

Правительство Российской Федерации

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

УДК: 512.7, 512.58, 512.66,
515.162, 515.165, 519.17,
517.958:530.145

№ госрегистрации: 01201055238

Инв. № 67.10

УТВЕРЖДАЮ
первый проректор НИУ ВШЭ,
докт. экон. наук, профессор

_____ Л. М. Гохберг

«_____» сентября 2012 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
ПО ГОСУДАРСТВЕННОМУ КОНТРАКТУ

№ 02.740.11.0608

(шифр заявки 2010-1.1-111-023-005)

«Разработка новых методов изучения
интегрируемых систем и пространств модулей
в геометрии, топологии и математической физике»

ШЕСТОЙ ЭТАП

(заключительный, 6 этап)

Зам. руководителя НИР,
канд. физ.-мат. наук, доцент

_____ А. Л. Городенцев
дата, подпись

Москва 2012

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель темы

д.ф.-м.н.,
проф. _____ С. К. Ландо (введение,
дата, подпись заключение, разд. 1, 4, 11)

Зам. руководителя темы

к.ф.-м.н.,
доц. _____ А. Л. Городенцев (введение,
дата, подпись заключение, разд. 1, 2, 9, 10)

Исполнители темы

д.ф.-м.н. _____ Э. Т. Ахмедов (разд. 5)
дата, подпись

д.ф.-м.н. _____ А. В. Забродин (разд. 6)
дата, подпись

д.ф.-м.н. _____ А. В. Маршаков (разд. 6)
дата, подпись

д.ф.-м.н. _____ А. Д. Миронов (разд. 5)
дата, подпись

д.ф.-м.н. _____ Д. В. Талалаев (разд. 5)
дата, подпись

д.ф.-м.н. _____ Л. О. Чехов (разд. 4, 5)
дата, подпись

к.ф.-м.н. _____ Н. Я. Амбург (разд. 2)
дата, подпись

к.ф.-м.н. _____ С. М. Апенко (разд. 5)
дата, подпись

к.ф.-м.н. _____ Д. В. Васильев (разд. 6)
дата, подпись

к.ф.-м.н. _____ В. А. Побережный (разд. 6)
дата, подпись

к.ф.-м.н. _____ А. А. Рослый (разд. 5)
дата, подпись

к.ф.-м.н. _____ С. М. Харчев (разд. 6)
дата, подпись

к.ф.-м.н. _____ Г. И. Шарыгин (разд. 5)
дата, подпись

| | | |
|-----------|---------------|--|
| к.ф.-м.н. | _____ | Ш. Р. Шакиров (разд. 1) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | Е. С. Сулова (введение, заключение) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | М. А. Бекалдиева (введение, заключение) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | А. В. Аристова (разд. 6) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | Э. Т. Мусаев (разд. 5) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | А. В. Смирнов (разд. 4) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | А. М. Шапиро (разд. 3) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | С. А. Шашков (разд. 2) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | Ф. А. Бурда (разд. 5) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | Б. А. Рунов (разд. 4) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | П. И. Дунин-Барковский (разд. 5) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | Д. М. Галахов (разд. 6) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | А. В. Пополитов (разд. 6) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | А. В. Слепцов (разд. 3) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | Н. Д. Гук (разд. 2) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | В. П. Кирилин (разд. 4) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | В. А. Альба (разд. 5) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | А. Д. Власов (разд. 6) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | А. У. Шарафутдинов (разд. 1) |
| | дата, подпись | |

| | |
|---------------|---------------------------|
| _____ | И. Б. Бобров (разд. 5) |
| дата, подпись | |
| _____ | С. В. Гуц (разд. 5) |
| дата, подпись | |
| _____ | К. М. Булычева (разд. 6) |
| дата, подпись | |
| _____ | О. В. Птицына (разд. 5) |
| дата, подпись | |
| _____ | А. Н. Жуков (разд. 5) |
| дата, подпись | |
| _____ | А. А. Морозов (разд. 2) |
| дата, подпись | |
| _____ | С. А. Миронов (разд. 4) |
| дата, подпись | |
| _____ | Е. А. Зенкевич (разд. 5) |
| дата, подпись | |
| _____ | И. И. Тимирясов (разд. 5) |
| дата, подпись | |
| _____ | Е. В. Крылов (разд. 6) |
| дата, подпись | |
| _____ | Г. А. Аминов (разд. 2) |
| дата, подпись | |
| _____ | И. О. Поляков (разд. 2) |
| дата, подпись | |
| _____ | И. Ю. Поздняков (разд. 5) |
| дата, подпись | |
| _____ | А. С. Анохина (разд. 6) |
| дата, подпись | |
| _____ | Д. В. Калинин (разд. 4) |
| дата, подпись | |

| | | |
|---------------------|---------------|--------------------------------|
| д.ф.-м.н., проф. | _____ | И. В. Артамкин (разд. 2) |
| | дата, подпись | |
| д.ф.-м.н. | _____ | А. И. Буфетов (разд. 8, 9, 10) |
| | дата, подпись | |
| д.ф.-м.н. | _____ | Д. Б. Каледин (разд. 1, 4) |
| | дата, подпись | |
| д.ф.-м.н. | _____ | А. С. Лосев (разд. 4) |
| | дата, подпись | |
| д.ф.-м.н., проф. | _____ | А. Н. Рудаков (разд. 1) |
| | дата, подпись | |
| д.ф.-м.н. | _____ | В. А. Тиморин (разд. 8) |
| | дата, подпись | |
| д.ф.-м.н., проф. | _____ | Б. Л. Фейгин (разд. 7) |
| | дата, подпись | |
| д.ф.-м.н., проф. | _____ | С. М. Хорошкин (разд. 2) |
| | дата, подпись | |
| д.ф.-м.н. | _____ | О. В. Шварцман (разд. 7) |
| | дата, подпись | |
| к.ф.-м.н. | _____ | Ю. М. Бурман (разд. 2) |
| | дата, подпись | |
| к.ф.-м.н. | _____ | М. С. Вербицкий (разд. 10) |
| | дата, подпись | |
| к.ф.-м.н. | _____ | А. И. Зыкин (разд. 3, 7) |
| | дата, подпись | |
| к.ф.-м.н. | _____ | А. В. Клименко (разд. 7) |
| | дата, подпись | |
| к.ф.-м.н. | _____ | С. А. Локтев (разд. 3) |
| | дата, подпись | |

| | | |
|-----------|---------------|-------------------------------|
| к.ф.-м.н. | _____ | А. Ю. Пирковский (разд. 4, 7) |
| | дата, подпись | |
| к.ф.-м.н. | _____ | Л. Е. Посицельский (разд. 7) |
| | дата, подпись | |
| к.ф.-м.н. | _____ | П. Н. Пятов (разд. 7) |
| | дата, подпись | |
| к.ф.-м.н. | _____ | Г. Л. Рыбников (разд. 1) |
| | дата, подпись | |
| к.ф.-м.н. | _____ | Л. Г. Рыбников (разд. 3) |
| | дата, подпись | |
| к.ф.-м.н. | _____ | Е. Ю. Смирнов (разд. 3) |
| | дата, подпись | |
| Ph.D. | _____ | Т. Такебэ (разд. 7) |
| | дата, подпись | |
| к.ф.-м.н. | _____ | М. В. Финкельберг (разд. 3) |
| | дата, подпись | |
| к.ф.-м.н. | _____ | В. А. Кириченко (разд. 1) |
| | дата, подпись | |
| к.ф.-м.н. | _____ | Е. Б. Фейгин (разд. 3) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | Е. А. Абрикосов (разд. 3) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | А. А. Басалаев (разд. 2) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | С. А. Белёв (разд. 7) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | А. В. Богомолов (разд. 10) |
| | дата, подпись | |
| | _____ | Ю. В. Быков (разд. 7) |
| | дата, подпись | |

| | |
|---------------|---------------------------|
| _____ | М. И. Викулина (разд. 3) |
| дата, подпись | |
| _____ | А. В. Гаркуша (разд. 10) |
| дата, подпись | |
| _____ | Р. Р. Гонин (разд. 7) |
| дата, подпись | |
| _____ | Д. И. Грищенко (разд. 4) |
| дата, подпись | |
| _____ | Н. В. Дедушенко (разд. 4) |
| дата, подпись | |
| _____ | Д. О. Дягтерёв (разд. 4) |
| дата, подпись | |
| _____ | Э. С. Дурьев (разд. 3, 5) |
| дата, подпись | |
| _____ | Д. Н. Зарифьян (разд. 6) |
| дата, подпись | |
| _____ | В. И. Жуков (разд. 6) |
| дата, подпись | |
| _____ | А. А. Ионов (разд. 4) |
| дата, подпись | |
| _____ | И. В. Кожанов (разд. 7) |
| дата, подпись | |
| _____ | Д. В. Кубрак (разд. 4) |
| дата, подпись | |
| _____ | Е. П. Кулакова (разд. 4) |
| дата, подпись | |
| _____ | Т. Е. Курдяева (разд. 3) |
| дата, подпись | |
| _____ | П. Ю. Ломова (разд. 2) |
| дата, подпись | |

| | |
|---------------|-----------------------------|
| _____ | С. В. Макарова (разд. 2) |
| дата, подпись | |
| _____ | О. А. Малиновская (разд. 2) |
| дата, подпись | |
| _____ | М. Г. Матушко (разд. 1) |
| дата, подпись | |
| _____ | Л. В. Монин (разд. 3, 5) |
| дата, подпись | |
| _____ | Н. М. Нетрусова (разд. 2) |
| дата, подпись | |
| _____ | Г. С. Папаянов (разд. 7) |
| дата, подпись | |
| _____ | С. А. Пащевская (разд. 8) |
| дата, подпись | |
| _____ | А. В. Плосконосов (разд. 7) |
| дата, подпись | |
| _____ | Д. В. Полякова (разд. 5) |
| дата, подпись | |
| _____ | П. П. Попов (разд. 6) |
| дата, подпись | |
| _____ | П. П. Пушкарь (разд. 3, 5) |
| дата, подпись | |
| _____ | Н. Е. Сахарова (разд. 7) |
| дата, подпись | |
| _____ | П. Ф. Соломатин (разд. 3) |
| дата, подпись | |
| _____ | К. Р. Ступаков (разд. 6) |
| дата, подпись | |
| _____ | Л. А. Суханов (разд. 1) |
| дата, подпись | |

| | |
|-----------------|------------------------------|
| _____ | К. Л. Толмачёв (разд. 9) |
| дата, подпись | |
| _____ | П. В. Томас (разд. 4) |
| дата, подпись | |
| _____ | А. А. Трофимова (разд. 4) |
| дата, подпись | |
| _____ | А. Ю. Фетисов (разд. 4) |
| дата, подпись | |
| _____ | Б. Д. Цвелиховский (разд. 2) |
| дата, подпись | |
| _____ | О. А. Юнин (разд. 6) |
| дата, подпись | |
| _____ | И. С. Ястребов (разд. 8) |
| дата, подпись | |
| _____ | Д. В. Корб (разд. 7) |
| дата, подпись | |
| _____ | Я. В. Абрамов (разд. 1) |
| дата, подпись | |
| _____ | И. В. Нетай (разд. 7) |
| дата, подпись | |
| _____ | А. О. Солдатенков (разд. 5) |
| дата, подпись | |
| _____ | Р. А. Девятов (разд. 2) |
| дата, подпись | |
| Нормоконтролёр: | |
| _____ | В. В. Кузнецова |
| дата, подпись | |

РЕФЕРАТ

Отчет о нир: 189 стр., 209 источников

Ключевые слова: А-БЕСКОНЕЧНОСТЬ СТРУКТУРА, КОМБИНАТОРНЫЙ СИМПЛИЦИАЛЬНЫЙ КОМПЛЕКС, КЛАСС АТЬИ, ХАРАКТЕР ТОДДА, ТРОПИЧЕСКИЙ ПРЕДЕЛ, ХОРДОВАЯ ДИАГРАММА, ВЕСОВАЯ СИСТЕМА, МНОГОЧЛЕН КОНВЕЯ, ПРЕПОТЕНЦИАЛЫ ГРОМОВА – ВИТТЕНА И ВИТТЕНА – ЗАЙБЕРГА, МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ, ВЕКТОР УИТТЕКЕРА, МОДУЛЬ ВЕЙЛЯ, ПРОСТРАНСТВО КВАЗИ-ОТОБРАЖЕНИЙ, ФУНКЦИЯ Q-УИТТЕКЕРА, ТАУ-ФУНКЦИЯ, ПРЕДЕЛ НЕКРАСОВА – ШАТАШВИЛИ, СТАТСУММА, РЕЗУЛЬТАНТ, ДЕТЕРМИНАНТ КОМПЛЕКСА КОПУЛЯ, СООТНОШЕНИЯ ПЛЮККЕРА, ТОЖДЕСТВА УОРДА, ФИЛЬТРАЦИЯ ГАРДЕРА – НАРАСИМХАНА, НАКЛОН, ДАННЫЕ СТАБИЛЬНОСТИ.

Краткая аннотация. Дается структурированный обзор достигнутого на всех предыдущих этапах и подробно излагаются результаты заключительного, шестого этапа исследований по актуальным направлениям, находящимся на стыке гомологической и гомотопической алгебры, теории представлений, теории интегрируемых иерархий, алгебраической геометрии, топологии, комбинаторики и квантовой теории поля.

Основными объектами изучения являются: функториальные A_∞ -копроизведения комбинаторных симплициальных цепей; мимрор-двойственной теории к тропической теории Громова – Виттена; возможности построения инвариантов матроидов по некоммутативным алгебрам Ли; фермионная формула для характеров пространства регулярных функций на пространстве застав; комплексно двумерная теория Громова – Виттена как обобщение теории топологических струн типа А с комплексно двумерным таргет-пространством; связь операторов в дуальных друг другу калибровочных и струнных теориях; связи между матричными моделями, статистическими моделями случайных разбиений и моделями топологической струны; производящие функции для $\log \det$ -разложений результатов и детерминантов; модулярные данные стабильности на триангулированных категориях.

Все результаты носят теоретический характер и являются новыми. Они способны существенно улучшить методику преподавания соответствующих физико-математических дисциплин в университетах и уже находят применение в изучении связей между пространствами данных стабильности и пространствами модулей полустабильных объектов, в исследованиях по некоммутативной геометрии, комбинаторной и симплициальной топологии, геометрической теории представлений, теории интегрируемых иерархий, теории графов, а также в квантовой теории поля и для изучения связей между классическими и квантовыми интегрируемыми системами.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| Список исполнителей | 1 |
| Реферат | 9 |
| Стандартные сокращения | 12 |
| Введение | 13 |
| 1 Итоговый обзор и ситематизация результатов, полученных на всех этапах работ | 17 |
| 1.1 Общая характеристика проведённых исследований | 17 |
| 1.2 Обзор результатов первого этапа | 18 |
| 1.3 Обзор результатов второго этапа | 19 |
| 1.4 Обзор результатов третьего этапа | 21 |
| 1.5 Обзор результатов четвёртого этапа | 22 |
| 1.6 Обзор результатов пятого этапа | 24 |
| 1.7 Обзор результатов шестого этапа | 26 |
| 2 Получение явных формул для коэффициентов производящих рядов барицентрически автомодельных функториальных A_∞ -копроизведений на комбинаторных симплициальных цепях | 29 |
| 2.1 Вводные замечания, соглашения и обозначения | 29 |
| 2.2 Алгебраическое дифференциальное исчисление | 30 |
| 2.3 Теорема Римана – Роха | 37 |
| 3 Построение миррор-двойственной теории к тропической теории Громова – Виттена, обобщающее известные конструкции для торических тропических многообразий | 43 |
| 3.1 Вводные замечания | 43 |
| 3.2 Описание тропических кривых в тропическом многообразии | 43 |
| 3.3 Дифференциальная градуированная БВ алгебра | 44 |
| 3.4 Интерпретация | 46 |
| 3.5 Тропическая зеркальная симметрия и теория примитивной формы К. Саито | 46 |
| 4 Исследование возможности построения инвариантов матроидов по некоммутативным алгебрам Ли | 48 |
| 4.1 Узлы, алгебры Ли и матроиды | 48 |
| 4.2 Хордовые диаграммы и графы пересечений | 50 |
| 4.3 $2n$ -цикл как инвариант узлов | 52 |
| 5 Вывод фермионных формул для характеров пространств регулярных функций на пространстве застав и доказательство того, что они удовлетворяют разностному уравнению Тоды | 57 |
| 5.1 Введенные замечания и напоминания | 57 |
| 5.2 Схема модулей квазиотображений | 61 |
| 5.3 Зануление когомологий | 64 |
| 5.4 Функции q -Уиттекера | 65 |
| 5.5 Модули Вейля | 67 |
| 6 Интерпретация комплексно двумерной версии теории Громова – Виттена как обобщения теории топологических струн типа A с комплексно двумерным таргет-пространством | 70 |

| | | |
|------|--|-----|
| 6.1 | Введение | 70 |
| 6.2 | Топологическое решение бездисперсионной иерархии Тоды | 73 |
| 6.3 | Квазиклассика статсуммы Некрасова | 76 |
| 7 | Изучение (на основе полученных на предыдущих этапах результатов) связи операторов в дуальных калибровочных (матричные модели) и струнных (теория Лиувилля) теориях | 80 |
| 7.1 | Вводные замечания и обозначения | 80 |
| 7.2 | Препотенциалы ВЗ как предел функций Некрасова | 81 |
| 7.3 | Матричная модель Егучи – Янга | 84 |
| 7.4 | Суперсимметричная КХД и матричные модели | 87 |
| 7.5 | Чистые калибровочные теории и векторы Уиттекера | 95 |
| 7.6 | Пертурбативные препотенциалы | 97 |
| 7.7 | Заключительные комментарии | 99 |
| 8 | На примере $\mathbb{C}\mathbb{P}_1$ -модели изучение связи между матричными моделями, статистическими моделями случайных разбиений и моделями топологической струны | 100 |
| 8.1 | Полный квазиклассический потенциал Громова – Виттена на \mathbb{P}_1 | 100 |
| 8.2 | Эллиптическая $U(1)$ теория | 102 |
| 8.3 | Неабелева теория | 105 |
| 8.4 | Две функциональные формулировки | 108 |
| 8.5 | Заключение | 110 |
| 9 | Исследование производящих функций Log Det-разложений результатов | 112 |
| 9.1 | Вводные замечания и обозначения | 112 |
| 9.2 | Вычисление результата | 115 |
| 9.3 | Вычисление дискриминанта | 126 |
| 9.4 | Интегральные дискриминанты и приложения | 134 |
| 10 | Изучение пространств модулярных данных стабильности на категории, порождённой исключительным набором, в частности, выяснение наличия каких-либо естественных комбинаторных или метрических структур на таких пространствах | 143 |
| 10.1 | Обзор определений и результатов | 143 |
| 10.2 | Положительные процессы в триангулированных категориях | 146 |
| 10.3 | Тончайшее измельчение t -стабильностей на абелевых категориях | 149 |
| 10.4 | Категория порожденная исключительной Ном-парой | 155 |
| 10.5 | Исключительная t -стабильность на \mathcal{P}_h | 159 |
| 10.6 | Модулярные t -стабильности на \mathcal{P}_h | 161 |
| 10.7 | Некоторые замечания относительно старших размерностей | 167 |
| 11 | Программа внедрения результатов НИР в образовательный процесс | 170 |
| 11.1 | Курсы и семинары 2009/2010 учебного года | 171 |
| 11.2 | Курсы и семинары 2010/2011 учебного года | 172 |
| 11.3 | Курсы и семинары 2011/2012 учебного года | 174 |
| 11.4 | Курсы и семинары 2012/2013 учебного года | 175 |
| 11.5 | Образовательные программы дополнительного обучения | 176 |
| | Заключение | 177 |
| | Список использованных источников | 180 |

СТАНДАРТНЫЕ СОКРАЩЕНИЯ

| | |
|-------------|---|
| АГТ | соответствие Алдая – Гайотто – Тачикавы |
| АдС (AdS) | пространство «анти де Ситтер» |
| БВ | (алгебра, оператор и т. п.) Баталина – Вилковывисского |
| БЧОВ | теория Бершадского – Чекотти – Оогури – Вафы |
| ВДВВ (WDVV) | уравнения Виттена – Дийкграафа – Верлинде – Верлинде (или уравнения ассоциативности) |
| ВЗ | (теория, препотенциал и т. п.) Зайберга – Виттена |
| ЕЯ | модель Егучи – Янга |
| КдФ | уравнение Кортвега – де Фриза и соотв. иерархия уравнений в частных производных |
| КП | уравнение Кадомцева – Петвиашвили и соотв. иерархия уравнений в частных производных |
| КТП | квантовая теория поля |
| КХД | квантовая хромодинамика |
| ЛМНС (LMNS) | Лосев – Мур – Некрасов – Шаташвили |
| НИС | научно-исследовательский студенческий семинар |
| НОЦ | научно-образовательный центр |
| ПБВ | (базис, изоморфизм, теорема и т. п.) Пуанкаре – Биркгофа – Вита |
| arXiv: | архив электронных препринтов основной сервер: http://arxiv.org/ , Российское зеркало: http://ru.arxiv.org/ |
| CFT | конформная квантовая теория поля |
| DLA | диффузно-ограниченная агрегация |
| ELSV | формула Экедала – Ландо – Шапиро – Вайнштейна |
| IC | комплекс когомологий пересечений Горески – Макферсона |
| QFT | квантовая теория поля |
| SDR-данные | строгая деформационная ретракция комплексов |
| SSY | суперсимметричная теория Янга – Миллса |

ВВЕДЕНИЕ

На шестом этапе изучения интегрируемых систем и пространств модулей в геометрии, топологии и математической физике исследовательским коллективом НОЦ были выполнены следующие работы:

1. Систематизация результатов, полученных на предыдущих пяти этапах работ.
2. Получение явных формул для коэффициентов производящих рядов барицентрически автомодельных функториальных A_∞ -копроизведений на комбинаторных симплициальных цепях.
3. Построение миррор-двойственной теории к тропической теории Громова – Виттена, обобщающее известные конструкции для торических тропических многообразий.
4. Исследование возможности построения инвариантов матроидов по некоммутативным алгебрам Ли.
5. Вывод фермионных формул для характеров пространств регулярных функций на пространстве застав и доказательство того, что они удовлетворяют разностному уравнению Тоды.
6. Интерпретация комплексно двумерной версии теории Громова – Виттена как обобщения теории топологических струн типа A с комплексно двумерным таргет-пространством.
7. Изучение (на основе полученных на предыдущих этапах результатов) связи операторов в дуальных калибровочных (матричные модели) и струнных (теория Лиувилля) теориях.
8. На примере $\mathbb{C}P_1$ -модели изучение связи между матричными моделями, статистическими моделями случайных разбиений и моделями топологической струны.
9. Исследование производящих функций для $\log \det$ -разложений результатов.
10. Изучение пространств модулярных данных стабильности на категории, порождённой исключительным набором, в частности, выяснение наличия каких-либо естественных комбинаторных или метрических структур на таких пространствах.
11. Разработка программы внедрение результатов НИР в образовательный процесс.

В настоящем отчёте изложены результаты, полученные нами в ходе выполнения этих работ. Организован отчёт следующим образом. Одиннадцать представленных в оглавлении разделов в точности соответствуют пунктам приведённого выше перечня. Краткое содержание этих разделов таково.

1. Мы даём обзор результатов, полученных нами на первых пяти этапах работ. Эти результаты систематизированы по этапам и по основным направлениям исследований.
2. Мы интерпретируем ПБВ-изоморфизм как деформацию полиномиальной алгебры в универсальную обёртывающую, а также как вариант экспоненциального отображения и интерпретируем характер Тодда как инструмент для записи действия инвариантных векторных полей на алгебре функций на группе в экспоненциальных ПБВ-координатах. Это наблюдение переформулируется в различных геометрических, категорных и топологических ситуациях: в терминах классов Атьи, гомологий и когомологий Хохшильда, алгебры (производных) эндоморфизмов тождественного (производного) эндифунктора. Это также даёт новый взгляд на двойственность Серра и теорему Римана – Роха.
3. Мы показываем, что число проходящих через циклы C_1, C_2, \dots, C_k голоморфных отображений из римановой поверхности Σ рода g в торическое многообразие M может быть представлено как сумма по графам того же рода в теории Бершадского – Чекотти – Оогури – Вафы (БЧОВ). Для этого мы заменяем торическое многообразие на его тропическую модель, а циклы C_α — на соответствующие тропические циклы и рассматриваем тропические кривые, проходящие через них. Тропические кривые задаются оснащёнными графами, которые могут быть проинтерпретированы как диаграммы Фейнмана в теории БЧОВ.
4. Мы исследуем гипотезу о том, что коэффициент при возможной старшей степени значения весовой системы, которая строится по алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$, на проекции хордовой диаграммы на примитивные совпадает с алгебраическим числом гамильтоновых циклов в ориентированном графе пересечений ориентированной хордовой диаграммы. Мы проверяем, что эта величина является весовой системой и зависит лишь от матроида¹ графа пересечений. Вопрос, можно ли определить естественный инвариант матроидов со значениями в кольце многочленов от одной переменной, такой, что его значения на матроидах графов пересечений совпадают со значениями весовой системы, строящейся по алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$, является, судя по всему, весьма нетривиальным.
5. С помощью интегрируемой системы q -Тоды, полученной при помощи аналога редукции Костанта – Уиттэкера для квантовых групп², мы определяем занумерованное доминантными весами λ полупростой односвязной группы Ли G над полем \mathbb{C} семейство функций q -Уиттэкера

$$\Psi_\lambda(q, z),$$

которые образуют семейство инвариантных полиномов на максимальном торе $T \subset G$ от переменной $z \in T$ с коэффициентами, являющимися рациональными функциями переменной $q \in \mathbb{C}^*$. Для групп G типа ADE мы доказываем,

¹напомним, что матроид графа состоит из циклов в нем, понимаемых как подмножества в множестве рёбер графа

²см. [44] и [59]

что функция

$$\widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}(q, z) = \Psi_{\check{\lambda}}(q, z) \cdot \prod_{i \in I} \prod_{r=1}^{\langle \alpha_i, \check{\lambda} \rangle} (1 - q^r)$$

(где I — множество вершин диаграммы Дынкина группы G) равна характеру конечномерного $G[[t]] \rtimes \mathbb{C}^*$ -модуля Демажюра $D(\check{\lambda})$. Если же G имеет другой тип, то выполняется подкрученный аналог этого же утверждения. Этот результат также известен для функций $\Psi'_{\check{\lambda}}$ из [58] и [56], однако, наши рассуждения используют алгебро-геометрические методы, развитые в [39] и полностью отличаются от [58] и [56] (в частности, мы даём новую алгебро-геометрическую интерпретацию модулей $D(\check{\lambda})$).

6. В этом разделе обсуждаются специальные решения интегрируемых систем, начиная с хорошо известных бездисперсионных иерархий КдФ и Тоды, для которых проще всего построить производящие функции классов Громова – Виттена в терминах рациональной комплексной кривой (топологической теории струн типа A). В контексте зеркальной теории эти производящие функции можно отождествить с препотенциалами комплексных многообразий, и мы приводим несколько новых явно вычисляемых примеров таких препотенциалов. Для кривых старших родов, отвечающих в данном контексте неабелевым калибровочным теориям в рамках двойственности между топологическими струнами и калибровочными теориями, аналогичные решения строятся используя расширенный базис абелевых дифференциалов, включающий вообще говоря дифференциалы с особенностями в точках ветвления кривой. Этот раздел тесно связан с разделом 8.
7. Мы развиваем идеи и результаты, полученные на четвёртом этапе исследований (см. раздел 4 в [4]). Обсуждается соотношение между препотенциалами Виттена – Зайберга, функциями Некрасова и матричными моделями. Показано на квазиклассическом уровне, что матричные модели типа Егучи – Янга описывают инстантонные вклады в деформированную статсумму суперсимметричной калибровочной теории. Изучается подробно построенное явно точное решение четырехмерной конформной теории, а также обсуждаются некоторые аспекты его связи с недавно предложенными логарифмическими β -ансамблями. Рассматривается также «квантование» этой картины в терминах двумерной конформной теории с расширенной симметрией и подчеркивается отличие этой процедуры от хорошо известной картины пертурбативного разложения в матричных моделях. Вместо этого представление функций Некрасова с помощью конформных блоков или векторов Уитеккера предлагает их нетривиальную связь с пространствами Тейхмюллера и квантовыми интегрируемыми системами.
8. Результаты этого раздела тесно переплетаются с содержанием раздела 6: связь между производящими функциями классов Громова – Виттена и препотенциалами комплексных многообразий детально изучается и явно просчитывается на разветвлённых накрытиях римановой сферы $\mathbb{C}P_1$

9. Мы строим и исследуем связи между различными разложениями результатов и производящими функциями, возникающими в современной теоретической физике при анализе маломерных моделей (матричных и конформных теорий, теорией узлов и т. п.). Особое внимание уделяется явным эффективным формулам для результатов, практически полезным в современных исследованиях (эти наши формулы уже нашли применения в работах [152], [153], [154], [155], [156]). Кроме того, мы даём краткий обзор других известных связей между задачами нелинейной алгебры и 0-, 1-, 2- и 3-мерными квантовыми теориями.
10. Мы интерпретируем фильтрации Гардера – Нарасимхана как случайные процессы в частично упорядоченном множестве наклонов и доказываем функториальность фильтров Гардера – Нарасимхана. В условиях естественной конечности мы строим тончайшее измельчение t -стабильности на абелевой категории. Мы вводим понятие модулярной t -стабильности (чьи полустабильные подкатегории могут различаться по уровню K_0) и даём полное описание совершенных и модулярных t -стабильностей на категории, порождённой исключительной парой. Для категорий, порождённых исключительными наборами большей длины мы строим большое семейство модулярных t -стабильностей, зависящих от выбора иррациональной кривой на подходящем грассманиане.
11. Мы коротко описываем результаты внедрения методических и научных достижений, полученных нами в ходе работы над проектом, в реальные учебные курсы и семинары, проводимые сотрудниками НОЦ на факультетах математики НИУ ВШЭ и НМУ, в МФТИ и на базовых кафедрах в ИППИ, ИТЭФ и МИРАН, а также даём некоторые рекомендации по дальнейшему внедрению результатов исследований в образовательные процессы.

1. ИТОГОВЫЙ ОБЗОР И СИТЕМАТИЗАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ, ПОЛУЧЕННЫХ НА ВСЕХ ЭТАПАХ РАБОТ

1.1. Общая характеристика проведённых исследований

Основной задачей проведённых нами исследований было изучение интегрируемых систем и пространств модулей в геометрии, топологии и математической физике. К концу XX века как математикам, так и физикам стало понятно, что наиболее интересные интегрируемые иерархии обязаны богатством своей структуры тому обстоятельству, что их решения являются производящими функциями геометрических и топологических инвариантов¹ пространств модулей естественных геометрических объектов, возникающих в алгебраической и (зеркальным образом) симплектической геометрии, а также в математической физике, где об этих объектах принято говорить на неудобном и непривычном для математиков языке квантовой теории поля. При ближайшем рассмотрении оказывается, что изучение производных категорий и некоммутативных деформаций алгебраических многообразий, квантование классических интегрируемых систем, реализация программы Ленглендса в теории представлений, удивительные числовые эффекты, связанные с «сокращением факториалов» (рекурсии Апери), равно как и проблемы регуляризации и придания геометрического смысла «физическим» вычислениям в квантовой теории поля оказываются удивительным образом близки друг другу и, по всей видимости, имеют дело с одними и теми же алгебро-геометрическими, топологическими и комбинаторными объектами. Выявление и изучение таких объектов является одним из ключевых направлений современной математики.

Именно на это и был нацелен наш проект. Мы сосредоточились на нескольких ключевых направлениях, пронизывающих все шесть этапов работы, а именно

- функториальные A_∞ -структуры на цепях комбинаторных симплициальных комплексов и их связь с A_∞ -структурами алгебро-геометрической природы, возникающими на категориях пучков и в квантовых теориях поля на многообразиях, подлежащим топологическим пространством которых является заданный симплициальный комплекс; при этом наряду с вопросом «можно ли услышать форму многообразия» нас (даже в большей степени) интересовала обратная задача: как может «звучать» многообразие, форма (=триангуляция) которого задана
- характеристические классы пространств модулей кривых и пространств модулей отображений; это узловая точка ветвления целого ряда математических и физических теорий (как классических так и новейших): гипотеза Виттена, числа Гурвица, струнные меры, асимптотические разложения матричных интегралов и т. д. и т. п.
- тесно связанные с предыдущими двумя направлениями задачи об инвариантах узлов, зацеплений и матроидов

¹иногда весьма нетривиальных, таких как квантовые когомологии или гомологии Флоера

- двойственность между струнными и калибровочными теориями; старый, интригующий круг гипотез, в последнее время реинкарнировавшийся по в математической физике как АГТ-соответствие
- двойственность Ленглендса — как геометрическая двойственность, геометрия двойных аффинных грассманианов и пространств застав, так и её математические проявления (квантовые цепочки Тоды и т. п.)
- некоторые аспекты зеркальной симметрии: связь между несимметричной ортогональной геометрией решёток Мукаи многообразий Фано и монодромиями дифференциальных уравнений на производящие функции квантовых когомологий, данные стабильности на триангулированных категориях и связь модулей полустабильных объектов с модулями самих данных стабильности

и все перечисленные далее результаты тесно связаны именно с этими направлениями.

1.2. Обзор результатов первого этапа

1.2.1. Комбинаторные решения интегрируемой иерархии КП. Нами были построены новые дифференциальные соотношения на однородные компоненты решений интегрируемой иерархии КП, являющиеся результатами геометрических зависимостей в пространствах модулей комплексных кривых.

1.2.2. Пучки Горески – Макферсона на двойном аффинном грассманиане. Мы построили диаграмму свертки для двойного аффинного грассманиана, а также вычислили для групп типа A коэффициенты Клебша – Гордана свертки и доказали, что они совпадают с кратностями в тензорных произведениях интегрируемых представлений соответствующей аффинной группы.

1.2.3. Струнные уравнения Эйнштейна как высшие гомологические операции. Мы построили формальную деформацию свободной конформной теории на диске (корреляторами которой являются функции на некомпактифицированном пространстве модулей Кимуры – Стасефа – Воронова S_0) — семейство пространств S_ε , на каждом из которых перенормированные интегралы от корреляторов существуют, и существуют пределы

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{S_\varepsilon} \langle \Phi_1^{(\varepsilon)}, \Phi_2^{(\varepsilon)}, \dots, \Phi_k^{(\varepsilon)} \rangle .$$

При этом вклад границы пространства меняет конформные свойства теории и кодируется высшими операциями, а зануление этого вклада выражается гомотопическим уравнением Маурера – Картана. В простейших специальных случаях пределы решений этого уравнения при $\varepsilon \rightarrow 0$ суть решения уравнений Эйнштейна и Янга – Миллса, а также их струнных обобщений.

1.2.4. Непертурбативные явления в 4-мерных суперсимметричных теориях. Исследовано поведение и вид конформных блоков для различных конфигураций полей на торе и на сфере — в частности, исследованы рекурсивные соотношения на конформные блоки. Изучено поведение функций Некрасова, содержащих информацию о

четырёхмерных суперсимметричных теориях. Проверено и доказано соотношение АГТ между конформными блоками и функциями Некрасова для различных конфигураций полей. Изучен предел АГТ соотношения для больших масс мультиплетов в функциях Некрасова и соответствующего этому предела для конформных блоков для случая полей на торе. Также были установлены соотношения между конформными теориями и функциями Некрасова и интегралами Доценко – Фатеева. Исследованы эти соотношения для различного количества ненулевых размерностей полей.

1.2.5. Подходы к явному вычислению струнных мер для родов $g > 2$. Пользуясь методами Грушевского и OPSMY¹, мы явно строим струнные меры на пространстве модулей кривых родов $g < 6$ и показываем, что эти методы явно пересчитываются один в другой при помощи матриц Адамара и оба перестают работать в роде $g = 6$.

1.2.6. Матричные модели и производящие функции чисел Гурвица. Производящая функция ординарных чисел Гурвица была нами представлена в виде явного матричного интеграла по эрмитовым матрицам данного размера с экспоненциальным внешним полем с потенциалом Бернулли. Решение уравнений движения для этой модели (без учёта потенциала Бернулли) дается функцией Ламберта.

1.2.7. Перечисляющие функции графов и обобщённые уравнения Бюргера. Нами было установлено, что производящие функции для раскрашенных графов с хвостами удовлетворяют той же системе дифференциальных уравнений в частных производных, что и гауссовы и интегралы, и что эта система имеет единственное решение в кольце формальных степенных рядов. Начальный член разложения этого решения по родам оказывается решением задачи обращения отображения, заданного градиентом начального условия, а последующие члены удовлетворяют линейным рекуррентным уравнениям в частных производных, решения которых выражаются через начальные условия, первый член и т. н. многочлены стабильных графов, которые служат производящими функциями стабильных графов соответствующего рода без хвостов и дают асимптотическое разложение централизованного гауссова интеграла.

1.3. Обзор результатов второго этапа

1.3.1. Асимптотика матричных интегралов и производящие функции графов. Мы изучили связи между двумя различными асимптотическими разложениями матричных интегралов. Первое использует технику фейнмановских диаграмм и приводит к суммированию по классам изоморфных ленточных графов. Второе относится к более общим гауссовым интегралам и представляет собой суммы по классам изоморфных раскрашенных графов без всякой ленточной структуры. Мы выводим первое разложение из второго, что, среди прочего, даёт независимое доказательство разложения, использованного Концевичем при доказательстве гипотезы Виттена.

1.3.2. Алгебро – геометрическое доказательство гипотезы Виттена. Мы дали новое, алгебро-геометрическое доказательство гипотезы Виттена, основанное на приме-

¹подход Oura – Poor – Salvati Manni – Yuen

нении формулы ELSV. Это позволяет обойти имевшиеся в первоначальном доказательстве Концевича технические трудности, связанные с наличием сложных особенностей у комбинаторного пространства модулей (компактификации произведения пространства модулей комплексных кривых с n отмеченными точками на положительный октант в \mathbb{R}^n).

1.3.3. Уравнения Эйнштейна и высшие гомологические операции. Мы продолжаем систематическое построение теории квантовых уравнений Эйнштейна и Янга – Миллса в рамках гомотопической алгебры, начатое на первом этапе исследований. На втором этапе мы интерпретируем дилатонную и тахионную расходимость в теории бозонной струны как неудачный выбор псевдогомотопии в конструкции индуцирования A_∞ структуры и указываем, каким образом корректно индуцированная A_∞ структура может быть восстановлена при помощи некорректной псевдогомотопии (т. е. даём гомологическую интерпретацию процедуры перенормировки).

1.3.4. Статсуммы Некрасова и конформные блоки в $2D$ CFT. Развита методика, позволяющая строить соответствия между конформными блоками и функциями Некрасова. Рассмотрено представление конформных блоков в виде интегралов Доценко – Фатеева. Выявлены связи между интегральным представлением для конформного блока и матричными моделями. Разработаны методы решения соответствующих матричных моделей, и найдены их решения.

1.3.5. Струнные меры для родов $g > 2$. Предложена модификация анзаца Грушевского для построения суперструнных мер на пространствах модулей кривых произвольного рода g . Она использует решёточные ϑ – константы и открывает альтернативный путь получения суперструнных мер для $g > 5$, удовлетворяющих условию зануления космологической постоянной.

1.3.6. Дуальность Алдая – Малдасены и проблема Плато. Показана тесная связь между задачей Плато в пространстве АдС и вопросом о вычислении амплитуд рассеяния глюонов в $\mathcal{N} = 4$ суперсимметричной теорией Янга – Миллса. Приведен вывод соответствующей интегрируемой системы. Также рассмотрен пертурбативный подход в пределе бесконечного числа рассеивающихся глюонов.

1.3.7. Фунториальное автомодельное A_∞ – копроизведение симплициальных цепей. Над полем характеристики нуль построена фунториальная строгая деформационная ретракция между симплициальными цепными комплексами комбинаторного симплекса и его барицентрического разбиения, что позволяет по данному фунториальному A_∞ – копроизведению комбинаторных симплициальных цепей канонически построить новое фунториальное A_∞ – копроизведение, которое естественно называть барицентрическим разбиением исходного. Высказана гипотеза о том, что существует единственное фунториальное A_∞ – копроизведение комбинаторных симплициальных цепей, совпадающее со своим барицентрическим разбиением. Это A_∞ – копроизведение является A_∞ – продолжением (неассоциативного) копроизведения Колмогорова.

1.3.8. Действие пучков Горески – Макферсона на двойном аффинном грассманиане. Для аффинной группы Каца – Муди G построены пространства Уленбек G – расслоений на A^2 . Изучено действие группы корней из единицы на этих пространствах, построены морфизмы разложения, а также исследованы их экстремальные связные компоненты. Высказан ряд фундаментальных гипотез о компонентах комплекса Горески – Макферсона (q – аналог формулы кратности Костанта для аффинного случая).

1.4. Обзор результатов третьего этапа

1.4.1. Компьютерные эксперименты с высшими копроизведениями Колмогорова – Александра. Подробно объясняется связь между (квантовыми) теориями поля и DG - и A_∞ -структурами на многообразиях, упомянутая в гл. 7 предыдущего отчёта за второй этап. Установлено, что рекурсивная формула, для вычисления барицентрически устойчивых старших произведений, приводившаяся в предыдущем отчёте, функториальной A_∞ -структуры по барицентрически устойчивым функториальным дифференциалу и двухвалентному копроизведению всегда даёт на выходе A_∞ -копроизведение. Приводится вывод явной замкнутой формулы для такого копроизведения на отрезке. На компьютере были вычислены трёхвалентное произведение Колмогорова на треугольнике, а также собственные значения линейной части A_n оператора барицентрического усреднения при малых n . Результаты экспериментально подтверждают гипотезу об экспоненциальном убывании этих значений.

1.4.2. Исключительные базисы несимметричных форм. Объясняются связи решёток Мукаи с задачами диофантовых приближений (цепочками экстремальных форм) с одной стороны и жёсткими геометрическими локальными системами на \mathbb{P}_1 («считающими» дифференциальными уравнениями в теории квантовых когомологий) с другой. Начато изучение категории решёток Мукаи, оснащённых взвешенными исключительными базисами, и их связи локальными системами, описывающими квантовые когомологии однородных многообразий Фано.

1.4.3. Стратификация пространств стабильных отображений комплексных кривых. В рамках исследования стратификации пространств стабильных отображений комплексных кривых изучаются свойства нового инварианта неориентированных графов без петель и кратных рёбер — многочлена переплетений. Устанавливается, что он является 4-инвариантом узлов, и описывается мощность этого инварианта в обоих смыслах: как инварианта графов и как инварианта узлов. Показано, что в каждой размерности n многочлен переплетений позволяет выделить ровно $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ примитивных элементов в 4-биалгебре графов.

1.4.4. Восстановления бездисперсионной интегрируемой иерархии до полной. Мы интерпретировали АГТ как соответствие между матричными моделями и теорией Зайберга – Виттена, что, среди прочего, означает установление соответствия между калибровочными теориями и интегрируемыми системами. Поскольку обращение в ноль константы связи $g_s = 0$ калибровочной теории при этом соответствует бездисперсионной иерархии со стороны интегрируемых систем, соотношение АГТ позволяет изучать восстановления бездисперсионной интегрируемой иерархии до

полной путем перехода от $g_s = 0$ к $g_s \neq 0$ со стороны калибровочных теорий.

1.4.5. Лапласовский рост и фрактальные свойства. Лапласовский рост двумерной области задаётся эволюцией некоторой кривой Кричевера – Бутро. Для малых степеней d этой кривой такую эволюцию удаётся вывести в явном виде. Для больших d антистоксовы линии возникающих кривых образуют сильно разветвленное дерево. Гипотетически, в пределе $d \rightarrow \infty$ получающийся кластер может лежать в одном классе универсальности с агрегационным кластером DLA.

1.4.6. Научно-методические материалы ежегодной школы-конференции. Усилиями сотрудников НОЦ была подготовлена очередная ежегодная конференция «Геометрические методы в теоретической физике». Исследователи нашего НОЦ сделали на ней 20 пленарных научных докладов по тематике исследований в рамках настоящего Государственного контракта. В отчёте за третий этап [3] были приведены анонсы подготовленных нами докладов и интенсивных миникурсов.

1.4.7. Кристалл Кашивары на множестве неприводимых компонент слоев. Мы изучили возможности введения структуры кристалла Кашивары на множестве неприводимых компонент слоев отображения свертки на двойном аффинном грассманиане (аффинной) группы Каца – Мури и в трёх важных случаях: для $k = 1$, для $k \gg 0$, и для $G = SL(N)$, доказывається большинство утверждений основной гипотезы о пространствах Уленбек, выдвинутой вторым этапом исследований.

1.4.8. Обобщённые уравнения Бюргерса и замкнутые стабильные графы. Мы интерпретируем производящий ряд для виртуальной эйлеровой характеристики (пополненного) пространства $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ модулей кривых рода g с n отмеченными точками как решение уравнения Бюргерса. Это решение, в свою очередь, выражается через универсальные многочлены стабильных графов

$$P_g(\{a_{g,n}\}, s) \text{ с } g \geq 2,$$

тесно связанные с подходом к анализу проблемы якобиана, основанному на использовании формальных аффинных автоморфизмов.

1.5. Обзор результатов четвёртого этапа

1.5.1. Барицентрически автомодельное A_∞ -копроизведение. Высказанная на основании проведённых на предыдущем этапе компьютерных экспериментов гипотеза о собственных значениях линейного члена оператора барицентрического усреднения была доказана в размерности два. Обнаружено совпадение комбинаторных коэффициентов в формулах для операторов функториальной барицентрической ретракции с коэффициентами, возникающими в матрицах переходов между стандартными базисами в алгебрах Хопфа псевдосимметрических функций и Мальвенуто – Ройтенауера.

1.5.2. Характеристические классы в пространствах отображений. Каждому \mathcal{K}_0 -классу¹ на пространстве модулей стабильных алгебраических кривых рода g с n отмеченными точками мы сопоставляем дифференциальное уравнение в частных производных на производящий ряд для некоторых индексов пересечения в пространстве модулей. Однородные по роду компоненты потенциала Виттена – Концевича, так же, как и более общего потенциала Ходжа, которые помимо ψ -классов включают в себя индексы пересечения λ -классов, являются особым случаем этих производящих рядов, и общеизвестные уравнения в частных производных для них суть частные случаи нашей общей конструкции.

1.5.3. Самосогласованная динамика M2-бран. Нами было проведено доскональное исследование трёхмерной теории Баггера – Ламберта, описывающей произвольное количество параллельных M2-бран в 11-мерном пространстве, и в результате этого исследования строится явное описание $O\text{Sp}(8|4)$ -инвариантного действия для произвольного числа совпадающих M2-бран.

1.5.4. Петлевые уравнения матричной модели и голоморфная аномалия в топологической QFT. Была установлена связь между решением петлевых уравнений матричной модели и уравнений голоморфной аномалии. На квазиклассическом уровне мы показываем, что матричные модели типа Егучи – Янга описывают инстантонные вклады в деформированную статсумму суперсимметричной калибровочной теории. После чего мы строим очень явное точное решение четырехмерной неабелевой конформной теории и изучаем его связи с недавно предложенными логарифмическими β -ансамблями.

1.5.5. Итерационный метод анализа нелинейных уравнений Эйлера – Лагранжа для задачи Плато. С использованием итерационного метода нами был построен явный контрпример к геометрической переформулировке гипотезы Алдая – Малдацены, которую мы на предыдущих этапах интерпретировали как специальный точно решаемый случай ослабленной проблемы Плато в пространстве «анти де Ситтер». Кроме того мы рассмотрели возможные обобщения предложенного метода на задачи с двусвязной границей.

1.5.6. Модификации непертурбативной ренормгруппы. На примере модели квантовой частицы, движущейся в кольце, через которое проходит магнитный поток, нами была изучена перенормировка вакуумного угла в квантовой механике и предложена модификация непертурбативной ренормгруппы, основанная на идеях, пришедших из теории информации. Мы показали, что перенормированное значение вакуумного угла можно наблюдать, если положение частицы измеряется с конечной точностью, либо она взаимодействует с другой медленной переменной, которая может рассматриваться как координата второй (тяжелой) частицы на кольце. В последнем случае перенормированный ϑ -член возникает как магнитный поток, который чувствует тяжелая частица, или как фаза Берри, связанная с ее медленным вращением.

¹класс гомологий из $H_*(\overline{\mathcal{M}}_{g,n})$, где $\overline{\mathcal{M}}_{g,n}$ есть пространство модулей стабильных алгебраических кривых рода g с n отмеченными точками, называется \mathcal{K}_0 -классом, если на нём зануляется интеграл от каждого монома, составленного из когомологических \mathcal{K}_i -классов Мамфорда

1.5.7. Вычисление слоев пучков Горески – Макферсона на двойном аффинном грассманиане. Получено геометрическое описание динамической группы Вейля для группы \check{G} , двойственной по Ленглендсу к редуктивной группе G , во внутренних терминах аффинного грассманиана для группы G . В такой интерпретации динамические параметры становятся эквивариантными относительно естественного действия на этом грассманиане некоторого тора. Высказан ряд гипотез, обобщающих эти результаты на аффинные группы Каца – Муди.

1.5.8. Асимптотические разложения матричных интегралов. При помощи разработанной на предыдущих трёх этапах комбинаторно-аналитической техники производящих функций для матричных интегралов (использующей функциональные уравнения и дифференциальные уравнения типа Бюргерса) и геометрических соображениями, связанными с пространством модулей стабильных кривых с взвешенными отмеченными точками, нами были явно вычислены и изучены ψ -классы веса $(1/2, 1/2, 1/2, 1/2, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$ на пространстве модулей стабильных кривых со взвешенными отмеченными точками.

1.6. Обзор результатов пятого этапа

1.6.1. Барицентрически автомодельная A_∞ -структура. По модулю гипотезы о собственных значениях оператора барицентрического усреднения нами были установлены существование и единственность функториального барицентрически автомодельного A_∞ -копроизведения на комплексе комбинаторных симплицальных цепей по модулю гипотезы о собственных значениях оператора барицентрического усреднения. Кроме того, мы уточняем результаты проделанных на предыдущих этапах компьютерных экспериментов и явно вычисляем третьи компоненты функториальных A_∞ -копроизведений, инвариантных относительно барицентрических и «звёздчатых» разбиений треугольника.

1.6.2. Инварианты графов, возникающие из алгебр Ли. Нами были изучены связи между весовыми системами и инвариантами графов, в частности процедура распознавания. Мы устанавливаем, что универсальная весовая система, построенная по супералгебре Ли $\mathfrak{gl}(1|1)$, является прообразом оснащённого инварианта Конвея.

1.6.3. Характеры колец регулярных функций на пространстве застав. Мы изучили пространство $Z_{\mathfrak{g}}^\alpha$ базированных квазиотображений из \mathbb{P}^1 в многообразии флагов $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ полупростой алгебры Ли \mathfrak{g} , а также их аффинные версии. Мы показали, что пространства $Z_{\mathfrak{g}}^\alpha$ всегда нормальны, а когда \mathfrak{g} имеет тип A, D, E – горенштейновы с рациональными особенностями. В последнем случае мы установили, что производящая функция для характеров кольца регулярных функций на $Z_{\mathfrak{g}}^\alpha$ удовлетворяет квантовому разностному уравнению Тоды, и описываем квантовую K -теорию многообразия $\mathcal{B}_{\mathfrak{g}}$ в терминах двойственной по Ленглендсу квантовой группы $U_q(\check{\mathfrak{g}})$.

1.6.4. QFT как флуктуация A_∞ -структуры, задающей пустое пространство. Мы предложили новый, гомологический взгляд на построение физической теории, в котором в качестве основной полевой конфигурации выступает пространство полили-

нейных отображений вида

$$m : \prod_{n=1}^{\infty} V^{\otimes n} \rightarrow V,$$

(комплекс Хохшильда), а в качестве основных уравнений выступают уравнения A_{∞} -структуры. Мы назвали такую схему τ -теорией (от *Tensor Algebra Universe* (TAU)) и показали, как в рамках τ -теории можно развить теории Черна – Саймонса и Янга – Миллса.

1.6.5. Разложения матричных интегралов и τ -функции интегрируемых иерархий. В свете недавних результатов о том, что интегрируемость КП и Тоды, являющаяся характерным свойством собственнзначных матричных моделей, также имеет место и для статсумм Дийкграафа – Вафы и для улучшенной топологической вершины, мы проанализировали возможность переформулировки некоторых аспектов возникающей теории на языке старой (недеформированной) теории, совместимую с двойственностью АГТ и/или с квантованиями соответствующих подлежащих интегрируемых систем в пределе Некрасова – Шаташвили. Так, статистические суммы часто являются τ -функциями интегрируемых иерархий с бесконечным набором времён. Мы демонстрируем этот эффект на примере уравнений ВДВВ и статсуммы Гурвица

$$Z = \sum_R d_R^{2-k} \chi_R(t^{(1)}) \dots \chi_R(t^{(k)}) \exp\left(\sum_n \xi_n C_R(n)\right),$$

зависящей от двух наборов временных переменных, t и ξ . В частности, мы выясняем, какие ограничения накладываются условиями интегрируемости КдФ и Тоды по переменным t и ξ .

1.6.6. Связи между калибровочными теориями, струнами и квантовыми спин-системами. Мы доказали эквивалентность (спектральную двойственность) между N -частичной гейзенберговской спиновой цепочкой и редуцированной \mathfrak{gl}_N -моделью Годена как на классическом, так и на квантовом уровнях. В АГТ-соответствии первая система возникает на стороне калибровочной теории в пределе Некрасова – Шаташвили, тогда как вторая естественным образом связана с конформной теорией поля. На классическом уровне преобразование дуальности связывает дифференциалы Зайберга – Виттена и спектральные кривые с помощью биспектральной инволюции. Квантовая дуальность обобщает эту эквивалентность на соответствующие уравнения Бакстера – Шредингера (уравнения квантовых спектральных кривых). Данная эквивалентность обобщает как спектральную автодуальность между 2×2 и $N \times N$ представлениями оператора Лакса для цепочки Тоды, так и известную дуальность АНН.

1.6.7. Решётки Мукаи и монодромии Фуксовых систем. Мы изучили связи между задачей описания орбит действия группы кос на полуортонормальных базисах решёток Мукаи и задачей описания монодромии на бесконечности для канонической фробениусовой связности на квантовых когомологиях многообразий Фано. Нами был введён формализм систем отражений, при помощи которого можно переговаривать одно в другое эквивариантно по отношению к действию стандартных полиномиальных функторов. Эта техника связывает задачу описания орбит

действия группы кос на полуортономальных базисах решёток Мукаи и данными Стокса квантовых дифференциальных уравнений многообразий Фано.

1.7. Обзор результатов шестого этапа

1.7.1. Функториальные A_∞ -структуры. Мы интерпретируем изоморфизм Пуанкаре – Биркгофа – Витта, с одной стороны, как деформацию полиномиальной алгебры в универсальную обёртывающую, а с другой стороны, вариант экспоненциального отображения. При такой интерпретации характер Тодда превращается в естественный инструмент для записи действия инвариантных векторных полей на алгебре функций на группе в экспоненциальных ПБВ-координатах. Это наблюдение можно формулировать и использовать в различных геометрических, категорных и топологических ситуациях: в терминах классов Атьи, в терминах гомологий и когомологий Хохшильда, в терминах алгебры (производных) эндоморфизмов тождественного (производного) эндифунктора. Это также даёт новый взгляд на двойственность Серра и теорему Римана – Роха.

