  представляется как  $t = E(t) = \operatorname{sym}_3(t) + \operatorname{alt}_3(t) + p(t)$ . Эта сумма прямая в силу того, что, с одной стороны, каждый из трёх операторов являются проектором и действует на своём образе тождественно, а с другой стороны, аннулирует образы двух оставшихся операторов в следствие равенств  $p \circ \operatorname{alt}_3 = \operatorname{alt}_3 \circ p = p \circ \operatorname{sym}_3 = \operatorname{sym}_3 \circ p = 0$  и равенств  $\operatorname{sym}_3 \circ \operatorname{alt}_3 = \operatorname{alt}_3 \circ \operatorname{sym}_3 = 0$ , вытекающих из

упр. 3.18. Например, если  $t \in \text{im}(p) \cap (\text{im}(\text{sym}_3) + \text{im}(\text{alt}_3))$ , то  $t = p(t)$ , а записывая  $t$  как  $\text{sym}_3(t_1) + \text{alt}_3(t_2)$ , получим  $p(t) = 0$ , откуда  $t = 0$ .

Упр. 3.20. Утверждение задачи равносильно тому, что  $\text{im}(p) \subset V^{\otimes 3}$  является аннулятором образа оператора  $\text{Id} + T + T^2 : V^{*\otimes 3} \rightarrow V^{*\otimes 3}$ :

$$\text{im}(p) = \{t \in V^{\otimes 3} \mid \langle (\text{Id} + T + T^2)\xi, t \rangle = 0 \ \forall \xi \in V^{*\otimes 3}\},$$

где  $\langle *, * \rangle$  означает полную свёртку между  $V^{*\otimes 3}$  и  $V^{\otimes 3}$ . Легко видеть, что для любых  $g \in S_n$ ,  $\xi \in V^{*\otimes n}$ ,  $t \in V^{\otimes n}$  выполняется равенство  $\langle g\xi, t \rangle = \langle \xi, g^{-1}t \rangle$ . Поэтому утверждение задачи равносильно тому, что образ  $p$  совпадает с ядром оператора

$$\text{Id}^{-1} + T^{-1} + T^{-2} = \text{Id} + T^2 + T = 3(\text{alt}_3 + \text{sym}_3),$$

действующего на  $V^{\otimes 3}$ . Но из решения упр. 3.19 видно, что  $\text{alt}_3 + \text{sym}_3$  — это проектор  $V^{\otimes 3}$  на подпространство  $\text{Sym}^3 V \oplus \text{Skew}^3 V$  вдоль подпространства  $\text{im}(p)$ .

Упр. 3.22. Поскольку утверждение линейно по  $v, f$  и  $g$  достаточно проверить его для  $v = e_i$ ,  $f = x_1^{m_1} \dots x_d^{m_d}$ ,  $g = x_1^{k_1} \dots x_d^{k_d}$ , что делается прямо по определению.

Упр. 3.23. Это следует из равенства  $\tilde{f}(v, x, \dots, x) = \frac{1}{n} \cdot \partial_v f(x)$ , где  $n = \deg f$ .

Упр. 3.25. Это аналогично упр. 3.22.

Упр. 3.26. Фиксируем в  $U$  базис  $e_1, e_2, \dots, e_m$ . Если  $\omega \notin \Lambda^m U$ , то в  $\omega$  есть моном  $e_I$ , не содержащий какого-нибудь базисного вектора — скажем,  $e_i$ . Тогда  $e_i \wedge \omega \neq 0$ , поскольку будет содержать ненулевой моном  $e_{i \sqcup I}$ , возникающий только из произведения  $e_i$  на  $e_I$  и, стало быть, не способный ни с чем сократиться. Наоборот, если  $\omega \in \Lambda^m U$ , то  $\omega = \lambda \cdot e_1 \wedge e_2 \wedge \dots \wedge e_m$  и  $e_i \wedge \omega = 0 \ \forall i$ , а значит,  $u \wedge \omega = 0 \ \forall u \in U$ .

Упр. 4.1. Если  $a$  и  $b$  являются старшими коэффициентами многочленов  $f(x)$  и  $g(x)$  из идеала  $I$ , причём  $\deg f = m$  и  $\deg g = n$ , где  $m \geq n$ , то  $a + b$  либо равно нулю, либо является старшим коэффициентом многочлена  $f(x) + x^{m-n} \cdot g(x) \in I$  степени  $m$ . Аналогично, для любого  $\alpha \in A$  произведение  $\alpha a$  является старшим коэффициентом многочлена  $\alpha f(x) \in I$  степени  $m$ .