1.7.2. Зеркальная версия тропической теории Громова – Виттена. Мы показываем, что число проходящих через циклы C_1, C_2, \dots, C_k голоморфных отображений из римановой поверхности Σ рода g в торическое многообразие M может быть представлено как сумма по графам того же рода в теории Бершадского – Чекотти – Оогури – Вафы (БЧОВ). Для этого мы заменяем торическое многообразие на его тропическую модель, а циклы C_α — на соответствующие тропические циклы и рассматриваем тропические кривые, проходящие через них. Тропические кривые задаются оснащёнными графами, которые могут быть проинтерпретированы как диаграммы Фейнмана в теории БЧОВ.

1.7.3. Инвариантов матроидов по некоммутативным алгебрам Ли. Мы исследуем гипотезу о том, что коэффициент при возможной старшей степени значения весовой системы, которая строится по алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$, на проекции хордовой диаграммы на примитивные совпадает с алгебраическим числом гамильтоновых циклов в ориентированном графе пересечений ориентированной хордовой диаграммы. Мы проверяем, что эта величина является весовой системой и зависит лишь от матроида¹ графа пересечений. Вопрос, можно ли определить естественный инвариант матроидов со значениями в кольце многочленов от одной переменной, такой, что его значения на матроидах графов пересечений совпадают со значениями весовой системы, строящейся по алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$, является, судя по всему, весьма нетривиальным.

1.7.4. Фермионные формулы для характеров пространств регулярных функций на пространстве застав. С помощью интегрируемой системы q -Тоды, полученной при помощи аналога редукции Костанта – Уиттэкера для квантовых групп², мы определяем занумерованное доминантными весами λ полупростой односвязной группы

¹напомним, что матроид графа состоит из циклов в нем, понимаемых как подмножества в множестве рёбер графа

²см. [44] и [59]

Ли G над полем \mathbb{C} семейство функций q -Уиттэкера

$$\Psi_{\check{\lambda}}(q, z),$$

которые образуют семейство инвариантных полиномов на максимальном торе $T \subset G$ от переменной $z \in T$ с коэффициентами, являющимися рациональными функциями переменной $q \in \mathbb{C}^*$. Для групп G типа ADE мы доказываем, что функция

$$\widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}(q, z) = \Psi_{\check{\lambda}}(q, z) \cdot \prod_{i \in I} \prod_{r=1}^{(\alpha_i, \check{\lambda})} (1 - q^r)$$

(где I — множество вершин диаграммы Дынкина группы G) равна характеру конечномерного $G[[t]] \rtimes \mathbb{C}^*$ -модуля Демазюра $D(\check{\lambda})$. Если же G имеет другой тип, то выполняется подкрученный аналог этого же утверждения. Этот результат также известен для функций $\Psi'_{\check{\lambda}}$ из [58] и [56], однако, наши рассуждения используют алгебро-геометрические методы, развитые в [39] и полностью отличаются от [58] и [56] (в частности, мы даём новую алгебро-геометрическую интерпретацию модулей $D(\check{\lambda})$).

1.7.5. $2D$ -теория Громова – Виттена и топологические струны типа A . В этом разделе обсуждаются специальные решения интегрируемых систем, начиная с хорошо известных бездисперсионных иерархий КдФ и Тоды, для которых проще всего построить производящие функции классов Громова – Виттена в терминах рациональной комплексной кривой (топологической теории струн типа A). В контексте зеркальной теории эти производящие функции можно отождествить с препотенциалами комплексных многообразий, и мы приводим несколько новых явно вычисляемых примеров таких препотенциалов. Для кривых старших родов, отвечающих в данном контексте неабелевым калибровочным теориям в рамках двойственности между топологическими струнами и калибровочными теориями, аналогичные решения строятся используя расширенный базис абелевых дифференциалов, включающий вообще говоря дифференциалы с особенностями в точках ветвления кривой. Связь между производящими функциями классов Громова – Виттена и препотенциалами комплексных многообразий детально изучается и явно просчитывается на разветвлённых накрытиях римановой сферы \mathbb{CP}_1 .

1.7.6. Двойственность между калибровочными и струнными теориями. Мы развиваем идеи и результаты, полученные на четвёртом этапе исследований (см. раздел 4 в [4]). Обсуждается соотношение между препотенциалами Виттена – Зайберга, функциями Некрасова и матричными моделями. Показано на квазиклассическом уровне, что матричные модели типа Егучи – Янга описывают инстантонные вклады в деформированную статсумму суперсимметричной калибровочной теории. Изучается подробно построенное явно точное решение четырехмерной конформной теории, а также обсуждаются некоторые аспекты его связи с недавно предложенными логарифмическими β -ансамблями. Рассматривается также «квантование» этой картины в терминах двумерной конформной теории с расширенной симметрией и подчеркивается отличие этой процедуры от хорошо известной картины пертурбативного разложения в матричных моделях. Вместо этого представление функций Некрасова с помощью конформных блоков или векторов Уиттекера предлагает их нетривиальную связь с пространствами Тейхмюллера и квантовыми интегрируемыми системами.

1.7.7. $\log \det$ -разложения результатов. Мы установили и изучили связи между различными разложениями результатов и производящими функциями, возникающими в современной теоретической физике при анализе маломерных моделей (матричных и конформных теорий, теорией узлов и т. п.). Особое внимание мы уделили явным эффективным формулам для результатов, практически полезным в современных исследованиях.

1.7.8. Модулярные данные стабильности на категориях. Мы интерпретируем фильтрации Гардера – Нарасимхана как случайные процессы в частично упорядоченном множестве наклонов и доказываем функториальность фильтратий Гардера – Нарасимхана. В условиях естественной конечности мы строим тончайшее измельчение t -стабильности на абелевой категории. Мы вводим понятие модулярной t -стабильности (чья полустабильные подкатегории могут различаться по уровню K_0) и даём полное описание совершенных и модулярных t -стабильностей на категории, порождённой исключительной парой. Для категорий, порождённых исключительными наборами большей длины мы строим большое семейство модулярных t -стабильностей, зависящих от выбора иррациональной кривой на подходящем грассманиане.

2. ПОЛУЧЕНИЕ ЯВНЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ
ПРОИЗВОДЯЩИХ РЯДОВ БАРИЦЕНТРИЧЕСКИ АВТОМОДЕЛЬНЫХ
ФУНКТОРИАЛЬНЫХ A_∞ -КОПРОИЗВЕДЕНИЙ НА КОМБИНАТОРНЫХ
СИМПЛИЦИАЛЬНЫХ ЦЕПЯХ

2.1. Вводные замечания, соглашения и обозначения

2.1.1. Категорное определение класса Атьи. Обозначим через $\mathcal{D}(X)$ производную категорию \mathcal{O} -модулей¹ на гладком проективном многообразии X . Ниже, в разделе 2.2.1 мы увидим, что *класс Атьи* на X , сопоставляющий \mathcal{O} -модулю E коцикл $\text{at}(E)$, задающий расширение первых струй сечений E

$$0 \rightarrow E \otimes \Omega^1 \rightarrow \mathcal{J}^1(E) \rightarrow E \rightarrow 0,$$

можно рассматривать как естественное преобразование из тождественного функтора $\text{id}_{\mathcal{D}(X)}$ на $\mathcal{D}(X)$ в (левый производный) функтор умножения на сдвинутый на 1 кокасательный пучок:

$$\text{at} : \text{id}_{\mathcal{D}(X)} \rightarrow \cdot \otimes \Omega^1[1] \quad (2.1)$$

Преобразование (2.1) задаёт действие сдвинутого касательного пучка $T[-1]$ на тождественном функторе $\text{id}_{\mathcal{D}(X)}$. Итерация этого действия задаёт действие (градуированно) симметрической алгебры $S(T[-1])$ на $\text{id}_{\mathcal{D}(X)}$.

В более общей постановке можно рассмотреть замкнутую симметричную моноидальную категорию D с допустимой триангуляцией [17], т. е. триангулированную категорию с симметричным и точным по каждому аргументу тензорным произведением² $\otimes : D \times D \rightarrow D$. Категория *келеровых дифференциалов* ΩD имеет в качестве объектов пары (M, α) , где $M \in \text{Ob}(D)$, а $\alpha : \text{id} \rightarrow \cdot \otimes M$ задаёт естественное преобразование тождественного эндоморфизма в функтор умножения³ на M , удовлетворяющее правилу Лейбница

$$\forall E, F \in \text{Ob}(D) \quad \alpha(E \otimes F) = \alpha(E) \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \alpha(F).$$

Морфизмы между дифференциалами суть морфизмы между объектами M , перестановочные с действием α . Если в категории келеровых дифференциалов ΩD существует начальный объект, то запишем его в виде $(\Omega^1[1], \text{At})$ и назовём сдвинутый подлежащий ему объект $\Omega^1 \in D$ *кокасательным комплексом*, а естественное преобразование At — *классом Атьи* на категории D . Канонический морфизм

$$\text{At} : \Omega^1[1] \rightarrow \Omega^1 \otimes \Omega^1[2]$$

задаёт на сдвинутом кокасательном комплексе $\Omega[1]$ структуру коалгебры Ли в D . Двойственный объект $T[-1]$ является алгеброй Ли в D и канонически действует на

¹здесь и далее $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ означает пучок регулярных (голоморфных или алгебраических) функций на X

²подчиняющимся различным аксиомам совместности, которые мы опустим

³вместо привязанных к объектам умножений можно рассматривать произвольные эндоморфизмы \mathcal{M} на D , удовлетворяющие правилу Лейбница $\forall E, F \in D \quad \mathcal{M}(E \otimes F) = E \otimes \mathcal{M}(F)$

тождественном эндоморфизме id_D . Универсальная обёртывающая алгебра $\mathcal{U}T[-1]$ является ассоциативной алгеброй в D и также действует на id_D .

Классическим примером описанной ситуации является производная категория представлений алгебры Ли \mathfrak{g} . Здесь $\Omega^1[1] = \mathfrak{g}^\vee$ — это коприсоединённое представление, действие класса Атьи на данном представлении V — это тензор $V \rightarrow V \otimes \mathfrak{g}^\vee$, задающий действие \mathfrak{g} на V , а сдвинутый касательный пучок $T[-1] = \mathfrak{g}$ — это сама алгебра Ли \mathfrak{g} . Универсальная обёртывающая алгебра $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ имеет обычный смысл, структура \mathfrak{g} -модуля на $\mathcal{U}\mathfrak{g}$ задаётся присоединённым действием.

Сравнивая этот пример с предыдущим, где $D = \mathcal{D}(X)$ является производной категорией \mathcal{O} -модулей на гладком проективном многообразии, мы видим, что в роли универсальной обёртывающей алгебры выступает коцепной комплекс Хохшильда, а двойственный ему цепной комплекс Хохшильда на языке алгебр Ли становится алгеброй формальных функций в единице соответствующей группы Ли.

2.1.2. Обозначения и соглашения. Всюду далее X предполагается гладким алгебраическим многообразием над полем \mathbb{k} нулевой характеристики¹. Через $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ мы обозначаем структурный пучок, а через $\mathcal{D}(X)$ — производную категорию совершенных комплексов пучков \mathcal{O} -модулей. Для $E, F \in \mathcal{D}(X)$ мы обозначаем через $R\mathcal{H}om(E, F)$ правый производный функтор пучка локальных гомоморфизмов и полагаем $E^\vee = R\mathcal{H}om(E, \mathcal{O})$. Канонический морфизм

$$\text{Tr} : E \otimes^L E^\vee \rightarrow \mathcal{O}$$

называется *следом*. Мы также фиксируем следующие стандартные обозначения:

| | |
|--------------------------------------|---|
| Ω^i | пучок внешних дифференциальных i -форм на X |
| $L^i T = \Omega^{iV}$ | пучок поливекторных полей на X |
| $\omega = \Omega^{\dim X}$ | канонический пучок на X |
| $\Delta \subset X \times X$ | диагональ |
| $I \subset \mathcal{O}_{X \times X}$ | пучок идеалов диагонали $\mathcal{D}(X)$ |
| p_i | проекция X^n на i -тый сомножитель |

Чтобы не плодить лишних символов, мы также регулярно используем обозначение

$$\Delta : X \hookrightarrow X \times X$$

для диагонального вложения X в $X \times X$. С каждым $E \in \mathcal{D}(X)$ связан объект

$$E_\Delta = \Delta_* E \stackrel{\text{def}}{=} p_1^* E \otimes^L \mathcal{O}_\Delta = p_2^* E \otimes^L \mathcal{O}_\Delta \in \mathcal{D}(X \times X)$$

сосредоточенный на диагонали $\Delta \subset X \times X$.

2.2. Алгебраическое дифференциальное исчисление

2.2.1. Класс Атьи. Если $I \subset \mathcal{O}_{X \times X}$ — пучок идеалов диагонали $\Delta \subset X \times X$, то

$$\mathcal{O}_\Delta = \mathcal{O}_{X \times X} / I \quad \text{и} \quad \Omega_\Delta = I / I^2.$$

¹хотя всё сказанное остаётся в силе при $\text{char } \mathbb{k} > \dim X$, а также в аналитической ситуации

Двучленная фильтрация пучка $\mathcal{O}_{X \times X}/I^2$ степенями идеала I приводит к точной последовательности

$$0 \rightarrow \Omega_{\Delta}^1 \rightarrow \mathcal{O}_{X \times X}/I^2 \rightarrow \mathcal{O}_{\Delta} \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

все три члена которой сосредоточены на диагонали и, стало быть, могут рассматриваться как \mathcal{O}_X - \mathcal{O}_X -бимодули на X . Левая и правая структуры \mathcal{O}_X -модуля одинаковы на крайних членах Ω_{Δ}^1 и \mathcal{O}_{Δ} тройки (2.2), но в среднем члене они различны.

Применяя к тройке (2.2) функтор¹ $p_{2*}(p_1^*E \otimes -)$ с произвольным \mathcal{O} -модулем² E , получаем *точную*³ тройку \mathcal{O} -модулей

$$0 \rightarrow E \otimes \Omega^1 \rightarrow \mathcal{F}^1(E) \rightarrow E \rightarrow 0, \quad (2.3)$$

средний член которой

$$\mathcal{F}^1(E) \stackrel{\text{def}}{=} E \otimes \mathcal{O}/I^2,$$

рассматриваемый как *правый* \mathcal{O} -модуль, называется пучком *первых струй* сечений пучка E .

Определение 2.1 ([7], [2.13])

Класс $\text{at}(E) \in \text{Ext}^1(E, E \otimes \Omega^1)$, отвечающей точной тройке \mathcal{O} -модулей (2.3), называется *классом Атьи* пучка⁴ E на X .

Класс Атьи является единственным препятствием к существованию регулярной⁵ связности на E .

Определение 2.2

Регулярная *связность* на \mathcal{O} -модуле E это морфизм левых \mathcal{O} -модулей

$$\nabla : E \rightarrow \mathcal{F}^1(E),$$

расщепляющий точную тройку (2.3) (т. е. такой, что его композиция с проекцией $\mathcal{F}^1(E) \rightarrow E$ является тождественным эндоморфизмом E).

Всё сказанное дословно переносится в производную категорию $\mathcal{D}(X)$. Точная тройка (2.2) задаёт в $\mathcal{D}(X)$ морфизм

$$\text{At} : \mathcal{O}_{\Delta} \rightarrow \Omega_{\Delta}^1[1]. \quad (2.4)$$

Определение 2.3

Для $E \in \mathcal{D}(X)$ морфизм $\text{at}(E) : E \rightarrow E \otimes^L \Omega^1[1]$ в категории $\mathcal{D}(X)$, задаваемый как

$$Rp_{2*}(\text{At} \otimes^L p_1^*E)$$

называется *классом Атьи* объекта E .

¹тензорное умножение в левой модульной структуре на подъём E с первого сомножителя, а затем спуск результата на второй сомножитель в $X \times X$

²или комплексом \mathcal{O} -модулей

³в силу того, что все три члена (2.2) свободны как левые \mathcal{O} -модули

⁴или комплекса пучков

⁵подчеркнём, что речь здесь идёт об алгебраической (в аналитической ситуации — голоморфной) связности, ср. с [7]

Легко видеть, что класс Атьи функториален, т. е. для любого морфизма $E \xrightarrow{m} F$ диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{m} & F \\ \text{at}(E) \downarrow & & \text{at}(F) \downarrow \\ E \otimes^L \Omega^1[1] & \xrightarrow{m \otimes \text{id}} & F \otimes^L \Omega^1[1] \end{array} \quad (2.5)$$

коммутативна. Нетрудно также проверить следующие два факта (см. [6])

Лемма 2.1

Предположим, что на каждом члене E^i комплекса пучков \mathcal{O} -модулей

$$E = (E^i, d^i : E^i \rightarrow E^{i+1})$$

задана (регулярная) связность ∇^i . Тогда класс Атьи $\text{at}(E)$ представляется морфизмом

$$(\nabla d)^i \stackrel{\text{def}}{=} (d^i \circ \nabla^i - \nabla^{i+1} \circ d^i) : E^i \rightarrow E^{i+1} \otimes \Omega^1.$$

Лемма 2.2

$$\forall E, F \in \mathcal{D}(X) \quad \text{at}(E \otimes^L F) = \text{at}(E) \otimes \text{id} + \text{id} \otimes \text{at}(F).$$

2.2.2. Алгебра Ли \mathcal{L}

2.2.3. Класс Атьи кокасательного пучка на X

$$\text{at}(\Omega^1) : \Omega^1 \rightarrow \Omega^1 \otimes \Omega^1[1] \quad (2.6)$$

обладает следующими свойствами.

Предложение 2.1

1. $\text{at}(\Omega^1)$ симметричен по отношению к перестановке сомножителей в $\Omega^1 \otimes \Omega^1$.
2. $\text{at}(\Omega^1)$ удовлетворяет *тождеству Якоби*, т. е. тензор, задающий композицию $\text{at}(\Omega^1) \otimes \text{id} \circ \text{at}(\Omega^1)$, нулевым образом проектируется на симметрическую компоненту в $\Omega^1 \otimes \Omega^1 \otimes \Omega^1$.

Доказательство. Коцикл $\text{at}(\Omega^1)$ отвечает результату применения Rp_{2*} к точной тройке

$$0 \longrightarrow I/I^2 \otimes p_1^* \Omega^1 \longrightarrow \mathcal{O}/I^2 \otimes p_1^* \Omega^1 \longrightarrow \mathcal{O}/I \otimes p_1^* \Omega^1 \longrightarrow 0 \quad (2.7)$$

на $X \times X$, которая включается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I^2/I^3 & \longrightarrow & I/I^3 & \longrightarrow & I/I^2 & \longrightarrow & 0 \\ & & a \downarrow & & a \downarrow & & a \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & I/I^2 \otimes p_1^* \Omega^1 & \longrightarrow & \mathcal{O}/I^2 \otimes p_1^* \Omega^1 & \longrightarrow & \mathcal{O}/I \otimes p_1^* \Omega^1 & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.8)$$

где вертикальные стрелки суть внешние дифференцирования Де Рама [12]. Таким образом, расширение в нижней строчке является композицией Ионеды расширения из верхней строки и оператора внешнего дифференцирования

$$I^2/I^3 \rightarrow I/I^2 \otimes p_1^* \Omega^1.$$

Последний вкладывает $(S^2\Omega^1)_\Delta = I^2/I^3$ в $(\Omega^1 \otimes \Omega^1)_\Delta$ в качестве симметричной составляющей. Это даёт первое утверждение.

Для доказательства второго рассмотрим наряду с (2.8) коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I^3/I^4 & \longrightarrow & I^2/I^3 & \longrightarrow & I^2/I^3 & \longrightarrow & 0 \\ & & a \downarrow & & a \downarrow & & a \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & S^2_\Delta \Omega^1 \otimes p_1^* \Omega^1 & \longrightarrow & I/I^3 \otimes p_1^* \Omega^1 & \longrightarrow & \Omega^1_\Delta \otimes p_1^* \Omega^1 & \longrightarrow & 0 \end{array} \quad (2.9)$$

(по вертикали также стоят внешние дифференцирования). По предыдущему, симметризация

$$\text{Sym}(\text{at}(\Omega^1) \otimes \text{id}) \subset \Omega^1 \otimes \Omega^1$$

тензора $\text{at}(\Omega^1) \otimes \text{id}$ соответствует расширению, получающемуся в результате применения Rp_{2*} к нижней строке в (2.9). Поэтому достаточно проверить, что спуск на X композиции Ионеды расширений, стоящих в нижних строках диаграмм (2.8) и (2.9), тривиально проецируется на симметрическую компоненту в $S^2\Omega^1_\Delta \otimes p_1^* \Omega^1$.

На $X \times X$ композиция троек (2.8) и (2.9) задаётся диаграммой

$$\begin{array}{ccccccc} I/I^2 & \longrightarrow & I^2/I^3[1] & \longrightarrow & I^3/I^4[2] & \xlongequal{\quad} & S^3\Omega^1_\Delta[2] \\ a \downarrow & & a \downarrow & & a \downarrow & & \parallel \\ \mathcal{O}_\Delta \otimes p_1^* \Omega^1 & \longrightarrow & \Omega^1 \otimes p_1^* \Omega^1[1] & \longrightarrow & S^2\Omega^1_\Delta \otimes p_1^* \Omega^1[2] & \longrightarrow & S^3\Omega^1_\Delta[2] \end{array} \quad (2.10)$$

в которой последняя стрелка в нижней строке представляет собою симметризацию. Тем самым, образ композиции морфизмов в нижней строке совпадает с образом композиции морфизмов в верхней строке, где она нулевая, ибо первые две стрелки отвечают точным тройкам, задающим последовательные расширения в двучленной фильтрации I/I^4 степенями идеала I . \square

2.2.4. Структура (градуированной) алгебры Ли на сдвинутом касательном пучке

$$\mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} T[-1] \in \mathcal{D}(X)$$

задаётся скобкой $[,] : \mathcal{T} \otimes \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{T}$, которая представляет собою частичную дуализацию стрелки (2.6).

Определение 2.4

Алгебра U в категории $\mathcal{D}(X)$ с единицей $e \in \text{Hom}(\mathcal{O}, U)$ и умножением $m : U \otimes U \rightarrow U$ называется *обёртывающей* для \mathcal{T} , если

1. имеется такая стрелка $\iota : \mathcal{T} \rightarrow U$, что $\iota \circ [,] = (m - m^\sigma) \circ \iota \otimes \iota$, где m^σ означает композицию¹ произведения с перестановкой сомножителей.
2. композиция вложения

$$S^* \mathcal{T} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_i \Lambda^i T[-i] \hookrightarrow \bigoplus_i \mathcal{T}^{\otimes i}$$

¹взятую с учётом кошулева правила знаков

и произведения

$$\mathcal{T} \otimes \dots \otimes \mathcal{T} \xrightarrow{i \otimes \dots \otimes i} U \otimes \dots \otimes U \rightarrow U$$

является изоморфизмом.

Легко видеть, что такая обёртывающая алгебра существует и единственна: второе условие в опр. 2.4 задаёт подлежащий ей объект в $\mathcal{D}(X)$, а первое условие задаёт на нём умножение, которое можно вычислять по формуле Кэмпбела – Хаусдорфа [8], описывающей коумножение на кольце формальных функций в окрестности единицы формальной группы Ли в терминах экспоненциальных координат.

2.2.5. Коцепной комплекс Хохшильда. Объект $\mathfrak{U} \stackrel{\text{def}}{=} Rp_{1*} R\mathcal{H}om_{X \times X}(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) \in \mathcal{D}(X)$ называется *коцепным комплексом Хохшильда*. Он имеет каноническую структуру алгебры в $\mathcal{D}(X)$. Обозначим через $\pi : \Omega_{X \times X}^1 \rightarrow p_1^* \Omega_X^1$ естественную проекцию и рассмотрим тензор

$$(\text{id} \otimes \pi) \circ \text{at}(\mathcal{O}_\Delta) \in \text{Ext}^1(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta \otimes p_1^* \Omega^1). \quad (2.11)$$

свёртка векторных полей с этим тензором задаёт морфизм

$$\iota : \mathcal{T} \rightarrow \mathfrak{U} \quad (2.12)$$

Имеет место следующий фундаментальный факт [6]

Теорема 2.1

Алгебра \mathfrak{U} с морфизмом (2.12) является обёртывающей для \mathcal{T} в смысле опр. 2.4. \square

2.2.6. Изоморфизм Хохшильда – Костанта – Розенберга. Обозначим через

$$I : \bigoplus_i \Lambda^i T[-i] \xrightarrow{\sim} \mathfrak{U} \quad (2.13)$$

изоморфизм, о котором идёт речь во втором условии опр. 2.4. На гладком аффинном многообразии $X = \text{Spec } A$ комплекс Хохшильда \mathfrak{U} возникает в результате вычисления $\text{Ext}_{A \otimes A}^i(A, A)$ при помощи *стандартной резольвенты* $B = (B_i, d_i)_{i \geq 0}$ алгебры A как бимодуля над $A \otimes A$ (см. [9]). Напомним, что член B_n этой резольвенты представляет собою свободный $A \otimes A$ -модуль с базисом $A^{\otimes n}$ (тензорное произведение над \mathbb{k} , а действие дифференциала $d_n : B_n \rightarrow B_{n-1}$ на базисные векторы задаётся формулой

$$\begin{aligned} d(a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_{n-1} \otimes a_n) &= \\ &= a_1(a_2 \otimes \dots \otimes a_n) - (a_1 a_2 \otimes \dots \otimes a_n) + \dots + (-1)^n(a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_{n-1}) a_n. \end{aligned}$$

Изоморфизм Хохшильда – Костанта – Розенберга [15] задаётся формулой

$$\begin{aligned} \Lambda^i &\rightarrow \text{Hom}_{A \otimes A}(S_i, A) = \text{Ext}_{A \otimes A}^i(A, A) \\ \partial_1 \wedge \dots \wedge \partial_i &: a_1 \otimes \dots \otimes a_i \mapsto \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_i} (-1)^{\text{sign } \sigma} \partial_{\sigma(1)} a_1 \dots \partial_{\sigma(i)} a_i \end{aligned} \quad (2.14)$$

и совпадает с отображением I из (2.13). Действительно, стандартная резольвента является *свободной* резольвентой пучка \mathcal{O}_Δ , так что на каждом её члене есть каноническая связность. По лем. 2.1 класс Атья $\text{at } \mathcal{O}_\Delta$ представляется морфизмом

$$\begin{aligned} \text{at}(\mathcal{O}_\Delta) : (a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n) &\mapsto \\ &\mapsto da_1(a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes a_n) + (-1)^n(a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) da_n, \end{aligned}$$

где d – внешнее дифференцирование, и остаётся лишь подставить это в (2.11).

2.2.7. Гомологии Хохшильда. Объект

$$\mathfrak{F} \stackrel{\text{def}}{=} R p_{1*}(\mathcal{O}_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) \in \mathcal{D}(X) \quad (2.15)$$

называется *цепным комплексом Хохшильда*. Коцепной комплекс Хохшильда \mathfrak{U} канонически действует на цепном комплексе \mathfrak{F} посредством морфизма

$$\mathfrak{D} : \mathfrak{U} \otimes^L \mathfrak{F} \rightarrow \mathfrak{F} \quad (2.16)$$

который представляет собою композицию

$$\mathfrak{U} = R\mathcal{H}om(\mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta) \xrightarrow{-\otimes \text{id}} R\mathcal{H}om(\mathcal{O}_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta, \mathcal{O}_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) = R\mathcal{H}om(\mathfrak{F}, \mathfrak{F}).$$

Беря композицию этого действия с морфизмом ι из (2.12), мы получаем действие \mathcal{T} на \mathfrak{F}

$$\mathcal{T} \otimes^L R p_{1*}(\mathcal{O}_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) \xrightarrow{\mathfrak{D}} R p_{1*}(\mathcal{O}_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta), \quad (2.17)$$

которое совпадает с (2.11), тензорно помноженным на \mathcal{O}_Δ . Каноническая стрелка

$$\mathcal{O}_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta \rightarrow \mathcal{O}_\Delta \otimes \mathcal{O}_\Delta = \mathcal{O}_\Delta$$

задаёт морфизм

$$\varepsilon : \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{O}_\Delta, \quad (2.18)$$

композиция которого с действием \mathfrak{D} из (2.16) устанавливает невырожденное спаривание

$$\mathfrak{U} \otimes^L \mathfrak{F} \rightarrow \mathcal{O}. \quad (2.19)$$

Таким образом, \mathfrak{F} и \mathfrak{U} канонически двойственны друг другу в $\mathcal{D}(X)$.

2.2.8. Класс Тодда. Обозначим через

$$E : \mathfrak{F} \simeq \bigoplus_i \Omega^i[i] = \left(\bigoplus_i \Lambda^i T[-i] \right)^\vee \quad (2.20)$$

морфизм, двойственный к стрелке I из (2.13), а через

$$L^n \in \text{Hom}\left(\bigoplus_i \Omega^i[i], \left(\bigoplus_i \Omega^i[i]\right) \otimes \Omega^1[1]\right)$$

морфизм, аннулирующий \mathcal{O} , действующий на Ω^1 как композиция

$$L^n : \Omega^1 \xrightarrow{\text{at}^n(\Omega^1)} \Omega^1 \otimes (\Omega^1)^{\otimes i} [i] \xrightarrow{\text{id} \otimes \wedge} \Omega^1 \otimes \Omega^n [n] = \Omega^n \otimes \Omega^1 [n]$$

и продолженный на старшие внешние степени $\Omega^i [i]$ по правилу Лейбница. Составим из морфизмов L^n морфизм

$$L = \sum l_n L^n : \bigoplus_i \Omega^i [i] \rightarrow (\bigoplus_i \Omega^i [i]) \otimes \Omega^1 [1] \quad (2.21)$$

где коэффициенты $l_n \in \mathbb{Q}$ суть коэффициенты ряда Тодда

$$\sum l_n z^n = \frac{z}{e^z - 1}.$$

Действие образующих $\mathcal{T} \subset \mathcal{U}$ на \mathfrak{F} описывает

Теорема 2.2

Следующая диаграмма коммутативна в $\mathcal{D}(X)$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} \otimes \mathfrak{F} & \xrightarrow{\mathfrak{D}} & \mathfrak{F} \\ \text{id} \otimes E \downarrow & & E \downarrow \\ T \otimes \bigoplus_i \Omega^i [i] [-1] & \xrightarrow{L} & \bigoplus_i \Omega^i [i] \end{array}$$

Доказательство. Морфизм, двойственный к действию \mathcal{T} на \mathfrak{F} относительно спаривания (2.19), есть действие правыми умножениями на \mathcal{U} . Тем самым, дело сводится к описанию правого умножения в \mathcal{U} в терминах изоморфизма (2.13). Ответ на этот чисто комбинаторный вопрос имеется в любом учебнике по алгебрам Ли¹. \square

2.2.9. Аффинный случай. На гладком аффинном многообразии $X = \text{Spec } A$ изоморфизм, двойственный к (2.14) относительно спаривания (2.19), можно описать в терминах стандартной резольвенты S

$$\begin{aligned} S_i \otimes_{A \otimes A} A &= \text{Tor}_{A \otimes A}^i(A, A) \rightarrow \Omega^i \\ a_0(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i) &\mapsto a_0 da_1 \wedge \dots \wedge da_i \end{aligned} \quad (2.22)$$

Прямо из определения изоморфизма (2.20) и 2.2.5 вытекает

Предложение 2.2

На гладком аффинном многообразии $X = \text{Spec } A$ изоморфизмы (2.20) и (2.22) совпадают друг с другом. \square

2.2.10. Внешнее произведение. Композиция

$$(\mathcal{O}_\Delta \overset{L}{\otimes} \mathcal{O}_\Delta) \overset{L}{\otimes} (\mathcal{O}_\Delta \overset{L}{\otimes} \mathcal{O}_\Delta) \xrightarrow{\text{id} \otimes \sigma \otimes \text{id}} \mathcal{O}_\Delta \overset{L}{\otimes} \mathcal{O}_\Delta \overset{L}{\otimes} \mathcal{O}_\Delta \overset{L}{\otimes} \mathcal{O}_\Delta \xrightarrow{\varepsilon \otimes \varepsilon} \mathcal{O}_\Delta \overset{L}{\otimes} \mathcal{O}_\Delta,$$

(где σ , как обычно, означает перестановку сомножителей) задаёт на \mathfrak{F} умножение. Легко видеть, что изоморфизм (2.20) переводит его во внешнее произведение дифференциальных форм.

¹см. к примеру [8]

2.3. Теорема Римана – Роха

2.3.1. Двойственность Серра. Следующие факты хорошо известны¹.

Теорема 2.3 (двойственность Серра)

1. На собственном многообразии X имеется такой морфизм $f : H^{\dim X}(\omega) \rightarrow \mathbb{k}$, что для каждого $E \in \mathcal{D}(X)$ композиция

$$H^i(E) \otimes H^{\dim X - i}(E^\vee \otimes \omega) \xrightarrow{\text{Tr}} H^{\dim X}(\omega) \xrightarrow{f} k \quad (2.23)$$

задаёт невырожденное супесимметричное спаривание.

2. В производной категории $\mathcal{D}(X \times X)$ имеется такой морфизм²

$$\text{can} : \mathcal{O}_\Delta \rightarrow \mathcal{O} \boxtimes \omega[\dim X] \quad (2.24)$$

что для собственных X и любых $E, F \in \mathcal{D}(X)$ и $m \in \text{Hom}(E, F)$ композиция

$$\mathcal{O}_{X \times X} \xrightarrow{m} (F \boxtimes E^\vee)_\Delta \xrightarrow{\text{can} \otimes (F \boxtimes E^\vee)} F \boxtimes (E^\vee \otimes \omega)[\dim X]$$

совпадает с

$$\begin{aligned} H^*(m) \in \text{Hom}(H^*(E), H^*(F)) &= H^*(F) \otimes H^*(E)^\vee \stackrel{(2.23)}{=} \\ &\stackrel{(2.23)}{=} H^*(F) \otimes H^{\dim X - *}(E^\vee \otimes \omega) = H^*(F \boxtimes (E^\vee \otimes \omega)). \end{aligned}$$

3. Для $X = \text{Spec } \mathbb{k}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ каноническое расширение представляется каноническим изоморфизмом $K_n = \mathcal{O} \boxtimes \omega$, где K^\bullet – кошулева резольвента диагонали [9].

Для $E \in \mathcal{D}(X)$ обозначим через \mathbf{K} композицию

$$\mathcal{O}_{X \times X} \xrightarrow{1} E \boxtimes E^\vee \otimes \mathcal{O}_\Delta \xrightarrow{\text{can} \otimes E \boxtimes E^\vee} E \boxtimes (E^\vee \otimes \omega)[\dim X], \quad (2.25)$$

в которой первая стрелка – это тождественный оператор $\mathcal{O} \rightarrow E \otimes E^\vee$. В силу второго утверждения теоремы $\mathbf{K} \in H^*(E) \otimes H^*(E^\vee \otimes \omega) = H^*(E) \otimes H^*(E)^\vee = \text{End } H^*(E)$ это тождественный оператор. Применяя отображение из первого утверждения теоремы к следу ограничения \mathbf{K} на диагональ $\Delta^* \mathbf{K} \in H^*(E \otimes E^\vee \otimes \omega)$, мы получим суперслед тождественного оператора на $H^*(E)$, т. е. *эйлерову характеристику*

$$\chi(E) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i (-1)^i \dim H^i(E).$$

¹первые два являются классическими (см. [14] и [11]), третий вытекает прямо из определений (см.) [18]

²он называется *каноническим расширением*

2.3.2. Теорема Римана – Роха разлагает морфизм $\int \Delta^* \mathbf{K} \in H^*(E \otimes E^\vee \otimes \omega)$ в композицию двух стрелок, одна из которых зависит только от X , а другая – только от E . А именно, беря след ограничения (2.25) на диагональ, получаем

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{1 \otimes \mathcal{O}_\Delta} E \otimes^L E^\vee \otimes^L \mathfrak{F} \xrightarrow{\text{id} \otimes (\text{can} \otimes \mathcal{O}_\Delta)} E \otimes^L E^\vee \otimes^L \omega[\dim X] \xrightarrow{\text{Tr}} \omega[\dim X], \quad (2.26)$$

где \mathfrak{F} был определён в (2.15). Переставляя последние две стрелки, получим

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{1 \otimes \mathcal{O}_\Delta} E \otimes^L E^\vee \otimes^L \mathfrak{F} \xrightarrow{\text{Tr} \otimes \text{id}} \mathfrak{F} \xrightarrow{\text{can} \otimes \mathcal{O}_\Delta} \omega[\dim X].$$

Теперь введём такие обозначения:

$$\text{Ch}(E) : \mathcal{O}_X \xrightarrow{1 \otimes \mathcal{O}_\Delta} E \otimes^L E^\vee \otimes^L \mathfrak{F} \xrightarrow{\text{Tr} \otimes \text{id}} \mathfrak{F} \quad (2.27)$$

$$\text{Td} : \mathfrak{F} \xrightarrow{\text{can} \otimes \mathcal{O}_\Delta} \omega[\dim X]. \quad (2.28)$$

Теорема 2.4 (теорема Римана – Роха)

Для всех $E \in \mathcal{D}(X)$ имеет место равенство $\chi(E) = \int \text{Td} \circ \text{Ch}(E)$. \square

Классы Ch и Td явно вычисляются ниже в предл. 2.3 и предл. 2.4.

2.3.3. Характер Чженя. Для $E \in \mathcal{D}(X)$ положим

$$\text{at}^i(E) : E \longrightarrow E \otimes^L (\Omega^1)^{\otimes i}[i] \xrightarrow{\text{id} \otimes \wedge} E \otimes^L \Omega^i[i], \quad (2.29)$$

где первая стрелка является i -кратной итерацией $\text{at}(E)$ с самим собою, а вторая – стандартным внешним произведением в Ω^* . Пусть

$$\wedge \text{at}^i(E) : E \otimes^L \Omega^* \xrightarrow{\text{at}^i(E) \otimes \text{id}} E \otimes^L \Omega^i \otimes \Omega^*[i] \xrightarrow{\text{id} \otimes \wedge} E \otimes^L \Omega^{i+*}[i].$$

Определим

$$\exp(\text{at}(E)) \in \bigoplus_i \text{Ext}^i(E, E \otimes^L \Omega^i[i]) \quad \text{и} \quad \wedge \exp(\text{at}(E)) : E \otimes^L \bigoplus_i \Omega^i[i] \rightarrow E \otimes^L \bigoplus_i \Omega^i[i]$$

формулами

$$\exp(\text{at}(E)) = \sum \text{at}^i(E)/i! \quad \text{и} \quad \wedge \exp(\text{at}(E)) = \wedge \sum \text{at}^i(E)/i! .$$

Обозначим через a_i , $i = 1, 2$, композицию изоморфизмов

$$a_i : E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta = (p_i^* E \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) \otimes^L \mathcal{O}_\Delta = p_i^* E \otimes^L (\mathcal{O}_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) = p_i^* E \otimes^L \mathfrak{F}_\Delta = (E \otimes^L \mathfrak{F})_\Delta$$

и рассмотрим композицию Rp_{1*} -образа от a_i со стрелкой E

$$E E_i : Rp_{1*}(E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) \xrightarrow{a_i} E \otimes^L \mathfrak{F} \xrightarrow{\text{id} \otimes E} E \otimes^L \bigoplus_j \Omega^j[j].$$

Следующая лемма по-сути является альтернативным определением класса Атьи.

Лемма 2.3

Во введённых выше обозначениях

$$EE_1 = (\text{id} \otimes \wedge \exp(\text{at}(E))) \circ EE_2. \quad (2.30)$$

Доказательство. По аналогии с (2.11) зададим действие \mathcal{T} на $Rp_{1*}(E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta)$

$$\mathcal{T} \otimes^L Rp_{1*}(E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) \rightarrow Rp_{1*}(E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) \quad (2.31)$$

как ограничение на диагональ действия $(\text{id} \otimes \pi) \circ \text{at}(E_\Delta) \in \text{Ext}^1(E_\Delta, E_\Delta \otimes^L p_1^* \Omega^1)$ на E_Δ , где проекция $\pi : \Omega_{X \times X}^1 \rightarrow p_1^* \Omega_X^1$ та же, что и раньше. Подставляя (2.31) в определения изоморфизмов a_i и вспоминая определение действия \mathcal{T} на \mathfrak{F} , данное в (2.17), по лем. 2.2 получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} \otimes^L Rp_{1*}(E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) & \xrightarrow{(2.31)} & Rp_{1*}(E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) \\ \text{id} \otimes Rp_{1*}(a_1) \downarrow & & Rp_{1*}(a_1) \downarrow \\ \mathcal{T} \otimes^L (E \otimes \mathfrak{F}) & \xrightarrow{\mathfrak{D}} & E \otimes \mathfrak{F} \end{array} \quad (2.32)$$

где \mathfrak{D} обозначает морфизм (2.17), а также диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} \otimes^L Rp_{1*}(E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) & \xrightarrow{(2.31)} & Rp_{1*}(E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) \\ \text{id} \otimes Rp_{1*}(a_2) \downarrow & & Rp_{1*}(a_2) \downarrow \\ \mathcal{T} \otimes^L (E \otimes \mathfrak{F}) & \xrightarrow{\mathfrak{D} + \text{at}(E)} & E \otimes \mathfrak{F} \end{array} \quad (2.33)$$

также коммутативную, поскольку проекция $\text{at}(p_i^* E)$ на $p_i^* \Omega^1$ равна $p_i^* \text{at}(E)$, а на дополнительное расслоение — нулевая.

Те же аргументы, что и в доказательстве теор. 2.1, показывают, что действие \mathcal{T} по формуле (2.31) продолжается до действия всей обёртывающей алгебры \mathcal{U} :

$$\mathcal{U} \otimes^L Rp_{1*}(E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) \rightarrow Rp_{1*}(E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta). \quad (2.34)$$

Обозначим через $\varepsilon_E : Rp_{1*}(E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) \rightarrow E$ морфизм, индуцированный каноническим морфизмом $E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta \rightarrow E_\Delta$. Беря композицию (2.34) с ε_E , получаем морфизм

$$\mathcal{U} \otimes^L Rp_{1*}(E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) \rightarrow E$$

а значит — по двойственности — морфизм

$$Rp_{1*}(E_\Delta \otimes^L \mathcal{O}_\Delta) \rightarrow E \otimes \mathcal{U}^\vee \stackrel{\text{id} \otimes E}{=} E \otimes \bigoplus_i \Omega^i[i]. \quad (2.35)$$

Из определений E и (2.32) видно, что композиция (2.35) совпадает с левой частью (2.30). Согласно (2.33) она же равна правой части (2.30). \square

Определение 2.5

Определим значение *характера Чженя* на объекте $E \in \mathcal{D}(X)$ формулой

$$\text{ch}(E) = \text{Tr} \sum_i \text{at}^i(E)/i! \in \bigoplus_i H^i(\Omega^i).$$

Предложение 2.3

Для каждого $E \in \mathcal{D}(X)$ композиция $\text{Ch}(E)$ из (2.27) с изоморфизмом E равна $\text{ch}(E)$.

Доказательство. Согласно опр. 2.5 достаточно убедиться в том, что композиция первой стрелки в (2.27) с отображением E совпадает с $\exp(\text{at}(E))$. Обозначим через $I_{i,j}$, $i, j = 1, 2$ изоморфизмы, заданные как композиции

$$I_{i,j} : Rp_{1*}((E \otimes E^\vee)_\Delta \otimes \mathcal{O}_\Delta) = Rp_{1*}((p_i^* E \otimes p_j^* E^\vee) \otimes \mathcal{O}_\Delta) = (E \otimes E^\vee) \otimes \mathfrak{F},$$

Интересующее нас отображение является композицией изоморфизма $I_{1,2}$ с ограничением единичного сечения $\mathbb{1} : \mathcal{O}_{X \times X} \rightarrow (E \otimes E^\vee)_\Delta$ на диагональ:

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{1 \otimes \mathcal{O}_\Delta} Rp_{1*}((E \otimes E^\vee)_\Delta \otimes \mathcal{O}_\Delta) \xrightarrow{I_{1,2}} E \otimes E^\vee \otimes \mathfrak{F}. \quad (2.36)$$

Единичное сечение $(E \otimes E^\vee)_\Delta$ представляет собою композицию

$$\mathcal{O}_{X \times X} \xrightarrow{\mathbb{1}} \mathcal{O}_\Delta \xrightarrow{p_1^* \mathbb{1} \otimes \mathcal{O}_\Delta} p_1^*(E \otimes E^\vee) \otimes \mathcal{O}_\Delta = (E \otimes E^\vee)_\Delta, \quad (2.37)$$

где $\mathbb{1} : \mathcal{O}_X \rightarrow E \otimes E^\vee$ — вложение единицы, а $\mathbb{1} : \mathcal{O}_{X \times X} \rightarrow \mathcal{O}_\Delta$ — каноническая факторизация. Ограничивая на диагональ и применяя Rp_{1*} , получаем¹

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{1 \otimes \mathcal{O}_\Delta} \mathfrak{F} \xrightarrow{1 \otimes \text{id}} E \otimes E^\vee \otimes \mathfrak{F}, \quad (2.38)$$

Таким образом, композиция

$$\mathcal{O}_X \xrightarrow{1 \otimes \mathcal{O}_\Delta} Rp_{1*}((E \otimes E^\vee)_\Delta \otimes \mathcal{O}_\Delta) \xrightarrow{I_{1,1}} E \otimes E^\vee \otimes \mathfrak{F}. \quad (2.39)$$

совпадает с $\mathbb{1} \otimes 1$, где $\mathbb{1} : \mathcal{O} \rightarrow \mathfrak{F}$ — естественное вложение. Применяя лем. 2.3 к (2.36) и (2.39), получаем требуемое. \square

2.3.4. Класс Тодда.

Предложение 2.4

Обозначим через t_i коэффициенты ряда $\sum t_i z^i = \log(z/(e^z - 1))$ и положим

$$\text{td} = \exp\left(\sum_i t_i \text{ch}(\Omega^i)\right) \in \bigoplus_i H^i(\Omega^i). \quad (2.40)$$

Тогда класс Тодда Td из (2.28) может быть представлен как композиция

$$\text{Td} : \mathfrak{F} \xrightarrow{E} \bigoplus_i \Omega^i[i] \xrightarrow{\wedge \text{td}} \bigoplus_i \Omega^i[i] \rightarrow \omega[\dim X],$$

где последняя стрелка означает проектор на пространство форм старшей степени.

¹с использованием изоморфизма $I_{1,1} : Rp_{1*}((E \otimes E^\vee)_\Delta \otimes \mathcal{O}_\Delta) = (E \otimes E^\vee) \otimes \mathfrak{F}$

Доказательство. Применяя (2.5) к каноническому отображению (2.24) и беря композицию с проекцией $\pi : \Omega_{X \times X}^1 \rightarrow p_1^* \Omega_X^1$, получаем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_\Delta & \xrightarrow{\text{can}} & \mathcal{O} \boxtimes \omega[\dim X] \\ \pi \circ \text{at}(\mathcal{O}_\Delta) \downarrow & & \text{at}(\mathcal{O}) \downarrow \\ \mathcal{O}_\Delta \otimes p_1^* \Omega^1 & \xrightarrow{\text{can} \otimes \text{id}} & \Omega^1 \boxtimes \omega[\dim X + 1] \end{array} \quad (2.41)$$

Правая вертикальная стрелка в ней нулевая по лем. 2.2, т. к. $\text{at } \mathcal{O} = 0$. Поэтому произведение нижней и левой стрелок тоже нулевое. Умножая тензорно на \mathcal{O}_Δ получаем зануление композиции (в обозначениях из (2.17))

$$\text{Td} \circ \mathfrak{D} : \mathfrak{F} \xrightarrow{\mathfrak{D}} \mathfrak{F} \otimes \Omega^1[1] \xrightarrow{\text{Td} \otimes \text{id}} \omega \otimes \Omega^1[\dim X + 1] \quad (2.42)$$

Применяя к (2.42) изоморфизм E , получаем (в обозначениях теор. 2.2) we obtain

$$\bigoplus_i \Omega^i[i] \xrightarrow{L} \left(\bigoplus_i \Omega^i[i] \right) \otimes \Omega^1[1] \xrightarrow{x \otimes \text{id}} \omega \otimes \Omega^1[\dim X + 1].$$

Согласно лем. 2.4, которую мы докажем ниже, обращение в нуль (2.42) определяет Td с точностью до скалярного множителя, который можно вычислить локально, и третье утверждение теор. 2.3 показывает, что он равен единице. \square

Лемма 2.4

Пусть морфизм $x : \bigoplus_i \Omega^i[i] \rightarrow \omega[\dim X]$ таков, что композиция

$$\bigoplus_i \Omega^i[i] \xrightarrow{L} \left(\bigoplus_i \Omega^i[i] \right) \otimes \Omega^1[1] \xrightarrow{x \otimes \text{id}} \omega \otimes \Omega^1[\dim X + 1]$$

нулевая. Тогда, с точностью до скалярного множителя, он является композицией Λtd из (2.40) с проекцией на пространство форм старшей степени.

Доказательство. Обозначим через $\bar{\cdot}$ антиинволюцию алгебры $\bigoplus_i \Omega^i[i]$, действующую на Ω^i умножением на $(-1)^{i(i-1)/2}$. Формула

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \left(\bigoplus_i \Omega^i[i] \right) \otimes \left(\bigoplus_i \Omega^i[i] \right) \xrightarrow{\bar{\cdot} \wedge \cdot} \bigoplus_i \Omega^i[i] \twoheadrightarrow \omega[\dim X] \quad (2.43)$$

(последняя стрелка — проекция на формы старшей степени) задаёт на $\bigoplus_i \Omega^i[i]$ невырожденное спаривание. Обозначим через L^+ отображение, двойственное к L относительно этого спаривания. Возникает коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \left(\bigoplus_i \Omega^i[i] \right) \otimes \left(\bigoplus_i \Omega^i[i] \right) & \xrightarrow{\text{id} \otimes L} & \left(\bigoplus_i \Omega^i[i] \right) \otimes \left(\bigoplus_i \Omega^i[i] \right) \otimes \Omega^1[1] \\ L^+ \otimes \text{id} \downarrow & & \langle \cdot, \cdot \rangle \otimes \text{id} \downarrow \\ \left(\bigoplus_i \Omega^i[i] \right) \otimes \left(\bigoplus_i \Omega^i[i] \right) \otimes \Omega^1[1] & \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle \otimes \text{id}} & \omega[\dim X] \otimes \Omega^1[1] \end{array} \quad (2.44)$$

Прямое вычисление по теор. 2.2 показывает, что¹ $L^+ = \wedge \bar{\text{td}} \circ L \circ \overline{\text{td}}^{-1}$. По условию

$$0 = \langle \bar{y}, L \cdot \rangle = \langle L^+ \bar{y}, \cdot \rangle = \langle \bar{\text{td}} \wedge \overline{L \text{td}^{-1} \wedge y}, \cdot \rangle.$$

Так как спаривание невырождено и ряд $\bar{\text{td}}$ обратим, $L(\text{td}^{-1} \wedge y) = 0$. Остаётся убедиться, что всякое сечение $s : \mathcal{O} \rightarrow \bigoplus_i \Omega^i[i]$, для которого зануляется композиция

$$\mathcal{O} \xrightarrow{s} \bigoplus_i \Omega^i[i] \xrightarrow{L} \bigoplus_i \Omega^i[i] \otimes \Omega^1[1] \quad (2.45)$$

пропускается через вложение $\mathcal{O} \hookrightarrow \bigoplus_i \Omega^i[i]$. Из формулы (2.21) вытекает, что при $i > 0$ компонента L в $\text{Hom}(\Omega^i[i], \Omega^{i-1}[i-1] \otimes \Omega^1[1])$ совпадает Ω^i , вложенным в $\Omega^{i-1} \otimes \Omega^1$ как кососимметричная составляющая. Поэтому (2.45) не может зануляться, если у s есть компоненты, лежащие в $\Omega^{>0}$. \square

¹т. е. td является аналогом левоинвариантного объёма на группе Ли

3. ПОСТРОЕНИЕ МИРРОР-ДВОЙСТВЕННОЙ ТЕОРИИ К ТРОПИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ГРОМОВА – ВИТТЕНА, ОБОБЩАЮЩЕЕ ИЗВЕСТНЫЕ КОНСТРУКЦИИ ДЛЯ ТОРИЧЕСКИХ ТРОПИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

3.1. Вводные замечания

В теории Громова – Виттена основным объектом является число голоморфных отображений из римановой поверхности Σ рода g в таргет-многообразие M , проходящих через циклы C_1, C_2, \dots, C_k . Мы покажем, что для торического многообразия M это число может быть представлено как сумма по графам того же рода в теории Бершадского – Чекотти – Оогури – Ваффы (БЧОВ).

Для этого мы заменим торическое многообразие на его тропическую модель, циклы C_a — на соответствующие тропические циклы и рассмотрим тропические кривые, проходящие через них. Тропические кривые задаются оснащёнными графами и мы увидим, как эти графы могут быть проинтерпретированы как диаграммы Фейнмана в теории БЧОВ.

Всюду далее мы будем понимать торическое многообразие как алгебраический тор $(\mathbb{C}^*)^N$, пополненный «бесконечно удалёнными» дивизорами, которые задаются целочисленными векторами K_1, K_2, \dots, K_p в решётке $M \simeq \mathbb{Z}^N$ его однопараметрических подгрупп. Мы также фиксируем на $(\mathbb{C}^*)^N$ логарифмические координаты

$$Z^a = R^a + i\Phi^a$$

3.2. Описание тропических кривых в тропическом многообразии

Хорошо известно, что тропическая кривая в N -мерном тропическом торическом многообразии задаётся ориентированным графом, имеющим трехвалентные и одновалентные вершины, ребра которого оснащены целочисленными векторами. При этом оснащение ребер, соединяющих одновалентную и трехвалентную вершины должно быть пропорционально одному из векторов семейства $\{K_j\}$, задающего компактифицирующие дивизоры, и сумма векторов, оснащающих ребра, входящие в трехвалентную вершину, должна равняться сумме векторов, оснащающих ребра, из нее выходящих.

Каждому ребру α , оснащённому вектором n_α отвечает параметризованное голоморфное вложение цилиндра с комплексной координатой $z = t + i\varphi$:

$$R = n_\alpha^a t + \rho_\alpha^a$$

$$\Phi^a = n_\alpha^a \varphi + \varphi_\alpha$$

Задача о прохождении кривой через циклы предполагает введение отмеченных точек на ребрах — точек, в которых вычисляется отображение. Их можно рассматривать как двухвалентные вершины.

Удобно разделить получающиеся ребра на две группы — внешние и внутренние. Внешние ребра соединяют двухвалентные или трехвалентные вершины с одновалентными — их длину следует считать бесконечной (они уходят в компактифицирующие дивизоры). Внутренние ребра имеют конечную длину и соединяют между собой двух и/или трехвалентные вершины.

Следует различать две задачи. В первой мы рассматриваем фиксированные длины всех внутренних ребер (и фиксированные значения углов). Такая постановка задачи является тропикализацией задачи о прохождении кривой с фиксированными модулями комплексной структуры (включая отмеченные точки) через набор циклов, при котором j -ая отмеченная точка попадает на j -ый цикл. Так поставленная задача не зависит от модулей комплексной структуры и однозначно определяется кольцом квантовых когомологий.

В первой задаче мы можем фиксировать положение первой отмеченной точки на первом цикле C_1 . Это однозначно определяет положение в таргет-пространстве всех остальных отмеченных точек и тройных вершин. Так, если первая точка была расположена в Z_1 , то точка, связанная с ней внутренним ребром (оснащенным вектором n_α) будет расположена в

$$Z_1 + n_\alpha t + in_\alpha \varphi$$

Пусть ω_i — дифференциальная форма (поток), отвечающая циклу C_i , то есть

$$\int_M \omega_i \Omega = \int_{C_i} \Omega$$

для любой гладкой формы Ω .

Вычисляя в первой отмеченной точке форму ω_1 , а во второй точке форму ω_2 , мы получим

$$\omega_1(Z_1) \left(\exp(tL_{V(n_\alpha)} + \varphi L_{U(n_\alpha)}) \omega_2 \right) (Z_1)$$

где L_W — производная Ли вдоль векторного поля W , а векторные поля V и U равны

$$V(n) = \sum_a n^a \frac{\partial}{\partial R^a}$$

$$U(n) = \sum_a n^a \frac{\partial}{\partial \Phi^a}$$

Вторая задача отвечает вычислению числа кривых, проходящих через заданные циклы при каком-либо значении модулей кривых с отмеченными точками (инварианты Громова – Виттена). В тропическом описании такая задача отвечает интегралу по всевозможным значениям времен и углов, ассоциированных с внутренними ребрами. В частности, вклад ребра, соединяющего точки, отображаемые в циклы C_1 и C_2 , имеет вид

$$\int \omega_1(Z_1) \left(\exp(tL_{V(n_\alpha)} + \varphi L_{U(n_\alpha)}) \iota_{V(n_\alpha)} \iota_{U(n_\alpha)} \omega_2 \right) (Z_1) dt d\varphi$$

где ι_{Vec} обозначает контракцию дифференциальной формы с векторным полем Vec .

3.3. Дифференциальная градуированная БВ алгебра

Не теряя общности можно заменить все дифференциальные формы, входящие в конструкцию, на инвариантные относительно полей U (достаточно просто усреднить по действию N окружностей).

Для интерпретации теории как БЧОВ теории необходимо, чтобы ребру отвечал единый оператор (обращающий квадратичный член в действии), а в описанной выше конструкции ему отвечает оператор, зависящий от оснащения.

Рассмотрим оснащение как собственное значение оператора на его собственном подпространстве.

А именно, рассмотрим следующее пространство S — произведение пространства дифференциальных форм на R^N , внешней алгебры от N образующих и пространства функций на N -мерном вещественном торе.

$$S = \Omega^*(R^N) \otimes \Lambda^*(R^N) \otimes \text{Fun}((S^1)^{\times N})$$

Первые два сомножителя описывают инвариантные относительно действий тора формы на торическом многообразии. Третий сомножитель введен для представления оснащения.

Генераторы внешней алгебры мы будем обозначать как θ^a , а координаты на торе как Y_a , $a = 1, \dots, N$.

Оператор оснащения выберем равным $i \frac{\partial}{\partial Y_a}$, его собственные значения на функциях $\exp(i \sum_a n^a Y)$ равны n^a .

На S действуют следующие операторы:

$$L_V = \sum_a \frac{\partial^2}{\partial R^a \partial Y_a} \quad (3.1)$$

$$G_+ = \iota_V = \sum_a \frac{\partial^2}{\partial Y_a \partial (dR^a)} \quad (3.2)$$

здесь мы рассматриваем дифференциальные формы как функции от четных (R) и нечетных dR^a координат

$$G_- = \iota_V = \sum_a \frac{\partial^2}{\partial Y_a \partial \theta^a}$$

Этот оператор второго порядка является оператором Баталина – Вилковисского.

$$d = \sum_a dR^a \frac{\partial}{\partial R^a}$$

Это оператор Де Рама на формах, он играет роль оператора Дальбо — поскольку он обращается в ноль на функциях от Y , которые играют роль голоморфных функций.

Между этими операторами имеются соотношения

$$H = \{d, G_+\} \quad \text{и} \quad \{G_+, G_-\} = \{d, G_-\} = 0.$$

Если рассматривать внешнее ребро как бивалентную вершину на подграфе, состоящем из внутренних ребер, то ему отвечает оператор умножения на

$$W = \exp(i \sum_a K^a Y_a).$$

И наоборот, бивалентные вершины (отвечавшие отмеченным точкам) мы рассмотрим как тривалентные, в которых вычисляемая дифференциальная форма рассматривается как независимый от Y элемент S (то есть с $n = 0$).

В заключение отметим, что тривалентная вершина отвечает всего лишь естественному умножению в S , рассмотренном как алгебра поливекторов (по Y и θ) со значениями в дифференциальных формах (по R).

3.4. Интерпретация

С точки зрения математической физики задача вычисления инвариантов Громова – Виттена свелась к $N = 2$ топологической квантовой механике продеформированной оператором

$$\{G_+, [G_-, W]\}$$

в которой продеформированный суперзаряд имеет вид

$$Q_{def} = d + [G_-, W]$$

тем самым W является зеркальным суперпотенциалом, что согласуется с другими подходами к зеркальной симметрии на торическом многообразии.

Более того, числа голоморфных кривых оказываются выражены в терминах теории БЧОВ, в которой ответы задаются суммой по диаграммам Фейнмана с тройными вершинами, даваемыми умножением в алгебре поливекторных полей и с пропагаторами

$$G_+ G_- / H$$

Тем самым изучение тропических инвариантов Громова – Виттена приводит к еще одному доказательству зеркальной симметрии для торических многообразий.

Мы ожидаем, что обобщение тропической зеркальной симметрии на неторический случай позволит дать общую теорию зеркальной симметрии.

3.5. Тропическая зеркальная симметрия и теория примитивной формы К. Саито

Теория инвариантов Громова – Виттена была построена для эффективного вычисления числа рациональных кривых на многообразиях Фано. Из общих соображений теории (основанных на топологии пространства модулей конфигураций точек на рациональной кривой) следует, что производящая функция для числа рациональных кривых удовлетворяет уравнению ассоциативности. То есть ее третья производная является структурной константой коммутативной ассоциативной алгебры.

Задолго до появления теории Громова – Виттена К. Саито изучал специальные координаты на базе версальной деформации полиномиальной особенности. Он построил так называемую теорию примитивной формы, с помощью которой на базе версальной деформации возникает пучок плоских связности в касательном расслоении, имеющий вид

$$\nabla = \nabla_S + A/z$$

Из плоскости связности ∇ при любом значении спектрального параметра z вытекает, что $(d + A/z)^2 = 0$ в базисе из плоских сечений связности ∇_S , т. е. $dA = 0$ и одновременно с этим $A^2 = 0$. Из замкнутости матричнозначной 1-формы A вытекает, что $A = d\tau$ для некоей матричнозначной функции τ на пространстве версальной деформации сингулярности. Столбцы этой матрицы (при условии невырожденности) образуют специальные координаты (построенные К. Саито).

В работе Блока и Варченко было показано, что зануление квадрата A эквивалентно тому, что τ является матрицей вторых производных по специальным координатам от функции, решающей уравнение ассоциативности. Отметим, что для этого требуется дополнительное условие симметричности матрицы τ .

Первая связность ∇ является канонической связностью (называемой связностью Гаусса – Манина) в периодах осциллирующего интеграла

$$\int \exp(W/z)\Omega$$

С точки зрения суперсимметричной квантовой механики это связность в когомологиях оператора

$$Q + zG_- = [G_-, W] + zG_-$$

связность ∇_S в суперсимметрической квантовой механике на обычно возникает как связность Ходжа на гармонических формах.

В теории особенностей в силу такой связности нет, и К. Саито приходилось вводить в точке особенности отождествление между Q и $Q + zG_-$ когомологиями — оказывается, оно продолжается на всю версальную деформацию. Для обеспечения последующей симметричности матрицы τ он вводил специальное спаривание на $Q + zG_-$ когомологиях, и накладывал на отождествление специальные условия (условия хорошего сечения), что гарантировало дальнейшую симметричность τ .

Как мы видим, в теории зеркальной симметрии возникают те же структуры, что и в теории К. Саито, только суперпотенциал не полиномиальный а тригонометрический.

Более того, зеркальная симметрия содержит в себе естественное отождествление Q и $Q + zG_-$ когомологий, задаваемое циклами на таргет-пространстве. Таким образом в зеркальной симметрии возникает каноническое хорошее сечение и построение решения уравнений ассоциативности становится каноническим — как это и должно быть для производящей функции числа рациональных кривых.

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОЗМОЖНОСТИ ПОСТРОЕНИЯ ИНВАРИАНТОВ МАТРОИДОВ ПО НЕКОММУТАТИВНЫМ АЛГЕБРАМ ЛИ

4.1. Узлы, алгебры Ли и матроиды

Инварианты узлов конечного порядка описываются в терминах *хордовых диаграмм*. Такая диаграмма представляет собой окружность с выбранными на ней хордами, не имеющими общих концов. Каждому инварианту узлов порядка не выше n отвечает *весовая система* — функция на хордовых диаграммах, удовлетворяющая 4-членным соотношениям. Как доказал М. Концевич, наоборот, всякая весовая система происходит из некоторого инварианта конечного порядка.

Известны различные конструкции весовых систем. В частности, большой класс весовых систем строится по некоммутативным алгебрам Ли. Если на такой алгебре Ли задана невырожденная биинвариантная билинейная форма, то ей можно сопоставить весовую систему, принимающую значения в центре универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли.

Первый нетривиальный пример такой алгебры Ли доставляет алгебра Ли $\mathfrak{sl}(2)$, состоящая из матриц с нулевым следом размера 2×2 над полем комплексных чисел. Биинвариантная билинейная форма на ней — это форма Киллинга. В этом случае центр универсальной обертывающей алгебры представляет собой кольцо многочленов от одной переменной — элемента Казимира алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$.

Каждой хордовой диаграмме можно сопоставить простой граф — ее граф пересечений. Вершины этого графа находятся во взаимно однозначном соответствии с хордами диаграммы, и две вершины соединены ребром в том случае, если соответствующие им хорды пересекаются. Различные хордовые диаграммы могут иметь совпадающие графы пересечений, и не всякий граф реализуется как граф пересечений некоторой хордовой диаграммы. В работе [37] доказано, что весовая система, отвечающая алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$, зависит лишь от графа пересечений хордовой диаграммы и, тем самым, определяет некоторую функцию на графах.

В свою очередь, всякому графу можно сопоставить матроид — комбинаторную структуру, представляющую собой удовлетворяющее определенным условиям множество подмножеств некоторого конечного множества. Матроид графа состоит из циклов в нем, понимаемых как подмножества в множестве ребер графа. В [37] доказано, что весовая система, строящаяся по алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$, зависит лишь от матроида графа пересечений. Тем самым, возникает естественный вопрос, можно ли определить естественный инвариант матроидов со значениями в кольце многочленов от одной переменной, такой, что его значения на матроидах графов пересечений совпадают со значениями весовой системы, строящейся по алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$.

Для ответа на этот вопрос необходимо более тщательно исследовать значения весовой системы, строящейся по алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$. Существенная часть любой весовой системы это ее значения на подпространстве примитивных элементов в алгебре Хопфа хордовых диаграмм. Структура значений весовой системы, строящейся по алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$, до сих пор по настоящему не понята. Для вычисления этих значений пользуются рекуррентным соотношением Варченко – Чмутова. Эксперименты с вычисленными значениями позволили Г. Л. Рыбникову выдвинуть гипотезу, согласно которой коэффициент при возможной старшей степени значения весовой системы, строящейся по алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$, на проекции хордовой диаграммы на

примитивные совпадает с алгебраическим числом гамильтоновых циклов в ориентированном графе пересечений ориентированной хордовой диаграммы. Ниже приводятся необходимые определения и доказывается, что предложенная Г. Л. Рыбниковым величина действительно является весовой системой. Ее связь с весовой системой, строящейся по алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$, остается гипотетической. По-видимому, этот вопрос глубоко нетривиален.

4.1.1. Узлы и их инварианты. Узел — это гладкое вложение окружности S^1 в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 , рассматриваемое с точностью до изотопий. Тривиальный узел — это узел, изотопный плоской окружности. Изобразить узел можно с помощью его *плоской диаграммы*, это проекция узла на плоскость вдоль трансверсальной этой плоскости прямой, с конечным числом трансверсальных пересечений: проходов или переходов. Самый простой пример нетривиального узла — трилистник.



Рис. 1: Трилистник

Инвариантом узла называется функция, принимающая одинаковые значения на изотопных узлах. В теории инвариантов Васильева помимо обычных узлов рассматриваются *особые узлы*. Это гладкие отображение из окружности S^1 в трехмерное пространство \mathbb{R}^3 , являющиеся вложением всюду, кроме конечного числа двойных точек. На плоской диаграмме особого узла помимо точек прохода и перехода будут встречаться еще и двойные точки трансверсального пересечения. Пусть χ_n — это множество особых узлов с n особыми точками. Тогда χ_0 — это множество обычных узлов.

Всякий инвариант узлов со значениями в коммутативном кольце можно продолжить на особые узлы согласно *скейн-соотношению Васильева*, которое изображено на рисунке 2.

Инвариант узлов называется *инвариантом Васильева* порядка $\leq n$, если его значение на узлах, имеющих больше чем n особых точек равно нулю.

Пример 4.1 Многочлен Конвея — это инвариант узла, сопоставляющий узлу многочлен. Он удовлетворяет *скейн-соотношению*, то есть соотношению на значения инварианта на локально отличающихся узлах (оно изображено на рисунке 3), и равен единице на тривиальном узле. Нетрудно вычислить, что для трилистника многочлен Конвея равен $1 + t^2$. Многочлен Конвея узла не меняется при зеркальном отражении узла или замене его ориентации. Многочлен Конвея содержит только четные степени переменной t .

Коэффициент c_n при t^n в многочлене Конвея является инвариантом узла порядка $\leq n$. Это следует из скейн-соотношений Конвея и Васильева. Продолжение мно-

$$f \left(\text{diagram 1} \right) = f \left(\text{diagram 2} \right) - f \left(\text{diagram 3} \right)$$

Рис. 2: Скейн-соотношение Васильева

гочлена Конвея на особые узлы с $n + 1$ особыми точками делится на t^{n+1} , значит коэффициент при t^n в нем будет равен нулю.

$$c \left(\text{diagram 1} \right) - c \left(\text{diagram 2} \right) = t \cdot c \left(\text{diagram 3} \right)$$

Рис. 3: Скейн-соотношение для многочлена Конвея

4.2. Хордовые диаграммы и графы пересечений

Особому узлу можно сопоставить его *хордовую диаграмму*: мы отмечаем на окружности особые точки, а потом соединяем их хордами. Хордовая диаграмма особого узла не зависит от его проекции на плоскость. Значение инварианта Васильева порядка $\leq n$ на особом узле с ровно n двойными точками зависит только от хордовой диаграммы узла.

В обратную сторону это утверждение неверно — не любой функции на хордовой диаграмме соответствует инвариант узла. Функция, произошедшая из инварианта узлов, должна удовлетворять *4-членному соотношению*. Это соотношение строится по паре хорд с соседними концами, при этом меняется положение одной хорды по отношению к другой, все остальные хорды остаются на своих местах.

Теорема Концевича утверждает, что если функция на хордовой диаграмме порядка n удовлетворяет 4-членному соотношению, то она происходит из некоего инварианта узлов порядка $\leq n$. Поэтому конструирование таких функций позволяет строить инварианты узлов.

По хордовой диаграмме узла можно построить *граф пересечений*. Вершинами этого графа являются хорды. Если две хорды пересекаются, то соответствующая пара вершин соединена ребром, если нет, то не соединена. Ориентированной хордовой диаграммой будем называть хордовую диаграмму с выбором ориентации каждой хорды. По ориентации хордовой диаграммы можно задать ориентацию графа пере-

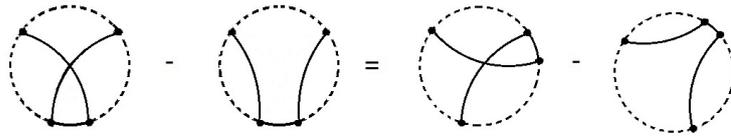


Рис. 4: 4-членное соотношение

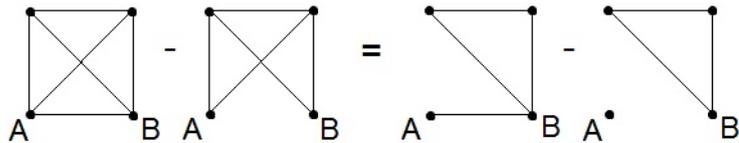


Рис. 5: 4-членное соотношение для полного графа на четырех вершинах

сечений. Если при обходе по окружности после начала хорды A встретилось начало хорды B , то соответствующее ребро в графе направлено от A к B . Если же после начала хорды A встретился конец хорды B , то ребро AB в графе направлено от B к A .

Для графов 4-членное соотношение имеет следующий аналог:

$$\Gamma - \Gamma'_{AB} = \tilde{\Gamma}_{AB} - \tilde{\Gamma}'_{AB},$$

где Γ'_{AB} — это результат удаления из графа Γ ребра AB , а $\tilde{\Gamma}_{AB}$ — это замена примыкания к вершине A всех вершин соединенных с B . То есть если какая-то вершина C , соединенная с B , в Γ соединялась ребром с A , то в $\tilde{\Gamma}_{AB}$ ребра нет, а если вершина D , соединенная с B , в Γ не соединялась с A , то в $\tilde{\Gamma}_{AB}$ есть ребро AD .

В качестве примера рассмотрим четырехчленное соотношение на полном графе на четырех вершинах (рисунок 5).

4.2.1. Пример: хроматический многочлен. Построив по узлу хордовую диаграмму, а по хордовой диаграмме граф пересечений, можно найти функцию на графе, которая удовлетворяла бы 4-членному соотношению. Такая функция согласно теореме Концевича происходит из инварианта узлов. В качестве примера рассмотрим *хроматический многочлен* графа. Каждую вершину узла мы раскрашиваем в какой-то цвет так, чтобы вершины, соединенные ребром, были бы разного цвета. Хроматический многочлен считает количество таких раскрасок. Например, для дерева с k вершинами он равен $t(t-1)^{k-1}$, так как первая вершина может быть любого цвета, а любая другая может быть окрашена в любой цвет, кроме цвета вершина, с которой она соединена, такая вершина только одна. Или например, для полного графа на k вершинах хроматический многочлен равен $t(t-1)(t-2)\dots(t-k+1)$, потому что каждая вершина соединена с каждой, а это значит, что первая вершина может быть раскрашена в любой цвет, вторая в любой, кроме цвета первой, третья в любой, кро-

ме цвета первой и второй, и так далее, вплоть до последней вершины, которая не может быть раскрашена ни в один из $k - 1$ цветов остальных вершин.

Докажем, что хроматический многочлен удовлетворяет 4-членному соотношению

$$\Gamma - \Gamma'_{AB} = \tilde{\Gamma}_{AB} - \tilde{\Gamma}'_{AB}.$$

Хорошо известно, что он удовлетворяет cut-and-join соотношению Татта:

$$\chi_{\Gamma}(t) = \chi_{\Gamma'_e}(t) - \chi_{\Gamma''_e}(t),$$

где Γ'_e — граф с удаленным ребром e , а Γ''_e — граф со стянутым ребром e . Таким образом,

$$\chi_{\Gamma}(t) - \chi_{\Gamma'_e}(t) = -\chi_{\Gamma''_e}(t)$$

Подставив это равенство в 4-членное соотношение получаем:

$$-\chi_{\Gamma''_{AB}}(t) = \chi_{\Gamma_{AB}}(t) - \chi_{\Gamma'_{AB}}(t) = \chi_{\tilde{\Gamma}_{AB}}(t) - \chi_{\tilde{\Gamma}'_{AB}}(t) = -\chi_{\tilde{\Gamma}''_{AB}}(t)$$

То есть $\chi_{\Gamma''_{AB}}(t) = \chi_{\tilde{\Gamma}''_{AB}}(t)$. А это уже очевидный факт: при стягивании ребра AB , нам не важно как изменилось примыкание к A , потому что с новой двойной вершиной будут соединены все вершины, соединенные с A и с B . Граф $\tilde{\Gamma}''_{AB}$ точно такой же, что и граф Γ''_{AB} , поэтому хроматические многочлены у них одинаковые, а значит, хроматический многочлен является инвариантом узла.

4.3. $2n$ -цикл как инвариант узлов

Возьмем произвольно ориентированную хордовую диаграмму порядка $2n$. По ней мы можем построить ориентированный граф пересечений. В этом графе рассмотрим все циклы длины $2n$, так называемые гамильтоновы циклы: они проходят через все вершины графа, проходя по каждому ребру ровно один раз. Если выбрать направление обхода, то оно может совпасть с ориентацией ребра, по которому мы идем, либо не совпасть. Если направление ребра и направление обхода совпало нечётное число раз, то $2n$ -циклу приписывается знак «-», а если чётное — то «+». Нетрудно заметить, что этот знак не зависит от того, с какой вершины и в каком направлении мы начали обход, в силу чётности числа ребер.

На рисунке 6 мы видим пример подсчета $2n$ -циклов. По хордовой диаграмме строится граф, в котором имеется лишь один $2n$ -цикл. Так как все стрелочки совпадают с направлением обхода (или не совпадают, в зависимости от направления), этот $2n$ -цикл войдет со знаком «+».

Теперь, если сложить все $2n$ -циклы учитывая знаки, получится число. Это число является инвариантом узла, что и будет доказано дальше.

Лемма 4.1

Количество гамильтоновых циклов со знаками не зависит от ориентации хордовой диаграммы.

Доказательство. Если мы поменяем ориентацию одной хорды на противоположную, то в графе пересечений поменяется направление у всех ребер, содержащих вершину, которой эта хорда соответствует. Но поскольку $2n$ -цикл проходит через каждую вершину ровно один раз, он содержит лишь два ребра, проходящих через

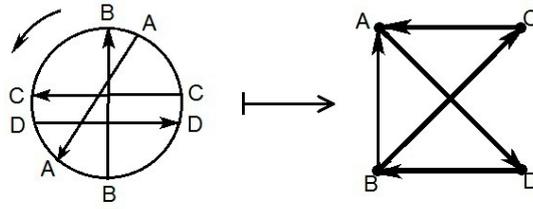


Рис. 6: Пример подсчета знака $2n$ -цикла

данную вершину. Ориентация на обоих изменилась на противоположную, такое изменение никак не повлияет на чётность числа ребер, направление которых совпадает с направлением обхода цикла. Это показано на рисунке 7.

Поскольку этот инвариант не зависит от ориентации хордовой диаграммы, мы можем продолжить его до инварианта узлов. \square

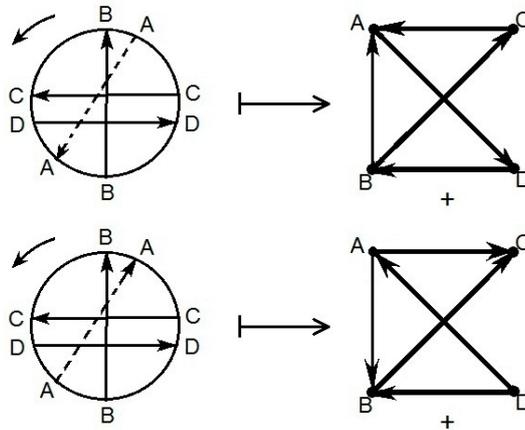


Рис. 7: Знак $2n$ -цикла не зависит от ориентации хорд

Теорема 4.2

Количество гамильтоновых циклов со знаками удовлетворяет 4-членному соотношению для графов: $\Gamma - \Gamma'_{AB} = \tilde{\Gamma}_{AB} - \tilde{\Gamma}'_{AB}$.

Доказательство. В левой части 4-членного соотношения подсчитываются объекты в Γ , содержащие AB , а в правой — объекты в $\tilde{\Gamma}$, содержащие AB . Поэтому нам достаточно убедиться, что количество $2n$ -циклов, проходящих через ребро AB в Γ и $\tilde{\Gamma}$, с учетом знаков удовлетворяет уравнению.

Назовем вершины графа Γ , соединенные и с A , и с B , вершинами типа C . В $\tilde{\Gamma}$ они будут соединены с B , и не соединены с A . Назовем вершины Γ , соединенные с B , но не соединенные с A , вершинами типа D . В $\tilde{\Gamma}$ они будут соединены и с A , и с B .

Если $2n$ -цикл в Γ , содержащий ребро AB , пришел из любой другой вершины (не типа C или D) в точку A , прошел по ребру AB , и дальше ушел из B в любую другую вершину, то в $\tilde{\Gamma}$ он войдет с точно таким же знаком: при операции замены

примыкания теряются ребра AC_i , и если $2n$ -цикл не проходил через них, то он не изменился.

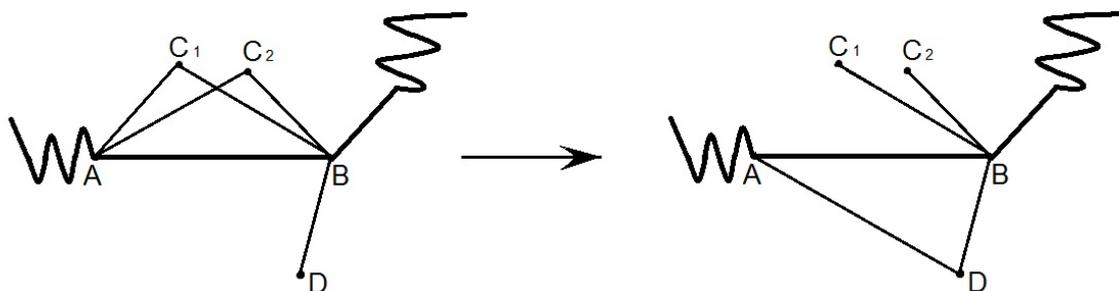


Рис. 8: $2n$ -цикл, не проходящий через AC_i , в $\tilde{\Gamma}$ войдёт с тем же знаком

Если же $2n$ -цикл в Γ проходил по одному из ребер AC_i , то в $\tilde{\Gamma}$ его уже не будет, поэтому нужно либо сопоставить ему какой-то другой цикл с тем же знаком в $\tilde{\Gamma}$, либо сократить с каким-нибудь другим циклом в Γ , имеющим противоположный знак. Доказательство сводится к рассмотрению двух случаев.

Случай 1. Это случай, когда $2n$ -цикл в Γ содержит только одну вершину типа C , проходя по ребру AC . Из вершины A он обязан прийти в B , так как мы рассматриваем $2n$ -циклы, содержащие AB , а из вершины B он не может попасть в вершину типа C , а значит, попадает в вершину типа D . В $\tilde{\Gamma}$ такого цикла не будет, потому что в $\tilde{\Gamma}$ нет ребра C . Зато там появилось ребро AD и вместе с ним новый $2n$ -цикл, которого не было в Γ . Он проходит через CB , BA и AD . Эти $2n$ -циклы изображены на рисунке 9. Покажем, что они входят с одним и тем же знаком.

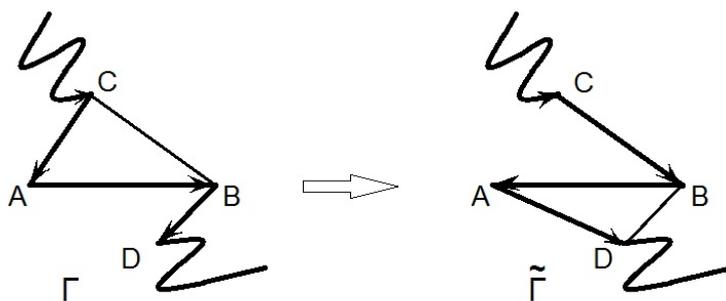


Рис. 9: Случай, когда $2n$ -цикл проходит только через одну вершину типа C

Поскольку направление стрелочек в графе не зависит от ориентации хорд в хордовой диаграмме, достаточно рассмотреть пример хордовой диаграммы с фиксированной произвольно заданной ориентацией. С другой стороны, подсчет $2n$ -цикла зависит от расположения хорд на хордовой диаграмме, поэтому нужно рассмотреть все возможные варианты расположения хорд A , B , и D . Хорды A и B должны

быть соседними, иначе к ним не применяется 4-членное соотношение на хордовые диаграммы. Хорда C обязана пересечь A и B , и при этом она не может попасть между A и B , следовательно, ее положение определено однозначно. Хорда D обязана пересечь B и не пересечься с A ; у хорды D может быть два возможных положения относительно C , но так как ни один из рассматриваемых нами $2n$ -циклов не содержит ребра CD , положение D относительно C ни на что не влияет. Итак, в этом случае нам достаточно проверить что соотношение выполняется для одной фиксированной хордовой диаграммы. Это проверка проиллюстрирована рисунком 10. Серым цветом обозначено направление обхода. Для $2n$ -цикла из Γ направление обхода совпало три раза, а из $\tilde{\Gamma}$ совпало один раз, чётность этого кусочка та же, значит, в силу неизменности всего остального, у этих $2n$ -циклов один и тот же знак.

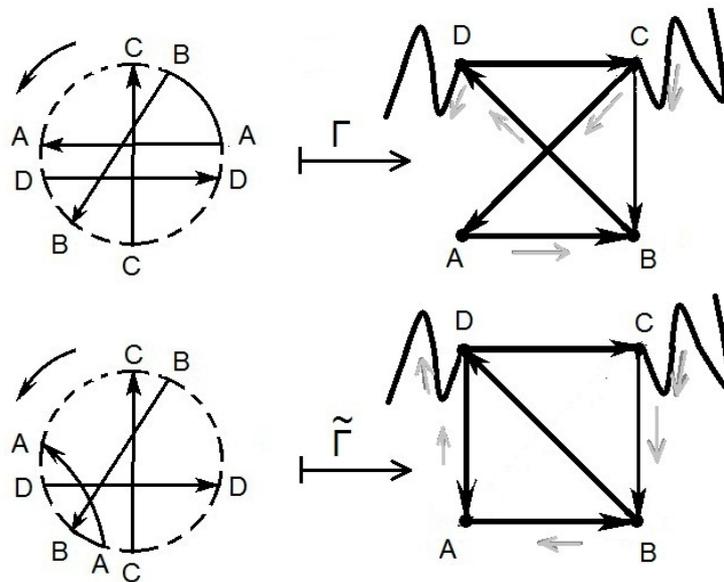


Рис. 10: Пример выполнения 4-членного соотношения в случае 1

Случай 2. Это случай, когда $2n$ -цикл в Γ содержит две вершины типа C , проходя по ребрам C_1A, AB, BC_2 . В отличие от первого случая, в $\tilde{\Gamma}$ ему нечего сопоставить. Зато есть другой цикл в Γ , которому тоже нечего сопоставить в $\tilde{\Gamma}$. Этот $2n$ -цикл проходит через ребра C_1B, BA, AC_2 . Покажем, что они войдут в Γ с разными знаками.

Как и в первом случае, ничего не зависит от ориентации хорд, что позволяет рассмотреть произвольно заданную ориентацию, а зависит лишь от их расположения, вариантов которого тоже немного: либо C_1 пересекает C_2 , либо нет. Но так как $2n$ -цикл не проходит через ребро C_1C_2 , это ни на что не влияет. Поэтому будем считать, что C_1 и C_2 не пересекаются. Обратимся сразу к частному случаю, изображенному на рисунке 11. Направление обхода для одного из циклов обозначено обычными серыми стрелочками, а для другого — двойными серыми стрелочками. С направлением серого обхода совпадает одна стрелочка, а с направлением двойного серого обхода две. Чётность на всем остальном цикле одинаковая, а на этом кусочке разная, следовательно, эти два $2n$ -цикла войдут с разными знаками в общую сумму, то есть сократятся.

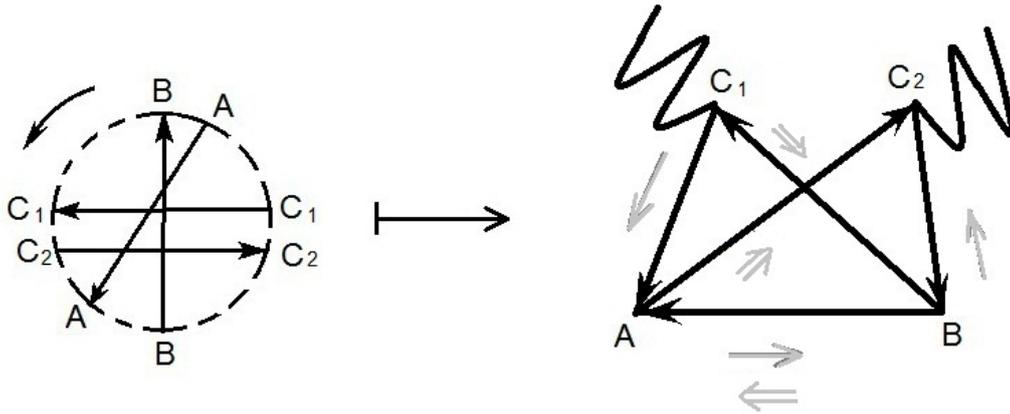


Рис. 11: Пример выполнения 4-членного соотношения в случае 2

Стоит упомянуть аналог случая 2 для $\tilde{\Gamma}$. Графы Γ и $\tilde{\Gamma}$ в некотором роде двойственные, поэтому в $\tilde{\Gamma}$ есть пары циклов, которых нет в Γ . Они проходят через две вершины типа D . Доказательство того, что они сокращаются между собой полностью аналогично доказательству случая два.

Теперь заметим, что описанными выше случаями мы перебрали все возможные варианты $2n$ -циклов, проходящих через ребро AB , и показали, что они сокращаются друг с другом, и тогда входят с разным знаком, или с циклами в двойственном графе, и тогда входят с одним и тем же знаком. Таким образом, инвариант $2n$ -цикла удовлетворяет четырехчленному соотношению, а значит, является инвариантом узла. \square

5. ВЫВОД ФЕРМИОННЫХ ФОРМУЛ ДЛЯ ХАРАКТЕРОВ
ПРОСТРАНСТВ РЕГУЛЯРНЫХ ФУНКЦИЙ НА ПРОСТРАНСТВЕ ЗАСТАВ
И ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТОГО, ЧТО ОНИ УДОВЛЕТВОРЯЮТ
РАЗНОСТНОМУ УРАВНЕНИЮ ТОДЫ

5.1. Введенные замечания и напоминания

5.1.1. **Функции q -Уиттекера.** Пусть G полупростая, односвязная группа над полем \mathbb{C} с алгеброй Ли \mathfrak{g} ; зафиксируем алгебру противоположных борелевских подгрупп B, B_- в G с унипотентными радикалами U, U_- ; тогда пересечение $B \cap B_-$ является максимальным тором T в G . Обозначим решетку весов тора T через $\check{\Lambda}$, решетку ковесов через Λ . В этой статье мы изучаем определенные инвариантные полиномы $\Psi_{\check{\lambda}}(q, z)$ на торе T (инвариантные относительно действия группы Вейля W у G). Здесь $z \in T$, $q \in \mathbb{C}^*$ и $\check{\lambda} : T \rightarrow \mathbb{C}^*$ — доминантный вес G . Функция $\Psi_{\check{\lambda}}(q, z)$ — это полиномиальное выражение от z с коэффициентами, являющимися рациональными функциями переменной q (на самом деле позднее мы будем работать с модификацией $\widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}(q, z)$ функции $\Psi_{\check{\lambda}}(q, z)$, которое будет полиномиально по переменной q).

Определим функцию $\Psi_{\check{\lambda}}(q, z)$ следующим образом. Пусть \check{G} обозначает группу двойственную по Ленглендсу к G , и пусть ее максимальный тор — \check{T} . В [44] и [59] авторы определяют (применяя так называемую редукцию Костанта-Уиттекера к квантовым группам) гомоморфизм $\mathcal{M} : \mathbb{C}[T]^W \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}(q)} \mathbb{C}(q)[\check{T}]$, который называется квантовой разностной интегрируемой системой Тоды ассоциированной с \check{G} . Для любого $f \in \mathbb{C}[T]^W$ оператор $\mathcal{M}_f := \mathcal{M}(f)$ действительно разностный, поскольку является $\mathbb{C}(q)$ -линейной комбинацией операторов сдвига T_{β} , где $\beta \in \Lambda$ и

$$T_{\beta}(F(z)) = F(q^{\beta} z).$$

Замечание. Вообще говоря, конструкции [44] и [59] зависят от выбора ориентации диаграммы Дынкина группы \check{G} , однако, из главного результата статьи [46] следует, что полученный гомоморфизм от этого выбора зависеть не будет.

В частности, вложение $\check{\Lambda} \hookrightarrow \check{T}$, сопоставляющее каждому $\check{\lambda}$ элемент $q^{\check{\lambda}}$, позволяет ограничить действие вышеупомянутых операторов на решетку $\check{\Lambda}$. Для любого $f \in \mathbb{C}[\check{T}]^W$ будем обозначать соответствующий оператор $\mathcal{M}_f^{\text{lat}}$. Следующая гипотеза не должна быть очень сложной, однако, на данный момент мы не знаем, как ее доказать:

Гипотеза 5.1

1. Существует единственный набор $\Psi_{\check{\lambda}}(q, z)$ полиномов со значениями в $\mathbb{C}(q)$ на торе T , обладающий следующими свойствами:
 - а) $\Psi_{\check{\lambda}}(q, z) = 0$ если $\check{\lambda}$ не доминантен.
 - б) $\Psi_0(q, z) = 1$.
 - в) Рассмотрим все функции $\Psi_{\check{\lambda}}(q, z)$ как одну функцию $\Psi(q, z) : \check{\Lambda} \rightarrow \mathbb{C}(q)$ от переменной $z \in T$. Тогда для любой $f \in \mathbb{C}[T]^W$ выполняется

$$\mathcal{M}_f^{\text{lat}}(\Psi(q, z)) = f(z)\Psi(q, z).$$

2. Полиномы $\Psi_{\check{\lambda}}(q, z)$ W -инвариантны.

Разумеется, вторая часть утверждения следует из единственности в первой части.

Здесь уместны некоторые замечания об имеющейся литературе на эту тему. Во-первых, гип. 5.1 просто доказывается для $G = SL(N)$. В этом случае функции $\Psi_{\check{\lambda}}(q, z)$ подробно изучены в работах [50]-[52]. Во-вторых, для любой группы G имеется другое определение интегрируемой системы q -Тоды, использующее двойные аффинные алгебры Гекке, изученное в [42]. В силу того, что нам не ясно, как доказать эквивалентность определений системы q -Тоды из [42] и из [44] и [59], мы будем обозначать операторы из [42] через \mathcal{M}'_f . Легко показать, что $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}'_f$ при $G = SL(N)$

¹ Схожим образом обозначим $(\mathcal{M}'_f)^{\text{lat}}$ соответствующий оператор, действующий на решетке. В работе [42] показано, что часть о существовании в гип. 5.1 выполняется для любой группы G , если заменить операторы \mathcal{M}'_f на $(\mathcal{M}'_f)^{\text{lat}}$. Введем обозначение $\Psi'_{\check{\lambda}}(q, z)$ для соответствующих полиномов.

Главный результат этой работы дает следующее:

Теорема 5.1

1. Существует набор W -инвариантных полиномов $\Psi_{\check{\lambda}}(q, z)$ на торе T с коэффициентами в $\mathbb{C}(q)$, удовлетворяющий а), б) и в) из гипотезы.

2. Положим $\widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}(q, z) = \Psi_{\check{\lambda}}(q, z) \cdot \prod_{i \in I} \prod_{r=1}^{\langle \alpha_i, \check{\lambda} \rangle} (1 - q^r)$. Тогда $\widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}(q, z)$ полиномиальная функция на $\mathbb{A}^1 \times T$.

Мы собираемся явно построить такие полиномы, используя технику из алгебраической геометрии.

Будем обращаться с полиномами и We shall usually refer to the polynomials $\Psi_{\check{\lambda}}$ и $\widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}$ как с функциями q -Уиттекера (Следуя [50]-[52]). Несложно показать, что

$$\lim_{q \rightarrow 0} \Psi_{\check{\lambda}} = \lim_{q \rightarrow 0} \widehat{\Psi}_{\check{\lambda}} = \chi(L(\check{\lambda}))$$

где $\chi(L(\lambda))$ обозначает характер неприводимого представления $L(\check{\lambda})$ группы G со старшим весом $\check{\lambda}$.

Основная цель этой работы дать несколько интерпретаций функций $\Psi_{\check{\lambda}}$ и $\widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}$ с точки зрения алгебраической геометрии и теории представлений; заодно мы покажем, что $\widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}(q, z)$ *положительна*, то есть является линейной комбинацией функций $\chi(L(\check{\mu}))$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_{\geq 0}[q]$ (из этого также следует, что $\Psi_{\check{\lambda}}$ — это линейная комбинация функций $\chi(L(\check{\mu}))$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_{\geq 0}[[q]]$). Все эти результаты известны для полиномов $\Psi'_{\check{\lambda}}$ (в частности, поэтому мы можем показать, что $\Psi_{\check{\lambda}} = \Psi'_{\check{\lambda}}$) и сформулированы в [42] и [56], но наши доказательства ведутся совершенно другими методами.

5.1.2. Модули Вейля. Напомним, что $\mathfrak{g}[t]$ -модулем Вейля $\mathscr{W}(\check{\lambda})$ для доминантного веса $\check{\lambda} \in \Lambda_+^{\vee}$ называется максимальный G -интегрируемый $\mathfrak{g}[t]$ -фактор модуля

$$\text{Ind}_{\mathfrak{u}[t] \oplus \mathfrak{t}}^{\mathfrak{g}[t]} \mathbb{C}_{\check{\lambda}},$$

¹На самом деле из результатов этой статьи и статьи [56] следует, что $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}'_f$ для любой G , однако, нам хотелось бы придумать независимое доказательство этого факта

где $\mathfrak{u} \subset \mathfrak{g}$ — это нильпотентный радикал Борелевской подалгебры, содержащей \mathfrak{t} (см., например, [40]). Существует также и естественное понятие *двойственного модуля Вейля* $\mathscr{W}(\check{\lambda})^\vee$ (в определении модуля Вейля необходимо заменить индуцирование на коиндуцирование и брать вместо фактор модуля подмодуль). На модулях $\mathscr{W}(\check{\lambda})$ и $\mathscr{W}(\check{\lambda})^\vee$ естественно действует \mathbb{C}^* «поворотом петель». При ограничении на $G \times \mathbb{C}^*$ модуль $\mathscr{W}(\check{\lambda})$ раскладывается в прямую сумму конечномерных представлений, и поэтому определен характер $\chi(\mathscr{W}(\check{\lambda}))$; более того, он является линейной комбинацией функций $\chi(L(\check{\mu}))$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_{\geq 0}[[q]]$. Имеется равенство $\chi(\mathscr{W}(\check{\lambda})) = \chi(\mathscr{W}(\check{\lambda})^\vee)$.

Через $A^{\check{\lambda}}$ будем обозначать пространство формальных линейных комбинаций $\sum \gamma_i x_i$, где $x_i \in A^1$ и γ_i — доминантные веса группы G , такие что $\sum \gamma_i = \check{\lambda}$. Характер $\mathbb{C}[A^{\check{\lambda}}]$ относительно действия группы \mathbb{C}^* равен $\prod_{i \in I} \prod_{r=1}^{\langle \alpha_i, \check{\lambda} \rangle} (1 - q^r)$. На модуле $\mathscr{W}(\check{\lambda})$ существует действие $\mathbb{C}[A^{\check{\lambda}}]$, удовлетворяющее следующим условиям (см. [40])

- 1) Это действие коммутирует с $G[t] \rtimes \mathbb{C}^*$
- 2) $\mathscr{W}(\check{\lambda})$ конечно порожден и свободен над $\mathbb{C}[A^{\check{\lambda}}]$.

Пусть слой $\mathscr{W}(\check{\lambda})$ над $\check{\lambda} \cdot 0 \in A^{\check{\lambda}}$ равен $D(\check{\lambda})$. Этот слой называется модулем Демазюра (причины этого объясняются в [49]). Он является конечномерным $G[t] \rtimes \mathbb{C}^*$ -модулем (на самом деле несложно показать, что действие $G[t]$ на $D(\check{\lambda})$ можно продолжить до действия большей группы $G[[t]]$). Мы собираемся доказать следующее утверждение.

Теорема 5.2

Для группы G типа ADE выполнены равенства

$$\chi(\mathscr{W}(\check{\lambda})) = \Psi_{\check{\lambda}}(q, z) \quad (5.1)$$

$$\chi(D(\check{\lambda})) = \widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}(q, z). \quad (5.2)$$

В частности, $\widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}(q, z)$ положительна в соответствии с определением, данным выше.

Замечание 5.1. Для не- ADE групп G эти результаты остаются в силе после замены $G[[t]]$ её скрученной (в смысле групп Каца – Муди) версией, но в настоящей работе мы не собираемся в это углубляться (впрочем, см. 5.1.5).

Замечание 5.2. Равенство (5.2) было доказано в [56] для функций¹ $\widehat{\Psi}'_{\check{\lambda}}$. Поэтому из теор. 5.2 и [56] вытекает равенство $\widehat{\Psi}'_{\check{\lambda}} = \widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}$. Тем не менее, мы намерены представить независимое доказательство этого тождества, а также установить теор. 5.2 *геометрически*, ибо она действительно легко вытекает из основного наблюдения работы [39]), что драматически отличается от подхода, использованного в [56].

5.1.3. Геометрическое описание и пространства (квази-)отображений. теор. 5.2 очевидным образом следует из равенства 5.1, которое мы докажем интерпретируя правую и левую части в алгебро-геометрических терминах.

¹подчеркнём, что определение модулей Демазюра через слои модулей Вейля, используемое в [56] далеко не очевидным образом совпадает со стандартным определением из [56]; тем не менее, эквивалентность этих определений доказана в [49]

Сначала проделаем это для левой части. Фактор $G[[t]]/T \cdot U_-[[t]]$ естественным образом является схемой над \mathbb{C} . Любой вес $\check{\lambda}$ стандартным образом определяет $G[[t]] \rtimes \mathbb{C}^*$ -эquivариантное линейное расслоение над этой схемой. Мы докажем

Теорема 5.3

Существует естественный изоморфизм $\Gamma(G[[t]]/T \cdot U_-[[t]], \mathcal{O}(\check{\lambda})) \simeq \mathcal{W}(\check{\lambda})^\vee$. Similarly, $\Gamma(G[[t]]/B_-[[t]], \mathcal{O}(\check{\lambda})) \simeq D(\check{\lambda})^\vee$.

Замечание 5.3. Сформулированная выше теор. 5.3 не сложна; о ней можно думать, как об аналоге теоремы Бореля – Вейля – Ботта для $G[[t]]$. Подчеркнем, что в то время как на двойственном модуле Вейля $\mathcal{W}(\check{\lambda})^\vee$ имеется естественное действие группы $G[[t]]$, на самом модуле Вейля $\mathcal{W}(\check{\lambda})$ действует только $G[t]$.

Между фактором $G[[t]]/T \cdot U_-[[t]]$ и пространством базированных отображений $\mathbb{P}^1 \rightarrow G/B$ тоже имеется тесная связь. Более того, в [39] мы предъявляем конструкцию универсальной функции, собственной для операторов \mathcal{M}_f , с помощью геометрии этого пространства отображений. Используя эту конструкцию, мы выведем равенство 5.1 из теор. 5.3, сделав несколько несложных формальных рассуждений. Технически, чтобы это проделать, нам необходимо рассматривать компактификацию пространства отображений соответствующим пространством квази-отображений.

5.1.4. Связь с полиномами Макдональда. Для любого веса $\check{\lambda}$ Макдональд ввел важнейшее понятие полиномов $P_{\check{\lambda}}(q, t, z)$ (мы используем [57] в качестве главного источника о полиномах Макдональда). Они являются W -инвариантными полиномами на торе T с коэффициентами в $\mathbb{C}[[q, t]]$ (которые на самом деле сходятся к рациональным функциям от q и t).

Гипотеза 5.2

Имеется равенство $P_{\check{\lambda}}(q, 0, z) = \widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}(q, z)$.

Этот результат известен для функций $\widehat{\Psi}'_{\check{\lambda}}(q, z)$ (и более или менее является следствием определений). Существует связь между так называемой «гипотезой Макдональда о положительности» и положительностью функций $\widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}$, упоминаемой в теор. 5.2 (подразумевается гип. 5.2). Макдональд предположил, что при $G = GL(N)$ определенная модификация $P_{\check{\lambda}}(q, t, z)$ «положительна», то есть является линейной комбинацией функций $\chi(L(\check{\mu}))$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_{\geq 0}[q, t]$. Эта модификация получается в два шага: сначала нужно перейти к определенной «интегральной форме» полинома $P_{\check{\lambda}}$ (отличающейся от $P_{\check{\lambda}}$ умножением на конкретный полином от переменных q и t), а затем сделать так называемую «плетистическую подстановку» (см. параграф 2 в [55]). Последний шаг (плетистическая подстановка) имеет смысл только в случае $G = GL(N)$; по этой причине не известно никаких вариантов этой гипотезы для общей группы G . Гипотеза Макдональда о положительности была доказана Хайманом с помощью техники схем Гильберта точек на плоскости \mathbb{C}^2 (см. [55] и ссылки в самой работе).

С другой стороны, при $t = 0$ переход к интегральной форме и замена тривиальны. Следовательно можно предположить, что полином $P_{\check{\lambda}}(q, 0, z)$ положителен (является линейной комбинацией функций $\chi(L(\check{\mu}))$ с коэффициентами в $\mathbb{Z}_{\geq 0}[q]$) для любой группы G .

5.1.5. О группах с кратными связями. Формально для групп, не относящихся к сериям ADE , сформулированные выше результаты неверны. Тем не менее, их можно модифицировать, следуя рассуждениям параграфа 8 из [39]. В частности, в случае групп не типа ADE функции Ψ_λ и $\widehat{\Psi}_\lambda$ надо рассматривать как модули Вейля выделенной максимальной параболической подалгебры в определенной скрученной аффинной алгебре, соответствующей \mathfrak{g} (подробнее см. параграф 8 в [39]). Разумная теория модулей Вейля и их связь с модулями Демажюра для скрученных алгебр разработана в [48].

5.1.6. Как организовано дальнейшее изложение. В 5.2 обсуждаются определенные линейные расслоения на пространстве (квази-)отображений и описывается их связь с сечениями линейного расслоения на $G[[t]]/T \cdot U_-[[t]]$. В 5.3 мы покажем, что определенный класс когомологий зануляется на пространстве квази-отображений. В 5.4 дается описание функций Ψ_λ в терминах квази-отображений. Наконец, в 5.5 доказывается теор. 5.2.

5.2. Схема модулей квазиотображений

Мы пользуемся обозначениями, такими же как и в [39], если не оговорено противное.

5.2.1. Инд-схема \mathfrak{Q} . Для данных корней $\beta \geq \alpha \in \Lambda_+$ имеется замкнутое вложение $\varphi_{\alpha,\beta} : \mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha \hookrightarrow \mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\beta$, добавляющее дефект $(\beta - \alpha) \cdot 0$ в точке $0 \in \mathcal{C}$. Обозначение \mathfrak{Q} будем использовать для прямого предела этой системы.

Напомним, что $V_{\tilde{\omega}_i}$, $i \in I$, обозначают фундаментальные \mathfrak{g} -модули, и пространство $\mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$ замкнуто вкладывается в $\psi_\alpha : \mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha \hookrightarrow \prod_{i \in I} \mathbb{P}\Gamma(\mathcal{C}, V_{\tilde{\omega}_i} \otimes \mathcal{O}(\langle \alpha, \tilde{\omega}_i \rangle))$. Для данного \mathfrak{g} -веса $\check{\lambda} = \sum_{i \in I} d_i \tilde{\omega}_i \in \Lambda^\vee$ определим линейное расслоение $\mathcal{O}(\check{\lambda})^\alpha$ на $\mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$ как $\psi_\alpha^* \otimes_{i \in I} \mathcal{O}(d_i)$. Отметим, что для доминантных $\check{\lambda}$, т. е. таких что $d_i \geq 0 \forall i$, расслоение $\mathcal{O}(\check{\lambda})^\alpha$ является обратным образом $\mathcal{O}(1)$ на $\mathbb{P}\Gamma(\mathcal{C}, V_\lambda \otimes \mathcal{O}(\langle \alpha, \check{\lambda} \rangle))$ относительно естественного морфизма $\mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha \rightarrow \mathbb{P}\Gamma(\mathcal{C}, V_\lambda \otimes \mathcal{O}(\langle \alpha, \check{\lambda} \rangle))$. Ясно, что $\varphi_{\alpha,\beta}^* \mathcal{O}(\check{\lambda})^\beta \simeq \mathcal{O}(\check{\lambda})^\alpha$. Полученное линейное расслоение на инд-схеме \mathfrak{Q} обозначается $\mathcal{O}(\check{\lambda})$.

5.2.2. Схема бесконечного типа \mathfrak{Q} . Обозначим $\mathbb{C}[[t^{-1}]]$ через R , а $\mathbb{C}((t^{-1}))$ через F . Напомним, что $R_n = R/(t^{-n})$. Мы называем p_n проекцию $R \rightarrow R_n$. \mathbb{C} -точки схемы бесконечного типа $\overline{G/U_-}(R)$ являются наборами векторов $v_\lambda \in V_\lambda \otimes R$, $\check{\lambda} \in \Lambda_+^\vee$ (доминантные \mathfrak{g} -веса), удовлетворяющие соотношениям Плюккера. Через $\widehat{\mathfrak{Q}} \subset \overline{G/U_-}(R)$ мы обозначаем открытую подсхему, образованную всеми отображениями $\text{Spec } R \rightarrow \overline{G/U_-}$, чье ограничение на общую точку $\text{Spec } R$ попадает в $\overline{G/U_-} \subset \overline{G/U_-}(R)$. На этой подсхеме свободно действует Картановский тор $T : h(v_\lambda) = \check{\lambda}(h)v_\lambda$. Фактор $\mathfrak{Q} = \widehat{\mathfrak{Q}}/T$ — замкнутая подсхема в $\prod_{i \in I} \mathbb{P}(V_{\tilde{\omega}_i} \otimes R)$. Любому весу $\check{\lambda} \in \Lambda^\vee$ соответствует линейное расслоение $\mathcal{O}(\check{\lambda})$ on \mathfrak{Q} .

5.2.3. Вложение $\mathfrak{Q} \hookrightarrow \mathfrak{Q}$. Выберем координату t на \mathcal{C} , для которой $t(0) = 0$, $t(\infty) = \infty$. Каждому $\alpha \in \Lambda_+$ мы сопоставляем T -торсер $\widehat{\mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha} \xrightarrow{p} \mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$ следующим образом. \mathbb{C} -точки $\widehat{\mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha}$ — это наборы $(v_\lambda \in \mathcal{L}_\lambda \subset V_\lambda \otimes \mathcal{O}_\mathcal{C})$, $\check{\lambda} \in \Lambda_+^\vee$, такие что

$$\text{а) } (\mathcal{L}_\lambda \subset V_\lambda \otimes \mathcal{O}_C)_{\lambda \in \Lambda_+^\vee} \in \mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$$

б) $v_\lambda \in \Gamma(C - 0, \mathcal{L}_\lambda)$ – незануляющиеся сечения, удовлетворяющие соотношениям Плюккера

Проекция p забывает сечения v_λ . Действие тора T на $\widehat{\mathcal{Q}\mathcal{M}}_\mathfrak{g}^\alpha$ определяется так: $h(v_\lambda \in \mathcal{L}_\lambda) = (\check{\lambda}(h)v_\lambda \in \mathcal{L}_\lambda)$.