Упр. 4.4. Ответ: на ось  $x$  с координатой  $t$ .

Упр. 4.7. Иначе  $X = (X \setminus U) \cup V(f - g)$ .

Упр. 4.8. Используйте покрытие  $U = \bigcup \mathcal{D}(x_i)$  и утверждение лем. 4.10.

Упр. 4.10. Пусть  $A = \mathbb{k}[X]$ ,  $B = \mathbb{k}[Y]$ . Вложение  $B \hookrightarrow^{\varphi^*} A$  задаёт на  $A$  структуру конечно порождённой  $B$ -алгебры, т. е.  $A \simeq B[x_1, x_2, \dots, x_m]/J$ .

Упр. 5.7. Пусть  $X_1, X_2 \subset X$  — два замкнутых неприводимых подмножества и  $U \subset X$  — открытое множество, такое что оба пересечения  $X_1 \cap U, X_2 \cap U$  непусты. Тогда  $X_1 = X_2 \iff X_1 \cap U = X_2 \cap U$ , поскольку  $X_i = \overline{X_i \cap U}$ .

Упр. 5.8. Для любой цепочки (5-6) в  $Y$  для каждого  $i$  найдётся неприводимая компонента  $\varphi^{-1}(X_i)$ , сюръективно отображающаяся на  $X_i$ . Это дает цепочку (5-6) в  $X$ .

Упр. 5.9. Докажите, что произведение конечных сюръекций  $X \rightarrow \mathbb{A}^n, Y \rightarrow \mathbb{A}^m$  является конечной сюръекцией  $X \times Y \rightarrow \mathbb{A}^n \times \mathbb{A}^m$ .

Упр. 5.10. Постройте конечную сюръективную проекцию  $V(f) \rightarrow \mathbb{A}^{n-1}$  (ср. с упр. 5.6 и следствием из сл. 5.4).

Упр. 5.12.  $C_F$  инвариантна относительно перестановок координат. С точностью до такой перестановки, пара линейных уравнений, задающих прямую  $\ell \subset C_F$ , приводится методом Гаусса к  $x_0 = \alpha x_2 + \beta x_3$ ,  $x_1 = \gamma x_2 + \delta x_3$ . Подставьте эти значения в уравнение кубики, покажите, что  $\alpha\beta\gamma\delta = 0$ , а затем найдите их.

Упр. 5.13. Ответ:  $|\mathfrak{G}| = 51840 = 2^7 \cdot 3^4 \cdot 5$

Упр. 5.14. Проективизация унитарной группы  $\mathrm{PU}_4(\mathbb{F}_4)$  сохраняет кубику Ферма  $C_F$  из упр. 5.12, поскольку кубическая форма Ферма над  $\mathbb{F}_4$  — это эрмитова форма  $\sum x_i \bar{x}_i$ .

Упр. 6.4. Подъём линейных расслоений относительно автоморфизма  $\varphi : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$  задаёт автоморфизм группы Пикара:  $\varphi^* : \mathrm{Pic}(\mathbb{P}_n) \rightarrow \mathrm{Pic}(\mathbb{P}_n)$ . Выведите отсюда, что  $\varphi^*(\mathcal{O}(1)) = \mathcal{O}(1)$  и  $\varphi$  является проективным морфизмом (6-6), ассоциированным с полной линейной системой гиперплоскостей  $|\mathcal{O}(1)|$ .

Упр. 6.8. Условие прохождения через точку задаёт гиперплоскость в 10-мерном векторном пространстве  $\Gamma(\mathbb{P}_2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(3)) = S^3 V^*$ ; линейная зависимость между нашими шестью плоскостями означала бы, что всякая кубика, проходящая через некоторые пять из наших точек, автоматически проходит и через оставшуюся шестую; покажите, что это возможно только тогда, когда все 6 точек лежат на одной конике.

Упр. 6.10. Число точек пересечения  $S$  с общей прямой это число отличных от  $p_1, p_2, \dots, p_6$  точек на  $\mathbb{P}_2$ , через которые проходят все кубики из общего пучка  $\lambda C_1 + \mu C_2$ , такого что  $p_1, p_2, \dots, p_6 \subset C_1 \cap C_2$ ; по теореме Безу  $\#(C_1 \cap C_2) = 9$ .

Упр. 6.11. Недостающие 6 прямых являются образами  $\tilde{w}(\sigma^{-1}(p_i))$  шести исключительных прямых на  $X$ .