Если рассмотреть формальное расширение v_λ в $\infty \in C$, то мы получим замкнутое вложение $s_\alpha : \widehat{\mathcal{Q}\mathcal{M}}_\mathfrak{g}^\alpha \hookrightarrow \widehat{\mathcal{Q}}$. Ясно, что отображение s_α T -эquivариантно и определяет замкнутое вложение $s_\alpha : \mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha \hookrightarrow \mathcal{Q}$ (мы используем одно и то же обозначение для этих вложений). Для любых $\beta \geq \alpha$ имеем: $s_\alpha = s_\beta \circ \varphi_{\alpha,\beta}$. Следовательно имеется замкнутое вложение $s : \mathfrak{Q} \hookrightarrow \mathcal{Q}$. Ограничение линейного расслоения $\mathcal{O}(\check{\lambda})$ с \mathcal{Q} на \mathfrak{Q} совпадает с линейным расслоением $\mathcal{O}(\check{\lambda})$ на \mathfrak{Q} .

5.2.4. Открытые подсхемы в $\mathfrak{Q}_\infty \subset \mathfrak{Q}$ и $\mathcal{Q}_\infty \subset \mathcal{Q}$. Определим открытую подсхему

$$\mathring{\mathcal{Q}\mathcal{M}}_\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha,$$

состоящую из всех квазиотображений без дефекта во $\infty \in C$. Очевидно,

$$\varphi_{\alpha,\beta}(\mathring{\mathcal{Q}\mathcal{M}}_\mathfrak{g}^\alpha) \subset \mathring{\mathcal{Q}\mathcal{M}}_\mathfrak{g}^\beta.$$

Будем обозначать через \mathfrak{Q}_∞ прямой предел этой системы. Он является открытой инд-подсхемой в \mathfrak{Q} . Отметим, что

$$s(\mathfrak{Q}_\infty) \subset G(R)/T \cdot U_-(R) \subset \mathcal{Q}.$$

Для открытой подсхемы $G(R)/T \cdot U_-(R) \subset \mathcal{Q}$ будем использовать обозначение \mathcal{Q}_∞ . При $n \geq 1$, имеется естественная проекция

$$p_n : \mathcal{Q}_\infty \rightarrow G/U_-(R_n)/T =: \mathcal{Q}_n.$$

Лемма 5.1

Ограничение $\Gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda})) \rightarrow \Gamma(\mathfrak{Q}_\infty, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$ – изоморфизм при любом $\check{\lambda} \in \Lambda^\vee$.

Доказательство. Достаточно доказать, что ограничение

$$\Gamma(\mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha, \mathcal{O}(\check{\lambda})) \rightarrow \Gamma(\mathring{\mathcal{Q}\mathcal{M}}_\mathfrak{g}^\alpha, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$$

является изоморфизмом для любого $\alpha \in \Lambda_+$. Поскольку дополнение к $\mathring{\mathcal{Q}\mathcal{M}}_\mathfrak{g}^\alpha$ в $\mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$ имеет коразмерность 2, достаточно установить нормальность $\mathring{\mathcal{Q}\mathcal{M}}_\mathfrak{g}^\alpha$. Однако локально в этальной топологии, $\mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$ изоморфно произведению пространства Застав $Z_\mathfrak{g}^\alpha$ и многообразия флагов $\mathcal{B}_\mathfrak{g}$. Наконец, нормальность $Z_\mathfrak{g}^\alpha$ доказана в [39]. \square

Следующая гипотеза не нужна для этой работы, однако, может понадобиться для дальнейших целей.

Гипотеза 5.3

Ограничение $\Gamma(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda})) \rightarrow \Gamma(\mathcal{Q}_\infty, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$ является изоморфизмом для любого $\check{\lambda} \in \Lambda^\vee$.

Сделаем несколько замечаний по поводу гип. 5.3. Как и в доказательстве лем. 5.1, необходимо знать, что схема \mathcal{Q} нормальна. Согласно [43], [54], формальное пополнение \mathcal{Q} в замкнутой точке $x \in \mathcal{Q}$ изоморфно произведению формального пополнения некоторого $\mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha$ в замкнутой точке $\phi \in \mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha$, и счетного числа копий формального диска. Таким образом, нормальность формальной окрестности каждой замкнутой точки следует из нормальности $\mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha$. К сожалению, поскольку \mathcal{Q} не нетерово, из этого не следует нормальность самого \mathcal{Q} .

Группа \mathbb{G}_m действует на \mathcal{Q} вращениями петли, и линейные расслоения $\mathcal{O}(\check{\lambda})$ \mathbb{G}_m -эквивариантны. Значит \mathbb{G}_m действует на глобальных сечениях этих расслоений. Мы обозначим за $\tilde{\Gamma}(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda})) \subset \Gamma(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$ подпространство \mathbb{G}_m -конечных сечений.

Теорема 5.4

Ограничение $\Gamma(\mathcal{Q}_\infty, \mathcal{O}(\check{\lambda})) \rightarrow \tilde{\Gamma}(\mathcal{Q}_\infty, \mathcal{O}(\check{\lambda})) = \tilde{\Gamma}(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$ является изоморфизмом для любого $\check{\lambda} \in \Lambda^\vee$.

Доказательство. Замкнутое вложение $\varphi_{\alpha,\beta} : \mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha \hookrightarrow \mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\beta$ поднимается очевидным образом до одноименного замкнутого вложения T -торсеров $\widehat{\mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\beta}$. Обозначим предел системы за $\widehat{\mathcal{Q}}$, T -торсер над \mathcal{Q} . Построение 5.2.3 определяет T -эквивариантное замкнутое вложение $s : \widehat{\mathcal{Q}} \hookrightarrow \widehat{\mathcal{Q}_\infty} := G/U_-(R)$. Необходимо доказать, что ограничение $\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{Q}_\infty}] \rightarrow \mathbb{C}[\widehat{\mathcal{Q}}] = \mathbb{C}[\widehat{\mathcal{Q}}]$ — изоморфизм. Здесь под $\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{Q}_\infty}]$ (соотв. $\mathbb{C}[\widehat{\mathcal{Q}}]$) подразумевается кольцо \mathbb{G}_m -конечных функций на $\widehat{\mathcal{Q}_\infty}$ (соотв. $\widehat{\mathcal{Q}}$).

С этой целью мы воспроизводим аргумент из [39]. Выберем регулярный доминантный вес $\mu \in \Lambda^+$ и рассмотрим соответствующую T -неподвижную точку $t^\mu \in \text{Gr}_G$. Ее стабилизатор St_μ в $G[t^{-1}]$ имеет унитарный радикал RadSt_μ , и фактор $\text{St}_\mu / \text{RadSt}_\mu$ канонически изоморфен T . Фактор $G[t^{-1}] / \text{St}_\mu$ — это $G[t^{-1}]$ -орбита $W_{G,\mu} \subset \text{Gr}_G t^\mu$ (смотри [39]), и фактор $G[t^{-1}] / \text{RadSt}_\mu$ — это T -торсер $\widehat{W}_{G,\mu}$.

NB: Группа, обозначенная за St_μ в [39] — это пересечение нашего St_μ с первой конгруэнц-группой $G_1 \subset G[t^{-1}]$.

В терминах модулярности $W_{G,\mu}$ параметризует G -расслоения на \mathcal{C} изоморфического типа W_μ , оснащенные тривиализацией на $\mathcal{C} - 0$ (смотри [39]). Такое расслоение \mathcal{F}_G обладает каноническим флагом Хардера-Нарасимхана $HN(\mathcal{F}_G)$. Обратите внимание на то, что этот флаг полный, т.е. является редукцией к борелевской подгруппе, так как μ регулярен. В частности, слой $\mathcal{F}_{G,\infty}$ у \mathcal{F}_G в $\infty \in \mathcal{C}$ оснащен канонической редукцией к борелевской подгруппе. Теперь $\widehat{W}_{G,\mu}$ параметризует данные, как и выше, с дальнейшей редукцией $\mathcal{F}_{G,\infty}$ на унитарный радикал борелевской подгруппы. По сходству с [39] получаем

Лемма 5.2

Зафиксируем $n \geq 1$ и предположим, что $\mu \in \Lambda_{\text{reg}}^+$ таков, что $\langle \mu, \check{\alpha} \rangle \geq n$ для каждого положительного корня $\check{\alpha}$ алгебры \mathfrak{g} . Тогда:

- 1) образ RadSt_μ в $G[t^{-1}] / G_n = G(R_n)$ равен $U_-(R_n)$, в частности, имеется естественное отображение

$$\pi_{\mu,n} : \widehat{W}_{G,\mu} \rightarrow G(R_n) / U_-(R_n)$$

- 2) для каждого $k < n$, отображение $\pi_{\mu,n}^* : \mathbb{C}[G(R_n) / U_-(R_n)] \rightarrow \mathbb{C}[\widehat{W}_{G,\mu}]$ индуцирует изоморфизм на функциях степени однородности k по отношению к \mathbb{G}_m . \square

Обозначим пересечение $W_{G,\mu} \subset \text{Gr}_G$ с $\overline{\text{Gr}}_G^\lambda$ через $\overline{W}_{G,\mu}^\lambda$. Обозначим прообраз $\overline{W}_{G,\mu}^\lambda \subset W_{G,\mu}$ в $\widehat{W}_{G,\mu}^\lambda$ через $\widehat{W}_{G,\mu}^\lambda$. По сходству с [39] получим:

Лемма 5.3

(1) Пусть $\lambda \geq \mu \in \Lambda_{\text{reg}}^+$, и пусть $\alpha = \lambda - \mu$. Тогда существует естественный бирациональный $T \times \mathbb{G}_m$ -эквивариантный морфизм $s_\mu^\lambda : \widehat{W}_{G,\mu}^\lambda \rightarrow \widehat{\mathcal{Q}\mathcal{M}}_g^\alpha$ такой, что для любого n , удовлетворяющего условию из лем. 5.2(1), следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{W}_{G,\mu}^\lambda & \xrightarrow{s_\mu^\lambda} & \widehat{\mathcal{Q}\mathcal{M}}_g^\alpha \\ \pi_{\mu,n} \downarrow & & \downarrow p_n \circ s_\alpha \\ G(R_n)/U_-(R_n) & \xrightarrow{\text{id}} & G(R_n)/U_-(R_n) \end{array} \quad (5.3)$$

(s_α было построено в 5.2.3).

(2) Отображение $(s_\mu^\lambda)^* : \mathbb{C}[\widehat{\mathcal{Q}\mathcal{M}}_g^\alpha] \rightarrow \mathbb{C}[\widehat{W}_{G,\mu}^\lambda]$ индуцирует изоморфизм на функциях степени $< n$ для любого n , удовлетворяющего условию в лем. 5.2(1). \square

Теперь теор. 5.4 немедленно следует из лем. 5.2 и лем. 5.3. \square

Отметим, что если поверить в гип. 5.3, тогда из нее следует, что ограничение $\Gamma(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda})) \rightarrow \widetilde{\Gamma}(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$ — это изоморфизм для любого $\check{\lambda} \in \Lambda^\vee$. (это немедленно следует из теор. 5.4, лем. 5.1, и гип. 5.3).

5.3. Зануление когомологий

С этого момента группа G предполагается типа ADE. По определению,

$$H^n(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda})) = \varprojlim H^n(\mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha, \mathcal{O}(\check{\lambda})).$$

Теорема 5.5

(1) Для $n > 0$ и $\check{\lambda} \in \Lambda^\vee$ имеем $H^n(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda})) = 0$.

(2) Для $\check{\lambda} \in \Lambda_+^\vee$ имеем $H^0(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda})) = 0$.

Доказательство. Напомним, что $\alpha \mapsto \alpha^*$ обозначает натуральный (линейный) изоморфизм между кокорневой решеткой \mathfrak{g} и его корневой решеткой, отправляя простые кокорни в соответствующие обычные корни. Теперь Λ_+ содержит коконечную подсистему $\Lambda_+^{\check{\lambda}}$, сформированную α , такую, что $\alpha^* + \check{\lambda}$ доминантно. Необходимо доказать, что для $\alpha \in \Lambda_+^{\check{\lambda}}$ у нас есть $H^n(\mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha, \mathcal{O}(\check{\lambda})) = 0$.

Согласно [39], Z_g^α — многообразие Горенштейна с рациональными особенностями. Поскольку $\mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha$, локально в этальной топологии, изоморфно $Z_g^\alpha \times \mathcal{B}_g$, мы заключаем, что $\mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha$ тоже многообразие Горенштейна с рациональными особенностями. (Именно здесь мы пользуемся предположением о том, что группа G типа ADE. Определим даулизирующий пучок $\mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha$ через ω^α).

Лемма 5.4

$\omega^\alpha \simeq \mathcal{O}(-\alpha^* - 2\check{\rho})$.

Доказательство. В случае $G = \text{SL}(N)$, лемма доказана в [53]. Для произвольной группы G типа ADE мы сначала докажем, что $\omega^\alpha \simeq \mathcal{O}(\check{\lambda})$ для некоторого $\check{\lambda}$. Достаточно

проверить это на открытой подсхеме $\mathring{\mathcal{Q}}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$, поскольку дополнение имеет коразмерность 2. У нас есть морфизм вычисления в $\infty \in \mathcal{C} : \mathring{\mathcal{Q}}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha \xrightarrow{ev_\infty} \mathcal{B}_\mathfrak{g}$. Это G -эквивариантное слоение со слоями изоморфными $Z_\mathfrak{g}^\alpha$. Поскольку большая клетка $U \cdot e_- \subset \mathcal{B}_\mathfrak{g}$ — это свободная орбита U , имеем $ev_\infty^{-1}(U \cdot e_-) \simeq Z_\mathfrak{g}^\alpha \times U$. Канонический класс $Z_\mathfrak{g}^\alpha$ тривиален (см. [39]), поэтому канонический класс $ev_\infty^{-1}(U \cdot e_-)$ тоже тривиален. Таким образом, ω^α имеет нигде не зануляющееся сечение σ на $ev_\infty^{-1}(U \cdot e_-)$. Поэтому класс ω^α на $\mathring{\mathcal{Q}}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$ есть линейная комбинация пулбэков дивизоров Шуберта на $\mathcal{B}_\mathfrak{g}$ под действием ev_∞ . Пулбэк неприводимого дивизора Шуберта есть $\mathcal{O}(\tilde{\omega}_i)$, и мы заключаем, что существует $\check{\lambda}$ такое, что $\omega^\alpha \simeq \mathcal{O}(\check{\lambda})$.

Остается проверить, что $\check{\lambda} = -\alpha^* - 2\check{\rho}$. Мы сделаем это на другой открытой подсхеме $\mathring{\mathcal{Q}}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha \subset \mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$ с дополнением коразмерности 2. А именно, $\mathring{\mathcal{Q}}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$ — это пространство модулей квазиотображений с дефектом не более простого корня (или вообще без дефекта). Отметим, что $\mathring{\mathcal{Q}}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$ гладкое, и разрешение Концевича есть изоморфизм над ним. Фиксируем квазиотображение без дефекта $\phi \in \mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^{\alpha-\alpha_i}$, и рассмотрим кривую $C_i^\phi \subset \mathring{\mathcal{Q}}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$, образованную всеми квазиотображениями $\phi(c)$, $c \in \mathcal{C}$ (заменяя ϕ произвольной точкой \mathcal{C}). Легко видеть, что $\deg(\mathcal{O}(\tilde{\omega}_j)|_{C_i^\phi}) = \delta_{ij} = \langle \alpha_i, \tilde{\omega}_j \rangle$. Откуда остается проверить, что $\deg(\omega^\alpha|_{C_i^\phi}) = -\langle \alpha_i, \alpha^* + 2\check{\rho} \rangle$. Это сделано в [47]. Хотя *loc. cit.* сформулировано для $G = \mathrm{SL}(N)$, это доказательство слово в слово проходит для произвольной простой группы G .

Лемма доказана. \square

Мы готовы закончить доказательство теоремы. Для $\alpha \in \Lambda_+^{\check{\lambda}}$ линейное расслоение $\mathcal{L} = \mathcal{O}(\check{\lambda}) \otimes (\omega^\alpha)^*$ на $\mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$ очень обильно. Необходимо доказать, что $H^n(\mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha, \mathcal{O}(\check{\lambda})) = H^n(\mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha, \mathcal{L} \otimes \omega^\alpha) = 0$ для $n > 0$. Следуя [39], $\mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$ имеет рациональные особенности. Пусть $\pi : X \rightarrow \mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha$ — разрешение особенностей. Тогда для канонического линейного расслоения ω_X на X получаем $R\pi_*\omega_X = \omega^\alpha$. Поэтому $H^n(\mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha, \mathcal{L} \otimes \omega^\alpha) = H^n(X, \pi^*\mathcal{L} \otimes \omega_X) = 0$ (for $n > 0$) согласно теореме об обращении в нуль Каваматы-Фивега, поскольку $\pi^*\mathcal{L}$ численно эффективен и объемен.

Это заканчивает доказательство первой части теоремы. Вторая часть очевидна. \square

5.4. Функции q -Уиттекера

5.4.1. Характер $R\Gamma(\mathcal{Q}\mathcal{M}_\mathfrak{g}^\alpha, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$. Напомним [39], что $\mathfrak{F}_\alpha(q, z)$ — характер $T \times \mathbb{G}_m$ -модуля $\mathbb{C}[Z_\mathfrak{g}^\alpha]$, рациональная функция на $T \times \mathbb{G}_m$. Обозначим за x_i характер двойственного тора \check{T} , соответствующего простому корню α_i . Для $\alpha \in \Lambda_+$ соответствующий характер \check{T} обозначим за x^α . Рассмотрим формальные производящие функции $J_\mathfrak{g}(q, z, x) = \sum_{\alpha \in \Lambda_+} x^\alpha \mathfrak{F}_\alpha$, и $\mathfrak{F}_\mathfrak{g}(q, z, x) = \prod_{i \in I} x_i^{\log(\tilde{\omega}_i)/\log q} J_\mathfrak{g}(q, z, x)$, cf. [38].

Согласно [39], функция $\mathfrak{F}_\mathfrak{g}(q, z, x)$ — это собственная функция квантовой цепочки Тоды интегральной системы, ассоциированной с \mathfrak{g} . Например, если $G = \mathrm{SL}(N)$, функция $\mathfrak{F}_\mathfrak{g}(q, z, x)$ — собственная функция оператора $\mathfrak{G} = T_1 + T_2(1 - x_1) + \dots + T_N(1 - x_{N-1})$, cf. [38], где $T_k(F(q, z, x_1, \dots, x_{N-1})) = F(q, z, x_1, \dots, x_{k-2}, q^{-1}x_{k-1}, qx_k, x_{k+1}, \dots, x_{N-1})$.

При подстановке $x = q^{\check{\lambda}}$ с $\check{\lambda} \in \Lambda_+^\vee$ в $J_\mathfrak{g}(q^{-1}, z, x)$ или в $\mathfrak{F}_\mathfrak{g}(q^{-1}, z, x)$ эти формальные

ряды сходятся, и

$$\mathfrak{F}_g(q^{-1}, z, q^{\check{\lambda}}) := \prod_{i \in I} (q^{\langle \alpha_i, \check{\lambda} \rangle})^{\log(\check{\omega}_i)/\log q} J_g(q^{-1}, z, q^{\check{\lambda}}) = z^{\check{\lambda}} J_g(q^{-1}, z, q^{\check{\lambda}})$$

(формальный ряд Тейлора от q с коэффициентами в многочленах Лорана от z).

Следующая лемма является переформулировкой результата из [53].

Лемма 5.5

Класс $f R\Gamma(\mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$ в $K_{T \times \mathbb{G}_m}(pt)$ равен

$$\sum_{\substack{\gamma + \beta = \alpha \\ w \in W}} z^{w\check{\lambda}} q^{\langle \gamma, \check{\lambda} \rangle} \mathfrak{F}_\gamma(q^{-1}, wz) \mathfrak{F}_\beta(q, wz) \prod_{\check{\alpha} \in \check{R}^+} (1 - wz^{\check{\alpha}})^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $\pi : \overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^1 \times \mathcal{B}_g, (1, \alpha)) \rightarrow \mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha$ (соотв. $\varpi : M_g^\alpha \rightarrow Z_g^\alpha$) — разрешение Концевича, смотри, например, [39]). Поскольку особенности $\mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha$ (соотв. Z_g^α) рациональны, имеем: $R\Gamma(\mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha, \mathcal{O}(\check{\lambda})) = R\Gamma(\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^1 \times \mathcal{B}_g, (1, \alpha)), \pi^* \mathcal{O}(\check{\lambda}))$ (соотв. $\mathbb{C}[Z_g^\alpha] = \mathbb{C}[M_g^\alpha]$). Поэтому нам необходимо выразить характер $R\Gamma(\mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$ через характеры $\mathbb{C}[M_g^\beta]$. Это сделано в [53] с помощью локализации Атьи-Ботта-Лефшеца для $T \times \mathbb{G}_m$ -неподвижных точек $\overline{M}_{0,0}(\mathbb{P}^1 \times \mathcal{B}_g, (1, \alpha))$. Как обычно мы должны добавить, что *loc. cit.* относится к $G = \mathrm{SL}(N)$, тем не менее, доказательство слово в слово проходит для произвольной простой группы G . \square

5.4.2. Характер $\tilde{\Gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$. По теор. 5.5, характер $\chi(\tilde{\Gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda})))$ --- это предел характеров $\chi(R\Gamma(\mathcal{Q}\mathcal{M}_g^\alpha, \mathcal{O}(\check{\lambda})))$ при $\alpha \rightarrow \infty$. Определим $\mathfrak{F}_\infty(q, z) := \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \mathfrak{F}_\alpha(q, z)$ (легко видеть, что последний предел существует).

Предложение 5.1

$$\chi(\tilde{\Gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))) = \sum_{w \in W} \mathfrak{F}_g(q^{-1}, wz, q^{\check{\lambda}}) \mathfrak{F}_\infty(q, wz) \prod_{\check{\alpha} \in \check{R}^+} (1 - wz^{\check{\alpha}})^{-1}.$$

Доказательство. При α стремящемся к ∞ , формула из лем. 5.5 превращается в:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{\gamma \in \Lambda_+ \\ w \in W}} z^{w\check{\lambda}} q^{\langle \gamma, \check{\lambda} \rangle} \mathfrak{F}_\gamma(q^{-1}, wz) \mathfrak{F}_\infty(q, wz) \prod_{\check{\alpha} \in \check{R}^+} (1 - wz^{\check{\alpha}})^{-1} = \\ \sum_{w \in W} z^{w\check{\lambda}} J_g(q^{-1}, wz, q^{\check{\lambda}}) \mathfrak{F}_\infty(q, wz) \prod_{\check{\alpha} \in \check{R}^+} (1 - wz^{\check{\alpha}})^{-1} = \\ \sum_{w \in W} \mathfrak{F}_g(q^{-1}, wz, q^{\check{\lambda}}) \mathfrak{F}_\infty(q, wz) \prod_{\check{\alpha} \in \check{R}^+} (1 - wz^{\check{\alpha}})^{-1}. \end{aligned}$$

\square

Следствие 5.1

Если $\chi(\tilde{\Gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))) = \Psi_{\check{\lambda}}(q, z)$, то функции $\Psi_{\check{\lambda}}(q, z)$ удовлетворяют условиям гип. 5.1.

Доказательство. Вторая часть гип. 5.1 очевидна по построению. гип. 5.1(1b) тоже очевидно. Согласно теор. 5.5(2), $\chi(\tilde{\Gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))) = 0$ если $\check{\lambda} \notin \Lambda_+^\vee$, что доказывает гип. 5.1(1a).

Докажем гип. 5.1(1c). Функция $\mathfrak{F}_g(q^{-1}, wz, q^{\check{\lambda}})$ на решетке Λ^\vee — это собственная функция квантовой цепочки Тоды, ограниченная на решетку. Согласно предл. 5.1, $\chi(\tilde{\Gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda})))$ — линейная комбинация функций $\mathfrak{F}_g(q^{-1}, wz, q^{\check{\lambda}})$ с коэффициентами независимыми от $\check{\lambda}$. Поэтому $\mathfrak{F}_g(q^{-1}, wz, q^{\check{\lambda}})$ — тоже собственная функция квантовой цепочки Тоды. \square

5.5. Модули Вейля

Напомним, что $R = \mathbb{C}[[t^{-1}]]$. Введем новую переменную $t = t^{-1}$ так, что $R = \mathbb{C}[[t]]$. Пусть $\tilde{R} := \mathbb{C}[t] \subset R$. Проалгебраическая группа $G(R)$ естественно действует на проконечномерном векторном пространстве $\Gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$. Непрерывное двойственное $\Gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))^\vee$ совпадает с градуированным двойственным $\tilde{\Gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))^\vee$ и оснащено естественным действием $G(\tilde{R}) : g \cdot v^*(v) := v^*(\tau g \cdot v)$. Здесь $g \mapsto \tau g$ — антиинволюция Шевалле G , тождественная на T . Производная этих действий индуцирует действия $\mathfrak{g}(R)$ и $\mathfrak{g}(\tilde{R})$. Согласно теор. 5.4, $\mathfrak{g}(\tilde{R})$ -модуль $\Gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))^\vee$ совпадает с градуированным двойственным $\Gamma(\mathcal{Q}_\infty, \mathcal{O}(\check{\lambda}))^\vee$.

Обозначим прообраз большой клетки $U \cdot e_- \subset \mathcal{B}_g$ в $G/U_- \rightarrow \mathcal{B}_g$ через $C \subset G/U_-$. Обозначим открытую подсхему $C(R)/T \subset G(R)/T \cdot U_-(R) = \mathcal{Q}_\infty$ через \mathcal{Q} . Имеем морфизм ограничения $\mathfrak{g}(R)$ -модулей $\Gamma(\mathcal{Q}_\infty, \mathcal{O}(\check{\lambda})) \hookrightarrow \Gamma(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$. Теперь $C(R)$ — свободная орбита $B(R) \subset G(R)$, и $\Gamma(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda})) = \text{CoInd}_{u(R) \oplus t}^{\mathfrak{g}(R)} \mathbb{C}_{\check{\lambda}}$. Градуированное двойственное $\Gamma(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))^\vee = \text{Ind}_{u(\tilde{R}) \oplus t}^{\mathfrak{g}(\tilde{R})} \mathbb{C}_{\check{\lambda}}$.

Лемма 5.6

$\Gamma(\mathcal{Q}_\infty, \mathcal{O}(\check{\lambda})) \subset \Gamma(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$ — максимальный G -интегрируемый $\mathfrak{g}(R)$ -подмодуль. Эквивалентно, $\Gamma(\mathcal{Q}_\infty, \mathcal{O}(\check{\lambda}))^\vee$ — максимальный G -интегрируемый $\mathfrak{g}(\tilde{R})$ -фактор модуль $\Gamma(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))^\vee$.

Доказательство. Отметим, что \mathcal{Q}_∞ — G -насыщение \mathcal{Q} . Пусть $v \in \Gamma(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$ лежит в конечномерном \mathfrak{g} -подмодуле $V \subset \Gamma(\mathcal{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$. Действие \mathfrak{g} на V интегрируется до действия G . Посмотрим на v как на $\check{\lambda}$ -ковариантную функцию на $C(R)$. Необходимо проверить, что v — ограничение $\check{\lambda}$ -ковариантной функции \hat{v} с $G/U_-(R)$ на $C(R)$. По точке $y \in G/U_-(R)$ мы можем найти $g \in G$ такой, что $g(y) \in C(R)$. Затем определим $\hat{v}(y) := u(gy)$, где $u := gv \in V$ рассматривается как $\check{\lambda}$ -ковариантная функция на $C(R)$. Очевидно, это корректно определено, т.е. не зависит от выбора g . \square

Напомним [40], что $\mathfrak{g}(\tilde{R})$ -модуль Вейля $\mathscr{W}(\check{\lambda})$ доминатного веса $\check{\lambda} \in \Lambda_+^\vee$ представляет собою максимальный G -интегрируемый $\mathfrak{g}(\tilde{R})$ -фактормодуль

$$\text{Ind}_{u(\tilde{R}) \oplus t}^{\mathfrak{g}(\tilde{R})} \mathbb{C}_{\check{\lambda}}.$$

Поэтому из лем. 5.6 следует первая часть теор. 5.2.

С другой стороны, принимая во внимание теор. 5.4, мы также получаем:

Предложение 5.2

Для $\check{\lambda} \in \Lambda_+^\vee$, мы имеем естественный изоморфизм $\mathfrak{g}(\tilde{R})$ -модулей $\Gamma(\mathfrak{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))^\vee \simeq \mathscr{W}(\check{\lambda})$.
□

Комбинируя это со сл. 5.1, получаем следующее:

Следствие 5.2

$$\chi(\mathscr{W}(\check{\lambda})) = \Psi_{\check{\lambda}}(q, z).$$

На самом деле это утверждение теор. 5.2(1). Чтобы доказать теор. 5.2(2), вспомним, что модуль Демазура $D(\check{\lambda})$ — некоторый $\mathfrak{g}(\tilde{R})$ -подмодуль неприводимого интегрируемого первоуровневого представления $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$, смотри, например, [49]. Кроме того, согласно [40], [49] найдется действие $\mathbb{C}[A^{\check{\lambda}}]$ на $\mathscr{W}(\check{\lambda})$ такое, что:

- 1) Это действие коммутирует с $G(R) \rtimes \mathbb{C}^*$.
- 2) $\mathscr{W}(\check{\lambda})$ конечнопорождено и свободно над $\mathbb{C}[A^{\check{\lambda}}]$.
- 3) Слой $\mathscr{W}(\check{\lambda})$ в $\check{\lambda} \cdot 0$ изоморфен $D(\check{\lambda})$.

Отсюда мы выводим следующее следствие, которое на самом деле есть утверждение теор. 5.2(2) (как мы упоминали во Введении, это было доказано в [52] для $G = \text{SL}(N)$):

Следствие 5.3

Произведение $\chi(\tilde{\Gamma}(\mathfrak{Q}, \mathcal{O}(\check{\lambda}))) \cdot \prod_{i \in I} \prod_{r=1}^{\langle \alpha_i, \check{\lambda} \rangle} (1 - q^r) = \widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}(q, z)$ равно характеру (конечномерного) модуля Демазура $D(\check{\lambda})$. В частности, это конечная линейная комбинация $\chi(L(\check{\mu}))$'s с коэффициентами в $\mathbb{Z}_{\geq 0}[q]$.

5.5.1. Геометрическая интерпретация $\mathbb{C}[A^{\check{\lambda}}]$ -действия. Мы завершим этот раздел геометрической интерпретацией действия $\mathbb{C}[A^{\check{\lambda}}]$ на $\mathscr{W}(\check{\lambda})$ в терминах теор. 5.2. Это позволит нам доказать второе утверждение теор. 5.3.

Пусть $T(R)_1$ обозначает первую конгруэнц-группу $T(R)$ (т.е. ядро естественного отображения $T(R) \rightarrow T$). Пусть $\mathfrak{t}(R)_1$ обозначает его (абелеву) алгебру Ли (т.е. ядро естественного отображения $\mathfrak{t}(R) \rightarrow \mathfrak{t}$). Обозначим через $\mathfrak{t}(\tilde{R})_1 \subset \mathfrak{t}(R)_1$ соответствующее подпространство (состоящее из всех отображений $A^1 \rightarrow \mathfrak{t}$ который равны 0 в 0). Тогда для каждого $\check{\lambda} \in \Lambda_+^\vee$ существует естественный эпиморфизм $\pi_{\check{\lambda}} : U(\mathfrak{t}(R)_1) = \text{Sym } \mathfrak{t}(R)_1 \rightarrow \mathbb{C}[A^{\check{\lambda}}]$, определенный следующей формулой:

$$\pi_{\check{\lambda}}(ht^n) \left(\sum_i \gamma_i x_i \right) = \sum_i \langle h, \gamma_i \rangle x_i^n.$$

Здесь $h \in \mathfrak{t}$ и $\sum_i \gamma_i x_i \in A^{\check{\lambda}}$.

Ясно, что группа $T(R)_1$ действует (справа) на схеме $\mathbf{Q}_\infty = G(R)/T \cdot U_-(R)$. Отсюда имеем естественное действие $\text{Sym}(\mathfrak{t}(R)_1)$ на $\Gamma(\mathbf{Q}_\infty, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$ для любого $\check{\lambda} \in \Lambda^\vee$. Следующий результат легко доказать; мы оставляем детали доказательства читателю:

Предложение 5.3

1. Вышеописанное действие $\text{Sym}(\mathfrak{t}(\tilde{R})_1)$ на $\Gamma(\mathbf{Q}_\infty, \mathcal{O}(\check{\lambda}))$ пропускается через $\pi_{\check{\lambda}}$.
2. Получающееся действие $\mathbb{C}[A^{\check{\lambda}}]$ на $\Gamma(\mathbf{Q}_\infty, \mathcal{O}(\check{\lambda}))^\vee = \mathscr{W}(\check{\lambda})$ совпадает с действием в [40] и [49].

Из предл. 5.3 мы немедленно получаем следующее:

Следствие 5.4

Имеем: $\Gamma(G(R)/B_-(R), \mathcal{O}(\check{\lambda})) \simeq D(\check{\lambda})^\vee$ (это второе утверждение теор. 5.3).

Доказательство. Это следует из предл. 5.3 и из факта, что $D(\check{\lambda})$ это слой $\mathscr{W}(\check{\lambda})$ над $\check{\lambda} \cdot 0 \in \mathbb{C}[\mathbb{A}^{\check{\lambda}}]$, что $D(\check{\lambda})^\vee$ изоморфен инвариантам $\mathfrak{t}(\tilde{R})$ на $\mathscr{W}(\check{\lambda})^\vee$. Поскольку $\mathfrak{t}(\tilde{R})_1$ плотно в $\mathfrak{t}(R)_1$, из этого следует:

$$(\mathscr{W}(\check{\lambda})^\vee)^{\mathfrak{t}(\tilde{R})_1} = (\mathscr{W}(\check{\lambda})^\vee)^{\mathfrak{t}(R)_1}.$$

Из предл. 5.2 получаем:

$$(\mathscr{W}(\check{\lambda})^\vee)^{\mathfrak{t}(R)_1} = \Gamma(G(R)/T \cdot U_-(R), \mathcal{O}(\check{\lambda}))^{\mathfrak{t}(R)_1} = \Gamma(G(R)/B_-(R), \mathcal{O}(\check{\lambda})).$$

□

6. ИНТЕРПРЕТАЦИЯ КОМПЛЕКСНО ДВУМЕРНОЙ ВЕРСИИ ТЕОРИИ ГРОМОВА – ВИТТЕНА КАК ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ СТРУН ТИПА А С КОМПЛЕКСНО ДВУМЕРНЫМ ТАРГЕТ-ПРОСТРАНСТВОМ

6.1. Введение

Интегрируемые дифференциальные уравнения возникают в различных разделах современной математической физики, но в последние годы они привлекают особенно много внимания в связи с изучением статсумм в простейших моделях теории струн и некоторых квантовых теориях поля. Производящие функции для корреляторов, которые символически можно написать в виде

$$\log \tau(t) = \langle \exp \sum_k t_k \sigma_k \rangle_{\text{string}} \quad (6.1)$$

определяются изначально суммированием рядов теории возмущения и даже инстантонных вкладов в формулировке моделей теории струн на мировых поверхностях и в достаточно простых квантовых теориях поля. Оказывается однако, что вся существенная информация о результатах этого суммирования обычно спрятана в системах достаточно простых (хотя и вообще говоря нелинейных) дифференциальных уравнениях на $\log \tau(t)$ и ее производные.

В некотором смысле физикам-теоретикам повезло: как для простейших модельных примеров, так и для некоторых «физических» теорий в многомерном пространстве-времени возникают хорошо знакомые и широко используемые в прикладных задачах математической физики интегрируемые системы в размерностях $1+1$ и $2+1$. Более того, часто оказываются интересными их решения с *конечным* числом степеней свободы — так называемые модули теории (отвечающие конечному набору *примарных* операторов и соответствующих временных параметров иногда также называемых «малым фазовым пространством»). Геометрия таких решений базируется в основном на комплексных кривых и их якобианах, так что отображение Абеля играет роль интегрирующей замены переменных.

Будучи тесно связанными с алгебро-геометрическими решениями интегрируемых систем типа КП и Тоды *струнные решения* являются тем не менее абсолютно новыми. Лучший способ продемонстрировать это — начать с двух хорошо известных примеров.

6.1.1. Уравнение КдФ $u_t + uu_x + u_{xxx} = 0$ тривиально удовлетворяется для функции $u = \frac{x}{t}$, представляющей собой «медленно опускающийся» с течением времени линейный потенциал. Это достаточно тривиальное решение с точки зрения самого уравнения КдФ отвечает чистой топологической гравитации (простейшей топологической струнной модели) или теории Громова – Виттена для точки¹, в которой статсумма (известная также как модель Концевича)

$$\log \tau = F_K(x, t) + \dots = \frac{x^3}{6t} + \dots_{t \rightarrow t+1} = \frac{x^3}{3!} \langle \mathbf{111} \rangle + \dots \quad u = \frac{\partial^2 \log \tau}{\partial x^2} \quad (6.2)$$

¹см. [60], [62], [63], [65]

генерирует числа пересечений

$$\langle \sigma_{k_1} \cdots \sigma_{k_n} \rangle = \int_{\overline{M}_{g,n}} \prod_{i=1}^n \psi_i^{k_i} \quad (6.3)$$

определенные как интегралы по компактифицированным пространствам модулей $\overline{M}_{g,n}$ комплексных кривых рода g с n отмеченными точками¹, где $\psi_i = c_1(\mathbb{L}_i)$ является первым классом Чженя канонического линейного расслоения над $\overline{M}_{g,n}$ со слоем $T_{\Sigma_{g,n}}^*(P_i)$ в i -й отмеченной точке P_i . Буквально в формуле (6.2) выписано только единственное число $\langle \mathbf{111} \rangle = 1$, отвечающее тривиальному интегралу по $\overline{M}_{0,3} = \text{point}$. Чтобы найти остальные числа пересечений (6.3), следует решить полную иерархию уравнения КдФ² с начальным условием $u = x/t$

$$\log \tau = \sum_{\{k_i\} \geq 0} \frac{t_{2k_1+1} \cdots t_{2k_n+1}}{n!} \langle \sigma_{k_1} \cdots \sigma_{k_n} \rangle \hbar^{2g-2} \quad (6.4)$$

На физическом языке формулой (6.4) задается производящая функция корреляторов *гравитационных потомков* $\sigma_k \equiv \sigma_k(\mathbf{1})$, отвечающих умножению примарных операторов на k -е степени классов Чженя. «Пространственно-временная» часть теории для точки тривиальна и содержит единственный единичный примарный оператор $\mathbf{1}$. Для удобства в формуле (6.4) явно введена струнная константа связи \hbar с весом, который фиксируется правилом отбора $\sum k_i = 3g - 3 + n$. Например, вклад явно выписанный в формуле (6.2) умножается на \hbar^{-2} , так как он отвечает пространству модулей $\overline{M}_{0,3}$ с $g = 0$.

Этот дополнительный параметр крайне полезен, так как специальный интерес представляет квазиклассический предел $\hbar \rightarrow 0$ производящей функции, с поведением

$$\log \tau(t) \underset{\hbar \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\hbar^2} F(t) + O(\hbar^0) \quad (6.5)$$

где F часто называют препотенциалом. Квазиклассическая часть разложения (6.4) описывается в терминах бездисперсионного предела иерархии КдФ с *функцией* Лакса $W = z^2 - u$ (оператор Лакса после подстановки $\partial/\partial x \rightarrow \hbar \partial/\partial x \rightarrow z$), или явным образом с помощью формул

$$x = \text{res}_{\infty} W^{-1/2} z dW \sim u \frac{\partial F}{\partial x} = \text{res}_{\infty} W^{1/2} z dW \sim u^2 \quad (6.6)$$

так что

$$F \underset{\hbar \rightarrow 0}{=} \hbar^2 \log \tau = F_K(x) \sim x^3 + \dots \quad (6.7)$$

Формулы типа (6.6) определяют препотенциал (6.7) или квазиклассическую часть (6.4) как вырожденный препотенциал почти тривиального комплексного многообразия или пространственно-временной рациональной кривой $W = z^2 - u$. В общем случае имеется много переменных, вычеты должны быть заменены на интегралы периодов $\text{res} \rightarrow \oint$ по всем нетривиальным циклам, а интегрируемость уравнений типа (6.6) обеспечивается билинейными соотношениями Римана.

¹мировых листов для n -точечных корреляторов в теории струн

²включить потоки по остальным старшим переменным иерархии $t_1 = x, t_3 = t, t_5, t_7, \dots$

Полная производящая функция $\tau(t)$ может быть также восстановлена [67] как решение условий Вирасоро

$$L_n \tau = 0, \quad n \geq -1$$

$$L_n = \frac{1}{2} \sum k t_k \frac{\partial}{\partial t_{k+2n}} + \frac{1}{4} \sum_{a+b=2n} \frac{\partial^2}{\partial t_a \partial t_b} + \delta_{n+1,0} \frac{t_1^2}{4} + \frac{\delta_{n,0}}{16} \quad (6.8)$$

представляющих собой бесконечную систему *линейных* дифференциальных уравнений.

6.1.2. Бездисперсионный предел цепочки Тоды. Перейдем теперь ко второму простейшему примеру (см. [69])

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} = \exp \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} \quad (6.9)$$

«Струнное решение»

$$F = \frac{1}{2} a^2 t_1 + e^{t_1} \quad (6.10)$$

(опять же для препотенциала $F \underset{\hbar \rightarrow 0}{=} \hbar^2 \log \tau$) описывает систему частиц с координатами $a^D = \partial F / \partial a = a t_1$, движущимися с постоянными скоростями

$$\text{velocity} = \text{number} = a$$

во времени t_1 , являющимся первым временем иерархии цепочки Тоды. Эти два параметра (a, t_1) заменяют здесь единственный «пространственно-временной» параметр x иерархии КдФ, так как примарные операторы теперь — вместо единственного $\mathbf{1}$ в примере с КдФ — отвечают когомологиям \mathbb{P}^1 :

$$a \leftrightarrow \mathbf{1} \in H^0(\mathbb{P}^1) \quad \text{и} \quad t_1 \leftrightarrow \varpi \in H^2(\mathbb{P}^1).$$

Редуцированная производящая функция $F \sim \langle \exp(a\mathbf{1} + t_1\varpi) \rangle$ приводит к деформации умножения в кольце когомологий: $\varpi \cdot \varpi \simeq e^{t_1} \mathbf{1}$, отвечающему единственному нетривиальному соотношению в операторной алгебре пространственно-временных примарных операторов.

Чтобы восстановить зависимость от гравитационных потомков

$$t_{k+1} \leftrightarrow \sigma_k(\varpi) \quad \text{и} \quad T_n \leftrightarrow \sigma_n(\mathbf{1}),$$

(в этих обозначениях $a \equiv -T_0$) следует найти решение иерархии цепочки Тоды с начальным условием, отвечающим (6.10). Квазиклассически, для препотенциала

$$F = \frac{a^2 t_1}{2} + e^{t_1} \Rightarrow F(t, a) \Rightarrow F(t, \mathbf{T})$$

это может быть сделано в два шага (конечно, и наполовину редуцированная производящая функция $F(t, a)$, и полная $F(t, \mathbf{T})$ по-прежнему удовлетворяют первому уравнению Тоды (6.9)). Решение иерархии цепочки Тоды о переменным t приводит к (наполовину редуцированной) теории Громова – Виттена комплексной проективной прямой \mathbb{P}^1

$$\log \tau = \sum_{\{k_i\}, d \geq 0} \frac{t_{k_1} \dots t_{k_n}}{n!} \langle \sigma_{k_1}(\varpi) \dots \sigma_{k_n}(\varpi) \rangle \hbar^{2g-2} q^d \quad (6.11)$$

где $\sigma_k(\varpi)$ представляют собой потомки (вообще говоря комплексифицированного) кэлера класса ϖ , (чтобы отличать их от потомков $\sigma_k(\mathbf{1})$ единичного оператора), а корреляторы теперь отождествляются с интегралами по пространствам модулей $\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^1, d)$ стабильных отображений степени d кривых рода g с n отмеченными точками в проективную прямую $\Sigma_{g,n} \mapsto \mathbb{P}^1$

$$\langle \sigma_{k_1} \cdots \sigma_{k_n} \rangle = \int_{\overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^1, d)} \prod_{i=1}^n \psi_i^{k_i} \text{ev}_i^*(\varpi) \quad (6.12)$$

где $\text{ev}_i : \overline{M}_{g,n}(\mathbb{P}^1, d) \mapsto \mathbb{P}^1$ представляет собой вычисление отображения в i -й отмеченной точке. Дополнительный параметр q в формуле (6.11), считающий степени отображений или инстантонный заряд, может быть поглощен сдвигом

$$t_1 \rightarrow t_1 - \log q.$$

Квазиклассическая часть производящей функции (6.11) опять описывается пре-потенциалом в дуальной картине, иногда называемой «подходом Гинзбурга-Ландау». Суперпотенциал Гинзбурга-Ландау может быть выбран как функция на цилиндре

$$z = v + \Lambda \left(w + \frac{1}{w} \right) \quad (6.13)$$

имеющая также очевидный смысл функции Лакса для бездисперсионной цепочки Тоды (правая часть равенства (6.13) представляет собой трехдиагональную матрицу Лакса цепочки Тоды в терминах степеней спектрального параметра w). Уравнение (6.13) можно рассматривать как описывающее рациональную кривую (цилиндр), помещенную в $(z, w) \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, и его можно также считать частным упрощенным случаем семейства кривых N_c -периодической цепочки Тоды

$$\Lambda^{N_c} \left(w + \frac{1}{w} \right) = P_{N_c}(z) = \prod_{i=1}^{N_c} (z - v_i) \quad (6.14)$$

Топологическая струна типа A на \mathbb{P}^1 таким образом является дуальной $N_c = 1$ упрощенной абелевой $N = 2$ суперсимметричной калибровочной теории [70]. Решение бездисперсионной цепочки Тоды, отвечающей (6.13), является поэтому промежуточным шагом к пониманию геометрии расширенной неабелевой $N = 2$ суперсимметричной калибровочной теории с калибровочной группой $U(N_c)$, обычно ассоциируемой в контексте Зайберга – Виттена [71] с семейством кривых (6.14).

6.2. Топологическое решение бездисперсионной иерархии Тоды

Решение полуредуцированной бездисперсионной иерархии Тоды для $F(t, a)$ при $T_n = \delta_{n,1}$, или выключенных гравитационных потомках единицы $\{\sigma_k(\mathbf{1})\}$ задается в терминах рациональной кривой (6.13) (или оператора Лакса бездисперсионной Тоды), оснащенной функцией с асимптотикой

$$S \underset{z \rightarrow \infty}{=} -2z(\log z - 1) + \sum_{k>0} t_k z^k + 2a \log z - \frac{\partial F}{\partial a} - 2 \sum_{k>0} \frac{1}{kz^k} \frac{\partial F}{\partial t_k} \quad (6.15)$$

нечетной относительно инволюции $w \leftrightarrow \frac{1}{w}$, которая имеет смысл логарифма $S \sim \log \Psi$ функции Ψ , решающей вспомогательную линейную задачу. Как обычно в интегрируемых системах, решения для самих динамических переменных возникают из построения Ψ или S . В терминах глобальной переменной w немедленно имеем [72]

$$S = -2 \left(z \log w + \Lambda(\log \Lambda - 1) \left(w - \frac{1}{w} \right) \right) + \sum_{k>0} t_k \Omega_k(w) + 2a \log w \quad (6.16)$$

полностью фиксируемую асимптотикой $w \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} z$ и нечетностью относительно $w \leftrightarrow \frac{1}{w}$. Здесь $\Omega_k = z(w)_+^k - z(w)_-^k$, где \pm отвечает строго положительной и отрицательной частям лорановских полиномов (степеням z из (6.13)) от переменной w , например $\Omega_1(w) = \Lambda \left(w - \frac{1}{w} \right)$, $\Omega_2(w) = \Lambda^2 \left(w^2 - \frac{1}{w^2} \right) + 2\Lambda v \left(w - \frac{1}{w} \right)$, и.т.д.

Выражения для v , Λ , F как функций a и всех времен t находятся из условий

$$\left. \frac{dS}{d \log w} \right|_{dz=0} = 0 \quad (6.17)$$

наложенных в нулях дифференциала dS , совпадающих с нулями dz , т. е. в точках ветвления [74]. Они представляют собой два алгебраических уравнения, решаемых относительно коэффициентов $v = v(a; t)$ и $\Lambda = \Lambda(a; t)$ кривой (6.13).

6.2.1. Малое фазовое пространство. Если например, $t_k = 0$ при $k > 1$, имеем

$$v = a, \quad \Lambda^2 = e^{t_1} \quad (6.18)$$

а из «регулярного хвоста» разложения (6.15) считывается препотенциал (6.10) на малом фазовом пространстве.

Эту операцию можно интерпретировать как особый вырожденный случай общего определения препотенциала комплексной кривой Σ , оснащенной двумя мероморфными дифференциалами с фиксированными периодами [74] или производящей 1-формой Зайберга – Виттена dS_{SW} . Переменные в общем случае вводятся как интегралы периодов

$$a_i = \frac{1}{4\pi i} \oint_{A_i} dS_{SW} \quad (6.19)$$

по выбранной половине циклов в $H_1(\Sigma)$, а градиенты препотенциала F определяются

$$a_i^D = \oint_{B_i} dS_{SW} = \frac{\partial F}{\partial a_i} \quad (6.20)$$

интегралами периодов по дуальным циклам. Определение (6.20) самосогласовано благодаря условию

$$\frac{\partial a_i^D}{\partial a_j} = T_{ij} = \frac{\partial^2 F}{\partial a_i \partial a_j} \quad (6.21)$$

где симметричность правой части равенства (или вторых производных препотенциала) обеспечивается симметричностью матрицы периодов кривой Σ . Равенство (6.21) следует из (6.20) при том условии, что вариация дифференциала dS_{SW} по модулям голоморфна, что является прямым аналогом свойства (6.17).

Приведенное выше решение бездисперсионной Тоды с единственными ненулевыми переменными a и t_1 представляет собой просто вырожденный случай этой конструкции, когда вместо нетривиальной кривой мы взяли цилиндр. Тогда с учетом (6.18)

$$\begin{aligned} S &= -2 \left(z \log w + \Lambda(\log \Lambda - 1) \left(w - \frac{1}{w} \right) \right) + t_1 \Lambda \left(w - \frac{1}{w} \right) + 2a \log w = \\ &\stackrel{(6.18)}{=} -2z \log w + 2\Lambda \left(w - \frac{1}{w} \right) + 2a \log w \quad (6.22) \\ dS &\stackrel{(6.18)}{=} -2dz \log w, \quad dS_{SW} = 2z \frac{dw}{w} \end{aligned}$$

так что

$$\frac{1}{4\pi i} \oint_{A_i} dS_{SW} = \frac{1}{2\pi i} \oint_A z \frac{dw}{w} = \operatorname{res}_{z=\infty} z \frac{dw}{w} = a \quad (6.23)$$

(dz и $\frac{dw}{w}$ как раз и являются двумя мероморфными дифференциалами с фиксированными периодами), и

$$\frac{\partial F}{\partial a} \sim \int_B z \frac{dw}{w} \sim [S]_0 = at_1 \quad (6.24)$$

где роль регуляризованного бесконечного вырожденного B -периода играет постоянная часть функции (6.15).

Старшие потоки. Чтобы добавить старшие потоки следует ввести обобщенные периоды, или просто коэффициенты разложения (6.15), которые можно записать как

$$t_k = \frac{1}{k} \operatorname{res}_{P_+} z^{-k} dS = -\frac{1}{k} \operatorname{res}_{P_-} z^{-k} dS, \quad k > 0 \quad (6.25)$$

и

$$\frac{\partial F}{\partial t_k} = \frac{1}{2} \operatorname{res}_{P_+} z^k dS = -\frac{1}{2} \operatorname{res}_{P_-} z^k dS, \quad k > 0 \quad (6.26)$$

где $z(P_+) = z(P_-) = \infty$ и эти точки представляют собой две бесконечности на (6.13), меняющиеся друг с другом при действии инволюции $w \leftrightarrow \frac{1}{w}$. Уравнения (6.17) остаются теми же, но в общем случае их нельзя решить явным образом.

Уже добавив лишь ненулевое t_2 , их решения [72]

$$\begin{aligned} v &= a - \frac{1}{2t_2} \mathbf{L}(-4t_2^2 e^{t_1+2t_2 a}) \\ \log \Lambda^2 &= t_1 + 2t_2 a - \mathbf{L}(-4t_2^2 e^{t_1+2t_2 a}) \end{aligned} \quad (6.27)$$

можно выразить только через функцию Ламберта $\mathbf{L}(x)e^{\mathbf{L}(x)} = x$. Это ничто иное, как асимптотика производящей функции для чисел Гурвица

$$H_{g,d} = \langle \sigma_1(\varpi)^{2g+2d-2} \rangle_{g,d} \quad (6.28)$$

каждое из которых имеет смысл числа накрытий рода g , с d листами проективной прямой \mathbb{P}^1 , с фиксированным общим дивизором точек ветвления степени d . $\chi(\mathbb{P}^1) - \chi(\Sigma_g) = 2d + 2g - 2$, как следует из формулы Римана-Гурвица.

В самом деле, из (6.11), (6.28) имеем

$$F(a = 0, t_1, t_2 = \frac{1}{2}, 0, \dots) = \sum_{d>0} \frac{H_{d,0}}{(2d-2)!} e^{at_1} \quad (6.29)$$

Из нашего решения (6.27) следует

$$\left. \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} \right|_{a=0, t_2=1/2} = \Lambda^2 = -L(-e^{t_1}) \quad (6.30)$$

что дает буквально $H_{d,0} = \frac{(2d-2)!}{d!} d^{d-3}$ так как функция Ламберта имеет разложение

$$L(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^{n-1} t^n}{n!} = t - t^2 + \frac{3}{2} t^3 - \frac{8}{3} t^4 + \dots \quad (6.31)$$

непосредственно приводящее к нужному результату.

6.3. Квазиклассика статсуммы Некрасова

Тау-функция (6.11) может быть на самом деле определена вне рамок квазиклассического приближения¹. Это определение даётся на языке суммы по разбиениям – наборам целых чисел $\mathbf{k} = (k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_{\ell_k} = 0 \geq 0 \dots)$

$$\tau(a, t) = \sum_{\mathbf{k}} \frac{m_{\mathbf{k}}^2}{(-\hbar^2)^{|\mathbf{k}|}} e^{\frac{1}{\hbar^2} \sum_{k>0} \frac{t_k}{k+1} \text{Ch}_{k+1}(a, \mathbf{k}, \hbar)} \sim \exp\left(\frac{1}{\hbar^2} F(a, t) + \dots\right) \quad (6.32)$$

с весами пропорциональными квадрату меры Планшереля

$$m_{\mathbf{k}} = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq \ell_k} (k_i - k_j + j - i)}{\prod_{i=1}^{\ell_k} (\ell_k + k_i - i)!} \sim \prod_{i < j} \frac{k_i - k_j + j - i}{j - i} \quad (6.33)$$

и зависящими от тодовских времен с помощью полиномов Чженя

$$\left(e^{\frac{\hbar u}{2}} - e^{-\frac{\hbar u}{2}}\right) \sum_{i=1}^{\infty} e^{u(a + \hbar(\frac{1}{2} - i + k_i))} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{u^l}{l!} \text{Ch}_l(a, \mathbf{k}; \hbar) \quad (6.34)$$

или

$$\begin{aligned} \text{Ch}_0(a, \mathbf{k}) &= 1, \quad \text{Ch}_1(a, \mathbf{k}) = a, \\ \text{Ch}_2(a, \mathbf{k}) &= a^2 + 2\hbar^2 |\mathbf{k}| \\ \text{Ch}_3(a, \mathbf{k}) &= a^3 + 6\hbar^2 a |\mathbf{k}| + 3\hbar^3 \sum_i k_i (k_i + 1 - 2i) \\ &\dots \end{aligned}$$

¹отвечающего потенциалу Громова – Виттена рода $g = 0$, см. [75], [70]

Выражение в правой части для последнего содержит легко узнаваемый кусок (см., например [76])

$$\sum_i k_i(k_i + 1 - 2i) = \sum_i \left((k_i - i + \frac{1}{2})^2 - (-i + \frac{1}{2})^2 \right) \quad (6.35)$$

из комбинаторики чисел Гурвица — класс транспозиции, и это ровно тот самый элемент, чье присутствие, при $t_2 = \frac{1}{2}$ в (6.29) обеспечивает появление асимптотических чисел Гурвица через разложение функции Ламберта.

Двойственность между топологическими струнами и калибровочными теориями интерпретирует сумму по разбиениям в выражении для экспоненты от полного потенциала Громова – Виттена (6.32) как сумму по инстантонам в деформированной четырехмерной $N = 2$ суперсимметричной калибровочной теории [70]. Выражение (6.32) представляет собой частный случай статсуммы Некрасова [75] для $N_c = 1$ или деформированной $U(1)$ калибровочной теории.

Формула (6.32) также утверждает, что квазиклассика $\hbar \rightarrow 0$ статсуммы Некрасова совпадает с потенциалом Громова – Виттена рода нуль или препотенциалом Зайберга – Виттена расширенной $U(1)$ теории. Эта эквивалентность приводит, в частности, к достаточно странному явлению — эффективные действия в четырехмерных суперсимметричных калибровочных теориях удовлетворяют *тем же самым* дифференциальным уравнениям, что и производящие функции корреляторов в топологических струнах!

Квазиклассический вклад в статсумму (6.32) может быть найден как решение задачи на экстремум для функционала

$$\begin{aligned} F = \frac{1}{2} \int dx f_{\gg}(x) \sum_{k>0} t_k \frac{x^{k+1}}{k+1} - \frac{1}{2} \int_{x_1>x_2} dx_1 dx_2 f_{\gg}(x_1) f_{\gg}(x_2) F(x_1 - x_2) + \\ + a^D \left(a - \frac{1}{2} \int dx x f_{\gg}(x) \right) + \sigma \left(1 - \frac{1}{2} \int dx f_{\gg}(x) \right) \end{aligned} \quad (6.36)$$

форма которого определяется из интегрального представления для полиномов Чжэня

$$\text{Ch}_l(a, \mathbf{k}) = \frac{1}{2} \int dx f_{\mathbf{k}\gg}(x) x^l \sim \sum_{i=1}^{\infty} \left((a + \hbar(k_i - i + 1))^l - (a + \hbar(k_i - i))^l \right) \quad (6.37)$$

и меры Планшереля

$$\begin{aligned} m_{\mathbf{k}}^2 \sim \prod_{i,j} (k_i - k_j + j - i) = \exp \sum_{i,j} \log (k_i - k_j + j - i) \sim \\ \sim \exp \left(-\frac{1}{2\hbar^2} \int_{x_1>x_2} dx_1 dx_2 f_{\mathbf{k}\gg}(x_1) f_{\mathbf{k}\gg}(x_2) \gamma(x_1 - x_2; \hbar) \right) \sim \\ \stackrel{\hbar \rightarrow 0}{\sim} \exp \left(-\frac{1}{2\hbar^2} \int_{x_1>x_2} dx_1 dx_2 f_{\mathbf{k}\gg}(x_1) f_{\mathbf{k}\gg}(x_2) F(x_1 - x_2) \right) \end{aligned} \quad (6.38)$$

через вторую производную профильной функции [77]

$$f_{k\gg}(x) \sim 2 \sum_{i=1}^{\infty} (\delta(x - a - \hbar(k_i - i + 1)) - \delta(x - a - \hbar(k_i - i))) \quad (6.39)$$

для разбиений. В формуле (6.38) ядро $\gamma(x; \hbar)$ удовлетворяет разностному уравнению второго порядка

$$\gamma(x + \hbar) + \gamma(x - \hbar) - 2\gamma(x) = \hbar^2 \log x \quad (6.40)$$

и при $\hbar \rightarrow 0$ может быть в главном приближении заменено функцией

$$\gamma(x; \hbar) \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} F(x) = \frac{x^2}{2} \left(\log x - \frac{3}{2} \right) \quad (6.41)$$

удовлетворяющей $F\gg(x) = \log x$, и известной как пертурбативный препотенциал в четырехмерной $N = 2$ суперсимметричной калибровочной теории.

Профильная функция

$$f_k(x) = |x - a| + \Delta f_{Y_k}(x) \sim \sum_{i=1}^{\infty} (|x - a - \hbar(k_i - i + 1)| - |x - a - \hbar(k_i - i)|) \quad (6.42)$$

буквально отвечает профилю диаграммы Юнга Y_k разбиения \mathbf{k} , помещенной в прямой угол $|x - a|$ вершина которого находится в точке $x = a$ на оси абсцисс. Функционал (6.36) должен быть вычислен на экстремальном разбиении \mathbf{k}_* , отвечающем «большой» диаграмме Юнга Y_{k_*} с профильной функцией $f_{k_*}(x) \equiv f(x)$, являющейся решением уравнения на экстремум для функционала (6.36). Два последних члена в правой части формулы (6.36) отвечают добавленным с множителями Лагранжа дополнительным условиям на профильную функцию, следующим из (6.42):

$$f'_k(x^+) - f'_k(x^-) = 2,$$

отвечающим «выходу» на прямой угол профильной функции $f_k(x^\pm) = |x^\pm - a|$ при некоторых x^\pm , и тому, что вершина диаграммы Юнга и прямого угла находится в точке $a = \frac{1}{2} \int dx x f_{k\gg}(x)$.

Написав уравнения экстремума для функционала (6.36), получаем

$$S(z) = \frac{d}{dz} \frac{\delta F}{\delta f\gg(z)}$$

или

$$S(z) = \sum_{k>0} t_k z^k - \int dx f_{k\gg}(x)(z - x) (\log(z - x) - 1) - a^D \quad (6.43)$$

что ее вещественная часть равна нулю на сегменте I

$$\operatorname{Re} S(z) = \frac{1}{2} (S(z + i0) + S(z - i0)) = 0, \quad z \in I \quad (6.44)$$

где $\Delta f(x) \neq 0$: $x^- < x < x^+$. Асимптотика выражения (6.43) при $z \rightarrow \infty$ совпадает с (6.15), и чтобы построить такую функцию, удовлетворяющую условию (6.44), надо взять двойное накрытие z -плоскости $y^2 = (z - x^+)(z - x^-)$ эквивалентное цилиндру (6.13) где $x^\pm = v \pm 2\lambda$, и написать буквально нечетное относительно инволюции,

меняющей местами два z -листа, выражение (6.16), автоматически удовлетворяющее условию (6.44).

Экстремальная профильная функция находится из выражения (6.16) как скачок

$$f'(x) \sim \text{jump} \left(\frac{dS}{dx} \right),$$

что следует из интегрального представления (6.43). В работе [72] было найдено, например, что если добавить ненулевое время $t_2 \neq 0$ к малому фазовому пространству, то экстремальная профильная функция равна

$$f'(x) = \frac{2}{\pi} \left(\arcsin \left(\frac{x-v}{2\Lambda} \right) + 2t_2 \sqrt{4\Lambda^2 - (x-v)^2} \right),$$

$$v - 2\Lambda \leq x \leq v + 2\Lambda$$

то есть арксинус Вершика – Керова деформируется полукруговым распределением Вигнера и «перенормировкой» $v = a \rightarrow v(a; t)$ and $\Lambda = e^{t_1/2} \rightarrow \Lambda(a; t)$ параметров кривой, являющихся решениями уравнений (6.17).

7. ИЗУЧЕНИЕ (НА ОСНОВЕ ПОЛУЧЕННЫХ НА ПРЕДЫДУЩИХ ЭТАПАХ РЕЗУЛЬТАТОВ) СВЯЗИ ОПЕРАТОРОВ В ДУАЛЬНЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ (МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ) И СТРУННЫХ (ТЕОРИЯ ЛИУВИЛЛЯ) ТЕОРИЯХ

7.1. Вводные замечания и обозначения

Препотенциалы Зайберга – Виттена (ВЗ) играют важную роль в изучении свойств калибровочных теорий в фазе сильной связи [98], [100] (см. также [101] и ссылки в этих работах по поводу недавнего обсуждения этого круга проблем). В то же время они представляют собой замечательные объекты, интересные с точки зрения чистой математической физики, и были воспроизведены не так давно в квазиклассическом пределе из некрасовских инстантонных статсумм [70], [77], [72], [108], [111]. Последние могут быть представлены в виде статистических моделей, в которых суммирование производится по наборам случайных разбиений или диаграммам Юнга. Возникшие изначально из интегралов по пространствам модулей инстантонов в дважды деформированных суперсимметричных калибровочных теориях, они оказались непосредственно связанными с корреляционными функциями или конформными блоками в двумерных конформных квантовых теориях поля [113].

Квазиклассика функций Некрасова воспроизводит геометрию ВЗ, а собственно препотенциал возникает как критическое значение функционала свободной энергии соответствующей статистической модели. Это происходит весьма схожим образом с квазиклассикой матричной модели, хотя некоторые подробности — которые будут рассмотрены ниже — отличаются в этих двух случаях весьма существенно. Было уже предложено много раз (см. например недавние попытки в работах [103], [106]) интерпретировать некрасовские функции в духе матричных моделей и вне рамок квазиклассического приближения — по крайней мере в рамках пертурбативного разложения, вычисляющего поправки к препотенциалу. Однако подобное соотношение вовсе не является очевидным.

Мы начнем с демонстрации этого соотношения для самого старого и наиболее явного его примера. Оказывается гораздо более естественным взять вместо полной функции Некрасова только ее инстантонную часть, оставив временно в стороне пертурбативные вклады. В простейшем случае при этом возникает одноматричная модель Егучи – Янга (ЕЯ) [90], но в пределе *нулевого* размера матриц [72], [114]. Периоды ВЗ вводятся при этом совершенно иным способом, на связанным с фракциями или конденсатами собственных значений, как обычно это происходит в случае матричных моделей.

Частично это связано с отличием того как вводится в двух случаях струнная константа — параметр квазиклассического разложения или суммирования по родам. Для матричных моделей этим параметром является ранг калибровочной группы, и разложение имеет смысл только когда он велик. В случае суммирования по разбиениям струнная константа возникает скорее как специальная комбинация двух параметров деформации, а ранг группы или размер матриц наоборот стремится к нулю. Другим проявлением того же самого отличия является совершенно разная роль условия Вирасоро в этих двух теориях. Для матричных моделей условия Вирасоро эквивалентны петлевым уравнениям, приводящим непосредственно и к спектральной кривой, и к итерационной процедуре построения пертурбативных поправок, заключающейся в решении петлевых уравнений шаг за шагом (это можно

считать одной из основных характерных черт теории типа В). В случае же функций Некрасова, которые скорее относятся к струнным моделям типа А, условия Вирасоро определяют только лишь гравитационное одевание функции Некрасова потомками единичного оператора, не налагая никаких ограничений на ее собственный вид.

Мы также собираемся обсудить связь геометрии ВЗ с недавно предложенными логарифмическими матричными моделями [115]. Для этой цели будут детально рассмотрены теории с фундаментальной материей и представлено, в частности, явное решение для простейшей из них — абелевой модели с двумя ароматами. Это дает намек на то, как именно геометрия ВЗ может быть переписана в форме близкой к матричным моделям, но отнюдь не приводит к полной идентификации двух картин. Вместо этого, возвращаясь к случаю чистых калибровочных теорий — в котором невозможно добиться даже совпадения кривых — мы продемонстрируем, как подобная перезапись геометрии ВЗ предлагает некоторый естественный способ ее квантования, использующий ее связь с двумерными конформными теориями, что в свою очередь приводит к естественной гипотезе о представлении функции Некрасова в терминах новой квантованной картины.

7.2. Препотенциалы ВЗ как предел функций Некрасова

Инстантонные вычисления в $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной калибровочной теории приводят к представлению обобщенного препотенциала ВЗ как критического значения функционала $\mathcal{F} \underset{\epsilon_{1,2} \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{\epsilon_1 \epsilon_2} \log Z$, имеющего вид интегрального выражения

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \int dx f''(x) F_{UV}(x) - \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} dx_1 dx_2 f''(x_1) f''(x_2) F(x_1 - x_2) \quad (7.1)$$

и дающего главный вклад в функцию Некрасова $Z(\bullet | \epsilon_1, \epsilon_2)$ в пределе малых параметров деформации $\epsilon_{1,2} \rightarrow 0$, после вычисления его экстремального значения относительно второй производной профильной функции $f''(x) = \frac{f}{2}$ диаграммы Юнга. В формуле (7.1) затравочный ультрафиолетовый потенциал равен

$$F_{UV}(x) = \sum_{k>0} t_k \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad (7.2)$$

а ядро

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \left(\log x - \frac{3}{2} \right) \quad (7.3)$$

приходит из (обобщенной) меры Планшереля в сумме по случайным разбиениям [77]. Ожидается, что основной вклад при $\epsilon_{1,2} \rightarrow 0$ возникает от некоторой большой «предельной» диаграммы Юнга с профилем $f(x)$, который можно найти решая вариационную задачу для (7.1) при условиях нормировки, наложенных как связи

$$a_i = \frac{1}{2} \int_{I_i} dx x f''(x), \quad i = 1, \dots, N \quad (7.4)$$

которые учитываются стандартным образом после их добавления к функционалу с множителями Лагранжа

$$\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F} + \sum_{i=1}^N a_i^D \left(a_i - \frac{1}{2} \int_{I_i} dx x f''(x) \right) \quad (7.5)$$

(в случае калибровочной теории с группой $U(N)$ следует рассматривать класс решений с N разрезами $\{I_i\}$, $i = 1 \dots, N$).

Весь этот набор данных (7.1)-(7.5) практически идентичен [116] стандартной квазиклассике матричных моделей (см., например, [117], [118], [121], [122], [123], [124]), но с некоторыми заметными отклонениями:

- Вместо ядра типа кулоновского газа в (7.1) появляется многозначное ядро (7.3).
- Свойства второй производной $f''(x)$ профильной функции для большой экстремальной диаграммы Юнга существенно отличаются от свойств плотности собственных значений для матричных моделей.

Условие экстремума для (7.1) приводит к системе N интегральных уравнений

$$\sum_{k>0} t_k z^k - \int dx f''(x)(z-x) (\log|z-x| - 1) = a_i^D, \quad z \in I_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (7.6)$$

выполняющихся на каждом из сегментов, где профильная функция нетривиальна. В общем случае решение может быть выражено через абелевы интегралы на двойном накрытии

$$y^2 = \prod_{i=1}^N (z - x_i^+)(z - x_i^-) \quad (7.7)$$

представляющем собой гиперэллиптическую кривую рода $g = N - 1$. Определим

$$\begin{aligned} S(z) &= F'_{UV}(z) - \int dx f''(x)(z-x)(\log(z-x) - 1) - a^D = \\ &= \sum_{k>0} t_k z^k - 2N \cdot z(\log z - 1) + 2 \sum_{i=1}^N a_i \cdot \log z + \dots \end{aligned} \quad (7.8)$$

где интеграл вычисляется по полной области $I = \cup_{i=1}^N I_i$, $a^D = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N a_j^D$, и рассмотрим дифференциал этого выражения, или

$$\Phi(z) = \frac{S}{z} = \sum_{k>0} k t_k z^{k-1} - \int dx f''(x) \log(z-x) \quad (7.9)$$

удовлетворяющий

$$\Phi(x + i0) + \Phi(x - i0) = 0, \quad x \in I_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (7.10)$$

на каждом из разрезов, и нормированный следующим образом

$$\begin{aligned}\Phi(x_N^+) &= 0, \\ \Phi(x_j^- \pm i0) &= \Phi(x_{j-1}^+ \pm i0) = \pm 2\pi i(N - j + 1), \quad j = 2, \dots, N \\ \Phi(x_1^-) &= \pm 2\pi iN\end{aligned}\quad (7.11)$$

Если все $t_k = 0$ при $k \neq 1$, а $e^{t_1} = \Lambda^{2N}$, производная $\Phi = \frac{S}{z}$ представляет собой абелев интеграл на кривой (7.7) с асимптотикой

$$\Phi \underset{P \rightarrow P_{\pm}}{=} \mp 2N \log z \pm 2N \log \Lambda + O(z^{-1}) \quad (7.12)$$

($z(P_{\pm}) = \infty$), скачки которой целочисленны из-за (7.11), или $\oint d\Phi \sim 4\pi i\mathbb{Z}$. Это означает, что гиперэллиптическая кривая (7.7) может быть также представлена как алгебраическая риманова поверхность функции $w = \exp(-\Phi/2)$, удовлетворяющей квадратному уравнению

$$\Lambda^N \left(w + \frac{1}{w} \right) = P_N(z) = \prod_{i=1}^N (z - v_i) \quad (7.13)$$

или

$$y^2 = P_N(z)^2 - 4\Lambda^{2N} \quad (7.14)$$

т. е. точки ветвления $\{x_i^{\pm}\}$ являются корнями уравнений $P_N(z) \mp 2\Lambda^N = 0$, а

$$y = \Lambda^N \left(w - \frac{1}{w} \right) \quad (7.15)$$

Заметим, что в простейшем случае $N = 1$ форма (7.13), т. е.

$$z - v = \Lambda \left(w + \frac{1}{w} \right) \quad (7.16)$$

может всегда быть достигнута заменой переменных, т. е. может быть использована даже при включенных старших потоках. Однако в общем случае при ненулевых параметрах ультрафиолетового потенциала (7.2) профильная функция не может быть получена как скачок алгебраической функции на кривой (7.7), в отличие от резольвент матричной модели.

Производящий дифференциал (7.9) теперь

$$dS = -2 \log w dz = -d(2z \log w) + 2z \frac{dw}{w} \quad (7.17)$$

представляет собой преобразованный по Лежандру дифференциал ВЗ $dS_{sw} \sim z \frac{dw}{w}$ на кривой (7.13), (7.14). Его периоды

$$a_i = \frac{1}{i} \oint_{A_i} z \frac{dw}{w} \quad (7.18)$$

совпадают с интегралами ВЗ, а единственный нетривиальный вычет на бесконечности дает

$$\operatorname{res}_{P_+} (z^{-1} dS) = -\operatorname{res}_{P_-} (z^{-1} dS) = \log \Lambda^{2N} \operatorname{res}_{P_+} (dS) = -\operatorname{res}_{P_-} (dS) = 2 \sum_{j=1}^N v_j \quad (7.19)$$

Дифференциал (7.17) удовлетворяет условию

$$\delta dS \sim \frac{\delta w}{w} dz = \frac{\delta P(z)}{y} dz = \text{holomorphic} \quad (7.20)$$

$\sum_{j=1}^N a_j = 0$

где вариация производится при постоянной координате z и постоянном масштабном факторе Λ . Это обеспечивает интегрируемость градиентных формул

$$\frac{F}{i} = \oint_{B_i} z \frac{dw}{w} \quad (7.21)$$

сводя условие их непротиворечивости к требованию симметричности матрицы периодов — частному случаю билинейных соотношений Римана.

7.3. Матричная модель Егучи – Янга

Подставим теперь в (7.1) сдвинутую профильную функцию

$$\begin{aligned} f(x) &= |x - a| + g(x) \\ f'(x) &= \text{sgn}(x - a) + g'(x) \equiv \text{sgn}(x - a) + \rho(x) \\ f''(x) &= 2\delta(x - a) + g''(x) \end{aligned} \quad (7.22)$$

где теперь функция $g(x)$ и ее производная $g'(x) = \rho(x)$ обращаются в нуль на концах разреза $I = (x_-, x_+)$:

$$g(x_{\pm}) = 0, \quad g'(x_{\pm}) = \rho(x_{\pm}) = 0$$

Очевидно получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= F_{UV}(a) + \frac{1}{2} \int dx g''(x) F_{UV}(x) - \int dx g''(x) F(x - a) - \\ &- \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} dx_1 dx_2 g''(x_1) g''(x_2) F(x_1 - x_2) \equiv F_{UV}(a) - \mathcal{F}_{\text{inst}} \end{aligned} \quad (7.23)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{inst}} &= \frac{1}{2} \int dx \rho(x) \mathcal{W}(x) - \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} dx_1 dx_2 \rho(x_1) \rho(x_2) \log(x_1 - x_2) \\ \mathcal{W}(x) &= F'_{UV}(x) - 2(x - a) (\log(x - a) - 1) \end{aligned} \quad (7.24)$$

Вариационную задачу для функционала (7.24) следует решать при дополнительном условии, следующем из (7.4)

$$- \int dx x g''(x) = \int dx \rho(x) = 0 \quad (7.25)$$

Зависимость $\mathcal{F}_{\text{inst}}$ от переменной a может быть легко восстановлена переопределением переменной x , а именно $x \rightarrow x + a$, и переобозначением $\rho(x + a) \rightarrow \rho(x)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\text{inst}} &= \frac{1}{2} \int dx \rho(x) (F'_{UV}(x + a) - 2x(\log x - 1)) - \\ &- \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} dx_1 dx_2 \rho(x_1) \rho(x_2) \log(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

так что

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\text{inst}}}{\partial a} = \frac{1}{2} \int dx \rho(x) F''_{UV}(x+a) = \sum_{k>1} k t_k \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{inst}}}{\partial t_{k-1}} \quad (7.26)$$

а это в свою очередь означает, что

$$\mathcal{F}_{\text{inst}}(a; t_1, t_2, \dots) = \widehat{\mathcal{F}}_0(t_1, t_2, \dots) \Big|_{t_1 \rightarrow F'_{UV}(a)} \quad (7.27)$$

и

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{F}}_0 \equiv \mathcal{F}_{\text{inst}}|_{a=0} &= \frac{1}{2} \int dx \rho(x) (F'_{UV}(x) - 2x(\log x - 1)) - \\ &- \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} dx_1 dx_2 \rho(x_1) \rho(x_2) \log(x_1 - x_2) \end{aligned}$$

представляет собой попросту эффективный потенциал матричной модели ЕЯ [90], с наложенным условием обращения в нуль проинтегрированной плотности собственных значений (7.25).

Это означает, что зависимость от нулевого тодовского времени вводится в данном случае достаточно необычным способом для матричных моделей (7.26), (7.27). С точки зрения иерархии цепочки Тоды, которая отвечает за динамику по параметрам потенциала [129], здесь следует различать два совершенно различных решения уравнения Тоды

$$\frac{F}{2} = \exp\left(\frac{F}{2}\right) \quad (7.28)$$

а именно

$$\mathcal{F}_{\text{mamo}} = \frac{1}{2} t_0^2 \left(\log t_0 - \frac{3}{2} \right) + \frac{1}{2} t_0 t_1^2 + \dots, \quad t_0 = \hbar N \quad (7.29)$$

отвечающего стандартной матричной модели (см., например, [124]), но

$$\mathcal{F}_{\text{EY}} = \frac{1}{2} t_0 t_1^2 + e^{t_1} + \dots, \quad t_0 = a \quad (7.30)$$

для модели ЕЯ. Существенная разница возникает в зависимости решений от нулевого времени: для стандартной матричной модели эта зависимость с необходимостью содержит функцию (7.3) ($F(t_0)$ в правой части (7.29)), дающую логарифмический член во второй производной по t_0 , который «убивается» потом возведением в экспоненту в уравнении (7.28), в то время как в случае модели ЕЯ отсутствие логарифмической зависимости от $t_0 = a$ с необходимостью приводит к экспоненциальной зависимости от t_1 . Более того, массы W -бозонов, которые выражаются через периоды дуального (7.8) дифференциала ВЗ, никак не связаны с фракциями собственных значений матричной модели с потенциалом ЕЯ.

Заметим также, что поскольку

$$\mathcal{W}(x) = F'_{UV}(x) + 2a(\log a - 1) + \sum_{n>0} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)a^n} \quad (7.31)$$

эффективный потенциал матричной модели ЕЯ обладает свойством

$$\mathcal{F}_{\text{inst}} = \mathcal{F}_{\text{inst}}(t_1; \hat{t}_2, \hat{t}_3, \dots) \hat{t}_k = t_k + \frac{1}{k(k-1)a^{k-1}}, \quad k \geq 2 \quad (7.32)$$

и имеет естественное разложение при больших значениях переменной a .

В неабелевом случае вместо (7.22) следует сделать подстановку

$$\begin{aligned}
f(x) &= L(x; a) + g(x) \equiv \sum_{j=1}^N |x - a_j| + g(x) \\
f'(x) &= \sum_{j=1}^N \operatorname{sgn}(x - a_j) + g'(x) \equiv \sum_{j=1}^N \operatorname{sgn}(x - a_j) + \rho(x) \\
f''(x) &= 2 \sum_{j=1}^N \delta(x - a_j) + g''(x)
\end{aligned} \tag{7.33}$$

после которой опять функция $g(x)$ и ее производная $g'(x) = \rho(x)$ обращаются в нуль на концах всех разрезов $I_j = (x_j^-, x_j^+)$, $I = \cup_{j=1}^N I_j$:

$$g(x_j^\pm) = 0, \quad g'(x_j^\pm) = \rho(x_j^\pm) = 0, \quad j = 1, \dots, N$$

Теперь вместо (7.23) получаем

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} &= \sum_{j=1}^N F_{UV}(a_j) - \sum_{i \neq j} F(a_i - a_j) + \frac{1}{2} \int dx g''(x) F_{UV}(x) - \\
&\quad - \int dx g''(x) \sum_{j=1}^N F(x - a_j) - \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} dx_1 dx_2 g''(x_1) g''(x_2) F(x_1 - x_2) \equiv \\
&\quad \equiv \sum_{j=1}^N F_{UV}(a_j) - \sum_{i \neq j} F(a_i - a_j) - \mathcal{F}_{\text{inst}} \equiv \mathcal{F}_0 - \mathcal{F}_{\text{inst}}
\end{aligned}$$

где \mathcal{F}_0 представляет собой сумму классического и пертурбативного вкладов в пре-потенциал, в то время как инстантонный вклад опять выражается в виде эффективного потенциала «матричной модели»

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_{\text{inst}} &= \frac{1}{2} \int dx \rho(x) \mathcal{W}(x) - \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} dx_1 dx_2 \rho(x_1) \rho(x_2) \log(x_1 - x_2) \\
\mathcal{W}(x) &= F'_{UV}(x) - 2 \sum_{j=1}^N (x - a_j) (\log(x - a_j) - 1)
\end{aligned}$$

Вариационная задача для такого функционала опять решается при условиях (7.25) на каждом из разрезов в I , поскольку

$$\sum_{j=1}^N a_j^D \left(a_j - \frac{1}{2} \int_{I_j} dx x f''(x) \right) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_j^D \int_{I_j} dx x g''(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N a_j^D \int_{I_j} dx \rho(x)$$

Мы нашли таким образом, что в неабелевом случае инстантонная статсумма описывается матричной моделью типа ЕЯ с нулевыми фракциями собственных значений, в то время как роль периодов ВЗ играют неоднородности потенциала.

7.4. Суперсимметричная КХД и матричные модели

Для того чтобы проанализировать возможные следствия этого соответствия, перейдем к разбору случая суперсимметричной КХД, или $\mathcal{N} = 2$ суперсимметричной теории Янга-Миллса с дополнительными фундаментальными ароматами материи [126]. Особое внимание мы собираемся уделить четырехмерной конформной теории, т. е. когда при выборе числа ароматов $N_f = 2N$ бета-функция $\mathcal{N} = 2$ теории $\beta = 2N - N_f = 0$ равна нулю, и уже после этого вернуться к чистым суперсимметричным калибровочным теориям в пределе больших масс мультиплетов фундаментальной материи.

7.4.1. Абелева теория с двумя ароматами: явное решение В случае абелевой теории с двумя ароматами $f = 1, 2$ функционал (7.1) отличается от приведенного лишь на подстановку $F_{UV}(x) \rightarrow F_{UV}(x) + \sum_f F(x - m_f)$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \frac{1}{2} \int dx f''(x) (F_{UV}(x) + \sum_f F(x - m_f)) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} dx_1 dx_2 f''(x_1) f''(x_2) F(x_1 - x_2) + a^D \left(a - \frac{1}{2} \int dx x f''(x) \right) \end{aligned} \quad (7.34)$$

так что функция

$$\begin{aligned} S(z) = & 2 \frac{d}{dz} \left(\frac{F}{z} \right) = F'_{UV}(z) + \sum_f F'(z - m_f) - \int F'(z - x) f''(x) dx - a^D = \\ = & \sum_{k>0} t_k z^k + \left(2a - \sum_f m_f \right) \log z - \left(a^D + \sum_f m_f \right) + O\left(\frac{1}{z}\right) \quad (7.35) \\ S(z) \underset{z \rightarrow m_f}{=} & (z - m_f) \log(z - m_f) + \dots, \quad f = 1, 2 \end{aligned}$$

приобретает дополнительные особенности при $z \rightarrow m_f$, $f = 1, 2$, в то время как сингулярность ЕЯ $z \log z$ в бесконечности $z \rightarrow \infty$ сокращается из-за нулевой бета-функции (для двух ароматов).

Более явно это можно увидеть для

$$\begin{aligned} \Phi(z) = & \frac{S}{z} = F''_{UV}(z) + \sum_f \log(z - m_f) - \int \log(z - x) f''(x) dx = \\ = & \sum_{k>0} k t_k z^{k-1} + \sum_f \log\left(1 - \frac{m_f}{z}\right) - \int \log\left(1 - \frac{x}{z}\right) f''(x) dx = \\ = & \sum_{k>0} k t_k z^{k-1} + \frac{2a - \sum_f m_f}{z} + \sum_{k>0} \frac{1}{z^{k+1}} \left(2 \frac{F}{k} - \frac{1}{k} \sum_f m_f^k \right) \\ \Phi(z) \underset{z \rightarrow m_f}{=} & \log(z - m_f) + O(1), \quad f = 1, 2 \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \frac{i}{z} &= F'''_{UV}(z) + \sum_f \frac{1}{f} - \int \frac{x}{x} = \\ &= \sum_{k>1} k(k-1)t_k z^{k-2} - \frac{2a - \sum_f m_f}{z^2} + o\left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned} \quad (7.36)$$

$$d\Phi(z) \underset{z \rightarrow m_f}{=} \frac{z}{f} + \dots, \quad f = 1, 2$$

Решение может быть по-прежнему построено с помощью нечетного относительно $y \leftrightarrow -y$ дифференциала на цилиндре

$$y^2 = (z - x_+)(z - x_-) \quad (7.37)$$

а именно

$$d\Phi = \frac{z}{y} \quad (7.38)$$

На малом фазовом пространстве, где только $t_1 \neq 0$, асимптотика (7.36) означает, что числитель в (7.38) является линейной функцией

$$\psi(z)|_{t_k=t_1\delta_{k,1}} = \psi_1 z + \psi_0 \quad (7.39)$$

где

$$\psi_1 = y_1 + y_2 = \sum_f m_f - 2a\psi_0 = -m_1 y_2 - m_2 y_1 \quad (7.40)$$

и

$$y_f = y(m_f), \quad f = 1, 2 \quad (7.41)$$

Решение (7.38) может быть удобно описано в следующих терминах

$$d\Phi = -\frac{1}{\sqrt{1-4\zeta^2}} \frac{dz}{y} \frac{\left(2v - \sum_f m_f\right)z + 2m_1 m_2 - v \sum_f m_f}{(z - m_1)(z - m_2)} \equiv -2 \frac{dW}{W} \quad (7.42)$$

где были введены

$$\begin{aligned} W + \frac{1}{W} &= \frac{z - v}{\sqrt{Q(z)}}, & Y^2 &= (1 - 4\zeta^2)y^2 = (z - v)^2 - 4Q(z) \\ Q(z) &= \zeta^2(z - m_1)(z - m_2), & y_f &= \frac{m_f - v}{\sqrt{1 - 4\zeta^2}}, \quad f = 1, 2 \end{aligned} \quad (7.43)$$

и¹

$$\begin{aligned} \zeta &= \frac{1}{2 \cosh \frac{t_1}{2}}, & \sqrt{1 - 4\zeta^2} &= -\tanh \frac{t_1}{2} \\ \frac{2v - \sum_f m_f}{\sqrt{1 - 4\zeta^2}} &= -\left(2v - \sum_f m_f\right) \coth \frac{t_1}{2} = 2a - \sum_f m_f \end{aligned} \quad (7.44)$$

¹Знак перед корнем выбран из согласования с пределом слабой связи, когда $e^{t_1} \rightarrow 0$, а $\tanh \frac{t_1}{2} < 0$.

При $e^{t_1} \rightarrow 0$ последнее соотношение превращается в $v = a$, и в этом пределе при больших массах естественно ввести конечный масштабный параметр $\zeta^2 m_1 m_2 = \Lambda^2$.

Для того чтобы записать явно производящую функцию (7.35) сначала следует ввести (аналогично (7.16)) униформизацию (7.37) посредством

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} \left(\varpi + \frac{1}{i} \right) &= z - V, & \frac{L}{2} \left(\varpi - \frac{1}{i} \right) &= y, & \frac{i}{L} &= \frac{dz}{y} \\ V &= \frac{x_+ + x_-}{2} = \frac{a}{2} \\ L &= \frac{x_+ - x_-}{2} = \frac{a}{2} \sqrt{\zeta^2 (m_1 - m_2)^2 + (v - m_1)(v - m_2)} \end{aligned} \quad (7.45)$$

и определить вспомогательные функции

$$\begin{aligned} \chi_f &= \frac{f}{1}, & f &= 1, 2 \\ \chi_f^2 - \sigma_f \chi_f + 1 &= 0, & \sigma_f &= \frac{2}{L} \frac{2}{f} \\ \chi_f \Big|_{z \rightarrow \infty} &= \varpi_f = \frac{1}{L} (m_f - V + y_f), & f &= 1, 2 \end{aligned} \quad (7.46)$$

Производящая функция (7.35) теперь имеет вид

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k>0} t_k \Omega_k + (2a - m_1 - m_2) \log \varpi - \sum_f (z - m_f) \log \chi_f - y \log \Xi^2 \\ \Omega_k &= z^k (\varpi)_+ - z^k (\varpi)_-, & k &> 0 \\ \zeta &= \frac{1}{\Xi + \frac{1}{i}}, & \log(\varpi_1 \varpi_2) &= \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (7.47)$$

где просто использован базис нечетных относительно инволюции функций на цилиндре (7.37) с единственно допустимыми сингулярностями в двух бесконечностях, т. е. такими как

$$\Omega_0 = \log \varpi, \quad \Omega_1 = y, \quad \dots \quad (7.48)$$

Если только $t_1 \neq 0$, $\Xi^2 = e^{t_1}$, и из формулы (7.47) получаем

$$S(z) \Big|_{t_k = t_1 \delta_{k,1}} = -2z \log W + (2a - m_1 - m_2) \log \varpi + \sum_{f=1,2} m_f \log \chi_f \quad (7.49)$$

где $W^2 = \chi_1 \chi_2$ определена в (7.43).

Используя эти формулы легко вычислить окончательно препотенциал для (7.42), (7.44), который имеет вид (при единственном ненулевом t_1 , и с точностью до линейных членов $\sim (m_1 + m_2)a$, которые не дают вклада во вторые производные - константы связи, и могут быть тем самым скомпенсированы добавлением линейных членов $\sim (m_1 + m_2)x$ к потенциалу в формуле (7.34))

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} a^2 t_1 - (a - m_1)(a - m_2) \log(1 - e^{t_1}) + \mathcal{F}_{\text{pert}}(a; m) \quad (7.50)$$

и который включает

$$\mathcal{F}_{\text{pert}}(a; m) = \sum_f F(a - m_f) \quad (7.51)$$

так что

$$\tau(a) = \frac{F}{2} = \log \frac{e^{t_1} \prod_f (a - m_f)}{(1 - e^{t_1})^2} = \log a^{N_f} + \tau_{\text{conf}} \quad (7.52)$$

где

$$\tau_{\text{conf}} = \log \frac{e^{t_1} \prod_f \left(1 - \frac{m_f}{a}\right)}{(1 - e^{t_1})^2} \underset{m_f \rightarrow 0}{=} \log \frac{e^{t_1}}{(1 - e^{t_1})^2} \quad (7.53)$$

не зависит при нулевых массах от вакуумных средних (конденсатов) и приводит к непертурбативной перенормировке константы связи

$$e^{\tau/2} = \frac{1}{e^{-t_1/2} - e^{t_1/2}}, \quad \text{или } \tau = t_1 - 2 \log(1 - e^{t_1}) = t_1 + 2 \sum_{k>0} \frac{e^{kt_1}}{k} \quad (7.54)$$

что является упрощенным модельным аналогом инстантонной перенормировки константы связи, задаваемой асимптотической формулой Замолотчикова [128].

Формулы же для матричной модели ЕЯ (7.24) в конформном случае остаются практически без изменений, за исключением потенциала

$$\begin{aligned} \mathcal{W}(x) &\rightarrow \mathcal{W}(x; m) = F'_{UV}(x) + \sum_f F'(x - m_f) - 2F'(x - a) = \\ &= \sum_{k>0} t_k x^k + \sum_f (x - m_f) (\log(x - m_f) - 1) - 2(x - a) (\log(x - a) - 1) \end{aligned} \quad (7.55)$$

При $a = 0$ и $m_f = 0$, $f = 1, 2$ потенциал (7.55) принимает хорошо известный вид потенциала обычной одноматричной модели.

7.4.2. Различные параметризации кривых. Мы уже отмечали в предыдущем разделе, что для построения точного решения явно удобно воспользоваться параметризацией (7.45), вместо более часто используемой формой (7.43) кривой суперсимметричной КХД. Заметим теперь, что кривую (7.43) можно также представить в виде

$$\begin{aligned} q_1(z)w^2 - (z - v)w + q_2(z) &= 0 \\ q_f(z) &= \zeta(z - m_f), \quad f = 1, 2 \\ w^2 &= \frac{2}{1}W^2 = \frac{2}{1}\chi_1\chi_2 \end{aligned} \quad (7.56)$$

Вводя еще одну новую переменную

$$x = \frac{z}{w} = \frac{z}{W} \sqrt{\frac{q_1(z)}{q_2(z)}} \quad (7.57)$$

можно переписать (7.56) в виде

$$\begin{aligned} x &= \frac{\zeta m_1 w^2 - v w + \zeta m_2}{\zeta w \left(w^2 - \frac{w}{a} + 1\right)} \underset{\zeta = \frac{1}{i}}{=} \frac{m_1 w^2 - v \left(\varepsilon + \frac{1}{i}\right) w + m_2}{w(w - \varepsilon) \left(w - \frac{1}{i}\right)} = \\ &= \frac{m_2}{w} + \frac{2}{i} - \frac{a - m_1}{w - \frac{1}{i}} \end{aligned} \quad (7.58)$$

где использовано (7.44), (вспомним также, что на малом фазовом пространстве $\mathcal{E}^2 = e^{t_1}$ представляет собой просто экспоненту от затравочной константы связи). Дифференциал ВЗ принимает вид

$$dS_{sw} = z \frac{dW}{W} = z \frac{dw}{w} + \frac{z}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{2}{2} \right) = xdw + \frac{m_1 z}{2} \frac{z}{1} - \frac{m_2 z}{2} \frac{z}{2} \equiv dS_G + \frac{m_1 z}{2} \frac{z}{1} - \frac{m_2 z}{2} \frac{z}{2}.$$

Первый член в правой части равенства, $dS_G = xdw$, именно в такой параметризации был введен в работе [131] в контексте построения кривых с помощью D-бран, глядя на (7.58) его естественно нормировать следующим образом

$$\operatorname{res}_{w=0} xdw = m_2, \quad \operatorname{res}_{w=\infty} xdw = -m_1, \quad \operatorname{res}_{w=\mathcal{E}} xdw = a - m_2, \quad \operatorname{res}_{w=\frac{1}{i}} xdw = -(a - m_1)$$

Такой вид кривой особенно естественен с точки зрения сравнения с представлением на языке двумерной конформной теории свободного скалярного поля [70]

$$\begin{aligned} Z(x; a, m_1, m_2) &= Z_{\text{pert}} \cdot \langle e^{im_1\phi(\infty)} e^{i(a-m_1)\phi(1)} \chi^{L_0} e^{-i(a-m_2)\phi(1)} e^{-im_2\phi(0)} \rangle = \\ &= Z_{\text{pert}} \cdot x^{\frac{m_2^2}{2} + \frac{(a-m_2)^2}{2}} \langle e^{im_1\phi(\infty)} e^{i(a-m_1)\phi(1)} e^{-i(a-m_2)\phi(x)} e^{-im_2\phi(0)} \rangle = \\ &= Z_{\text{pert}} \cdot x^{a^2/2} (1-x)^{-(a-m_1)(a-m_2)} \end{aligned}$$

статсуммы $U(1)$ теории с $N_f = 2$. Пертурбативный вклад можно также включить собственно в коррелятор путем переопределения скалярного произведения в двумерной теории, см. подробнее ниже.

Из (7.58) легко находим, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{a} dS_G &= \frac{x}{a} dw = \frac{\left(\mathcal{E} - \frac{1}{i} \right) dw}{(w - \mathcal{E}) \left(w - \frac{1}{i} \right)} = d\omega \\ \operatorname{res}_{w=\mathcal{E}} d\omega &= 1, \quad \operatorname{res}_{w=\frac{1}{i}} d\omega = -1 \end{aligned}$$

представляет собой вырожденный аналог голоморфного дифференциала.

7.4.3. Суперсимметричная КХД, конформная теория и логарифмические потенциалы В случае неабелевой суперсимметричной КХД (решение с N разрезами) формула для потенциала матричной модели ЕЯ (с фундаментальной материей) очевидно принимает вид

$$\mathcal{W}(x) = F'_{UV}(x) + \sum_{f=1}^{N_f} (x - m_f) (\log(x - m_f) - 1) - 2 \sum_{j=1}^N (x - a_j) (\log(x - a_j) - 1) \quad (7.59)$$

Это означает, что в конформном случае $N_f = 2N$ у производной этого потенциала уже отсутствует логарифмическая особенность в бесконечности

$$\begin{aligned} W'(x) &= F''_{UV}(x) + \sum_f \log(x - m_f) - 2 \sum_j \log(x - a_j) = \\ &= F''_{UV}(x) + \sum_f \log \left(1 - \frac{m_f}{x} \right) - 2 \sum_j \log \left(1 - \frac{a_j}{x} \right) \end{aligned}$$

но зато имеются логарифмические сингулярности при $x = a_j$ и $x = m_f$.

В общем случае для $U(N)$ теории с $N_f \leq 2N$ ароматами на малом фазовом пространстве обычно используют [126], [127] аналог представления (7.43)

$$\begin{aligned} W + \frac{1}{W} &= \frac{P(z)}{\sqrt{Q(z)}}, & Y^2 &= P(z)^2 - 4Q(z) \\ P(z) &= z^N - \sum_{k=0}^{N-2} u_k z^k, & Q(z) &= \Lambda^{2N-N_f} \prod_{f=1}^{N_f} (z - m_f) \end{aligned} \quad (7.60)$$

с производящим дифференциалом

$$dS_{SW} = \frac{dz}{Y} \left(P'(z) - \frac{P(z)}{z} \right) \quad (7.61)$$

В конформном случае $N_f = 2N$ вместо размерного масштабного параметра Λ в теории появляется безразмерная константа, а уравнение (7.60) превращается в

$$\begin{aligned} W + \frac{1}{W} &= \frac{P(z)}{\sqrt{Q(z)}} \\ Y^2 &= (1 - 4\zeta^2)y^2 = P(z)^2 - 4Q(z) \\ Q(z) &= \zeta^2 \prod_{f=1}^{2N} (z - m_f) \end{aligned}$$

При нулевых массах дифференциал (7.61) становится голоморфным

$$\begin{aligned} dS_{SW} &= \frac{dz}{Y} \left(zP'(z) - \frac{N_f}{2}P(z) \right) = \\ &= \frac{dz}{Y} \left(\left(N - \frac{N_f}{2} \right) z^N + \sum_{k=0}^{N-2} \left(\frac{N_f}{2} - k \right) u_k z^k \right) = \\ &= \frac{dz}{Y} \sum_{k=0}^{N-2} (N - k) u_k z^k \end{aligned} \quad (7.62)$$

Например, в случае $N = 2$, $N_f = 4$ дифференциал (7.62) пропорционален единственному на торе голоморфному дифференциалу (см, например [128])

$$dS_{SW} \sim u \frac{dz}{Y} = \frac{u}{\sqrt{1 - 4\zeta^2}} \frac{dz}{y} \sim \frac{i}{a} \quad (7.63)$$

где

$$\begin{aligned} \eta^2 &= \prod_{f=0,1,\lambda} (\xi - q_f) = \xi(\xi - 1)(\xi - \lambda) \\ \zeta^2 &= \frac{a}{2} = \frac{1}{\left(\sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right)^2} = \frac{1}{\lambda = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(\varepsilon + \frac{1}{i} \right)^2} \end{aligned} \quad (7.64)$$

и поскольку $\varepsilon = e^{\tau_0/2}$ это тождественно совпадает с формулой (7.44) для случая $N = 1$.

При ненулевых массах, однако, гораздо удобнее использовать аналог представления (7.56)

$$q(z)w^2 - P(z)w + \tilde{q}(z) = 0 \quad (7.65)$$

где $P(z)$ совпадает с полиномом степени N в (7.60), но при $N_f = 2N$ можно естественным образом ввести

$$q(z) = \zeta \prod_{f=1}^N (z - m_f), \quad \tilde{q}(z) = \zeta \prod_{f=1}^N (z - \tilde{m}_f) \quad (7.66)$$

для некоторого естественного разбиения $N_f = 2N$ мультиплетов материи на N «фундаментальных» и N «анти-фундаментальных»- с массами m и \tilde{m} соответственно. Опять же, аналогично (7.56), здесь введено

$$w^2 = \frac{\tilde{q}(z)}{q(z)} W^2 \quad (7.67)$$

При $N = 2$ в (7.66), уравнение (7.65) превращается в квадратное относительно переменной z , и поэтому может быть переписано [132] в виде

$$C_2(w)z^2 - C_1(w)z + C_0(w) = 0 \quad (7.68)$$

где

$$C_2(w) = \zeta w^2 - w + \zeta \Big|_{\zeta = \varepsilon + \frac{1}{i}} = \left(\varepsilon + \frac{1}{i} \right) (w - \varepsilon) \left(w - \frac{1}{i} \right) \quad (7.69)$$

Уравнение (7.68) может быть далее переписано в виде

$$\tilde{z}^2 \equiv \left(z - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{2}{2} - \frac{0}{2} \equiv x^2 w^2 \quad (7.70)$$

или

$$x^2 = \frac{2}{2} - \frac{1}{2} \quad (7.71)$$

При нулевых массах последнее уравнение превращается в

$$x^2 = \frac{1}{2} = - \frac{u}{\zeta w(w - \varepsilon) \left(w - \frac{1}{i} \right)} = - \frac{u}{3} \quad (7.72)$$

в обозначениях эллиптической кривой (7.64).

В общем случае вместо голоморфного дифференциала (7.63) можно написать

$$dS_{sw} = \frac{\sqrt{p(\xi)} d\xi}{\xi(\xi - 1)(\xi - \lambda)} \quad (7.73)$$

для некоторого полинома

$$p(\xi) = \sum_{j=0}^4 p_j \xi^j \xrightarrow{m_f \rightarrow 0} C \cdot \xi(\xi - 1)(\xi - \lambda) \quad (7.74)$$

который должен воспроизвести дифференциал (7.63) в пределе нулевых масс. С помощью соотношений между коэффициентами $p(\xi)$ и вычетами

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_{\xi=0} dS_{SW} &= \sqrt{p(0)} = \sqrt{p_0} = \lambda m_0 \\ \operatorname{res}_{\xi=\infty} dS_{SW} &= \sqrt{p_4} = -m_\infty \\ \operatorname{res}_{\xi=1} dS_{SW} &= \sqrt{p(1)} = (1-\lambda)m_1 \\ \operatorname{res}_{\xi=\lambda} dS_{SW} &= \sqrt{p(\lambda)} = \lambda(\lambda-1)m_\lambda\end{aligned}$$

получаем

$$\delta_{\text{moduli}} p(\xi) = \delta_{\text{moduli}} C \cdot \xi(\xi-1)(\xi-\lambda) \quad (7.75)$$

и это означает, что для вариации дифференциала ВЗ можно написать

$$\delta_{\text{moduli}} dS_{SW} \sim \frac{d\xi}{\sqrt{p(\xi)}} \frac{\delta_{\text{moduli}} p(\xi)}{\xi(\xi-1)(\xi-\lambda)} = \delta_{\text{moduli}} C \frac{d\xi}{\sqrt{p(\xi)}} \quad (7.76)$$

так что правая часть этого равенства очевидно голоморфна.

Можно также представить 2-дифференциал $T(d\xi)^2 = (dS_{SW})^2$ в виде

$$\begin{aligned}t &= \left(\frac{dS_{SW}}{d\xi} \right)^2 = \frac{p(\xi)}{\xi^2(\xi-1)^2(\xi-\lambda)^2} = \\ &= \sum_{f=0,1,\lambda} \left(\frac{2}{2} + \frac{C_f}{\xi - q_f} \right) = \left(\sum_{f=0,1,\lambda} \frac{m_f}{\xi - q_f} \right)^2 + \frac{\mathcal{E}(\xi)}{\xi(\xi-1)(\xi-\lambda)}\end{aligned} \quad (7.77)$$

где

$$\sum_{f=0,1,\lambda} C_f = 0, \quad C_1 + \lambda C_\lambda = - \sum_{A=0,1,\lambda,\infty} m_A^2 \quad (7.78)$$

и

$$\mathcal{E}(\xi) = -\xi \left[\left(\sum_{f=0,1,\lambda} m_f \right)^2 + m_\infty^2 \right] + [C_0 - 2m_0 m_1 \lambda - 2m_0 m_\lambda] \quad (7.79)$$

является линейной функцией удовлетворяющей $\delta_{\text{moduli}} \mathcal{E}(\xi) = \lambda \delta_{\text{moduli}} C_0$. Формула (7.77) может быть проинтегрирована двумя различными способами:

- Ей можно придать смысл среднего тензора энергии-импульса в некоторой двумерной конформной теории

$$t(\xi) = \frac{\langle T(\xi) \prod_{A=0,1,\lambda,\infty} V_A(q_A) \rangle}{\langle \prod_{A=0,1,\lambda,\infty} V_A(q_A) \rangle}$$

со вставками четырех примарных операторов с размерностями m_A^2 , где $A = 0, 1, \lambda, \infty$ определяется вторым уравнением в (7.78), а C_f — соответствующие аксессуарные параметры¹;

¹см. [130] и ссылки в этой работе

- Правая часть (7.77) имеет очевидную форму кривой матричной модели, если в ней формально выбрать следующий логарифмический потенциал

$$\mathcal{V}(\xi) = \sum_{f=0,1,\lambda} m_f \log(\xi - q_f)$$

а периоды ВЗ могут быть при этом отождествлены с фракциями собственных значений [115].

Последнее наблюдение нам не представляется особенно полезным, несмотря на обширную литературу по этому поводу, и в оставшейся части работы мы в основном уделим внимание первому, вернувшись к его интерпретации для случая чистой суперсимметричной калибровочной теории.

7.5. Чистые калибровочные теории и векторы Уиттекера

Если перейти в (7.56) к пределу $\zeta \rightarrow 0$ и $m_{1,2} \rightarrow \infty$ (в котором отщепляется материя) так что¹ $\Lambda^2 = \zeta^2 m_1 m_2 = \text{fixed}$, то вместо (7.58) получаем уравнение

$$x = \frac{a}{2} + \frac{v}{w} + \Lambda = \frac{e}{\Lambda} \equiv \langle J(w) \rangle \quad (7.80)$$

которое представляет собой усреднение $U(1)$ -тока $J(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{J_n}{w^{n+1}}$ по состоянию, удовлетворяющему

$$\begin{aligned} J_n |\Psi\rangle &= 0, & n > 1 \\ J_1 |\Psi\rangle &= \Lambda |\Psi\rangle, & J_0 |\Psi\rangle &= a |\Psi\rangle \end{aligned} \quad (7.81)$$

Поскольку $[J_n, J_m] = n\delta_{n+m,0}$, уравнения (7.82) могут быть немедленно решены с помощью

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \Lambda^{L_0} e^{J_{-1}} |a\rangle \\ J_n |a\rangle &= 0, \quad n > 0, & J_0 |a\rangle &= a |a\rangle \end{aligned} \quad (7.82)$$

т. е. в терминах когерентного состояния в (заряженном) модуле Фока, так что

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \langle a | e^{J_1} \Lambda^{2L_0} e^{J_{-1}} |a\rangle = \Lambda^{a^2} e^{a^2} \Big|_{\Lambda^2=e^{t_1}} = \exp\left(\frac{1}{2} a^2 t_1 + e^{t_1}\right) \quad (7.83)$$

Производящий дифференциал может быть при этом проинтерпретирован как среднее $\widehat{U(1)}$ -тока

$$\langle J(w) \rangle = dS_{SW} = x dw \quad (7.84)$$

а более знакомая форма (7.16) этого равенства воспроизводится подстановкой $x = \frac{z}{w}$.

Для чистой $U(2)$ суперсимметричной калибровочной теории вместо (7.80) возникает уравнение [131]

$$x^2 = \frac{2}{3} + \frac{u}{2} + \frac{\Lambda^2}{w} = \frac{e}{\Lambda} \equiv \langle T(w) \rangle \quad (7.85)$$

которое имеет очевидный смысл усреднения тензора энергии-импульса $T(w) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{L_n}{w^{n+2}}$ по состоянию Уиттекера $|\Psi\rangle \in \mathcal{H}_{\Delta,c}$ в модуле Верма для алгебры Вирасоро со старшим весом Δ и центральным зарядом c [111], [134], удовлетворяющего $L_n |\Psi\rangle = 0$ при $n > 1$ и

$$L_1 |\Psi\rangle = \Lambda^2 |\Psi\rangle \quad (7.86)$$

¹Технически этот предел следует осуществлять симметрично, полагая $\Lambda = -\zeta m_1 = -\zeta m_2$.

Важным следствием (7.85), доказанным в [135], является то, что некрасовская функция соответствующей теории выражается через скалярное произведение или матричный элемент

$$Z(a; \epsilon_1, \epsilon_2) = \langle \Psi | \Psi \rangle = \langle \Psi_1 | \Lambda^{4L_0} | \Psi_1 \rangle \quad (7.87)$$

где

$$|\Psi_1\rangle = |\Psi\rangle|_{\Lambda=1} \quad (7.88)$$

после отождествления

$$\Delta = -\frac{2}{2} + \frac{2}{2}, \quad c = 1 + \frac{6\epsilon^2}{\epsilon_1\epsilon_2}, \quad \epsilon = \epsilon_1 + \epsilon_2 \quad (7.89)$$

Кроме того

$$|\Psi\rangle|_{\Lambda=0} = |\Omega\rangle \in \mathcal{H}_{\Delta,c} L_n |\Omega\rangle = 0, n > 0, \quad L_0 |\Omega\rangle = \Delta |\Omega\rangle \quad (7.90)$$

т. е. $|\Omega\rangle$ пропорционален вектору старшего веса, но с необычной нормировкой

$$\langle \Omega | \Omega \rangle \sim \Gamma_2(a|\epsilon_1, \epsilon_2) \Gamma_2(-a|\epsilon_1, \epsilon_2) \quad (7.91)$$

на произведение двойных гамма-функций Барнса [136] (некоторые подробности и дополнительные ссылки на литературу можно найти в Приложении).

Нетривиальная часть уравнения (7.85) представляет собой единственное равенство

$$\frac{e}{4} = \frac{1}{4} \frac{d}{da} \langle \Psi | \Psi \rangle = u \Big|_{\epsilon_{1,2} \rightarrow 0} = \frac{1}{4} \frac{d}{da} \mathcal{F}_{SW} \quad (7.92)$$

которое имеет смысл некоторого уравнения ренормгруппы. Опять, подстановкой $x = \frac{z}{w}$ кривая (7.85) превращается в $N = 2$ представителя семейства (7.13), а производящий дифференциал принимает вид [131]

$$\sqrt{\langle T(w) \rangle} dw = dS_{SW} = x dw = z \frac{dw}{w} \quad (7.93)$$

В общем случае для $U(N)$ суперсимметричной калибровочной теории следует написать уравнение усреднения формального дифференциального оператора

$$\langle \Psi | \mathcal{D}_N | \Psi \rangle = 0 \mathcal{D}_N \equiv D^N - T(w) D^{N-2} - \mathcal{W}^{(3)}(w) D^{N-3} - \dots - \mathcal{W}^{(N)}(w) \quad (7.94)$$

с коэффициентами действующими в модуле старшего веса $\mathcal{H}_{a,c}$ алгебры W_N , а $|\Psi\rangle$ представляет собой вектор Уиттекера

$$\mathcal{W}_1^{(N)} |\Psi\rangle = \Lambda^N |\Psi\rangle \mathcal{W}_n^{(N)} |\Psi\rangle = 0, n > 1, \quad \mathcal{W}_n^{(K)} |\Psi\rangle = 0, n > 0, K < N \quad (7.95)$$

в модуле со старшим весом $|\Omega\rangle = |\Psi\rangle|_{\Lambda=0}$

$$\mathcal{W}_0^{(K)} |\Omega\rangle = s_K(a; \epsilon_1, \epsilon_2) |\Omega\rangle = \sum_{j=1}^N \left(\frac{K}{2} + \dots \right) |\Omega\rangle, \quad K = 1, \dots, N \quad (7.96)$$

и также

$$D |\Psi\rangle = x |\Psi\rangle \quad (7.97)$$

Эта система уравнений (опять после подстановки $x = \frac{z}{w}$) приводит к кривым ВЗ (7.13) оснащенным производящим дифференциалом $dS_{SW} = xdw = z\frac{dw}{w}$, с естественной гипотезой

$$Z = \langle \Psi | \Lambda^{2NL_0} | \Psi \rangle \quad (7.98)$$

при условии нормировки

$$\langle \Omega | \Omega \rangle = \langle \Psi | \Psi \rangle \Big|_{\Lambda=0} \sim \prod_{i,j} \Gamma_2(a_i - a_j | \epsilon_1, \epsilon_2) \sim Z_{\text{pert}} \quad (7.99)$$

заданной опять в терминах двойных гамма-функций Барнса.

В $N = 1$ и $N = 2$ случаях уравнения (7.95) (т. е. $\langle \Psi | D - J(w) | \Psi \rangle = 0$ для $W_1 = \widehat{U(1)}$ и $\langle \Psi | D^2 - T(w) | \Psi \rangle = 0$ для $W_2 = \text{Vir}$ можно явно решить относительно переменной $x = \langle D \rangle$, и мы вернемся при этом к уравнениям (7.80) и (7.85) соответственно. Чтобы включить старшие времена следует в (7.98) подставить обобщённый гамильтониан

$$Z(t_1, \dots, t_N) \sim \langle \Psi | \exp \left(\sum_{K=1}^N t_K \mathcal{W}_0^{(K)} \right) | \Psi \rangle \quad (7.100)$$

который отвечает высшим W -потокам. Появление оператора типа Гельфанда – Дикого (7.94) в этом контексте вместе с W -потоками в (7.100) предполагает нетривиальную связь полученных формул с так называемой W -гравитацией [140] и геометрией обобщенных пространств Тейхмюллера.

7.6. Пертурбативные препотенциалы

Инстантонное разложение $\mathcal{F} = \sum_{k \geq 0} \mathcal{F}_k$ в неабелевой теории начинается с пертурбативного вклада (в котором не участвуют топологически нетривиальные конфигурации калибровочных полей)

$$\mathcal{F}_0 = \sum_{j=1}^N F_{UV}(a_j) - \sum_{i \neq j} F(a_i - a_j) \quad (7.101)$$

определяемого полностью в терминах ультрафиолетового или классического (7.2) и пертурбативного (7.3) препотенциалов. Он полностью характеризуется вырожденным случаем дифференциала (7.9)

$$d\Phi_0 = F_{UV}'''(z)dz - 2 \Big) = F_{UV}'''(z)dz - 2 \sum_{j=1}^N \frac{z}{j} \quad (7.102)$$

а коэффициенты полинома $P_N(z)$ в (7.102) (того же, что и в (7.13)) совпадают с пертурбативными значениями периодов ВЗ

$$a_i = -\frac{1}{2} \text{res}_{v_i} z d\Phi_0 = v_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (7.103)$$

Пертурбативный производящий дифференциал имеет вид $dS_0 = \Phi_0 dz$, где

$$\Phi_0 = F_{UV}''(z) - 2 \sum_{j=1}^N \log(z - v_j) \quad (7.104)$$

и удовлетворяет

$$\begin{aligned}\frac{0}{j} &= 2\frac{z}{j}, & j = 1, \dots, N \\ \frac{0}{k} &= kz^{k-1}dz, & k > 0\end{aligned}$$

что приводит к формуле

$$S_0(z) = F'_{UV}(z) - 2 \sum_{j=1}^N (z - v_j) (\log(z - v_j) - 1) \quad (7.105)$$

Уравнения (7.21)

$$a_j^D = \frac{0}{j} = S_0(a_j) \quad (7.106)$$

полностью определяют (7.101), поскольку на пертурбативном уровне нет разницы между значениями v_j и a_j .

Для теории с N_f фундаментальными мультиплетами вместо формулы (7.101) получаем выражение

$$\mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_{cl} + \mathcal{F}_{pert} = \sum_{j=1}^N F_{UV}(a_j) - \sum_{i \neq j}^N F(a_i - a_j) + \sum_{f=1}^{N_f} \sum_{j=1}^N F(a_j + m_f) \quad (7.107)$$

которое может быть получено просто из (7.101) путем формального изменения ультрафиолетового потенциала посредством

$$F_{UV}(x) \rightarrow F_{UV}(x) + \sum_{f=1}^{N_f} F(x + m_f) \quad (7.108)$$

который может быть использован в дальнейшем, после подстановки в функционал (7.1) для вычисления полной производящей функции в теории с материей.

«Квантовая» — или, более точно, дважды деформированная версия пертурбативных препотенциалов (7.101), (7.107) может быть определена в терминах двойных гамма-функций Барнса

$$\Gamma_2(x|\epsilon_1, \epsilon_2) \sim \prod_{n, m \geq 0} \frac{1}{2} \quad (7.109)$$

где бесконечное произведение следует понимать, скажем, в смысле дзета-регуляризации (см, например, [139])

$$\log \Gamma_2(x|\epsilon_1, \epsilon_2) = \frac{d}{s} \sum_{n, m \geq 0} (x + n\epsilon_1 + m\epsilon_2)^{-s} \Bigg|_{s=0} \quad (7.110)$$

аналитически продолженной к $s = 0$. Соотношение с (7.101), (7.107) определяется асимптотикой

$$\log \Gamma_2(x|\epsilon_1, \epsilon_2) \Big|_{\epsilon_{1,2} \rightarrow 0} = \frac{1}{2} F(x) + \text{less singular terms} = -\frac{x^2}{4} \left(\log x - \frac{3}{4} \right) + \dots \quad (7.111)$$

7.7. Заключительные комментарии

Мы видели, что квазиклассический предел матричной модели весьма похож на теорию ВЗ: обе теории описываются на языке квазиклассических интегрируемых систем, так что препотенциал представляет собой ограниченную τ -функцию Кричевера [141]. Простейшая часть интегрируемой динамики в этом случае параметризуется параметрами потенциала (7.2), и воспроизводит в простейшем случае хорошо известную иерархию бездисперсного уравнения Тоды (7.28) (по поводу аналогов этого уравнения, отвечающих старшим родам см. [142]). Зависимость от невырожденных периодов (7.18) является гораздо более трансцендентной, и на квазиклассическом уровне знание о ней практически полностью сводится к градиентным формулам (7.21) и их следствиям, таким как формулы вычетов, уравнения ВДВВ, и т. п. (см. [141], [122], [124]).

Предыдущие формулы показывают, что нетривиальная интегрируемая динамика по квазиклассическим переменным-периодам обладает еще менее тривиальными дисперсными аналогами. В то время как наивное «квантование» динамики по переменным (7.2) приводит (в отсутствие «гладких переменных» (7.18)) просто к струнным решениям полной иерархии типа Тоды или КП с τ -функциями представляемыми матричными элементами в двумерной теории свободных фермионов, дисперсными аналогами полной кричеверовской τ -функции являются матричные элементы в нетривиальной двумерной конформной теории, обычно с расширенной симметрией. Эти матричные элементы непосредственно связаны с квантованием пространств Тейхмюллера [143] (высших пространств Тейхмюллера для случая W -гравитации), теорией Лиувилля [130], [146], и интегрируемой квантовомеханической задачей для систем тодовского типа — см. [147], [148], [149]. Все эти соотношения несомненно заслуживают дальнейшего исследования, и мы собираемся вернуться к этим вопросам в последующих публикациях.

8. НА ПРИМЕРЕ \mathbb{CP}_1 -МОДЕЛИ ИЗУЧЕНИЕ СВЯЗИ МЕЖДУ МАТРИЧНЫМИ
МОДЕЛЯМИ, СТАТИСТИЧЕСКИМИ МОДЕЛЯМИ СЛУЧАЙНЫХ РАЗБИЕНИЙ И
МОДЕЛЯМИ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУНЫ

В этом разделе мы следуем обозначениям из 6 настоящего отчета.

8.1. Полный квазиклассический потенциал Громова – Виттена на \mathbb{P}_1

Чтобы восстановить зависимость от времен T в статсумме $\tau(a, t) \rightarrow \tau(a, t, T)$, или чтобы включить потомки единичного оператора $\{\sigma_k(\mathbf{1})\}$ при $k > 0$ следует найти решение условий Вирасоро

$$L_n(t, T; \partial_t, \partial_T; \partial_t^2)\tau(a, t, T) = 0, \quad n \geq -1 \quad (8.1)$$

с начальным условием $\tau(a, t) = \tau(a, t, T)|_{T_n=\delta_{n,1}}$, см. [78], [79], [81], [82], [84]. Квазиклассическое решение этих условий Вирасоро, приводящее к полному потенциалу Громова – Виттена рода нуль $\mathcal{F}(a, t, T)$ может быть описано [86] следующим обобщением формулы (6.15)

$$S(z) \underset{z \rightarrow \infty}{=} \sum_{k>0} t_k z^k - 2 \sum_{n>0} T_n z^n (\log z - c_n) + 2a \log z - \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a} - 2 \sum_{k>0} \frac{1}{kz^k} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} \quad (8.2)$$

(где $c_k = \sum_{i=1}^k \frac{1}{i}$ обозначают гармонические числа). Функция (8.2) определяет \mathcal{F} будучи построенной глобально на кривой (6.13), нечетной относительно инволюции $w \leftrightarrow \frac{1}{w}$. Для этого опять следует подставить $z^k \rightarrow \Omega_k(w) = z(w)_+^k - z(w)_-^k$, а также

$$z^k (\log z - c_k) \rightarrow H_k(z, w) = z^k \log w + \sum_{j=1}^k C_j^{(k)} \Omega_j(w) \quad (8.3)$$

для полиномиальных t -потоков и логарифмических T -потоков соответственно. Коэффициенты $C_j^{(k)}$ в правой части (8.3) полностью фиксируются асимптотикой при $z \rightarrow \infty$ (подробности см. в работе [86]). Зависимость потенциала $\mathcal{F}(a, t, T)$ от времен T определяется условиями

$$\left. \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T_n} \right|_t = (-)^n n! (S_n)_0 \quad (8.4)$$

(наводящими соображениями для которых могут быть формулы К. Сайто [87]), где

$$\frac{d^n S_n}{dz^n} = S, \quad n \geq 0 \quad (8.5)$$

или S_n является n -ой первообразной S (нечетной относительно $w \leftrightarrow \frac{1}{w}$). Естественно, что частный $n = 0$ случай формулы (8.4) совпадает с (6.24), поскольку переменная a отвечает примарному оператору $\sigma_0(\mathbf{1}) \equiv \mathbf{1}$. При $n = 1$ формула (8.4) приводит к выражению

$$\mathcal{F}(t_1, a, T_1) = \frac{a^2 t_1}{2T_1} + T_1^2 \exp \frac{t_1}{T_1} \quad (8.6)$$

которое при $T_1 = 1$ очевидно совпадает с (6.10), в то время как при $T_1 \rightarrow \infty$ дает

$$\mathcal{F}(t_1, a, T_1) \underset{T_1 \rightarrow \infty}{\sim} \dots + F_K(t_1 + a, T_1) + F_K(t_1 - a, T_1) + \dots \quad (8.7)$$

то, с чего мы начали в (6.2), (6.7) — линейные по x решения уравнения КдФ $u(x, T_1) \sim \frac{x}{T_1}$.

Зависимость от времен t квазиклассической τ -функции $\mathcal{F}(t, \mathbf{T})$ определяется бездисперсионной иерархией цепочки Тоды, в то время как зависимость от времен \mathbf{T} может быть описана в терминах так называемой расширенной иерархии Тоды [90], [84], являющейся весьма специальной нетривиальной редукцией [79], [82] двумеризованной решетки Тоды. На малом фазовом пространстве

$$\mathcal{F}_{\text{eq}}(X_1, \bar{X}_1; \epsilon) = \frac{\epsilon^2}{6} (X_1^3 + \bar{X}_1^3) + e^{X_1 + \bar{X}_1} = \frac{a^2 t_1}{2} + e^{t_1} + \frac{\epsilon}{2} a t_1^2 + \frac{\epsilon^2}{6} t_1^3 \quad (8.8)$$

что совпадает с (6.10) когда $\epsilon \rightarrow 0$, при замене

$$\begin{cases} t_k = X_k + \bar{X}_k & \text{при } k > 0 \\ T_k = -\epsilon \bar{X}_{k+1} & \text{при } k \geq 0 \end{cases} \quad (8.9)$$

или

$$\frac{\partial}{\partial X_k} = \frac{\partial}{\partial t_k}, \quad \frac{\partial}{\partial \bar{X}_k} = \frac{\partial}{\partial t_k} - \epsilon \frac{\partial}{\partial T_{k-1}}, \quad k > 0 \quad (8.10)$$

для производных, действительно удовлетворяет двумеризованному уравнению Тоды

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_{\text{eq}}}{\partial \bar{X}_1 \partial X_1} = \exp \frac{1}{\epsilon^2} \left(\frac{\partial}{\partial X_1} - \frac{\partial}{\partial \bar{X}_1} \right)^2 \mathcal{F} \quad (8.11)$$

если ограничиться решениями, удовлетворяющими редукции

$$\frac{\partial \mathcal{F}_{\text{eq}}}{\partial X_1} - \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{eq}}}{\partial \bar{X}_1} = \epsilon \frac{\partial \mathcal{F}_{\text{eq}}}{\partial X_0} \quad (8.12)$$

На малом фазовом пространстве формулы (8.9) дают просто $X_1 = t_1 + \frac{a}{\epsilon}$ и $\bar{X}_1 = -\frac{a}{\epsilon}$.

Уравнение кривой для эквивариантной решетки Тоды [79], которое недавно было выведено в рамках функционального подхода в [91], может быть записано в виде

$$z = v + \Lambda \left(w + \frac{1}{w} \right) - \epsilon \log \frac{z}{\Lambda w} \quad (8.13)$$

и является деформацией кривой (6.13), но уже не алгебраической. Это уравнение следует дополнить сопряженным

$$\bar{z} = \bar{v} + \Lambda \left(w + \frac{1}{w} \right) + \epsilon \log \frac{\bar{z} w}{\Lambda} \quad (8.14)$$

где параметры v и \bar{v} удовлетворяют условию редукции (8.12), или

$$v - \bar{v} = \epsilon \log \Lambda^2 \quad (8.15)$$

Уравнения (8.13), (8.14) могут быть решены относительно $z = z(w)$ и $\bar{z} = \bar{z}(w^{-1})$ тем самым только в терминах разложений

$$\begin{aligned} z &\underset{w \rightarrow \infty}{=} \Lambda w + v + \left(\Lambda - \frac{\epsilon v}{\Lambda} \right) \frac{1}{w} + \dots \\ \bar{z} &\underset{w \rightarrow 0}{=} \frac{\Lambda}{w} + \bar{v} + \left(\Lambda + \frac{\epsilon \bar{v}}{\Lambda} \right) w + \dots \end{aligned} \quad (8.16)$$

которые дают, в частности, выражения для гамильтонианов двумеризованной Тоды $h_k = z^k(w)_+ + \frac{1}{2}z^k(w)_0$ и $\bar{h}_k = \bar{z}^k(w^{-1})_- + \frac{1}{2}\bar{z}^k(w^{-1})_0$, например

$$\begin{aligned} h_1(w) &= \Lambda w + \frac{v}{2}, & \bar{h}_1(w^{-1}) &= \frac{\Lambda}{w} + \frac{\bar{v}}{2}, \\ h_2(w) &= \Lambda^2 w^2 + 2\Lambda v w + \frac{v^2}{2} + \Lambda^2 - \epsilon v, & \bar{h}_2(w^{-1}) &= \frac{\Lambda^2}{w^2} + \frac{2\Lambda \bar{v}}{w} + \frac{\bar{v}^2}{2} + \Lambda^2 + \epsilon \bar{v} \\ & & \dots & \end{aligned} \quad (8.17)$$

Обратное к первому уравнению из (8.16) имеет вид

$$-\log \frac{w}{z} = \log \Lambda + \frac{v}{z} + \dots \quad (8.18)$$

означающий, что

$$\begin{aligned} \log \Lambda^2 &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{\text{eq}}}{\partial X_0^2} = X_1 + \bar{X}_1 \\ v &= \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{\text{eq}}}{\partial X_0 \partial X_1} = \epsilon X_1 \end{aligned} \quad (8.19)$$

а

$$\bar{v} = v - \epsilon \log \Lambda^2 = -\epsilon \bar{X}_1 = \frac{\partial^2 \mathcal{F}_{\text{eq}}}{\partial X_0 \partial \bar{X}_1} \quad (8.20)$$

Решения (8.19) могут быть также найдены из уравнений (6.17) для производящей функции

$$S_{\text{eq}} = \sum_{k>0} \left(\frac{Y_k}{k} h_k(w) - \frac{\bar{Y}_k}{k} \bar{h}_k(w^{-1}) \right) - X_0 \log w \quad (8.21)$$

где «точные» тодовские переменные $\{Y_k, \bar{Y}_k\}$, $k > 0$ связаны с временами $\{X_k, \bar{X}_k\}$, определенными в (8.9), треугольным преобразованием [79], [82]. В частности,

$$X_1 = Y_1 + 1 + \frac{X_0}{\epsilon}, \quad \bar{X}_1 = \bar{Y}_1 + 1 - \frac{X_0}{\epsilon} \quad (8.22)$$

что автоматически приводит к выполнению условия редукции (8.12).

8.2. Эллиптическая U(1) теория

Прежде, чем перейти к неабелевым калибровочным теориям и отвечающим им пространственно-временным кривым старших родов, обсудим полезный эллиптический пример препотенциала, который, с одной стороны, является лишь непосредственным обобщением формулы (6.10) на малом фазовом пространстве, а с другой — представляет собой один из немногих примеров того, как в нерациональном

случае препотенциал может быть вычислен явно. Буквально этот случай отвечает $U(1)$ калибровочной теории с массивной присоединенной материей, для которой пространственно-временную кривую \mathbb{P}_1 следует заменить на эллиптическую, или комплексный тор с модулем τ , играющим роль времени t_1 или ультрафиолетовой константы связи в калибровочной теории с нулевой бета-функцией.

Рассмотрим эллиптическую кривую $E_\tau = \mathbb{C}/(1, \tau)$ с отмеченной точкой P . Выберем $\xi(P) = 0$, где $d\xi \in H^1(E_\tau)$ представляет собой канонический голоморфный дифференциал

$$\oint_A d\xi = 1, \quad \oint_B d\xi = \tau \quad (8.23)$$

возникающий здесь вместо «голоморфного» абелева дифференциала третьего рода на цилиндре (6.13) $d\Phi = \frac{dw}{w} \rightarrow d\xi$. Рассмотрим также абелев дифференциал второго рода

$$d\lambda = -M d\xi (\wp(\xi) + 2\eta) = -M \frac{d\xi}{\xi^2} + \dots \quad (8.24)$$

с константой $\eta = \zeta(1/2)$, выбранной с целью зафиксировать постоянство его периодов

$$\begin{aligned} \oint_A d\lambda &= 0 \\ \oint_B d\lambda &= -M(2\eta\tau - 2\eta') = -2\pi i M = const \end{aligned} \quad (8.25)$$

где $\eta' = \zeta(\tau/2)$, и второе равенство во второй формуле выполняется благодаря тождеству Лежандра. Интегрируя (8.24), получим

$$\lambda = M(\zeta(\xi) - 2\eta\xi + i\pi) + a = M \frac{\theta'(\xi)}{\theta(\xi)} + a + i\pi M \quad (8.26)$$

где $\theta(\xi) \equiv \theta_1(\xi|\tau)$ обозначает единственную нечетную якобиевскую тэта-функцию, а константа интегрирования выбрана так, чтобы получить

$$\oint_A dS = \oint_A \lambda d\xi = a \quad (8.27)$$

Для дуального B -периода имеем (ξ_0 обозначает точку пересечения A и B циклов)

$$\begin{aligned} \oint_B dS &= \oint_B \lambda d\xi = (a + i\pi M)\tau + M \log \frac{\theta(\xi_0 + \tau)}{\theta(\xi_0)} = \\ &= a\tau + i\pi M(\pm 1 - 2\xi_0) \end{aligned} \quad (8.28)$$

Вычисляя производные производящей 1-формы, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} dS &= \frac{\partial \lambda}{\partial a} \Big|_{\xi, M, \tau} d\xi = d\xi \\ \frac{\partial}{\partial \tau} dS &= \frac{\partial \lambda}{\partial \tau} \Big|_{\xi, M, a} d\xi = M \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \log \theta(\xi) \right)' d\xi = 4\pi i M \left(\frac{\theta''(\xi)}{\theta(\xi)} \right)' d\xi \end{aligned} \quad (8.29)$$

т.е. производная по τ приводит к появлению неоднозначного дифференциала, так как

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{\theta''(\xi)}{\theta(\xi)} = (\log \theta(\xi))'' + \left((\log \theta(\xi))' \right)^2 \equiv J'(\xi) + J^2(\xi) \\ \Omega(\xi_0 + 1) - \Omega(\xi_0) &= 0 \\ \Omega(\xi_0 + \tau) - \Omega(\xi_0) &= (J(\xi_0 + \tau) - J(\xi_0)) (J(\xi_0 + \tau) + J(\xi_0)) = \\ &= -4\pi i (J(\xi_0) - i\pi) = -4\pi i \left(\frac{\theta(\xi_0)'}{\theta(\xi_0)} - i\pi \right)\end{aligned}\quad (8.30)$$

и поэтому скачок (ср., например, с [74], [92])

$$\Delta_A d\Omega = d\Omega(\xi_0 + \tau) - d\Omega(\xi_0) = -4\pi i d \left(\frac{\theta(\xi_0)'}{\theta(\xi_0)} \right) = -\frac{4\pi i}{M} d\lambda \quad (8.31)$$

Чтобы восстановить нетривиальную часть препотенциала, следует теперь вычислить

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \oint_A \lambda^2 d\xi = \frac{1}{2} \left(a^2 + \pi^2 M^2 + M^2 \oint_A \left(\frac{\theta(\xi)'}{\theta(\xi)} \right)^2 d\xi \right) \quad (8.32)$$

Для последнего интеграла имеем

$$\begin{aligned}\oint_A \left(\frac{\theta(\xi)'}{\theta(\xi)} \right)^2 d\xi &= \pi^2 \int_{\xi_0}^{\xi_0+1} \cot^2(\pi\xi) d\xi + 8\pi^2 \sum_{n>0} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \int_{\xi_0}^{\xi_0+1} \cot(\pi\xi) \sin(2\pi n\xi) d\xi + \\ &+ 16\pi^2 \sum_{n,k>0} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \frac{q^{2k}}{1-q^{2k}} \int_{\xi_0}^{\xi_0+1} \sin(2\pi n\xi) \sin(2\pi k\xi) d\xi\end{aligned}\quad (8.33)$$

где $q = e^{i\pi\tau}$, и

$$\begin{aligned}\int_{\xi_0}^{\xi_0+1} \cot^2(\pi\xi) d\xi &= -\pi^2 \\ \int_{\xi_0}^{\xi_0+1} \cot(\pi\xi) \sin(2\pi n\xi) d\xi &= 1, \quad n > 0 \\ \int_{\xi_0}^{\xi_0+1} \sin(2\pi n\xi) \sin(2\pi k\xi) d\xi &= \frac{1}{2} \delta_{n,k}, \quad n, k > 0\end{aligned}\quad (8.34)$$

Поэтому получаем

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \tau} = \frac{1}{2} \oint_A \lambda^2 d\xi = \frac{a^2}{2} + 4\pi^2 M^2 \sum_{n>0} \frac{q^{2n}}{(1-q^{2n})^2} \quad (8.35)$$

Интегрируя это соотношение, наконец получим

$$\mathcal{F} = \frac{\tau a^2}{2} + \frac{2\pi M^2}{i} \sum_{n>0} \int \frac{q^{2n-1} dq}{(1-q^{2n})^2} = \frac{\tau a^2}{2} + \frac{\pi M^2}{i} \sum_{n>0} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1-q^{2n}} - 1 \right) \quad (8.36)$$

Пересуммирование последнего выражения приводит к

$$\sum_{n>0} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{1-q^{2n}} - 1 \right) = \sum_{n,k>0} \frac{q^{2nk}}{n} = - \sum_{k>0} \log(1-q^{2k}) \quad (8.37)$$

так что

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \tau a^2 - m^2 \log \prod_{k>0} (1-q^{2k}) \sim \frac{1}{2} \tau a^2 - m^2 \log \eta(\tau) \quad (8.38)$$

где введена физическая масса $m^2 = \frac{\pi}{i} M^2$, а $\eta(\tau) = q^{1/12} \prod_{k>0} (1-q^{2k})$ обозначает функцию Дедекинда (выбрасывание или добавление к препотенциалу линейного члена $\log q \sim \tau$ несущественно). В пределе $m \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow +i\infty$ при условии

$$m^2 e^{2\pi i \tau} = \Lambda^2 = e^{t_1} = \text{fixed} \quad (8.39)$$

мы возвращаемся от (8.38) к формуле (6.10) (опять же, вообще говоря, с точностью до несущественной максимально квадратичной формы). Довольно необычным фактом является появление функции Дедекинда $\eta(q)$ в основном квазиклассическом вкладе или члене с $g = 0$ в разложении по родам производящей функции $\log \tau = \frac{1}{\hbar^2} \mathcal{F} + F_1 + \hbar^2 F_2 + \dots$, в то время как обычно такой вклад естественным образом возникает в $F_1 \sim \log \det \bar{d}$. Это явление может быть связано с нетривиальными вопросами о модулярных свойствах F_g и уравнениями голоморфной аномалии [93], [95], [70], обсуждение которых выходит за рамки данной работы.

8.3. Неабелева теория

Дуальность между топологическими струнами и калибровочными теориями утверждает в частности, что редуцированный потенциал Громова – Виттена рода нуль $\mathcal{F}(a, t)$ совпадает с частным упрощенным случаем $N_c = 1$ препотенциала (расширенной) $N = 2$ суперсимметричной калибровочной теории Зайберга – Виттена. Более того, оказывается, что квазиклассическое решение неабелевой теории с калибровочной группой $U(N_c)$ может быть получено практически тем же путем [72] - а именно находя экстремальные решения для функционала (6.36), с единственным небольшим изменением дополнительных связей в задаче. Вместо единственного условия $\frac{1}{2} \int dx x f''(x) = a$ теперь следует рассматривать N_c аналогичных условий

$$\frac{1}{2} \int_{I_i} dx x f''(x) = a_i, \quad i = 1, \dots, N_c \quad (8.40)$$

на профильные функции $f(x)$, отвечающие N_c -кратным разбиениям [77], с вершинами в a_1, \dots, a_{N_c} соответственно. Все эти условия учитываются, как и в формуле (6.36), добавлением к функционалу с множителями Лагранжа $a_1^D, \dots, a_{N_c}^D$.

Чтобы решить уравнения экстремума при наличие набора новых условий, рассматривается двойное накрытие z -плоскости с N_c разрезами $\{I_j : x_j^- < z < x_j^+\}$

$$y^2 = \prod_{i=1}^{N_c} (z - x_i^+)(z - x_i^-) \quad (8.41)$$

или гиперэллиптическая кривая рода $N_c - 1$, и строится S , нечетная относительно инволюции $y \leftrightarrow -y$ или чисто мнимая на объединении I этих N_c разрезов $I = \cup_{j=1}^{N_c} I_j$.

Такая неабелева расширенная $U(N_c)$ $N = 2$ суперсимметричная калибровочная теория решается с помощью абелевых дифференциалов. Функциональное уравнение (6.44) решается теперь путем построения дифференциала от

$$\Phi(z) = \frac{dS}{dz} = \sum_{k>0} kt_k z^{k-1} - \frac{1}{2} \int dx f''(x) \log(z-x) \quad (8.42)$$

(вспомним, что производная профильной функции восстанавливается из скачка $f'(x) \sim \text{jumpr } \Phi(x)$). На гиперэллиптической кривой (8.41), для дифференциала $d\Phi$ пишем

$$d\Phi = \pm \frac{\phi(z)dz}{y} = \pm \frac{\phi(z)dz}{\sqrt{\prod_{i=1}^{N_c} (z-x_i^+)(z-x_i^-)}} \quad (8.43)$$

где числитель $\phi(z)$ полностью фиксируется асимптотикой и периодами

$$\oint_{A_j} d\Phi = -2\pi i \int_{I_j} f''(x)dx = -2\pi i (f'(x_j^+) - f'(x_j^-)) = -4\pi i \quad (8.44)$$

Если все $t_k = 0$, при $k > 1$, $t_1 = \log \Lambda^{N_c}$ (конечно, по-прежнему $T_n = \delta_{n,1}$!) в окрестности точек P_{\pm} , для которых $z(P_{\pm}) = \infty$, находим

$$\Phi_{P \rightarrow P_{\pm}} = \mp 2N_c \log z \pm 2N_c \log \Lambda + O(z^{-1}) \quad (8.45)$$

и это означает, что существует мероморфная функция $w = \Lambda^{N_c} \exp(-\Phi)$, удовлетворяющая уравнению (6.14). При $N_c = 1$ мы воспроизводим кривую (6.13), или оператор Лакса бездисперсионной цепочки Тоды.

Если однако старшие $t_k \neq 0$ не равны нулю, $\exp(-\Phi)$ приобретает существенную особенность и не может быть описана алгебраически. Неявно все по-прежнему фиксируется асимптотикой

$$d\Phi \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} \sum_{k>1} k(k-1)t_k z^{k-2} + \dots \quad (8.46)$$

и условиями на периоды (8.44), обеспечивающими в частности

$$\delta(dS) = \delta(\Phi dz) \underset{z \rightarrow x_j^{\pm}}{=} \frac{-\phi(x_j^{\pm})\delta x_j^{\pm}}{\prod_k' \sqrt{(x_j^{\pm} - x_k^+)(x_j^{\pm} - x_k^-)}} \frac{dz}{\sqrt{z - x_j^{\pm}}} + \dots \quad (8.47)$$

$\simeq \text{holomorphic}$

обобщенный аналог условий (6.17).

Условия на А-периоды, совместно с асимптотикой (8.46) полностью фиксируют форму дифференциала $d\Phi$. Равенство же нулю В-периодов вместе с целочисленностью коэффициента при логарифме в формуле (8.45) налагает N_c условий на $2N_c$

точек ветвления кривой (8.41). Оставшиеся N_c неизвестных «съедаются» периодами Виттена – Зайберга

$$a_i = \frac{1}{4\pi i} \oint_{A_i} z d\Phi, \quad i = 1, \dots, N_c \quad (8.48)$$

куда мы также включили дополнительный N_c -й зависимый период, альтернативная возможность – зафиксировать вычет a в бесконечности, как в формуле (6.23). Дуальные к (8.48) В-периоды определяют градиенты препотенциала

$$a_i^D = \frac{1}{2} \oint_{B_i} z d\Phi = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_i}, \quad i = 1, \dots, N_c \quad (8.49)$$

и, как и в $U(1)$ случае, производные по временам t определяются формулами вычетов

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} = -\frac{1}{k+1} \text{res}_{P_+} (z^{k+1} d\Phi), \quad k > 0 \quad (8.50)$$

но уже на кривой (8.41). Условия интегрируемости (6.21) для градиентов (8.49) обеспечиваются симметричностью матрицы периодов кривой (8.41), или в более общем случае, включающем и формулы (8.50), – билинейными соотношениями Римана для всех абелевых дифференциалов.

Если же старшие $T_n \neq 0$ не равны нулю, скажем мы находимся в ситуации, когда включены N первых потомков единицы¹ с $n = 1, \dots, N$, то лишь $(N+1)$ -я производная от (8.2)

$$d\Phi^{(N-1)} = d \left(\frac{d^N S}{dz^N} \right) \quad (8.51)$$

может быть разложена по базису однозначных на кривой (8.41) абелевых дифференциалов. Опять же все полностью фиксируется целочисленностью А-периодов и особенностями, но теперь уже не только при $z(P_{\pm}) = \infty$, но и в точках ветвления $\{x_j\}$, $j = 1, \dots, 2N_c$ кривой (8.41), где дифференциал (8.51) приобретает дополнительные полюса. На самом деле эти дополнительные особенности ненастоящие, в том смысле, что $\Phi', \dots, \Phi^{(N-1)}$ регулярны в точках ветвления, если рассматривать их как $2-, \dots, N-$ дифференциалы на кривой (8.41).

Чтобы построить (8.51) явно, пишем

$$d\Phi^{(N-1)} = \frac{\phi(z) dz}{y} + \frac{dz}{y} \sum_{j=1}^{2N_c} \sum_{k=1}^{N-1} \left(\frac{q_j^k}{(z-x_j)^k} \right) \quad (8.52)$$

и фиксируем периоды $d\Phi^{(N-1)}, d\Phi^{(N-2)}, \dots, d\Phi', d\Phi$ с помощью $2N_c \cdot N$ условий, оставаясь тем самым с

$$(2N+1)N_c - 2N_c \cdot N = N_c \quad (8.53)$$

переменными, поглощаемыми обобщенными периодами Зайберга – Виттена

$$a_j = \frac{1}{4\pi i} \oint_{A_j} \frac{z^N}{N!} d\Phi^{(N-1)}, \quad j = 1, \dots, N_c \quad (8.54)$$

¹В «минимальной» теории $T_n = \delta_{n,1}$ и $\mathcal{F} = \mathcal{F}(a, t)$; $T_1 = 1$ отвечает ненулевому конденсату $\langle \sigma_1(\varpi) \rangle \neq 0$.

которые по-прежнему определяют препотенциал с помощью формул

$$a_j^D = \frac{1}{2} \oint_{B_j} \frac{z^N}{N!} d\Phi^{(N-1)} = \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_j}, \quad j = 1, \dots, N_c \quad (8.55)$$

Обобщенная форма Зайберга – Виттена представляет собой теперь N -кратное преобразование Лежандра от S -функции (8.2), являющейся, конечно, многозначным абелевым интегралом на кривой (8.41).

8.4. Две функциональные формулировки

В пертурбативном пределе $\Lambda \rightarrow 0$ разрезы на кривой (8.41) сжимаются в точки $z = v_j$, $j = 1, \dots, N_c$ и кривая вырождается в рациональную, которую можно запараметризовать в виде

$$w_{pert} = P_{N_c}(z) = \prod_{i=1}^{N_c} (z - v_i) \quad (8.56)$$

Эта кривая оснащена теперь двумя полиномами (произвольной степени): $t(z) \equiv \sum_{k>0} t_k z^k$ и $T(x) \equiv \sum_{n>0} T_n x^n$. В этих условиях S -функция вычисляется явно и представляется выражением

$$S(z) = t'(z) - 2 \sum_{j=1}^{N_c} \sigma(z; v_j) = t'(z) - 2 \sum_{j=1}^{N_c} \sum_{k>0} \frac{T^{(k)}(v_j)}{k!} (z - v_j)^k (\log(z - v_j) - c_k) \quad (8.57)$$

т.е. полностью определяется с помощью функции

$$\sigma(z; x) = \sum_{k>0} \frac{T^{(k)}(x)}{k!} (z - x)^k (\log(z - x) - c_k) \quad (8.58)$$

где сумма конечна, если ограничиться на N -й класс фоновых полей, когда только первые времена $T_1, \dots, T_N \neq 0$.

Пертурбативный препотенциал определяется градиентами

$$a_i^D = S(v_i) = \frac{\partial \mathcal{F}_{pert}}{\partial a_i} \quad (8.59)$$

и эта формула приводит к следующему явному выражению

$$\mathcal{F}_{pert}(a_1, \dots, a_{N_c}; \mathbf{t}, \mathbf{T}) = \sum_{j=1}^{N_c} F_{UV}(a_j; \mathbf{t}, \mathbf{T}) + \sum_{i \neq j} F(a_i, a_j; \mathbf{T}) \quad (8.60)$$

$$a_j = T(v_j), \quad j = 1, \dots, N_c$$

в котором

$$F_{UV}(x) \equiv F_{UV}(x; \mathbf{t}, \mathbf{T}) = \int_0^x t'(x) dT(x) \quad (8.61)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} F(x_1, x_2; \mathbf{T}) = T'(x_1) T'(x_2) \log(x_1 - x_2)$$

При $T_n = \delta_{n,1}$ из формулы (8.61) следует, что

$$F_{UV}(x)|_{T_n=\delta_{n,1}} = \sum_{k>0} t_k \frac{x^{k+1}}{k+1} \quad (8.62)$$

что является ультрафиолетовым препотенциалом теории при выключенных потомках единицы, за исключением конденсата $\langle \sigma_1(\mathbf{1}) \rangle$, а также

$$F(x_1, x_2; \mathbf{T})|_{T_n=\delta_{n,1}} = F(x_1 - x_2) \quad (8.63)$$

где правая часть равенства зависит только от разности аргументов, и не зависит вообще от переменных \mathbf{T} , воспроизводя тем самым постоянное ядро из правой части формулы (6.41). В общем случае, включение потомков единицы индуцирует репараметризацию в пространстве модулей от $a = v$ к $a = T(v) = \sum_n T_n v^n$, что также приводит к критичным осложнениям в формулах (8.61).

Пертурбативный препотенциал (8.60) определяет общий вид функционала

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathbf{a}, \mathbf{t}, \mathbf{T})$$

следующей формулой:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & -\frac{1}{2} \int_{x_1 > x_2} dx_1 dx_2 f''(x_1) f''(x_2) F(x_1, x_2; \mathbf{T}) + \int dx f''(x) F_{UV}(x; \mathbf{t}, \mathbf{T}) + \\ & + \sum_i a_i^D \left(a_i - \frac{1}{2} \int dx x f''(x) \right) + \sigma \left(1 - \frac{1}{2} \int dx f''(x) \right) \end{aligned} \quad (8.64)$$

Функционалом (8.64) можно пользоваться, за исключением одного тонкого места, на которое мы специально обратим внимание ниже, буквально так же, как и функционалом (6.36) при $T_n = \delta_{n,1}$. Например, поскольку ядро (вторая формула в (8.61)) не зависит от параметров \mathbf{t} , легко находим, что производные

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} = \int dx f''(x) \frac{\partial F_{UV}(x; \mathbf{t}, \mathbf{T})}{\partial t_k} \quad (8.65)$$

по-прежнему определяются «регулярным хвостом» разложения

$$S(z) = \frac{d}{dz} \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta f''(z)} = \mathbf{t}'(z) - a^D - \int dx f''(x) \sigma(z; x) \quad (8.66)$$

Однако, серьезной проблемой для функционала (8.64) является вычисление производных $\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T_n}$, поскольку ядро $F(x_1, x_2; \mathbf{T})$ явно зависит от времен \mathbf{T} . К счастью существует эквивалентная альтернативная функциональная формулировка, связанная с (8.64) интегральным преобразованием $\int dx \rho(x) g(x) = \int dx f''(x) \widehat{D}_{N-1}(x) g(x)$, так что

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = \mathcal{F}_N[\rho] = & \frac{1}{2} \int dx \rho(x) \mathbf{t}_N(x) + \frac{(-)^N}{(2N)!} \int_{dx_1 dx_2} \rho(x_1) \rho(x_2) H_{2N}^{(+)}(x_1 - x_2) + \\ & + \sum_{n=0}^N \sigma_n \left(T_n - \frac{(-)^{n-1}}{2} \int dx \frac{x^{N-n}}{(N-n)!} \rho(x) \right) \end{aligned} \quad (8.67)$$

где $t_N(x) = \sum_{k>0} t_k \frac{x^{k+N}}{(k+1)\dots(k+N)}$, ядро $\frac{(-)^{N-1}}{(2N)!} H_{2N}^{(+)}(x) = \frac{1}{(2N)!} x^{2N} (\log x - c_{2N})$ не зависит от T , а

$$\widehat{D}_{N-1}(x) = T'(x) \frac{d^{N-1}}{dx^{N-1}} - T''(x) \frac{d^{N-2}}{dx^{N-2}} + \dots + (-)^{N-1} T^{(N)} \quad (8.68)$$

является дифференциальным оператором $(N - 1)$ -го порядка.

Нетривиальным следствием существования альтернативной функциональной формулировки (8.67), является формула Сайто (8.4) для многократных первообразных

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T_n} = \sigma_n = (-)^n n! (S_n)_0, \quad n = 0, \dots, N \quad (8.69)$$

в которой правое равенство выражает множители Лагранжа из формулы (8.67) в терминах постоянных частей

$$\begin{aligned} S_{N-1}(z) &= \mathbf{t}_{N-1}(z) - \frac{(-)^{N-1}}{(2N-1)!} \int dx \rho(x) H_{2N-1}^{(+)}(z-x) + \sum_{n=0}^{N-1} \sigma_n (-)^n \frac{z^{N-n-1}}{(N-n-1)!} \\ &\quad \vdots \\ S(z) &= \mathbf{t}'(z) - \frac{(-)^{N-1}}{N!} \int dx \rho(x) H_N^{(+)}(z-x) + \sigma_0 \end{aligned} \quad (8.70)$$

последовательности функций, вещественные части которых зануляются на разрезах.

8.5. Заключение

Мы продемонстрировали выше, что иногда вместо прямого решения сложных проблем в квантовой теории поля и теории струн, ответы на них можно находить, решая довольно простые дифференциальные уравнения. Полезные для нужд калибровочных и струнных теорий решения имеют достаточно странные свойства с традиционной точки зрения. Однако, они по-прежнему связаны с геометрией комплексных кривых, а поэтому во многих случаях - в отличие от ситуации с комплексными многообразиями старших размерностей - могут быть описаны и посчитаны явно.

Упрощенная $N_c = 1$ расширенная теория Громова - Виттена дуальна топологической струне типа А, или теории Громова - Виттена проективной прямой \mathbb{P}_1 . Такая абелева $N_c = 1$ теория решается полностью с помощью бездисперсионной расширенной иерархии цепочки Тоды, и это решение характеризуется неустраняемым присутствием топологического члена Егучи - Янга. В общем случае полного потенциала Громова - Виттена мы получаем решение так называемой расширенной иерархии цепочки Тоды - расширенной потоками, отвечающими включению гравитационных потомков единичного оператора. Расширенная иерархия цепочки Тоды удобно рассматривать как предельный случай так называемой эквивариантной решетки Тоды - весьма специальной редукции иерархии двумеризованной решетки Тоды. Выше мы описали явный вид геометрии этой редукции на малом фазовом пространстве явным образом.

Для того чтобы расширить эти результаты на случай неабелевых калибровочных теорий необходимо применение техники построения квазиклассических τ -

функций с помощью абелевых интегралов на гиперэллиптических кривых производного рода $N_c - 1$. Мы продемонстрировали, как это вычисление может быть проведено явно на эллиптической кривой, и как оно приводит к прямому обобщению решения цепочки Тоды на малом фазовом пространстве с помощью модулярной функции Дедекинда, а также привели общую неявную формулировку для старших родов. Необходимо отметить, что расширение теории Зайберга – Виттена, аналогичное включению всех гравитационных потомков, с необходимостью требует расширения базиса абелевых дифференциалов имеющими дополнительные полюсы в точках ветвления кривой. Были также обсуждены некоторые тонкие моменты функциональной формулировки в расширенном случае, и предложено интегральное преобразование, связывающее две разных формы функционала, удобных для получения ответов на те или иные вопросы.

9. ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ LOG DET-РАЗЛОЖЕНИЙ РЕЗУЛЬТАНТОВ

9.1. Вводные замечания и обозначения

9.1.1. Результаты являются центральными объектами нелинейной алгебры и составляют условия наличия ненулевого решения у системы однородных уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases} \quad (9.1)$$

в которой f_1, \dots, f_n — однородные полиномы степеней r_1, \dots, r_n . А именно, ненулевое решение у (9.1) существует тогда и только тогда, когда коэффициенты полиномов удовлетворяют одному *неприводимому* полиномиальному соотношению

$$R_{r_1, \dots, r_n} \{f_1, \dots, f_n\} = 0,$$

левая часть которого называется *результантом* системы (9.1). Результант является однородным полиномом степени

$$\deg R_{r_1, \dots, r_n} = r_1 \dots r_n \left(\frac{1}{r_1} + \dots + \frac{1}{r_n} \right)$$

от коэффициентов системы (9.1) и однороден r_i по коэффициентам каждого из уравнений f_i в отдельности. Когда все уравнения линейны, результатант равен определителю матрицы системы

$$R_{11\dots 1} \{f_1, f_2, \dots, f_n\} = f_1 \wedge f_2 \wedge \dots \wedge f_n.$$

В этом исследовании мы ограничиваемся случаем, когда число однородных уравнений в системе (9.1) в точности совпадает с числом переменных. Более общий случай требует привлечения систем результатантов или т.н. высших результатантов¹, которые однако можно трактовать как коэффициенты разложения одного результатанта от достаточно большого числа вспомогательных уравнений.

Исторически, основы теории результатантов были заложены в XIX столетии такими известными математиками как Кэли, Сильвестром и Безу [158] – [162]. Современная теория дискриминантов и гипердетерминантов хорошо изложена в книгах [163] и [164].

Отметим, что результатанты и связанные с ними алгебраические объекты являются важными инструментами исследования нелинейных задач теории струн в смысле [165]. Чтобы проиллюстрировать эту идею, рассмотрим вкратце применение результатантов для точного вычисления негауссовых интегралов, представляющего неизменный интерес в квантовой теории поля и других областях современной физики. Общепринято считать, что квантовая физика может быть сформулирована на языке функциональных интегралов. Сложно поставить под сомнение

¹также известных как субрезультанты (см. [167] – [171]) или компланарты (см. [172])

важность и плодотворность этого подхода: с первых работ Вигнера, Дирака и Фейнмана функциональные интегралы были источником новых прозрений и загадок. Возникшие в квантовой механике, они быстро распространились на квантовую теорию поля и в конечном итоге превратились в широко используемый инструмент современной теоретической физики. С точки зрения функционального интегрирования, любая квантовая теория поля имеет дело с интегралами вида

$$\langle f(x) \rangle = \int dx f(x) e^{-S(x)} \quad (9.2)$$

которые называются корреляторами. Переменная интегрирования x принадлежит к линейному пространству (часто бесконечномерному), а выбор конкретной формы действия $S(x)$ определяет выбор конкретной теории или модели. В простейших моделях $S(x)$ является просто квадратичной формой, которая может быть в каком-нибудь базисе записана как

$$S(x) = \sum_{i,j} S_{ij} x_i x_j$$

В таких случаях интеграл (9.2) называется Гауссовым. В определенном смысле, Гауссовы интегралы являются основой всей квантовой теории: они описывают свободные (невзаимодействующие) поля и частицы. Такие системы довольно просты, и в соответствии с этим довольно просты Гауссовы интегралы. Например, простейший двумерный Гауссов интеграл может быть вычислен и имеет вид

$$\int dx \int dy e^{-(ax^2 + bxy + cy^2)} = \frac{\text{const}}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

где в выражении $b^2 - 4ac$ легко узнать детерминант квадратичной формы $ax^2 + bxy + cy^2$. Другие Гауссовы интегралы, с большим числом переменных интегрирования, с неоднородным действием или с нетривиальной вставкой $f(\phi)$ являются по существу столь же простыми и подобным же образом сводятся к детерминантам — центральным объектам линейной алгебры, описывающим совместность систем линейных уравнений. Замечательно, что можно обобщить это соответствие на случай неквадратичных форм и негауссовых интегралов. Исследование простейших интегралов с кубическим действием

$$S(x) = \sum_{i,j,k} S_{ijk} x_i x_j x_k \quad (9.3)$$

показывает их непосредственную связь с результатами: к примеру, простейший двумерный негауссов интеграл имеет вид

$$\int dx \int dy e^{-(ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3)} = \frac{\text{const}}{\sqrt[6]{27a^2d^2 - b^2c^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d}}$$

где в выражении $27a^2d^2 - b^2c^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d$ легко узнать дискриминант кубической формы $ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$, который по определению равен результату системы из двух ее частных производных:

$$R \left\{ 3ax^2 + 2bxy + cy^2, bx^2 + 2cxy + 3dy^2 \right\} = 27a^2d^2 - b^2c^2 - 18abcd + 4ac^3 + 4b^3d$$

Таким образом результаты естественно возникают при изучении простейших маломерных негауссовых интегралов. Эта важная связь между функциональными интегралами и нелинейной алгеброй может быть прослежена гораздо дальше: пункт 5 данного раздела представляет собой краткое изложение этого интересного направления исследований (см. также [166]).

9.1.2. Однородные полиномы. В дальнейшем мы будем пользоваться двумя различными обозначениями для однородных полиномов, которые могут быть полезны в различных обстоятельствах: тензорными обозначениями

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_r=1}^n S_{i_1, i_2, \dots, i_r} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_r}$$

и мономиальными обозначениями

$$S(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{a_1 + a_2 + \dots + a_n = r} S_{a_1, a_2, \dots, a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

Чтобы различать первые и вторые, мы обозначаем коэффициенты полинома заглавными и строчными буквами, соответственно. Однородный полином степени r от n переменных имеет C_{n+r-1}^r независимых коэффициентов.

Группы $GL(n)$ и $SL(n)$ линейных преобразований

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} G_{11} & \dots & G_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{n1} & \dots & G_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

действуют на коэффициенты однородного полинома $S(x_1, \dots, x_n)$ степени r как

$$S_{i_1, \dots, i_r} \mapsto G_{i_1 j_1} \dots G_{i_r j_r} S_{j_1, \dots, j_r}.$$

всего имеется $C_{n+r-1}^r - n^2 + 1$ функционально независимых инвариантов этого действия.

9.1.3. Дискриминант. Имея один однородный полином $S(x_1, \dots, x_n)$ степени r от n переменных, можно построить систему из n однородных полиномиальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial S(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1} = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ \frac{\partial S(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

которые все однородны степени $r - 1$ по переменным x_1, \dots, x_n . Результат такой системы называется дискриминантом S и обозначается как $D_{n|r}(S)$. Дискриминант является однородным полиномом степени $\deg D_{n|r}(S) = n(r - 1)^{n-1}$ по коэффициентам S , что следует непосредственно из аналогичной формулы для произвольного результата. Очевидно, что дискриминант $D_{n|r}(S)$ является $SL(n)$ инвариантом формы S . При $r = 2$, когда S является квадратичной формой, дискриминант совпадает с определителем Грама этой формы: $D_{n|2}(S) = \det S$.

9.2. Вычисление результата

9.2.1. Формулы типа Сильвестра. Чтобы найти результат системы n однородных уравнений, однородных степени r по переменным x_1, \dots, x_n

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

можно рассмотреть другую систему:

$$x_1^{s_1} \dots x_n^{s_n} f_i = 0,$$

полученную из данной системы $f_i = 0$ умножением на всевозможные мономы фиксированной степени $q = s_1 + \dots + s_n$. Если рассматривать каждый из полиномов новой системы как линейную комбинацию мономов, то в базисе из этих мономов система примет вид прямоугольной $nC_{q+n-1}^q \times C_{r+q+n-1}^{r+q}$ матрицы. Эта матрица называется (обобщенной) матрицей Сильвестра.

В некоторых случаях можно так подобрать степень монома-множителя q , что матрица Сильвестра становится квадратной, то есть, $nC_{q+n-1}^q = C_{r+q+n-1}^{r+q}$. В этих случаях результат в точности равен детерминанту матрицы Сильвестра. Легко видеть, что это возможно как минимум в двух случаях: во-первых при любом n и $r = 1$, во-вторых при любом r и $n = 2$. В первом случае, достаточно выбрать $q = 0$, то есть, рассматривать саму систему без дополнительного домножения на моном. В этом случае матрица Сильвестра совпадает с матрицей самой линейной системы. Второй случай является менее тривиальным: в этом случае мы имеем дело с парой однородных нелинейных уравнений от двух переменных. В этом случае, необходимо выбрать $q = r - 1$ чтобы матрица Сильвестра стала квадратной. К примеру, в случае $n = 2, r = 2$ система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} f_{11}x_1^2 + f_{12}x_1x_2 + f_{22}x_2^2 = 0 \\ g_{11}x_1^2 + g_{12}x_1x_2 + g_{22}x_2^2 = 0 \end{cases}$$

Умножая уравнения этой системы на все мономы степени $q = 1$, то есть, на x_1 и x_2 , мы получаем

$$\begin{cases} f_{11}x_1^3 + f_{12}x_1^2x_2 + f_{22}x_1x_2^2 + 0x_2^3 = 0 \\ 0x_1^3 + f_{11}x_1^2x_2 + f_{12}x_1x_2^2 + f_{22}x_2^3 = 0 \\ g_{11}x_1^3 + g_{12}x_1^2x_2 + g_{22}x_1x_2^2 + 0x_2^3 = 0 \\ 0x_1^3 + g_{11}x_1^2x_2 + g_{12}x_1x_2^2 + g_{22}x_2^3 = 0 \end{cases}$$

Эти четыре полинома являются линейными комбинациями четырех мономов и поэтому могут быть представлены квадратной 4 на 4 матрицей Сильвестра:

$$R_{2|2}\{f, g\} = \det \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{22} & 0 \\ 0 & f_{11} & f_{12} & f_{22} \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} & 0 \\ 0 & g_{11} & g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

Подобные формулы, выражающие результат как детерминант вспомогательной матрицы, обычно называются детерминантными. В следующем по сложности случае $n = 2, r = 3$ система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} f_{111}x_1^3 + f_{112}x_1^2x_2 + f_{122}x_1x_2^2 + f_{222}x_2^3 = 0 \\ g_{111}x_1^3 + g_{112}x_1^2x_2 + g_{122}x_1x_2^2 + g_{222}x_2^3 = 0 \end{cases}$$

Домножая уравнения этой системы на все мономы степени $q = 2$, то есть, на x_1^2, x_1x_2 и x_2^2 , мы получаем

$$\begin{cases} f_{111}x_1^5 + f_{112}x_1^4x_2 + f_{122}x_1^3x_2^2 + f_{222}x_1^2x_2^3 + 0x_1x_2^4 + 0x_2^5 = 0 \\ 0x_1^5 + f_{111}x_1^4x_2 + f_{112}x_1^3x_2^2 + f_{122}x_1^2x_2^3 + f_{222}x_1x_2^4 + 0x_2^5 = 0 \\ 0x_1^5 + 0x_1^4x_2 + f_{111}x_1^3x_2^2 + f_{112}x_1^2x_2^3 + f_{122}x_1x_2^4 + f_{222}x_2^5 = 0 \\ g_{111}x_1^5 + g_{112}x_1^4x_2 + g_{122}x_1^3x_2^2 + g_{222}x_1^2x_2^3 + 0x_1x_2^4 + 0x_2^5 = 0 \\ 0x_1^5 + g_{111}x_1^4x_2 + g_{112}x_1^3x_2^2 + g_{122}x_1^2x_2^3 + g_{222}x_1x_2^4 + 0x_2^5 = 0 \\ 0x_1^5 + 0x_1^4x_2 + g_{111}x_1^3x_2^2 + g_{112}x_1^2x_2^3 + g_{122}x_1x_2^4 + g_{222}x_2^5 = 0 \end{cases}$$

Эти шесть полиномов являются линейными комбинациями шести мономов и поэтому представляются квадратной 6 на 6 матрицей Сильвестра:

$$R_{2|3}\{f, g\} = \det \begin{pmatrix} f_{111} & f_{112} & f_{122} & f_{222} & 0 & 0 \\ 0 & f_{111} & f_{112} & f_{122} & f_{222} & 0 \\ 0 & 0 & f_{111} & f_{112} & f_{122} & f_{222} \\ g_{111} & g_{112} & g_{122} & g_{222} & 0 & 0 \\ 0 & g_{111} & g_{112} & g_{122} & g_{222} & 0 \\ 0 & 0 & g_{111} & g_{112} & g_{122} & g_{222} \end{pmatrix}$$

Заметим, что во всех рассмотренных примерах матрица имеет характерную лестничную форму. Красота и простота этой формулы сделали ее и соответствующий результат $R_{2|r}$ широко известными. В наши дни, метод Сильвестра является основным инструментом для вычисления двумерных результатов и единственной частью теории результатов, которая включена в студенческие учебники и компьютерные программы широкого пользования, такие как Mathematica и Maple. Однако, обобщение этой формулы на случай $n > 2$ далеко не прямолинейно, поскольку для $n > 2$ и $r \geq 2$ матрица Сильвестра вообще говоря не может быть сделана квадратной.

Как оказывается, несмотря на то что в старших размерностях матрица Сильвестра прямоугольна, она тем не менее тесно связана с результатом. А именно, старшие миноры этой прямоугольной матрицы всегда делятся на результат, если только их размер больше чем степень результата (то есть, для достаточно больших q). Различные обобщения метода Сильвестра явно описывают частное при таком делении, тем самым выражая результат как отношение двух полиномиальных величин. Это обстоятельство, несомненно, является недостатком таких формул, по крайней мере с вычислительной точки зрения.

Метод Сильвестра имеет как минимум два различных обобщения на старшие размерности $n > 2$: одно гомологическое, которое приводит к конструкции так называемых комплексов Кошуля, другое более комбинаторное, которое приводит к конструкции так называемых матриц Маколея.

9.2.2. Комплексы Кошуля. Дополним n коммутирующих переменных x_i таким же количеством антикоммутирующих переменных ϑ_i и обозначим через $\Omega(p, q)$ пространство полиномов от x и ϑ , однородных степени p по x и степени q по ϑ , так что $\dim \Omega(p, q) = C_{p+n-1}^p C_n^q$. Дифференциал Кошуля — это линейный оператор, действующий на пространствах $\Omega(p, q)$ по правилу

$$\hat{d} = \sum_i f_i \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta_i} : \Omega(p, q) \rightarrow \Omega(p+r, q-1) \quad (9.5)$$

и удовлетворяющий соотношению:

$$\hat{d}\hat{d} = f_j(x)f_k(x) \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} = f_j(x)f_k(x) \left(\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} + \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \right) = 0$$

Таким образом возникает серия комплексов Кошуля

$$\Omega(p, q) \xrightarrow{\hat{d}} \Omega(p+r, q-1) \xrightarrow{\hat{d}} \Omega(p+2r, q-2) \xrightarrow{\hat{d}} \dots \xrightarrow{\hat{d}} \Omega(0, R)$$

зависящих от целочисленного параметра R — степени крайнего правого пространства по x -переменным. Башня этих комплексов для случая $3|2$ имеет вид

| R | Пространства | Размерности | Эйлерова характеристика |
|-----|---|--|-------------------------|
| 0 | $\Omega(0, 0)$ | 1 | 1 |
| 1 | $\Omega(1, 0)$ | 3 | 3 |
| 2 | $\Omega(0, 1) \rightarrow \Omega(2, 0)$ | 3 \rightarrow 6 | 3 |
| 3 | $\Omega(1, 1) \rightarrow \Omega(3, 0)$ | 9 \rightarrow 10 | 1 |
| 4 | $\Omega(0, 2) \rightarrow \Omega(2, 1) \rightarrow \Omega(4, 0)$ | 3 \rightarrow 18 \rightarrow 15 | 0 |
| 5 | $\Omega(1, 2) \rightarrow \Omega(3, 1) \rightarrow \Omega(5, 0)$ | 9 \rightarrow 30 \rightarrow 21 | 0 |
| 6 | $\Omega(0, 3) \rightarrow \Omega(2, 2) \rightarrow \Omega(4, 1) \rightarrow \Omega(6, 0)$ | 1 \rightarrow 18 \rightarrow 45 \rightarrow 28 | 0 |
| 7 | $\Omega(1, 3) \rightarrow \Omega(3, 2) \rightarrow \Omega(5, 1) \rightarrow \Omega(7, 0)$ | 3 \rightarrow 30 \rightarrow 63 \rightarrow 36 | 0 |
| ... | ... | ... | ... |

Крайний правый дифференциал $\hat{d} : \Omega(R-r, 1) \rightarrow \Omega(R, 0)$ действует по правилу

$$\left(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \right) \cdot \vartheta_j \mapsto \left(x_1^{i_1} x_2^{i_2} \dots x_n^{i_n} \right) \cdot f_j(x_1, \dots, x_n)$$

и представляется $nC_{R-r+n-1}^{R-r} \times C_{R+n-1}^R$ матрицей, которая в точности совпадает с матрицей Сильвестра. Таким образом, комплекс Кошуля в известном смысле дополняет матрицу Сильвестра другими матрицами d_i , несущими дополнительную информацию. Результат системы f_i является функцией от этих матриц

$$R_{n|r} \{f_1, \dots, f_n\} = \text{DET}(d_1, d_2, \dots, d_{p-1}) \quad (9.6)$$

которая называется *детерминантом комплекса*¹, см. [163], [164], [173]. Для его вычисления на комплексе

$$L_1 \xrightarrow{d_1} L_2 \xrightarrow{d_2} \dots \xrightarrow{d_{p-1}} L_p \quad (9.7)$$

¹такая «детерминантная» терминология была введена Кэли, который впервые ввёл и изучил $\text{DET}(d_1, d_2, \dots, d_{p-1})$; в современной литературе $\text{DET}(d_1, d_2, \dots, d_{p-1})$ чаще называют *кручением Радемайстера*

с нулевой Эйлеровой характеристикой следует выбрать базис в каждом линейном пространстве L_i , занумеровать базисные векторы элементами множества

$$\{1, 2, \dots, l_i\}, \quad l_i = \dim L_i,$$

представить каждый дифференциал d_i прямоугольной матрицей из l_i строк и l_{i+1} столбцов, выбрать для каждого i любое подмножество $\sigma_i \subset \{1, 2, \dots, l_i\}$ из

$$|\sigma_i| = \sum_{k=1}^{i-1} (-1)^{i+k+1} l_k$$

элементов¹ и дополнительное подмножество $\tilde{\sigma}_i = \{1, 2, \dots, l_i\} \setminus \sigma_i$ из

$$|\tilde{\sigma}_i| = l_i - |\sigma_i| = |\sigma_{i+1}|$$

элементов, после чего детерминант комплекса будет выражаться через миноры M_i , стоящие в пересечении строк $\tilde{\sigma}_i$ и столбцов σ_{i+1} матриц d_i по формуле

$$\text{DET}(d_1, d_2, \dots, d_{p-1}) = \prod_{i=1}^{p-1} (M_i)^{(-1)^{p+i+1}} = \frac{M_{p-1} M_{p-3} \dots}{M_{p-2} M_{p-4} \dots}. \quad (9.8)$$

Ответ не зависит от выбора подмножеств σ_i [173] и даёт достаточно явный практический способ вычисления результатов, разумно эффективный² для небольших значений n и r . Чуть более экономичное с вычислительной точки зрения (однако, скорее комбинаторное, чем гомологическое) обобщение формулы Сильвестра на старшие размерности принадлежит Маколею и выражает результат как отношение ровно двух детерминантов (подробнее см. [176]).

9.2.3. Формулы типа Безу. Пусть все n уравнений системы

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ f_2(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \dots \dots \dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

однородны степени r по переменным x_1, \dots, x_n и пусть

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sum a_i=r} f_{i|a_1 a_2 \dots a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}.$$

Если рассматривать каждый из полиномов новой системы как линейную комбинацию мономов, то в базисе из этих мономов система примет вид прямоугольной $n \times C_{n+r-1}^r$ матрицы. Множество всех $n \times n$ миноров этой матрицы образует n -индексный тензор M с $M_{i_1 \dots i_n}$, равным $n \times n$ минору прямоугольной матрицы f , стоящей расположенный в столбцах i_1, \dots, i_n . Результат $R\{f_1, \dots, f_n\}$ является однородным

¹таким образом, $|\sigma_1| = 0$, $|\sigma_2| = l_1$, $|\sigma_3| = l_2 - l_1$, $|\sigma_4| = l_3 - l_2 + l_1$, ...

²но, безусловно, не оптимальный: в правой части (9.8) числитель в действительности всегда делится на знаменатель, однако этого сокращения абсолютно не видно в (9.6)

полиномом степени r^{n-1} от $M_{i_1 \dots i_n}$. Явное выражение этого полинома называется формулой типа Безу для результата.

В простейшем случае $n = 2, r = 1$, когда система имеет вид

$$\begin{cases} f_1 x_1 + f_2 x_2 = 0 \\ g_1 x_1 + g_2 x_2 = 0 \end{cases}$$

и имеет единственный 2×2 минор $M_{12} = f_1 g_2 - f_2 g_1$, результат просто равен этому минору. Следующая по сложности система двух квадратных уравнений

$$\begin{cases} f_{11} x_1^2 + f_{12} x_1 x_2 + f_{22} x_2^2 = 0 \\ g_{11} x_1^2 + g_{12} x_1 x_2 + g_{22} x_2^2 = 0 \end{cases}$$

имеет три 2×2 минора

$$\begin{aligned} M_{12} &= f_{11} g_{12} - f_{12} g_{11} \\ M_{13} &= f_{11} g_{22} - f_{22} g_{11} \\ M_{23} &= f_{12} g_{22} - f_{22} g_{12} \end{aligned}$$

и результат является квадратичным полиномом от них

$$R_{2|2}\{f, g\} = M_{12} M_{23} - M_{13}^2 = \det \begin{pmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{13} & M_{23} \end{pmatrix}$$

Для $n = 2, r = 3$ система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} f_{111} x_1^3 + f_{112} x_1^2 x_2 + f_{122} x_1 x_2^2 + f_{222} x_2^3 = 0 \\ g_{111} x_1^3 + g_{112} x_1^2 x_2 + g_{122} x_1 x_2^2 + g_{222} x_2^3 = 0 \end{cases}$$

и имеет шесть 2×2 миноров:

$$\begin{aligned} M_{12} &= f_{111} g_{112} - f_{112} g_{111} & M_{13} &= f_{111} g_{122} - f_{122} g_{111} \\ M_{14} &= f_{111} g_{222} - f_{222} g_{111} & M_{23} &= f_{112} g_{122} - f_{122} g_{112} \\ M_{24} &= f_{112} g_{222} - f_{222} g_{112} & M_{34} &= f_{122} g_{222} - f_{222} g_{122} \end{aligned}$$

В этом случае, результат является полиномом степени 3 от этих миноров и снова имеет структуру детерминанта:

$$\begin{aligned} R_{2|3}\{f, g\} &= \\ &= M_{12} M_{34} M_{14} + M_{12} M_{34} M_{23} - M_{12} M_{24}^2 - M_{13}^2 M_{34} + 2M_{13} M_{14} M_{24} - M_{14}^3 - M_{14}^2 M_{23} = \\ &= \det \begin{pmatrix} M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{13} & M_{23} + M_{14} & M_{23} \\ M_{14} & M_{24} & M_{34} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Шесть переменных M_{ij} не являются независимыми и связаны одним соотношением Плюккера $M_{12} M_{34} - M_{13} M_{24} + M_{14} M_{23} = 0$. Поэтому предыдущее полиномиальное выражение для результата через миноры не единственно, но разность любых двух различных таких полиномиальных выражений пропорциональна соотношению Плюккера.

Для $n = 3, r = 3$ система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} f(x_1, x_2, x_3) = f_{11}x_1^2 + f_{12}x_1x_2 + f_{13}x_1x_3 + f_{22}x_2^2 + f_{23}x_2x_3 + f_{33}x_3^2 = 0 \\ g(x_1, x_2, x_3) = g_{11}x_1^2 + g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{22}x_2^2 + g_{23}x_2x_3 + g_{33}x_3^2 = 0 \\ h(x_1, x_2, x_3) = h_{11}x_1^2 + h_{12}x_1x_2 + h_{13}x_1x_3 + h_{22}x_2^2 + h_{23}x_2x_3 + h_{33}x_3^2 = 0 \end{cases}$$

и имеет двадцать 3×3 миноров:

$$\begin{aligned} M_{123} &= f_{11}g_{12}h_{13} - f_{11}g_{13}h_{12} - g_{11}f_{12}h_{13} + g_{11}f_{13}h_{12} + h_{11}f_{12}g_{13} - h_{11}f_{13}g_{12} \\ M_{124} &= f_{11}g_{12}h_{22} - f_{11}g_{22}h_{12} - g_{11}f_{12}h_{22} + g_{11}f_{22}h_{12} + h_{11}f_{12}g_{22} - h_{11}f_{22}g_{12} \\ M_{125} &= f_{11}g_{12}h_{23} - f_{11}g_{23}h_{12} - g_{11}f_{12}h_{23} + g_{11}f_{23}h_{12} + h_{11}f_{12}g_{23} - h_{11}f_{23}g_{12} \\ M_{126} &= f_{11}g_{12}h_{33} - f_{11}g_{33}h_{12} - g_{11}f_{12}h_{33} + g_{11}f_{33}h_{12} + h_{11}f_{12}g_{33} - h_{11}f_{33}g_{12} \\ M_{134} &= f_{11}g_{13}h_{22} - f_{11}g_{22}h_{13} - g_{11}f_{13}h_{22} + g_{11}f_{22}h_{13} + h_{11}f_{13}g_{22} - h_{11}f_{22}g_{13} \\ M_{135} &= f_{11}g_{13}h_{23} - f_{11}g_{23}h_{13} - g_{11}f_{13}h_{23} + g_{11}f_{23}h_{13} + h_{11}f_{13}g_{23} - h_{11}f_{23}g_{13} \\ M_{136} &= f_{11}g_{13}h_{33} - f_{11}g_{33}h_{13} - g_{11}f_{13}h_{33} + g_{11}f_{33}h_{13} + h_{11}f_{13}g_{33} - h_{11}f_{33}g_{13} \\ M_{145} &= f_{11}g_{22}h_{23} - f_{11}g_{23}h_{22} - g_{11}f_{22}h_{23} + g_{11}f_{23}h_{22} + h_{11}f_{22}g_{23} - h_{11}f_{23}g_{22} \\ M_{146} &= f_{11}g_{22}h_{33} - f_{11}g_{33}h_{22} - g_{11}f_{22}h_{33} + g_{11}f_{33}h_{22} + h_{11}f_{22}g_{33} - h_{11}f_{33}g_{22} \\ M_{156} &= f_{11}g_{23}h_{33} - f_{11}g_{33}h_{23} - g_{11}f_{23}h_{33} + g_{11}f_{33}h_{23} + h_{11}f_{23}g_{33} - h_{11}f_{33}g_{23} \\ M_{234} &= f_{12}g_{13}h_{22} - f_{12}g_{22}h_{13} - g_{12}f_{13}h_{22} + g_{12}f_{22}h_{13} + h_{12}f_{13}g_{22} - h_{12}f_{22}g_{13} \\ M_{235} &= f_{12}g_{13}h_{23} - f_{12}g_{23}h_{13} - g_{12}f_{13}h_{23} + g_{12}f_{23}h_{13} + h_{12}f_{13}g_{23} - h_{12}f_{23}g_{13} \\ M_{236} &= f_{12}g_{13}h_{33} - f_{12}g_{33}h_{13} - g_{12}f_{13}h_{33} + g_{12}f_{33}h_{13} + h_{12}f_{13}g_{33} - h_{12}f_{33}g_{13} \\ M_{245} &= f_{12}g_{22}h_{23} - f_{12}g_{23}h_{22} - g_{12}f_{22}h_{23} + g_{12}f_{23}h_{22} + h_{12}f_{22}g_{23} - h_{12}f_{23}g_{22} \\ M_{246} &= f_{12}g_{22}h_{33} - f_{12}g_{33}h_{22} - g_{12}f_{22}h_{33} + g_{12}f_{33}h_{22} + h_{12}f_{22}g_{33} - h_{12}f_{33}g_{22} \\ M_{256} &= f_{12}g_{23}h_{33} - f_{12}g_{33}h_{23} - g_{12}f_{23}h_{33} + g_{12}f_{33}h_{23} + h_{12}f_{23}g_{33} - h_{12}f_{33}g_{23} \\ M_{345} &= f_{13}g_{22}h_{23} - f_{13}g_{23}h_{22} - g_{13}f_{22}h_{23} + g_{13}f_{23}h_{22} + h_{13}f_{22}g_{23} - h_{13}f_{23}g_{22} \\ M_{346} &= f_{13}g_{22}h_{33} - f_{13}g_{33}h_{22} - g_{13}f_{22}h_{33} + g_{13}f_{33}h_{22} + h_{13}f_{22}g_{33} - h_{13}f_{33}g_{22} \\ M_{356} &= f_{13}g_{23}h_{33} - f_{13}g_{33}h_{23} - g_{13}f_{23}h_{33} + g_{13}f_{33}h_{23} + h_{13}f_{23}g_{33} - h_{13}f_{33}g_{23} \\ M_{456} &= f_{22}g_{23}h_{33} - f_{22}g_{33}h_{23} - g_{22}f_{23}h_{33} + g_{22}f_{33}h_{23} + h_{22}f_{23}g_{33} - h_{22}f_{33}g_{23} \end{aligned}$$

Результат является однородным полиномом степени 4 от них и представляет собою пфаффиан¹ антисимметрической 8×8 матрицы

$$\begin{pmatrix} 0 & M_{356} & M_{456} & M_{246} & M_{156} & M_{146} & M_{256} & M_{346} \\ -M_{356} & 0 & -M_{346} & M_{146} & M_{126} & M_{126} & M_{236} & M_{156} - M_{236} \\ -M_{456} & M_{346} & 0 & M_{245} & M_{146} & M_{145} & M_{246} & M_{345} \\ -M_{246} & -M_{146} & -M_{245} & 0 & M_{134} & M_{124} & M_{234} - M_{145} & -M_{234} \\ -M_{156} & -M_{136} & -M_{146} & -M_{134} & 0 & M_{123} & -M_{126} & M_{126} - M_{135} \\ -M_{146} & -M_{126} & -M_{145} & -M_{124} & -M_{123} & 0 & M_{134} - M_{125} & -M_{134} \\ -M_{256} & -M_{236} & -M_{246} & -M_{234} + M_{145} & M_{126} & -M_{134} + M_{125} & 0 & M_{146} - M_{235} \\ -M_{346} & -M_{156} + M_{236} & -M_{345} & M_{234} & -M_{126} + M_{135} & M_{134} & -M_{146} + M_{235} & 0 \end{pmatrix}$$

¹напомним, что пфаффианом называется выражение:

$$R_{3|2}\{f, g, h\} = \text{pfaff} A = \varepsilon_{i_1 \dots i_8} A_{i_1 i_2} A_{i_3 i_4} A_{i_5 i_6} A_{i_7 i_8} \quad (9.9)$$

в котором ε обозначает полностью антисимметрический тензор (т. е. полную антисимметризацию по индексам i_1, \dots, i_8)

(это наблюдение принадлежит Эйзенбаду,[181]). В этом случае опять имеется ровно одно соотношение Плюккера

$$M_{123}M_{456} - M_{124}M_{356} + M_{125}M_{346} - M_{126}M_{345} + M_{134}M_{256} - \\ - M_{135}M_{246} + M_{136}M_{245} + M_{145}M_{236} - M_{146}M_{235} + M_{156}M_{234} = 0$$

Вобщем случае ожидается, что результат является полиномом степени r^{n-1} от переменных $M_{i_1 \dots i_n}$, но никаких явных детерминантальных представлений этого полинома, подобных описанным выше, пока не известно.

9.2.4. Формулы смешанного типа). Объединяя подходы Сильвестра и Безу можно получить ещё несколько явных представлений результата в виде полинома. Простейшим примером является случай $n = 3, r = 2$, когда полиномы имеют вид

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= f_{11}x_1^2 + f_{12}x_1x_2 + f_{13}x_1x_3 + f_{22}x_2^2 + f_{23}x_2x_3 + f_{33}x_3^2 \\ g(x_1, x_2, x_3) &= g_{11}x_1^2 + g_{12}x_1x_2 + g_{13}x_1x_3 + g_{22}x_2^2 + g_{23}x_2x_3 + g_{33}x_3^2 \\ h(x_1, x_2, x_3) &= h_{11}x_1^2 + h_{12}x_1x_2 + h_{13}x_1x_3 + h_{22}x_2^2 + h_{23}x_2x_3 + h_{33}x_3^2 \end{aligned} \quad (9.10)$$

Эта система записывается 3×6 матрицей. Еще одну 3×6 матрицу, дополняющую ее до квадратной 6×6 матрицы, доставляет якобиан $J(x_1, x_2, x_3) = \det(\partial f_i \text{divs} \partial x_j)$ многочленов $f_1 = f, f_2 = g$ и $f_3 = h$. Он однороден степени 3 как по x_1, x_2, x_3 так и по коэффициентам многочленов f, g и h , и выражается через плюккеревы координаты M_{ijk} в виде

$$J(x_1x_2x_3) = M_{123}x_1^3 + (-2M_{134} + M_{125})x_1^2x_2 + (2M_{126} - M_{135})x_1^2x_3 + (-M_{234} + \\ + 2M_{145})x_1x_2^2 + (-M_{235} + 4M_{146})x_1x_2x_3 + (-M_{236} + 2M_{156})x_1x_3^2 + \\ + M_{245}x_2^3 + (2M_{246} + M_{345})x_2^2x_3 + (M_{256} + 2M_{346})x_2x_3^2 + M_{356}x_3^3$$

Производные от J являются, как и f, g, h , однородными квадратичными полиномами от x :

$$\begin{pmatrix} f \\ g \\ h \\ \frac{\partial J}{\partial x_1} \\ \frac{\partial J}{\partial x_2} \\ \frac{\partial J}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{22} & f_{23} & f_{33} \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{22} & g_{23} & g_{33} \\ h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{22} & h_{23} & h_{33} \\ 3M_{123} & -4M_{134} + 2M_{125} & -2M_{135} + 4M_{126} & -M_{234} + 2M_{145} & -M_{235} + 4M_{146} & -M_{236} + 2M_{156} \\ -2M_{134} + M_{125} & 4M_{145} - 2M_{234} & -M_{235} + 4M_{146} & 3M_{245} & 2M_{345} + 4M_{246} & M_{256} + 2M_{346} \\ 2M_{126} - M_{135} & -M_{235} + 4M_{146} & -2M_{236} + 4M_{156} & M_{345} + 2M_{246} & 2M_{256} + 4M_{346} & 3M_{356} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1x_2 \\ x_1x_3 \\ x_2^2 \\ x_2x_3 \\ x_3^2 \end{pmatrix}$$

Матрица в правой части наполовину состоит из коэффициентов уравнений (и поэтому похожа на формулы Сильвестра), наполовину из переменных Плюккера (и поэтому напоминает формулы Безу). Её детерминант

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} & f_{22} & f_{23} & f_{33} \\ g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{22} & g_{23} & g_{33} \\ h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{22} & h_{23} & h_{33} \\ 3M_{123} & -4M_{134} + 2M_{125} & -2M_{135} + 4M_{126} & -M_{234} + 2M_{145} & -M_{235} + 4M_{146} & -M_{236} + 2M_{156} \\ -2M_{134} + M_{125} & 4M_{145} - 2M_{234} & -M_{235} + 4M_{146} & 3M_{245} & 2M_{345} + 4M_{246} & M_{256} + 2M_{346} \\ 2M_{126} - M_{135} & -M_{235} + 4M_{146} & -2M_{236} + 4M_{156} & M_{345} + 2M_{246} & 2M_{256} + 4M_{346} & 3M_{356} \end{pmatrix}$$

равен результату $R_{3|2}\{f, g, h\}$. В компактной записи

$$R_{3|2}\{f, g, h\} = \det_{6 \times 6} \left\{ f, g, h, \frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, \frac{\partial J}{\partial x_3} \right\}$$

где $\det\{\dots\}$ обозначает детерминант матрицы, получаемой при разложении полиномов в скобках по базису из мономов.

Ещё один способ составить исходной системе квадратную матрицу — рассмотреть, в духе Сильвестра, систему из девяти однородных степени 3 полиномов $x_i f_j$ и дополнить её якобианом до матрицы 10×10 , определитель которой также будет равен результату:

$$R_{3|2}\{f, g, h\} = \det_{10 \times 10} \{x_1 f, x_1 g, x_1 h, x_2 f, x_2 g, x_2 h, x_3 f, x_3 g, x_3 h, J\} .$$

Итак, чтобы сделать матрицу Сильвестра квадратной, необходимо добавить к ней несколько строк (несколько полиномов), зависящих от плюккеревых переменных Плюккера. Этот метод особенно эффективен для трех переменных. В случае $r > 2$, дополнительные полиномы строятся при помощи производящей функции

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) &= \\ &= \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} + \frac{1}{r-1} \frac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} p_k + \frac{1}{(r-1)(r-2)} \frac{\partial^3 f_i}{\partial x_j \partial x_k \partial x_l} p_k p_l + \dots \right) \end{aligned}$$

Величина \mathcal{F} может быть представлена как ряд по дополнительным переменным p_1, \dots, p_n :

$$\mathcal{F}(x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n) = J(x_1, \dots, x_n) + J_i(x_1, \dots, x_n) p_i + \frac{1}{2!} J_{ij}(x_1, \dots, x_n) p_i p_j + \dots$$

в котором $J(x_1, \dots, x_n)$ — это обычный Якобиан, $J_i(x_1, \dots, x_n)$ — это его производные, а $J_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ уже являются новыми и нетривиальными¹.

В следующем по сложности случае $n = 3$, $r = 3$ формулы Сильвестра – Безу принимают вид² $R_{3|3}\{f_1, f_2, f_3\} = \det_{21 \times 21} \{x_i x_j f_k, J_l\} = \det_{15 \times 15} \{x_i f_j, J_{kl}\}$. Для $n = 3$, $r = 4$ имеем $R_{3|4}\{f_1, f_2, f_3\} = \det_{36 \times 36} \{x_i x_j x_k f_l, J_{pq}\} = \det_{28 \times 28} \{x_i x_j f_k, J_{lpq}\}$. Для $n = 3$ и произвольного r также имеются две формулы типа Сильвестра – Безу:

$$R_{3|r}\{f_1, f_2, f_3\} = \det_{r(2r+1) \times r(2r+1)} \left\{ x_{i_1} \dots x_{i_{r-1}} f_j, J_{k_1 \dots k_{r-2}} \right\} \quad (9.11)$$

$$R_{3|r}\{f_1, f_2, f_3\} = \det_{r(2r-1) \times r(2r-1)} \left\{ x_{i_1} \dots x_{i_{r-2}} f_j, J_{k_1 \dots k_{r-1}} \right\} \quad (9.12)$$

В старших размерностях $n > 3$ явная формула такого типа известна лишь для $n = 4$, $r = 2$:

$$R_{4|2}\{f_1, f_2, f_3, f_4\} = \det_{20 \times 20} \{x_i f_j, J_k\} . \quad (9.13)$$

9.2.5. Формулы типа Шура. Существенно другого типа формулы для результатов получаются аналитическими методами [178] – [180], основанными на использовании операторной формулы

$$\log R_{r_1, \dots, r_n}(I - f) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_1}{(r_1 k)!} (\widehat{f}_1)^k \right] \dots \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r_n}{(r_n k)!} (\widehat{f}_n)^k \right] \cdot \log \det(I - A) \Bigg|_{A=0} \quad (9.14)$$

¹в частности, это не вторые производные от якобиана

²как и при $r = 2$ есть две различные формулы

в которой A — вспомогательная $n \times n$ матрицу, а $\widehat{f}_1, \widehat{f}_2, \dots, \widehat{f}_n$ суть дифференциальные операторы

$$\begin{aligned}\widehat{f}_1 &= f_1 \left(\frac{\partial}{\partial A_{11}}, \frac{\partial}{\partial A_{12}}, \dots, \frac{\partial}{\partial A_{1n}} \right) \\ \widehat{f}_2 &= f_2 \left(\frac{\partial}{\partial A_{21}}, \frac{\partial}{\partial A_{22}}, \dots, \frac{\partial}{\partial A_{2n}} \right) \\ &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \widehat{f}_n &= f_n \left(\frac{\partial}{\partial A_{n1}}, \frac{\partial}{\partial A_{n2}}, \dots, \frac{\partial}{\partial A_{nn}} \right)\end{aligned}$$

связанные с полиномами f_1, f_2, \dots, f_n , а также интегральной формулы:

$$\begin{aligned}\log R \{f_1, f_2, \dots, f_n\} &= \\ &= \oint \dots \oint \log f_1 d \log f_2 \wedge \dots \wedge d \log f_n + r_1 \log R \{f_2, \dots, f_n\} \Big|_{x_1=0}\end{aligned}\quad (9.15)$$

в которой $f_k = f_k(1, z_1, \dots, z_{n-1})$, $2 \leq k \leq n$, и интегрирование ведётся по $(n-1)$ -мерной гиперповерхности, охватывающей все общие корни этой неоднородной системы (см. [178] – [180]). Явная формула для $\log R$ получается после нескольких итераций (9.15): для $n = 2$

$$\log R_{r_1 r_2} \{f_1, f_2\} = \oint \log f_1(1, z) d \log f_2(1, z) + r_1 \log f_2(0, 1)$$

для $n = 3$

$$\begin{aligned}\log R_{r_1 r_2 r_3} \{f_1, f_2, f_3\} &= \oint \oint \log f_1(1, z_1, z_2) d \log f_2(1, z_1, z_2) \wedge d \log f_3(1, z_1, z_2) + \\ &+ r_1 \oint \log f_2(0, 1, z) d \log f_3(0, 1, z) + r_1 r_2 \log f_3(0, 0, 1)\end{aligned}$$

и т. д. Таким образом, логарифм результата выражается через простые контурные интегралы. Чтобы получить R из $\log R$, можно просто проэкспоненцировать последний: например, для $n = 2$

$$R_{r_1 r_2} \{f_1, f_2\} = \exp \left(\oint \log f_1(1, z) d \log f_2(1, z) + r_1 \log f_2(0, 1) \right)\quad (9.16)$$

Используя эту формулу, можно воспроизвести известное выражение для результата двух полиномов через их корни: если

$$f_1(1, z) = a \prod_{i=1}^{r_1} (z - \alpha_i) \quad f_2(1, z) = b \prod_{i=1}^{r_2} (z - \beta_i)$$

то

$$\begin{aligned}R_{r_1 r_2} \{f_1, f_2\} &= \\ &= \exp \left(\sum_{i=1}^{r_1} \sum_{j=1}^{r_2} \oint \log(z - \alpha_i) d \log(z - \beta_j) + r_2 \log a + r_1 \log b \right) = \\ &= a^{r_2} b^{r_1} \prod_{i=1}^{r_1} \prod_{j=1}^{r_2} (\beta_j - \alpha_i)\end{aligned}$$

Экспоненциальная формула (9.16) и ее прямые аналоги для $n > 2$ имеют несколько преимуществ. Самое важное, разумеется, это простота и явность этих формул: они имеют прозрачную структуру, которую легко запомнить и понять. Другое преимущество — универсальность: их можно легко написать для произвольного n , а не только для первых нескольких значений. Однако, у них есть и серьезный недостаток. Как известно, результат является однородным полиномом степени

$$d_i = \frac{r_1 r_2 \dots r_n}{r_i}$$

по коэффициентам i -того уравнения f_i , и полной степени

$$d = d_1 + \dots + d_n = r_1 r_2 \dots r_n \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} \right)$$

по коэффициентам всех уравнений, но эта полиномиальная структура результата совершенно не видна в экспоненциальной формуле. Поэтому, эта формула не вполне удобна для практических вычислений результатов (хотя она может быть крайне полезна в теоретических выкладках).

Чтобы превратить экспоненциальные формулы в инструмент практических вычислений, применим (9.15) к *сдвинутой* системе

$$\begin{cases} \tilde{f}_1(\vec{x}) = (x_1)^{r_1} - \lambda_1 f_1(\vec{x}) \\ \tilde{f}_2(\vec{x}) = (x_2)^{r_2} - \lambda_2 f_2(\vec{x}) \\ \dots \\ \tilde{f}_n(\vec{x}) = (x_n)^{r_n} - \lambda_n f_n(\vec{x}) \end{cases}$$

а затем разложим сдвинутые логарифмы в подынтегральном выражении в ряд Тейлора по степеням «спектральных параметров» λ_i . Тогда, мы получим следующее разложение в ряд:

$$\log R\{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n\} = - \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} T_{k_1 k_2 \dots k_n} \{f_1, \dots, f_n\} \cdot \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_n^{k_n}$$

(знак минус можно не ставить в зависимости от соглашения) где конкретные компоненты разложения $T_{k_1 k_2 \dots k_n}$ являются однородными полиномами степени k_i по коэффициентам f_i . Мы называем их *следами* системы $f_1(\vec{x}), \dots, f_n(\vec{x})$. Экспоненцируя, мы получаем результат сдвинутой системы:

$$R\{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n\} = \exp \left(- \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} T_{k_1 k_2 \dots k_n} \cdot \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_n^{k_n} \right)$$

Исходный результат $R\{f_1, \dots, f_n\}$, очевидно, равен произведению $(-1)^d$ на коэффициент при $\lambda_1^{d_1} \lambda_2^{d_2} \dots \lambda_n^{d_n}$ в $R\{\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n\}$. Мы можем извлечь этот коэффициент, разлагая правую часть в ряд по положительным степеням λ_i :

$$\exp \left(- \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} T_{k_1 k_2 \dots k_n} \cdot \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_n^{k_n} \right) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \dots \sum_{k_n=0}^{\infty} \mathcal{P}_{k_1 k_2 \dots k_n} \cdot \lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_n^{k_n}$$

Такое разложение в ряд величины $\exp(S(x))$, где $S(x)$ само является рядом (возможно от нескольких переменных), часто называется *разложением Шура*. Из него следует следующее соотношение между компонентами рядов:

$$\mathcal{P}_{k_1 k_2 \dots k_n} = \sum_{m=1}^{k_1 + \dots + k_n} \frac{(-1)^m}{m!} \sum_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_m = \vec{k}} T_{\vec{v}_1} T_{\vec{v}_2} \dots T_{\vec{v}_m}$$

где сумма берется по всем упорядоченным разбиениям¹ вектора $\vec{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ на m векторов, обозначенных как $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_m$.

Полиномы $\mathcal{P}_{k_1 k_2 \dots k_n}(T)$ часто называются полиномами Шура от многих переменных. Несколько первых полиномов Шура имеют вид

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1,0} &= -T_{1,0} \\ \mathcal{P}_{2,0} &= -T_{2,0} + T_{1,0}^2/2 \\ \mathcal{P}_{2,1} &= -T_{2,1} + T_{2,0}T_{0,1} + T_{1,0}T_{1,1} - T_{1,0}^2T_{0,1}/2 \\ \mathcal{P}_{2,1,0} &= -T_{2,1,0} + T_{2,0,0}T_{0,1,0} + T_{1,0,0}T_{1,1,0} - T_{1,0,0}^2T_{0,1,0}/2 \\ \mathcal{P}_{1,1,1} &= -T_{1,1,1} + T_{1,0,0}T_{0,1,1} + T_{0,1,0}T_{1,0,1} + T_{1,1,0}T_{0,0,1} - T_{0,1,0}T_{0,0,1}T_{1,0,0} \end{aligned}$$

Сам результат тоже является полиномом Шура:

$$R\{f_1, \dots, f_n\} = (-1)^d \mathcal{P}_{d_1, \dots, d_n} = \sum_{m=1}^d \frac{(-1)^{m+d}}{m!} \sum_{\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \dots + \vec{v}_m = \vec{d}} T_{\vec{v}_1} T_{\vec{v}_2} \dots T_{\vec{v}_m}$$

Явная формула для следов, полученная в [178] – [180], имеет вид

$$T_{\vec{k}} = T_{k_1 k_2 \dots k_n} = \frac{1}{k_1 k_2 \dots k_n} \cdot \sum_{r_{ij}} \det_{2 \leq i, j \leq n} (\delta_{ij} r_i k_i - r_{ij}) \prod_{i=1}^n (f_i)_{r_{i1}, r_{i2}, \dots, r_{in}}^{k_i}$$

где $(f)_{j_1, j_2, \dots, j_n}^k =$ коэффициент при $x_1^{j_1} x_2^{j_2} \dots x_n^{j_n}$ в $f(x_1, x_2, \dots, x_n)^k$ и сумма идет по всем неотрицательным целочисленным $n \times n$ матрицам r_{ij} таким, что сумма элементов в любом i -том столбце или i -той строке фиксирована и равна $r_i k_i$. Формула (9.2.5) верна для положительных k_1, \dots, k_n . Случаи, когда некоторые из $k_i = 0$, также не представляют никакой сложности. Если некоторое $k_i = 0$, то

$$T_{k_1, k_2, \dots, k_n} \{f_1, f_2, \dots, f_n\} = r_i T_{k_1, k_2, \dots, k_{i-1}, k_{i+1}, \dots, k_n} \{f_1, f_2, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_n\} \Big|_{x_i=0}$$

где след в правой части берется по переменным $x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$. Несложно вывести эти формулы, разлагая в ряд логарифмы в подинтегральном выражении в (9.15). Операторный подход дает [178] – [180] аналогичные, и даже в чем-то более простые, формулы

$$T_{k_1, k_2, \dots, k_n} \{f_1, f_2, \dots, f_n\} = \frac{r_1 (\widehat{f}_1)^{k_1}}{(r_1 k_1)!} \dots \frac{r_n (\widehat{f}_n)^{k_n}}{(r_n k_n)!} \cdot \frac{\text{tr} A^{r_1 k_1 + \dots + r_n k_n}}{r_1 k_1 + \dots + r_n k_n} \Big|_{A=0}$$

¹Под упорядоченным разбиением понимается способ записи вектора с целочисленными неотрицательными компонентами как суммы векторов с целочисленными неотрицательными компонентами, в которой важен порядок слагаемых.

Вместе, формулы 9.2.5 и 9.2.5 (или, альтернативно, 9.2.5) дают явный алгоритм для вычисления результата, не содержащий деления полиномов. Как ожидается, с вычислительной точки зрения отсутствие деления полиномов должно быть преимуществом этого алгоритма, по сравнению с алгоритмом комплекса Кошуля.

Чтобы проиллюстрировать эти общие формулы, рассмотрим конкретный случай $n = 3$ и $r = 2$, когда система уравнений имеет вид 9.10. Вычисляя следы с помощью формулы (9.2.5) и операторов

$$\begin{aligned}\hat{f} &= f_{11} \left(\frac{\partial}{\partial A_{11}} \right)^2 + f_{12} \frac{\partial^2}{\partial A_{11} \partial A_{12}} + f_{13} \frac{\partial^2}{\partial A_{11} \partial A_{13}} + f_{22} \left(\frac{\partial}{\partial A_{12}} \right)^2 + f_{23} \frac{\partial^2}{\partial A_{12} \partial A_{13}} + f_{33} \left(\frac{\partial}{\partial A_{13}} \right)^2 \\ \hat{g} &= g_{11} \left(\frac{\partial}{\partial A_{21}} \right)^2 + g_{12} \frac{\partial^2}{\partial A_{21} \partial A_{22}} + g_{13} \frac{\partial^2}{\partial A_{21} \partial A_{23}} + g_{22} \left(\frac{\partial}{\partial A_{22}} \right)^2 + g_{23} \frac{\partial^2}{\partial A_{22} \partial A_{23}} + g_{33} \left(\frac{\partial}{\partial A_{23}} \right)^2 \\ \hat{h} &= h_{11} \left(\frac{\partial}{\partial A_{31}} \right)^2 + h_{12} \frac{\partial^2}{\partial A_{31} \partial A_{32}} + h_{13} \frac{\partial^2}{\partial A_{31} \partial A_{33}} + h_{22} \left(\frac{\partial}{\partial A_{32}} \right)^2 + h_{23} \frac{\partial^2}{\partial A_{32} \partial A_{33}} + h_{33} \left(\frac{\partial}{\partial A_{33}} \right)^2\end{aligned}$$

мы получаем

$$\begin{aligned}T_1 &= 4f_{11} + 4g_{22} + 4h_{33} \\ T_2 &= 4f_{11}^2 + 4g_{12}f_{12} + 4h_{13}f_{13} + 8g_{11}f_{22} + 8h_{11}f_{33} + 4g_{22}^2 + 8g_{33}h_{22} + 4g_{23}h_{23} + 4h_{33}^2 \\ T_3 &= 4f_{11}^3 + 6g_{12}f_{11}f_{12} + 6h_{13}f_{11}f_{13} + 12g_{11}f_{11}f_{22} + 12h_{11}f_{11}f_{33} + 6g_{11}f_{12}^2 + \\ &\quad + 6h_{11}f_{13}^2 + 3g_{23}h_{13}f_{12} + 6g_{33}h_{12}f_{12} + 6g_{12}g_{22}f_{12} + 3g_{13}h_{23}f_{12} + \\ &\quad + 3g_{23}h_{12}f_{13} + 6h_{13}h_{33}f_{13} + 6g_{13}h_{22}f_{13} + 3g_{12}h_{23}f_{13} + 6g_{12}^2f_{22} + \\ &\quad + 12g_{11}g_{22}f_{22} + 6g_{13}h_{13}f_{22} + 12g_{33}h_{11}f_{22} + 6g_{23}h_{11}f_{23} + 3g_{12}h_{13}f_{23} + \\ &\quad + 9g_{13}h_{12}f_{23} + 6g_{11}h_{23}f_{23} + 6h_{13}^2f_{33} + 6g_{12}h_{12}f_{33} + 12g_{11}h_{22}f_{33} + \\ &\quad + 12h_{11}h_{33}f_{33} + 12g_{22}g_{33}h_{22} + 4g_{22}^3 + 6g_{23}h_{23}h_{33} + 6g_{22}g_{23}h_{23} + 6g_{23}^2h_{22} + \\ &\quad + 6g_{33}h_{23}^2 + 12g_{33}h_{22}h_{33} + 4h_{33}^3\end{aligned}$$

и так далее. Результат системы имеет степень 12 и выражается через следы как

$$R_{3|2}\{f, g, h\} = P_{12} \left\{ \frac{-T_k(f)}{k} \right\} = -\frac{1}{12}T_{12} + \frac{1}{72}T_6^2 + \frac{1}{35}T_5T_7 + \frac{1}{32}T_4T_8 + \frac{1}{27}T_3T_9 + \dots$$

где приведена лишь часть слагаемых ввиду громоздкости полного выражения.

9.3. Вычисление дискриминанта

Поскольку дискриминант зависит лишь от одного однородного полинома (вместо n однородных полиномов в случае результата), он несколько проще чем результат, имеет большую симметрию и некоторые специфические для него методы вычисления.

9.3.1. Выражение дискриминанта через инварианты. Пусть $S(x_1, \dots, x_n)$ является однородным полиномом степени r по n переменным. Тогда дискриминант S — это полиномиальный $SL(n)$ инвариант формы S . Будучи таковым, он должен выражаться как полином по некоторым более простым — базисным — инвариантам, которые можно описывать, в числе прочих, элегантно методом диаграммной техники [157]. Простейший пример такого описания дает детерминант, изображенный

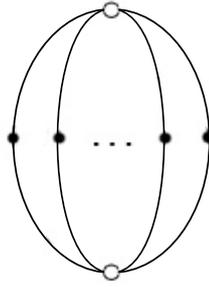


Рис. 12: Детерминант матрицы S_{ij} , представленный как диаграмма тензорной свертки. Черные 2-валентные вершины представляют тензор S , белые n -валентные вершины представляют тензор ε .

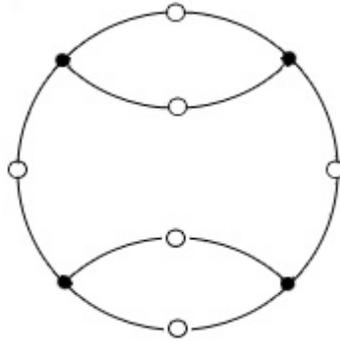


Рис. 13: Инвариант I_4 степени 4 у 3-формы от 2 переменных, представленный как диаграмма тензорной свертки. Черные 2-валентные вершины представляют тензор S , белые 2-валентные вершины представляют тензор ε .

на Рис.1. В то же время простейший нетривиальный (т.е, негауссов) пример — это 3-форма от 2 переменных:

$$S(x_1, x_2) = S_{111}x_1^3 + 3S_{112}x_1^2x_2 + 3S_{122}x_1x_2^2 + S_{222}x_2^3$$

По счету степеней свободы, в данном случае есть лишь один независимый инвариант I_4 , изображенный на Рис. 2. Индекс «4» обозначает степень этого инварианта. Условимся обозначать элементарные инварианты степени k как I_k . Несложно написать алгебраическое выражение, соответствующее этой диаграмме:

$$I_4 = S_{i_1 i_2 i_3} S_{j_1 j_2 j_3} S_{k_1 k_2 k_3} S_{l_1 l_2 l_3} \varepsilon^{i_1 j_1} \varepsilon^{i_2 j_2} \varepsilon^{k_1 l_1} \varepsilon^{k_2 l_2} \varepsilon^{i_3 k_3} \varepsilon^{j_3 l_3}$$

Вычисляя эту сумму, мы получаем следующую явную формулу для I_4 :

$$I_4 = 2S_{111}^2 S_{222}^2 - 12S_{111} S_{112} S_{122} S_{222} + 8S_{111}^3 S_{122}^2 + 8S_{112}^3 S_{222}^2 - 6S_{112}^2 S_{122}^2.$$

В этой формуле несложно узнать дискриминант $D_{2|3}$ кубической формы S :

$$D_{2|3} = I_4. \tag{9.17}$$

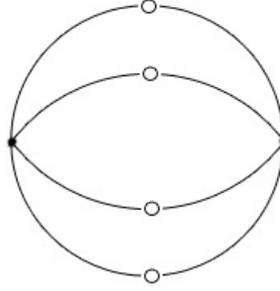


Рис. 14: Инвариант I_2 степени 2 для 4-формы от 2 переменных, представленный как диаграмма тензорной свертки. Черные 4-валентные вершины представляют тензор S , белые 2-валентные вершины представляют тензор ε .

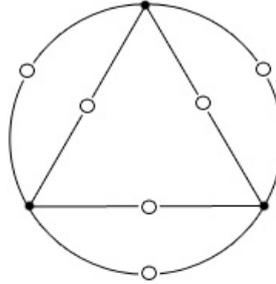


Рис. 15: Инвариант I_3 степени 3 для 4-формы от 2 переменных, представленный как диаграмма тензорной свертки. Черные 4-валентные вершины представляют тензор S , белые 2-валентные вершины представляют тензор ε .

Следующий по сложности пример — это 4-форма от 2 переменных, которая может быть записана как $S(x_1, x_2) = S_{1111}x_1^4 + 4S_{1112}x_1^3x_2 + 6S_{1122}x_1^2x_2^2 + 4S_{1222}x_1x_2^3 + S_{2222}x_2^4$. В данном случае имеется два независимых инварианта I_2 и I_3 степеней 2 и 3, которые даются диаграммами на рис. 3 и рис. 4 соответственно. Из этих диаграмм несложно усмотреть, что

$$I_2 = S_{i_1 i_2 i_3 i_4} S_{j_1 j_2 j_3 j_4} \varepsilon^{i_1 j_1} \varepsilon^{i_2 j_2} \varepsilon^{i_3 j_3} \varepsilon^{i_4 j_4}$$

$$I_3 = S_{i_1 i_2 i_3 i_4} S_{j_1 j_2 j_3 j_4} S_{k_1 k_2 k_3 k_4} \varepsilon^{i_1 j_1} \varepsilon^{i_2 j_2} \varepsilon^{i_3 k_1} \varepsilon^{i_4 k_2} \varepsilon^{j_3 k_3} \varepsilon^{j_4 k_4}$$

Вычисляя эти суммы, получаем следующие явные формулы для I_2, I_3 :

$$I_2 = 2S_{1111}S_{2222} - 8S_{1112}S_{1222} + 6S_{1122}^2$$

$$I_3 = 6S_{1111}S_{1122}S_{2222} - 6S_{1111}S_{1222}^2 - 6S_{1112}^2S_{2222} + 12S_{1112}S_{1122}S_{1222} - 6S_{1122}^3$$

Дискриминант $D_{2|4}$, как и любой другой $SL(2)$ -инвариант формы S , является функцией от I_2, I_3 :

$$\begin{aligned}
D_{2|4} = I_2^3 - 6I_3^2 = & 8S_{1111}^3 S_{2222}^3 - 96S_{1111}^2 S_{1112} S_{1222} S_{2222}^2 - 144S_{1111}^2 S_{1122}^2 S_{2222}^2 + \\
& + 432S_{1111}^2 S_{1122} S_{1222}^2 S_{2222} - 216S_{1111}^2 S_{1222}^4 + 432S_{1111} S_{1112}^2 S_{1122} S_{2222}^2 - \\
& - 48S_{1111} S_{1112}^2 S_{1222}^2 S_{2222} - 1440S_{1111} S_{1112} S_{1122}^2 S_{1222} S_{2222} + 648S_{1111} S_{1122}^4 S_{2222} + \\
& + 864S_{1111} S_{1112} S_{1122} S_{1222}^3 + 864S_{1112}^3 S_{1122} S_{1222} S_{2222} + 288S_{1112}^2 S_{1122}^2 S_{1222}^2 - \\
& - 432S_{1111} S_{1122}^3 S_{1222}^2 - 216S_{1112}^4 S_{2222}^2 - 512S_{1112}^3 S_{1222}^3 - 432S_{1112}^2 S_{1122}^3 S_{2222} \quad (9.18)
\end{aligned}$$

Следующий пример — 5-форма от 2 переменных

$$S(x_1, x_2) = S_{11111}x_1^5 + 5S_{11112}x_1^4x_2 + 10S_{11122}x_1^3x_2^2 + 10S_{11222}x_1^2x_2^3 + 5S_{12222}x_1x_2^4 + S_{22222}x_2^5$$

Здесь есть три элементарных инварианта I_4, I_8, I_{12} степеней 4, 8, 12, соответствующие диаграммам на Рис. 5, Рис. 6 и Рис. 7, из которых видно, что

$$\begin{aligned}
I_4 = & S_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} S_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5} S_{k_1 k_2 k_3 k_4 k_5} S_{l_1 l_2 l_3 l_4 l_5} \varepsilon^{i_1 j_1} \varepsilon^{i_2 j_2} \varepsilon^{i_3 j_3} \varepsilon^{i_4 k_4} \varepsilon^{i_5 k_5} \varepsilon^{j_4 l_4} \varepsilon^{j_5 l_5} \varepsilon^{k_1 l_1} \varepsilon^{k_2 l_2} \varepsilon^{k_3 l_3} = \\
= & 2S_{11111}^2 S_{22222}^2 - 20S_{11111} S_{11112} S_{12222} S_{22222} + 8S_{11111} S_{11122} S_{11222} S_{22222} + \\
& + 32S_{11111} S_{11122} S_{12222}^2 - 24S_{11111} S_{11222}^2 S_{12222} + 32S_{11122}^2 S_{11222} S_{22222} + \\
& + 18S_{11122}^2 S_{12222}^2 - 24S_{11122} S_{11222}^2 S_{22222} - 152S_{11122} S_{11222} S_{12222} S_{22222} + \\
& + 96S_{11122} S_{11222}^3 + 96S_{11222}^3 S_{12222} - 64S_{11222}^2 S_{12222}^2
\end{aligned}$$

(аналогичные формулы для I_8 и I_{12} довольно громоздки и мы не приводим их здесь).

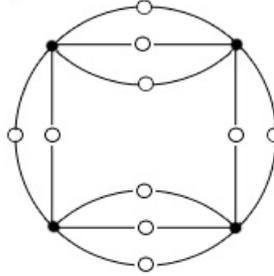


Рис. 16: Инвариант I_4 степени 4 для 5-формы от 2 переменных, представленный как диаграмма тензорной свертки. Черные 5-валентные вершины представляют тензор S , белые 2-валентные вершины представляют тензор ε .

$D_{2|5}$ выражается через I_4, I_8, I_{12} как $D_{2|5} = I_4^2 - 64I_8$.

Наш последний пример — 3-форма от 3 переменных

$$\begin{aligned}
S(x_1, x_2, x_3) = & S_{111}x_1^3 + 3S_{112}x_1^2x_2 + 3S_{113}x_1^2x_3 + S_{222}x_2^3 + \\
& + 3S_{122}x_1x_2^2 + 3S_{223}x_2^2x_3 + S_{333}x_3^3 + 3S_{133}x_1x_3^2 + 3S_{233}x_2x_3^2 + 6S_{123}x_1x_2x_3.
\end{aligned}$$

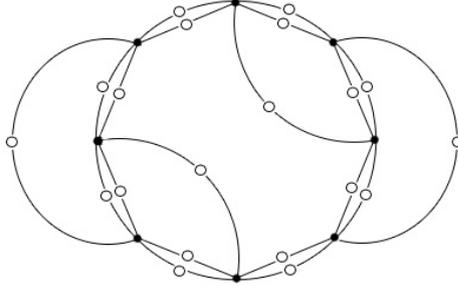


Рис. 17: Инвариант I_8 степени 8 для 5-формы от 2 переменных, представленный как диаграмма тензорной свертки. Черные 5-валентные вершины представляют тензор S , белые 2-валентные вершины представляют тензор ε .

В данном случае имеются 2 элементарных инварианта I_4 и I_6 степеней 4 и 6, задаваемые диаграммами на Рис. 8 и Рис. 9, согласно которым

$$I_4 = S_{i_1 i_2 i_3} S_{j_1 j_2 j_3} S_{k_1 k_2 k_3} S_{l_1 l_2 l_3} \varepsilon^{i_1 j_1 k_1} \varepsilon^{i_2 j_2 l_2} \varepsilon^{i_3 k_3 l_3} \varepsilon^{l_1 k_2 j_3}$$

$$I_6 = S_{i_1 i_2 i_3} S_{j_1 j_2 j_3} S_{k_1 k_2 k_3} S_{l_1 l_2 l_3} S_{m_1 m_2 m_3} S_{s_1 s_2 s_3} \varepsilon^{i_1 k_1 l_1} \varepsilon^{i_2 j_2 s_2} \varepsilon^{j_1 k_2 m_1} \varepsilon^{l_2 m_2 k_3} \varepsilon^{m_3 s_3 j_3} \varepsilon^{l_3 i_3 s_1}$$

Вычисляя эти суммы, мы получаем явную формулу для I_4

$$I_4 = 6S_{123}^4 - 12S_{122}S_{123}^2S_{133} + 6S_{122}^2S_{133}^2 + 6S_{113}S_{123}S_{133}S_{222} - 12S_{113}S_{123}^2S_{223} -$$

$$- 6S_{113}S_{122}S_{133}S_{223} + 18S_{113}S_{122}S_{123}S_{233} - 6S_{113}S_{122}^2S_{333} + 6S_{113}^2S_{223}^2 -$$

$$- 6S_{112}S_{133}^2S_{222} + 18S_{112}S_{123}S_{133}S_{223} - 12S_{112}S_{123}^2S_{233} - 6S_{112}S_{122}S_{133}S_{233} +$$

$$+ 6S_{112}S_{122}S_{123}S_{333} - 6S_{112}S_{113}S_{223}S_{233} + 6S_{112}S_{113}S_{222}S_{333} + 6S_{112}^2S_{233}^2 -$$

$$- 6S_{112}^2S_{223}S_{333} - 6S_{111}S_{133}S_{223}^2 + 6S_{111}S_{133}S_{222}S_{233} + 6S_{111}S_{123}S_{223}S_{233} -$$

$$- 6S_{113}^2S_{222}S_{233} - 6S_{111}S_{123}S_{222}S_{333} - 6S_{111}S_{122}S_{233}^2 + 6S_{111}S_{122}S_{223}S_{333}$$

и аналогичную явную формулу для I_6 — она довольно громоздка и мы не приводим ее здесь. Дискриминант $D_{3|3}$ выражается через них как $D_{3|3} = 32I_4^3 + 3I_6^2$. Если раскрыть тут все скобки, получится выражение для $D_{3|3}$ через коэффициенты форм, состоящее из 2040 мономов. В таком виде этот дискриминант был явно выписан в книжном варианте статьи [157].

9.3.2. Дискриминанты симметрических полиномов раскладываются в произведения сравнительно простых сомножителей. Так, для вычисления дискриминанта квадратичного симметрического полинома

$$S(x_1, \dots, x_n) = C_2 p_2 + C_{11} p_1^2$$

где C_2, C_{11} — два произвольных параметра, и $p_k = \sum_i x_i^k$, достаточно продифференцировать S , что приводит к системе уравнений

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = 2C_2 x_i + 2C_{11} p_1 = 0$$

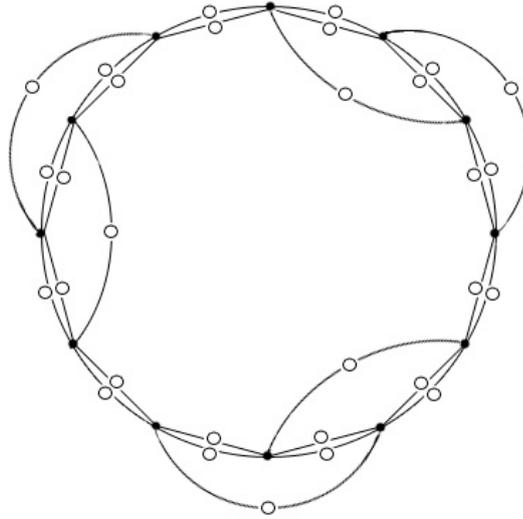


Рис. 18: Инвариант I_{12} степени 12 для 5-формы от 2 переменных, представленный как диаграмма тензорной свертки. Черные 5-валентные вершины представляют тензор S , белые 2-валентные вершины представляют тензор ε .

из которой мы немедленно заключаем, что

$$\mathcal{D}_{n|2}(C_2, C_{11}) = \det_{n \times n} \begin{pmatrix} C_2 + C_{11} & C_{11} & \cdots & C_{11} \\ C_{11} & C_2 + C_{11} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & C_{11} \\ C_{11} & \cdots & C_{11} & C_2 + C_{11} \end{pmatrix} = C_2^{n-1} (C_2 + nC_{11})$$

является произведением более простых полиномов.

Аналогично, дискриминант кубического симметрического полинома

$$S(x_1, \dots, x_n) = C_3 p_3 + C_{21} p_2 p_1 + C_{111} p_1^3$$

имеет вид

$$\mathcal{D}_{n|3}(C_3, C_{21}, C_{111}) = (B_3)^{(n-3)2^{n-1}} \prod_{k=0}^{n-1} \left(\left(\frac{n-2k}{9n} \right)^2 B_1 B_3^2 + \frac{4k(n-k)}{27n^2} B_2^3 \right) \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$

где $B_1 = n^2 C_{111} + nC_{21} + C_3$, $B_2 = nC_{21} + 3C_3$, $B_3 = C_3$. Эта формула является замечательно короткой и весьма простым образом зависит от n , что позволяет исследовать ее асимптотику при больших n .

В общем случае однородный симметрический полином степени r от n переменных имеет вид $S(x_1, \dots, x_n) = \sum_{|Y|=r} C_Y p_Y$, где сумма берется по всем диаграммам Юнга (разбиениям целых чисел) $Y : k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq 0$ фиксированной суммы $|Y| = k_1 + k_2 + \dots = r$, и $p_Y = \prod_i p_{Y_i}$. Число коэффициентов этого полинома равно

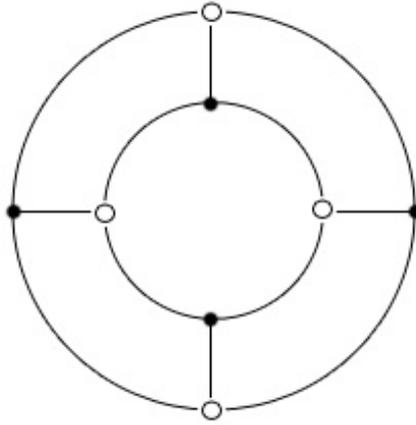


Рис. 19: Инвариант I_4 степени 4 для 3-формы от 3 переменных, представленный как диаграмма тензорной свертки. Черные 3-валентные вершины представляют тензор S , белые 3-валентные вершины представляют тензор ϵ .

числу разбиений числа r на положительные целые числа, которое мы обозначим как $P(r)$. Производящая функция для $P(r)$ имеет вид

$$\sum_{r=0}^{\infty} P(r)q^r = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}$$

несколько первых значений $P(r)$ таковы:

| | | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|----|----|----|----|----|
| r | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $P(r)$ | 1 | 2 | 3 | 5 | 7 | 11 | 15 | 22 | 30 | 42 |

Симметрический однородный полином степени r имеет $P(r)$ независимых коэффициентов C_y , и его дискриминант имеет вид

$$\mathcal{D}_{n|r}(C) = \text{const} \cdot C_r^{\beta_{n|r}} \prod_{M_1+\dots+M_{r-1}=n} \left(d_M(C) \right)^{\frac{\#_M!}{(r-1)!} \frac{(M_1+\dots+M_{r-1})!}{M_1! \dots M_{r-1}!}} \quad (9.19)$$

где произведение берется по всем разбиениям числа n на $r-1$ неотрицательных целых частей с учетом порядка слагаемых и $\#_M$ равно числу нулей среди M_1, \dots, M_{r-1} . Степень $\beta_{n|r}$ определяется полной степенью дискриминанта

$$\beta_{n|r} = \deg \mathcal{D}_{n|r} - \sum_{M_1+\dots+M_{r-1}=n} \frac{\#_M! \deg d_M (M_1+\dots+M_{r-1})!}{(r-1)! M_1! \dots M_{r-1}!}$$

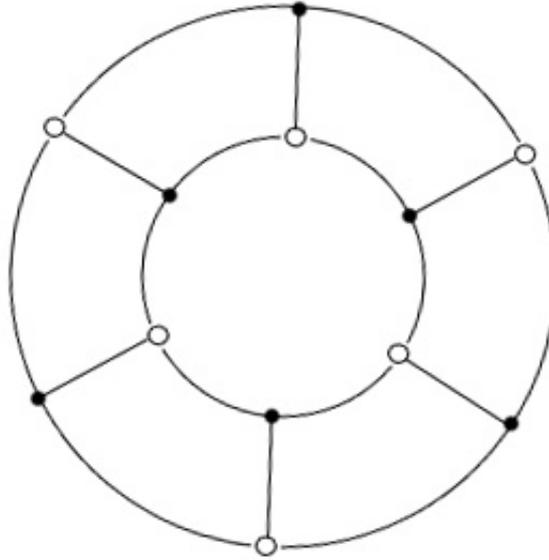


Рис. 20: Инвариант I_6 степени 6 для 3-формы от 3 переменных, представленный как диаграмма тензорной свертки. Черные 3-валентные вершины представляют тензор S , белые 3-валентные вершины представляют тензор ε .

и $d_M(C) = R \left\{ \sum_i P_M^{(i)}, \sum_{i < j} P_M^{(ij)}, \sum_{i < j < k} P_M^{(ijk)}, \dots \right\}$, где

$$P_M^{(ij)} = \frac{\det_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & P_M^{(i)} \\ 1 & P_M^{(j)} \end{pmatrix}}{\det_{2 \times 2} \begin{pmatrix} 1 & y_i \\ 1 & y_j \end{pmatrix}}, \quad P_M^{(ijk)} = \frac{\det_{3 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & y_i & P_M^{(i)} \\ 1 & y_j & P_M^{(j)} \\ 1 & y_k & P_M^{(k)} \end{pmatrix}}{\det_{3 \times 3} \begin{pmatrix} 1 & y_i & y_i^2 \\ 1 & y_j & y_j^2 \\ 1 & y_k & y_k^2 \end{pmatrix}}, \quad \dots$$

$$P_M^{(i_1 \dots i_k)} = \frac{\det_{k \times k} \begin{pmatrix} 1 & y_{i_1} & \dots & y_{i_1}^{k-2} & P_M^{(i_1)} \\ 1 & y_{i_2} & \dots & y_{i_2}^{k-2} & P_M^{(i_2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{i_k} & \dots & y_{i_k}^{k-2} & P_M^{(i_k)} \end{pmatrix}}{\det_{k \times k} \begin{pmatrix} 1 & y_{i_1} & \dots & y_{i_1}^{k-2} & y_{i_1}^{k-1} \\ 1 & y_{i_2} & \dots & y_{i_2}^{k-2} & y_{i_2}^{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & y_{i_k} & \dots & y_{i_k}^{k-2} & y_{i_k}^{k-1} \end{pmatrix}}$$

Каждая из величин $P_M^{(i_1 \dots i_k)}$ является полиномом степени $r - k$ по переменным y_i . Они определены только для попарно различных индексов i_1, \dots, i_k и симметричны по этим индексам. Для $k \geq r$ они не определены: невозможно выбрать r попарно различных элементов из набора из $(r - 1)$. Каждый отдельный фактор $d_M(S)$ можно вычислить как результат системы от не более чем $(r - 1)$ переменных. Поэтому

формула (9.19) представляет удобный способ вычислять дискриминанты симметрических полиномов даже в области $n \gg r$.

9.4. Интегральные дискриминанты и приложения

9.4.1. Негауссовы интегралы и тождества Уорда. Результаты и дискриминанты из предыдущих разделов были чисто алгебраическими (или даже комбинаторными) объектами — все они являются полиномами, т. е. конечными линейными комбинациями мономов. Следующий уровень сложности в нелинейной алгебре занимают *статсуммы*, которые как правило не выражаются в полиномах и даже в элементарных функциях. Простейшая из них — интегральный дискриминант

$$J_{n|r}(S) = \int dx_1 \dots dx_n e^{-S(x_1, \dots, x_n)} \quad (9.20)$$

Для квадратичных форм $J_{n|2}(S) = (\det S)^{-1/2}$. Более сложные интегральные дискриминанты вычисляются посредством *тождеств Уорда*, которые представляют из себя линейные дифференциальные уравнения

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_{a_1, \dots, a_n}} \frac{\partial}{\partial s_{b_1, \dots, b_n}} - \frac{\partial}{\partial s_{c_1, \dots, c_n}} \frac{\partial}{\partial s_{d_1, \dots, d_n}} \right) J_{n|r}(S) = 0, \quad a_i + b_i = c_i + d_i$$

на интегральные дискриминанты¹. Используя тождества Уорда, можно посчитать интегральные дискриминанты в нескольких простейших случаях

| n | r | Инварианты | Дискриминант $D_{n r}$ | Первая ветвь интегрального дискриминанта $J_{n r}$ |
|-----|-----|--------------------|------------------------|---|
| 2 | 2 | I_2 | I_2 | $I_2^{-1/2}$ |
| 2 | 3 | I_4 | I_2 | $I_4^{-1/6}$ |
| 2 | 4 | I_2, I_3 | $I_2^3 - 6I_3^2$ | $I_2^{-1/4} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot \frac{(1/12)_i (5/12)_i}{(1/2)_i} \cdot \left(\frac{6I_3^2}{I_2^3} \right)^i$ |
| 2 | 5 | I_4, I_8, I_{12} | $I_4^2 - 64I_8$ | $I_4^{-1/10} \cdot \sum_{i,j=0}^{\infty} \frac{1}{i! j!} \cdot \frac{(3/10)_{i+j} (1/10)_{2i+3j} (1/10)_j}{(2/5)_{i+2j} (3/5)_{i+2j}} \cdot \left(\frac{16I_8}{I_4^2} \right)^i \left(\frac{128I_{12}}{3I_4^3} \right)^j$ |
| 3 | 2 | I_3 | I_3 | $I_3^{-1/2}$ |
| 3 | 3 | I_4, I_6 | $32I_4^3 + 3I_6^2$ | $I_4^{-1/4} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot \frac{(1/12)_i (5/12)_i}{(1/2)_i} \cdot \left(-\frac{3I_6^2}{32I_4^3} \right)^i$ |
| ... | ... | ... | ... | ... |

где $(a)_k = \Gamma(a+k)/\Gamma(a) = a(a+1)\dots(a+k-1)$.

Интеграл (9.20) $SL(n)$ -инвариантен и зависит только от элементарных $SL(n)$ -инвариантов I_k , которые мы уже пользовались выше. Необходимо заметить, что $J_{n|r}(S)$

¹легко видеть, что дифференциальный оператор в левой части аннулирует подинтегральное выражение в 9.20

является многозначной функцией: для одних и тех же $n|r$ имеются несколько ветвей, которые удовлетворяют одним и тем же уравнениям 9.4.1, но имеют различные асимптотики. К примеру, для $n|r = 2|4$ интегральный дискриминант имеет ровно две ветви¹:

$$J_{2|4}^{(1)}(S) = I_2^{-1/4} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1/12, 5/12 \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{6I_3^2}{I_2^3} \right) = I_2^{-1/4} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot \frac{(1/12)_i (5/12)_i}{(1/2)_i} \cdot \left(\frac{6I_3^2}{I_2^3} \right)^i$$

$$J_{2|4}^{(2)}(S) = I_3 I_2^{-7/4} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 7/12, 11/12 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{6I_3^2}{I_2^3} \right) = I_3 I_2^{-7/4} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} \cdot \frac{(7/12)_i (11/12)_i}{(3/2)_i} \cdot \left(\frac{6I_3^2}{I_2^3} \right)^i$$

Мы видим, что негауссовы интегралы имеют замечательную структуру: коэффициенты в их разложениях являются отношениями Γ -функций. Во всех известных случаях интегральный дискриминант $J_{n|r}(S)$ имеет сингулярность там и только там, где обычный алгебраический дискриминант $D_{n|r}(S)$ обращается в ноль.

9.4.2. Независимость от формы действия. Оказывается, что при $a_i + b_i = c_i + d_i$ не только

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_{a_1, \dots, a_n}} \frac{\partial}{\partial s_{b_1, \dots, b_n}} - \frac{\partial}{\partial s_{c_1, \dots, c_n}} \frac{\partial}{\partial s_{d_1, \dots, d_n}} \right) \int dx_1 \dots dx_n e^{-S(x_1, \dots, x_n)} = 0,$$

но и при (почти) любом выборе функции $f(S)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial s_{a_1, \dots, a_n}} \frac{\partial}{\partial s_{b_1, \dots, b_n}} - \frac{\partial}{\partial s_{c_1, \dots, c_n}} \frac{\partial}{\partial s_{d_1, \dots, d_n}} \right) \int dx_1 \dots dx_n f(S(x_1, \dots, x_n)) = 0,$$

поскольку дифференциальный оператор в левой части обращает подинтегральное выражение в ноль. Кроме того, оба интеграла $SL(n)$ -инвариантны и имеют одну и ту же степень однородности: для любой $f(S)$ мы имеем

$$\int dx_1 \dots dx_n f(\lambda S(x_1, \dots, x_n)) = \lambda^{-n/r} \int dx_1 \dots dx_n f(S(x_1, \dots, x_n))$$

Вместе, эти три свойства — одни и те же тождества Уорда, одна и та же степень однородности и $SL(n)$ инвариантность — служат убедительным доводом в пользу равенства

$$\int f(S(x_1, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n = \text{const}(f) \int e^{-S(x_1, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n \quad (9.21)$$

для любой «хорошей» функции $f(S)$ (подчеркнём, что константа зависит от выбора f , но не зависит от S). Свойство (9.21) иногда называют «независимостью интегральных дискриминантов от выбора формы действия».

¹для краткости в предыдущей таблице была выписана лишь одна из них — та, нормировочный фактор которой зависит лишь от инварианта наименьшей степени I_{\min}

Например, для $f(S) = e^{-S^2}$ имеем

$$\begin{aligned} \int e^{-(s_{ij}x_i x_j)} d^n x &= \int e^{-(\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2)} d^n x = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}} \int e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)} d^n x = \\ &= \frac{\text{const}}{\sqrt{\det S}} \\ \int e^{-(s_{ij}x_i x_j)^2} d^n x &= \int e^{-(\lambda_1 x_1^2 + \dots + \lambda_n x_n^2)^2} d^n x = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1 \dots \lambda_n}} \int e^{-(x_1^2 + \dots + x_n^2)^2} d^n x = \\ &= \frac{\text{const}'}{\sqrt{\det S}} \end{aligned}$$

и легко видеть, что эти два различных интеграла пропорциональны с не зависящей от S константой пропорциональности.

Чтобы определить класс «хороших» функций и доказать (9.21), перейдем от однородных координат x_i к неоднородным координатам $z_i = x_i/x_1$, так что $x_i = \rho z_i$. Тогда

$$\begin{aligned} \int e^{-S(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n &= \int \rho^{n-1} d\rho \int dz_2 \dots dz_n e^{-\rho^r S(1, z_2, \dots, z_n)} = \\ &= \left(\int \rho^{n-1} e^{-\rho^r} d\rho \right) \cdot \int \frac{dz_2 \dots dz_n}{S(1, z_2, \dots, z_n)^{n/r}} \end{aligned}$$

и правая часть (9.21) примет вид

$$\begin{aligned} \int f(S(x_1, x_2, \dots, x_n)) dx_1 \dots dx_n &= \int \rho^{n-1} d\rho \int dz_2 \dots dz_n f(\rho^r S(1, z_2, \dots, z_n)) = \\ &= \left(\int \rho^{n-1} f(\rho^r) d\rho \right) \cdot \int \frac{dz_2 \dots dz_n}{S(1, z_2, \dots, z_n)^{n/r}} \end{aligned}$$

Поскольку оба интеграла по ρ являются всего лишь S -независимыми константами, равенство (9.21) верно всегда, когда оба интеграла

$$\int \rho^{n-1} e^{-\rho^r} d\rho \quad \text{и} \quad \int \rho^{n-1} f(\rho^r) d\rho$$

конечны для одного и того же контура. Это условие и определяет класс «хороших» функций $f(S)$. К примеру, все функции $f(S) = \exp(-S^k)$ для $k > 0$ лежат в этом классе.

9.4.3. Вычисление ограниченного объема. Независимость интегральных дискриминантов от формы действия позволяет делать различные выборы $f(S)$. Выбор¹

$$f(S) = \vartheta(1 - S) = \begin{cases} 1 & \text{при } S \leq 1 \\ 0 & \text{при } S > 1 \end{cases}$$

¹разумеется, такой выбор имеет смысл лишь в действительной области — когда контур интегрирования действителен и форма S положительно определена

позволяет интерпретировать интегральный дискриминанта

$$\int e^{-S(x_1, x_2, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n \stackrel{(9.21)}{=} \int_{S < 1} dx_1 \dots dx_n \quad (9.22)$$

как объем, ограниченный гиперповерхностью $S = 1$.

К примеру, рассмотрим случай $J_{2|4}$. Возьмем алгебраическую кривую

$$S(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + \varepsilon x^2 y^2 = 1.$$

Ограниченная ею площадь вычисляется в полярных координатах как

$$V(\varepsilon) = \int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{2\sqrt{1 + \varepsilon \cos^2 \phi \sin^2 \phi}} = \frac{4}{\sqrt{\varepsilon + 4}} K\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 4}\right)$$

(где K — полный эллиптический интеграл первого типа) и представляется в виде

$$V(\varepsilon) = \frac{4}{\sqrt{\varepsilon + 4}} K\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon + 4}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon + 4}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ 1 \end{matrix} \middle| \frac{\varepsilon}{\varepsilon + 4}\right)$$

С точки зрения интегральных дискриминантов, мы имеем два инварианта

$$I_2 = \frac{8}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon^2 \quad \text{и} \quad I_3 = \frac{16}{9} + \frac{2}{3}\varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^2 - \frac{1}{36}\varepsilon^3$$

и две ветви интегрального дискриминанта:

$$\begin{aligned} J_{2|4}^{(1)}(S) &= \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon^2\right)^{-1/4} \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1/12, 5/12 \\ 1/2 \end{matrix} \middle| \frac{(\varepsilon + 2)^2(\varepsilon + 8)^2(\varepsilon - 4)^2}{(\varepsilon^2 + 4\varepsilon + 16)^3}\right) \\ J_{2|4}^{(2)}(S) &= \left(\frac{16}{9} + \frac{2}{3}\varepsilon - \frac{1}{6}\varepsilon^2 - \frac{1}{36}\varepsilon^3\right) \left(\frac{8}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon + \frac{1}{6}\varepsilon^2\right)^{-7/4} \times \\ &\quad \times {}_2F_1\left(\begin{matrix} 7/12, 11/12 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| \frac{(\varepsilon + 2)^2(\varepsilon + 8)^2(\varepsilon - 4)^2}{(\varepsilon^2 + 4\varepsilon + 16)^3}\right) \end{aligned}$$

Как замечено в [166], ровно одна линейная комбинация этих ветвей остается регулярной при $\varepsilon \rightarrow 0$ — а именно

$$J_{2|4}^{(\text{reg})}(\varepsilon) = \left(6^{-1/4} \frac{\Gamma(3/2)}{\Gamma(7/12)\Gamma(11/12)}\right) J_{2|4}^{(1)}(\varepsilon) - \left(6^{+1/4} \frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/12)\Gamma(5/12)}\right) J_{2|4}^{(2)}(\varepsilon).$$

Поэтому, именно эта ветвь должна быть отождествлена с ограниченной площадью¹. Сравнивая ограниченную площадь с регулярной ветвью интегрального дискриминанта, мы получаем гипергеометрическое тождество

$$V(\varepsilon) = \text{const} \cdot J_{2|4}^{(\text{reg})}(\varepsilon)$$

¹регулярность ограниченной площади при $\varepsilon \rightarrow 0$ довольно очевидна, поскольку в этом пределе кривая превращается в окружность единичного радиуса

которое и в самом деле верно для любых ε , в чём легко убедиться разложением обеих частей в ряд по ε :

$$\begin{aligned} V(\varepsilon) &= \pi - \frac{1}{16}\pi\varepsilon + \frac{9}{1024}\pi\varepsilon^2 - \frac{25}{16384}\pi\varepsilon^3 + \frac{1225}{4194304}\pi\varepsilon^4 + \dots = \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{64}\varepsilon + \frac{9}{4096}\varepsilon^2 - \frac{25}{65536}\varepsilon^3 + \frac{1225}{16777216}\varepsilon^4 + \dots = J_{2|4}^{(\text{reg})}(\varepsilon) \end{aligned}$$

Отсюда мы получаем в (9.4.3) фактор $\text{const} = 4\pi$. Итак, ограниченная площадь и соответствующий интегральный дискриминант в самом деле совпадают, с точностью до постоянного нормировочного множителя.

Проделанное вычисление с инвариантами конечно же не является наиболее эффективным способом вычисления интегрального дискриминанта и ограниченной площади — скорее, это концептуальная демонстрация эквивалентности между этими величинами. На практике лучше всего разложить в ряд сам интеграл (9.20), что автоматически гарантирует выбор правильной ветви и обычно позволяет удобно и быстро вычислить ограниченный объем.

Для примера, рассмотрим алгебраическую гиперповерхность

$$a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 + b(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)x_4^2 + cx_4^4 = \hbar$$

в четырехмерном пространстве. Используя интегральный дискриминант, запишем ограниченный объем $V(a, b, c)$ как

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_3 \int_{-\infty}^{+\infty} dx_4 \exp\left(-\frac{a}{\hbar}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2 - \frac{b}{\hbar}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)x_4^2 - \frac{c}{\hbar}x_4^4\right)$$

и перейдем к новым переменным интегрирования

$$\begin{cases} x_1 = \rho \cos(\vartheta_1) \\ x_2 = \rho \sin(\vartheta_1) \cos(\phi) \\ x_3 = \rho \sin(\vartheta_1) \sin(\phi) \\ x_4 = t \end{cases}$$

с пределами изменения $0 \leq \vartheta \leq \pi$, $0 \leq \phi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq \infty$, $-\infty \leq t \leq \infty$ и якобианом $\rho^2 \sin(\vartheta)$. Получим

$$V(a, b, c) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \sin(\vartheta) d\vartheta \int_0^{\infty} \rho^2 d\rho \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\left(-\frac{a}{\hbar}\rho^4 - \frac{b}{\hbar}\rho^2 t^2 - \frac{c}{\hbar}t^4\right).$$

Интегрируя по угловым координатам, находим

$$V(a, b, c) = 4\pi \int_0^{\infty} \rho^2 d\rho \int_{-\infty}^{\infty} dt \exp\left(-\frac{a}{\hbar}\rho^4 - \frac{b}{\hbar}\rho^2 t^2 - \frac{c}{\hbar}t^4\right).$$

Раскладывая в ряд

$$V(a, b, c) = 4\pi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k! \hbar^k} \int_0^{\infty} \rho^{2+2k} \exp\left(-\frac{a}{\hbar}\rho^4\right) d\rho \int_{-\infty}^{\infty} t^{2k} \exp\left(-\frac{c}{\hbar}t^4\right) dt$$

и вычисляя оба интеграла, приходим к

$$V(a, b, c) = \frac{\pi}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^k}{k! \hbar^k} \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{k}{2} + \frac{3}{4}\right) \left(\frac{a}{\hbar}\right)^{-3/4-k/2} \left(\frac{c}{\hbar}\right)^{-1/4-k/2}$$

Обе суммы легко вычисляются в элементарных функциях, что дает замечательно простой ответ

$$V(a, b, c) = \frac{\pi^2}{\sqrt{a}} \frac{\hbar}{\sqrt{b + 2\sqrt{ac}}}$$

9.4.4. Алгебраические числа и гипергеометрические ряды. Помимо интегралов

$$J_{n|r}(S) = \int dx_1 \dots dx_n e^{-S(x_1, \dots, x_n)}$$

не зависящих от выбора базиса в n -мерном линейном пространстве и поэтому выражающихся через элементарные $SL(n)$ -инварианты $I_k(S)$, имеется много интересных статсумм, которые не являются $SL(n)$ инвариантными. Важный и, вероятно, наиболее простой пример такой статсуммы — это множество корней полинома

$$f_0 + f_1 \lambda + \dots + f_r \lambda^r = 0$$

рассматриваемое как многозначная функция $\lambda = \lambda(f_0, \dots, f_r)$ от его коэффициентов f_0, \dots, f_r . При любом r эта статсумма удовлетворяет тем же самым дифференциальным тождествам Уорда

$$\left(\frac{\partial}{\partial f_a} \frac{\partial}{\partial f_b} - \frac{\partial}{\partial f_c} \frac{\partial}{\partial f_d} \right) \lambda(f_0, \dots, f_r) = 0 \quad (9.23)$$

что и интегральный дискриминант. К примеру, для $r = 2$

$$\left(\frac{\partial}{\partial f_0} \frac{\partial}{\partial f_2} - \frac{\partial}{\partial f_1} \frac{\partial}{\partial f_1} \right) \left(\frac{f_1 \pm \sqrt{f_1^2 - 4f_2 f_0}}{f_2} \right) = 0.$$

Используя явные выражения корней в радикалах, можно аналогичным образом убедиться в справедливости тождеств Уорда при $r = 3, 4$ (в виду громоздкости этого вычисления мы его опустим).

Для произвольного r справедливость тождеств Уорда (9.23) становится очевидной, если написать хорошо известное интегральное представление Коши для λ :

$$\lambda(f_0, \dots, f_r) = \oint z d \log (f_0 + f_1 z + \dots + f_r z^r) = - \oint \log (f_0 + f_1 z + \dots + f_r z^r) dz$$

Все это — многозначность, тождества Уорда и интегральные представления — делает алгебраические числа довольно похожими на интегральные дискриминанты. В частности, тождества Уорда позволяют записывать решения алгебраических уравнений гипергеометрическими функциями, как и интегральные дискриминанты.

9.4.5. Пример: числа Каталана. При $r = 2$ решения квадратного уравнения

$$f_0 + f_1\lambda + f_2\lambda^2 = 0$$

задаются всем известными формулами

$$\lambda_+(f_0, f_1, f_2) = -\frac{1}{2} \frac{f_1 + \sqrt{f_1^2 - 4f_2f_0}}{f_2}$$

$$\lambda_-(f_0, f_1, f_2) = -\frac{1}{2} \frac{f_1 - \sqrt{f_1^2 - 4f_2f_0}}{f_2}$$

и раскладываются в ряды

$$x_1 = -\frac{f_0}{f_1} - \frac{f_0^2 f_2}{f_1^3} - \frac{2f_0^3 f_2^2}{f_1^5} - \frac{5f_0^4 f_2^3}{f_1^7} - \frac{14f_0^5 f_2^4}{f_1^9} - \frac{42f_0^6 f_2^5}{f_1^{11}} - \dots$$

$$x_2 = -\frac{f_1}{f_2} + \frac{f_0}{f_1} + \frac{f_0^2 f_2}{f_1^3} + \frac{2f_0^3 f_2^2}{f_1^5} + \frac{5f_0^4 f_2^3}{f_1^7} + \frac{14f_0^5 f_2^4}{f_1^9} + \frac{42f_0^6 f_2^5}{f_1^{11}} + \dots$$

которые удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению Уорда и отличаются лишь асимптотикой: при больших f_1 , одна из ветвей растет как $-f_1/f_2$, а вторая стремится к нулю. Коэффициенты этих рядов суть *числа Каталана*

$$1, 2, 5, 14, 42, \dots = \frac{(2k)!}{k!(k+1)!}.$$

Они целы, т. к. перечисляют планарные древесные диаграммы, возникающие в ходе рекурсивной процедуры Боголюбова [187]. Однако, мы заинтересованы не столько в диаграммной и/или комбинаторной интерпретации этих чисел, сколько в их гипергеометрической структуре: мы имеем дело с двумя гипергеометрическими рядами

$$x_1 = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \frac{f_0^{k+1} f_2^k}{f_1^{2k+1}} = -\frac{f_0}{f_1} \cdot {}_2F_1 \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right], [2], \frac{4f_2 f_0}{f_1^2} \right)$$

$$x_2 = -\frac{f_1}{f_2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2k)!}{k!(k+1)!} \frac{f_0^{k+1} f_2^k}{f_1^{2k+1}} = -\frac{f_1}{f_2} + \frac{f_0}{f_1} \cdot {}_2F_1 \left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right], [2], \frac{4f_2 f_0}{f_1^2} \right)$$

которые выражаются через квадратные корни. Сингулярности этих рядов сосредоточены при единичном значении аргумента гипергеометрической функции, а оно соответствует уравнению $f_1^2 = 4f_2 f_0$. Это в точности множество значений параметров, при которых алгебраический дискриминант равен нулю.

В отличие от выражений через радикалы, выражения через гипергеометрические функции могут быть написаны для произвольного r : скажем, уравнение $x^6 + x + c = 0$, неразрешимое в радикалах, с легкостью разрешимо в гипергеометрических рядах по формуле

$$x = -c - c^6 - 6c^{11} - 51c^{16} - 506c^{21} - 5481c^{26} - 62832c^{31} - 749398c^{36} + \dots$$

Числа $1, 6, 51, 506, 5481, 62832, 749398, \dots = (6k)!/(k!(5k+1)!)$ опять целые и перечисляют шестиричные плоские деревья с k вершинами, а их производящая функция

$$x = - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(6k)!}{k!(5k+1)!} c^{k+1} = -c \cdot {}_5F_4 \left(\left[\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6} \right], \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right], \frac{46656c}{3125} \right).$$

снова гипергеометрична. Отметим, что эта функция представляет лишь один из корней. Другие корни представляются другими гипергеометрическими функциями, которые полностью аналогичны и которые мы не приводим здесь.

Заметим также, что целочисленность коэффициентов не является универсальным свойством: к примеру, уравнение $(x^2 + a)^3 + (x + b)^4 = 0$ имеет решение

$$x = I + \frac{3I}{2}a + 2b - \frac{21I}{8}a^2 - 6ab + 3Ib^2 + \dots$$

с нецелочисленными коэффициентами и общей формулой

$$x = I + \frac{1}{2} \sum_{s,m=0}^{\infty} (-1)^{s+1} (2I)^{m+1} \frac{\Gamma\left(3s + \frac{3}{2}m - \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(2s + \frac{3}{2}m - 1\right)}{\Gamma\left(2s + m - \frac{1}{2}\right) \Gamma(2s + m)} \frac{a^s b^m}{s! m!}$$

9.4.6. Пример: двойные отношения. При $r = 4$ двойное отношение

$$A_{1234} = (\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)/(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)$$

корней многочлена $f_0 + f_1\lambda + f_2\lambda^2 + f_3\lambda^3 + f_4\lambda^4$ инвариантно относительно преобразований из $SL(2)$. Кольцо $SL(2)$ -инвариантных полиномов от коэффициентов порождается элементарными инвариантами

$$I_2 = 2f_0f_4 - \frac{1}{2}f_1f_3 + \frac{1}{6}f_2^2$$

$$I_3 = f_0f_2f_4 - \frac{3}{8}f_0f_3^2 - \frac{3}{8}f_1^2f_4 + \frac{1}{4}f_1f_2f_3 - \frac{1}{36}f_2^3$$

и двойное отношение A_{1234} выражается через I_2 и I_3 . Чтобы найти это выражение явно, положим

$$f_0 = -A^4, f_1 = \varepsilon, f_2 = 0, f_3 = 0, f_4 = 1. \quad (9.24)$$

Для этих значений параметров $I_2 = -2A^4$ и $I_3 = -3\varepsilon^2/8$ и легко видеть, что

$$\lambda_1 = A - \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{A^2} - \frac{1}{32} \frac{\varepsilon^2}{A^5} + \frac{7}{2048} \frac{\varepsilon^4}{A^{11}} + \frac{1}{512} \frac{\varepsilon^5}{A^{14}} + \dots$$

$$\lambda_2 = AI + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{A^2} + \frac{1}{32} I \frac{\varepsilon^2}{A^5} + \frac{7}{2048} I \frac{\varepsilon^4}{A^{11}} - \frac{1}{512} \frac{\varepsilon^5}{A^{14}} + \dots$$

$$\lambda_3 = -A - \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{A^2} + \frac{1}{32} \frac{\varepsilon^2}{A^5} - \frac{7}{2048} \frac{\varepsilon^4}{A^{11}} + \frac{1}{512} \frac{\varepsilon^5}{A^{14}} + \dots$$

$$\lambda_4 = -IA + \frac{1}{4} \frac{\varepsilon}{A^2} - \frac{1}{32} I \frac{\varepsilon^2}{A^5} - \frac{7}{2048} I \frac{\varepsilon^4}{A^{11}} - \frac{1}{512} \frac{\varepsilon^5}{A^{14}} + \dots$$

Эти четыре ветви соответствуют ε -деформациям четырех корней простого уравнения $\lambda^4 = A^4$. Соответственно, двойное отношение тоже может быть вычислено как ряд по ε и равно

$$\Lambda_{1234} = \frac{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_4)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_4)} = \frac{1}{2} - \frac{3I \varepsilon^2}{32 A^6} + \frac{33I \varepsilon^6}{16384 A^{18}} - \frac{1665I \varepsilon^{10}}{16777216 A^{30}} + \dots$$

Будучи выраженным через инварианты, оно принимает форму

$$\Lambda_{1234} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2} I_3}{2 I_2^{3/2}} - \frac{11\sqrt{2} I_3^3}{18 I_2^{9/2}} - \frac{185\sqrt{2} I_3^5}{108 I_2^{15/2}} - \dots$$

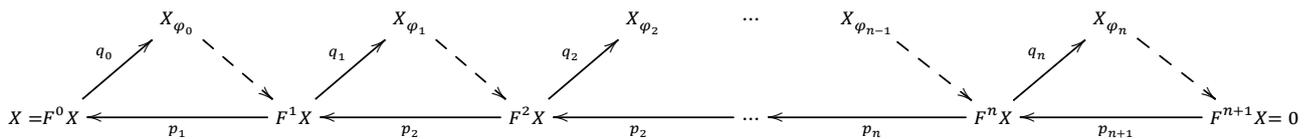
Это — наиболее простой известный нам способ выразить двойное отношение через I_2 и I_3 . В силу $SL(2)$ инвариантности, это тождество останется верным при любых значениях f_0, \dots, f_4 , а не только в частном случае (9.24).

10. ИЗУЧЕНИЕ ПРОСТРАНСТВ МОДУЛЯРНЫХ ДАННЫХ СТАБИЛЬНОСТИ
НА КАТЕГОРИИ, ПОРОЖДЁННОЙ ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫМ НАБОРОМ,
В ЧАСТНОСТИ, ВЫЯСНЕНИЕ НАЛИЧИЯ КАКИХ-ЛИБО ЕСТЕСТВЕННЫХ
КОМБИНАТОРНЫХ ИЛИ МЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУР
НА ТАКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

10.1. Обзор определений и результатов

10.1.1. t -стабильности. Напомним [204], что t -стабильность на триангулированной категории \mathcal{T} — это вполне упорядоченный набор $\Phi = \{P_\varphi\}_{\varphi \in \Phi}$ непустых, строго полных, замкнутых относительно расширений¹ подкатегорий $P_\varphi \subset \mathcal{T}$, называемых *полустабильными подкатегориями* и обладающих следующими тремя свойствами:

- 1) функтор сдвига действует на полустабильных подкатегориях возрастающей биекцией $\tau : \Phi \rightarrow \Phi$, так что $P_\varphi[1] = P_{\tau(\varphi)}$
- 2) $\text{Hom}^{\leq 0}(P_\psi, P_\varphi) = 0$ при $\psi > \varphi$
- 3) всякий ненулевой объект $X \in \mathcal{T}$ вписывается в конечную диаграмму



в которой все треугольники отмеченные, все $X_{\varphi_i} \in P_{\varphi_i}$ и отличны от нуля, а $\varphi_i < \varphi_{i+1}$ при всех i .

Индексы φ называются (обобщёнными) *наклонами*, объекты $G \in P_\varphi$ — *полустабильными объектами* наклона φ , а диаграмма из (3) называется *фильтрацией Гардера – Нарасимхана*² на объекте X относительно t -стабильности Φ .

В 10.2 мы покажем, что фильтрация Гардера – Нарасимхана *функториальна* по X и может восприниматься своего рода «случайный процесс» рождения объекта X в категории \mathcal{T} . Множество наклонов Φ при такой интерпретации можно воспринимать как общее «время» для всех таких процессов, а башни Постникова (3) доставляют к разложению тождественного функтора $\text{Id}_{\mathcal{T}}$ в нечто напоминающее дискретный интеграл по путям в Φ .

Таким образом, t -стабильность формализует понятие «функториальной фильтрации» на объектах категории. Канонические фильтрации, ассоциированные с t -структурами³, разложения объектов по исключительным базисам, γ -фильтрация Гротендика и классическая фильтрация Гардера – Нарасимхана на категории когерентных пучков — всё это частные случаи t -стабильностей.

¹подкатегория $\mathcal{A} \subset \mathcal{T}$ называется *замкнутой относительно расширений*, если для любых $A, C \in \mathcal{A}$ существование отмеченного треугольника $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A[1]$ влечёт $B \in \mathcal{A}$

²или *башней Постникова*

³например, каноническая фильтрация производной категории

С другой стороны, множество классов изоморфизмов объектов в каждой полустабильной подкатегории даёт первое грубое приближение к тому, что нам хотелось бы воспринимать как пространство модулей объектов «фиксированного типа». И можно надеяться, что когда полустабильные категории достаточно малы¹, топологические инварианты такого пространства модулей должны вычисляться по комплексу Хохшильда соответствующей полустабильной категории.

10.1.2. Тонкие и грубые t -стабильности. На множестве всех t -стабильностей имеется естественный частичный порядок: скажем, что t -стабильность Ψ *грубее*², чем Φ , если Ψ получается из Φ *огрублением* — разбиением Φ в несвязное объединение линейно-упорядоченных сегментов и слиянием всех полустабильных подкатегорий каждого сегмента в одну. Отметим, что огрубление позволяет строить более грубые t -стабильности исходя из более тонких.

Наигрубейшие t -стабильности — это t -структуры, и каждая t -стабильность Φ задаёт на \mathcal{T} семейство t -структур. Каждая из t -структур этого семейства определяется *сечением* — разбиением всего множества наклонов

$$\Phi = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} \tau^m \hat{\Phi}$$

в объединение связных³ фундаментальных областей $\hat{\Phi} \subset \Phi$ автоморфизма сдвига $\tau : \Phi \rightarrow \Phi$, аналогично тому, что происходит при определении действительных чисел при помощи Дедекиндовых сечений).

Например, стандартная μ -стабильность Мамфорда на производной категории когерентных пучков на эллиптической кривой C производит множество наклонов⁴

$$\Phi = \bigsqcup_{m \in \mathbb{Z}} \tau^m \hat{\mathbb{Q}}, \quad \text{где } \hat{\mathbb{Q}} = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

и приводит к семейству t -стабильностей, которые в точности соответствуют Дедекиндовым вещественными числам. При этом сердцевины иррациональных t -структур можно при желании интерпретировать [207] как категории голоморфных расслоений на «некоммутативном торе».

Напротив, тончайшие t -стабильности аккумулируют всю информацию об объектах триангулированной категории. Любое тончайшее измельчение заданной t -стабильности «помнит» как минимум все возможные данные Жордана – Гельдера на каждой из категорий⁵ P_φ . Например, тончайшее измельчение множества стандартных наклонов Мамфорда на эллиптической кривой [204] содержит по меньшей мере саму кривую.

В 10.3 мы докажем существование тончайшего измельчения любой t -стабильности на категории, удовлетворяющей некоторым естественным предположениям о конечности. Этот результат указывает на то, что имеется каноническое семейство наитончайших множеств наклонов, внутренним образом зависящее от категории \mathcal{T} . К сожалению, в настоящий момент неясно даже, в каких терминах можно было бы пытаться работать с этим семейством тончайших стабильностей.

¹т. е. соответствующая t -стабильность достаточно тонка

²соответственно, Φ *тоньше* чем Ψ

³напомним, что подмножество частично упорядоченного множества называется *связным*, если вместе с каждым $\varphi_1 < \varphi_2$ оно содержит весь отрезок $[\varphi_1, \varphi_2] \stackrel{\text{def}}{=} \{\varphi \mid \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$

⁴детали см. в [204]

⁵получить представление об этом монстре можно по работе [205]

10.1.3. Модулярные t -стабильности. Одной из основных целей настоящего исследования является изучение промежуточного класса t -стабильностей, достаточно грубого для того, чтобы увидеть в нём обозримую комбинаторно-геометрическую структуру, но достаточно тонкого для того, чтобы полустабильность фиксировала топологические свойства объекта, различимые на уровне K_0 и/или группы Нерона – Серри.

А именно, назовём t -стабильность $\{P_\psi\}_{\psi \in \Psi}$ на \mathcal{T} модулярной, если совпадение некоторых классов полустабильных объектов $X \in P_\psi, X' \in P_{\psi'}$ в $K_0(\mathcal{T})$ всегда влечёт за собой, что $P_{\psi'} = P_\psi[2m]$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Таким образом, все полустабильные категории $P_\varphi \subset \mathcal{T}$ однозначно с точностью до сдвига восстанавливаются по своим образам в группе Гротендика $K_0(\mathcal{T})$.

В качестве приближения к пониманию структуры, описывающей семейство наитончайших множеств наклонов, в 10.6 ниже мы точно описываем множество Φ всех тончайших модулярных полустабильных подкатегорий на категории $\mathcal{T} = \langle E_1, E_2 \rangle$, порождённой исключительной парой¹, и всех t -стабильностей, которые можно получить из них огрублением. Абелевы ядра последних могут интерпретироваться как категории когерентных пучков на взвешенных проективных прямых.

В 10.7 мы обсуждаем модулярных t -стабильностей на категориях, порождённых исключительными наборами большей длины. Множество тонких полустабильных наклонов становится здесь значительно более сложным и требует некоторого «когерентного» упорядочения всех рациональных геодезических сторон в треугольнике на сфере. Такое упорядочение даётся иррациональной выпуклой кривой.

10.1.4. Связь с результатами Бриджленда. Данные стабильности на триангулированных категориях впервые были введены в рассмотрение Т. Бриджлендом [198], [199]. Он рассматривал специальные модулярные t -стабильности с вещественными множествами наклонов, причём конкретное вложение

$$\sigma_\Phi : \Phi \hookrightarrow \mathbb{R} \quad (10.1)$$

также фиксируется и является частью *данных стабильности* по Бриджленду. Основное требование на вложение (10.1) состоит в том, чтобы оно индуцировалось аддитивным гомоморфизмом

$$Z : K_0(\mathcal{T}) \rightarrow \mathbb{C} \quad (10.2)$$

в том смысле, что наклон $\varphi(X)$ любого объекта $X \in P_\varphi$ равен $\tan(\text{Arg } Z)$. Бриджленд показал, что в геометрической ситуации пары (Φ, Z) параметризуются обозримым топологическим пространством, накрывающим² некоторую открытую область в векторном пространстве $\text{Hom}(K_0(\mathcal{T}), \mathbb{C})$ всех аддитивных гомоморфизмов (10.2).

Однако, возникающие на этом пути полустабильные категории слишком грубы для того, чтобы отражать глубокую геометрию пространств модулей. Например, стабильности Гизекера и тонкие исключительные стабильности³ не покрываются данными стабильности по Бриджленду. Нам представляется, что всегда можно подобрать достаточно тонкую модулярную t -стабильность так, чтобы бриджлендовское пространство модулей пар (Φ, Z) оказалось по-сути пространством включений

¹все тончайшие модулярные полустабильные подкатегории являются в этом случае категориями полустабильных модулей Кронекера заданного наклона

²посредством забывающей про Φ проекции $(\Phi, Z) \mapsto Z$

³а все эти стабильности модулярны в нашем смысле

(10.1), индуцированных вариацией центрального заряда, а изменение самих полустабильных по Бриджленду подкатегорий будет при этом индуцироваться выбором другого огрубления, обусловленного некоторым фиксированным (неварьирующимся) разбиением \mathbb{R} на связные сегменты.

10.2. Положительные процессы в триангулированных категориях

10.2.1. Обозначения и терминология. Зафиксируем некоторое бесконечное линейно упорядоченное множество¹ Φ , которое будем обычным образом рассматривать как категорию с одной стрелкой $\varphi_1 \leftarrow \varphi_2$ для каждого неравенства $\varphi_1 < \varphi_2$. Элементы $\varphi \in \Phi$ мы называть либо *моментами времени*, либо *наклонами*. Функтор

$$F : \Phi \rightarrow \mathcal{A} \quad (10.3)$$

в произвольную категорию \mathcal{A} есть семейство объектов $F^\varphi \in \mathcal{A}$, проиндексированное $\varphi \in \Phi$ и снабжённое для всех $\varphi < \psi$ отображениями

$$F^\varphi \xleftarrow{F_{\varphi\psi}} F^\psi.$$

Будем называть функтор (10.3) *элементарным процессом*, если он локально постоянен, полунепрерывен справа и имеет конечный образ. Иными словами, каждый элементарный процесс F определяет и однозначно определяется конечной цепочкой своих *событий* $\varphi_0 < \dots < \varphi_n$ в Φ и конечной цепочкой отображений в \mathcal{A}

$$F^0 \xleftarrow{f_0} F^1 \xleftarrow{f_1} \dots \xleftarrow{f_n} F^n \xleftarrow{f_{n+1}=0} F^{n+1} = 0 \quad (10.4)$$

таких что

$$F^\gamma = F^i \quad \text{при} \quad \varphi_{i-1} < \gamma \leq \varphi_i$$

$$\overleftarrow{F}_{\alpha\beta} = f_k \circ f_{k+1} \circ \dots \circ f_m \quad \text{при} \quad \varphi_{k-1} < \alpha \leq \varphi_k \quad \text{и} \quad \varphi_m < \beta \leq \varphi_{m+1}$$

(здесь и далее мы полагаем $\varphi_{n+1} = +\infty$ и $\varphi_{-1} = -\infty$). Объект F^0 , изоморфный F^φ для всех $\varphi \leq \varphi_0$, будем называть *результатом* процесса (10.3).

Элементарные процессы образуют полную подкатеорию

$$\mathcal{F}(\Phi, \mathcal{A}) \subset \text{Fun}(\Phi, \mathcal{A})$$

в категории всех функторов (10.3). Стрелки в $\mathcal{F}(\Phi, \mathcal{A})$ — это естественные преобразования функторов: каждая стрелка

$$F_1 \xrightarrow{\eta} F_2$$

есть семейство отображений² $\eta^\varphi : F_1^\varphi \rightarrow F_2^\varphi$ в \mathcal{A} , таких что для любого $\alpha < \beta$ квадрат

$$\begin{array}{ccc} F_1^\alpha & \xrightarrow{\overleftarrow{F}_{\alpha\beta}} & F_1^\beta \\ \eta^\alpha \downarrow & & \downarrow \eta^\beta \\ F_2^\alpha & \xrightarrow{\overleftarrow{F}_{\alpha\beta}} & F_2^\beta \end{array}.$$

¹физик назвал бы его *временем*, а геометр — *множеством наклонов*

²проиндексированных $\varphi \in \Phi$

коммутативен. Сопоставляя процессу F в его результат F^0 , мы получаем функтор

$$\text{ev} : \mathcal{F}(\Phi, \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A} . \quad (10.5)$$

10.2.2. Подскоки и положительность. Положим, что $\mathcal{A} = \mathcal{T}$ — триангулированная категория, и сопоставим каждому элементарному процессу F набор его конусов G^φ . По определению, $G^\varphi = 0$ для $\varphi \notin \{\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n\}$. Для событий, т. е. для $\varphi = \varphi_i$, конус G^{φ_i} определяется отмеченным треугольником

$$G^{\varphi_i} \leftarrow F^{\varphi_i} \xleftarrow{f_i} F^{\varphi_{i+1}} \leftarrow G^{\varphi_i}[-1] .$$

Мы будем называть все такие потенциально ненулевые конусы¹ *подскоками* процесса F . Скажем, что элементарный процесс F *положителен*², если его подскоки удовлетворяют условиям

$$\text{Hom}^{\leq 0}(G^\psi, G^\varphi) = 0 \text{ для всех } \varphi < \psi . \quad (10.6)$$

Пусть для каждого ψ из некоторого подмножества $\Psi \subset \Phi$ дана строго полная (возможно, нулевая) подкатегория $P_\psi \subset \mathcal{T}$. Назовём такой набор подкатегорий *положительным*, если

$$\text{Hom}^{\leq 0}(P_\beta, P_\alpha) = 0 \text{ для всех } \alpha < \beta .$$

Для произвольного подмножества $\Psi \subset \Phi$ и произвольного набора подкатегорий $\{P_\psi\}_{\psi \in \Psi} \subset \mathcal{T}$ обозначим через

$$\mathcal{P}ro_\Psi(P_\psi) \subset \mathcal{F}(\Phi, \mathcal{A})$$

полную подкатегорию, состоящую из элементарных процессов с событиями в Ψ и подскоками из P_ψ . Отметим, что когда набор подкатегорий $\{P_\psi\}_{\psi \in \Psi}$ — положительный, то и все процессы в $\mathcal{P}ro_\Psi(P_\psi)$ автоматически положительны.

Лемма 10.1

Для любого положительного набора категорий $\{P_\psi\}_{\psi \in \Psi}$ ограничение функтора вычисления (10.5) на $\mathcal{P}ro_\Psi(P_\psi) \subset \mathcal{F}(\Phi, \mathcal{A})$ является строго полным вложением:

$$\text{ev} : \mathcal{P}ro_\Psi(P_\psi) \hookrightarrow \mathcal{T} .$$

Более того, набор подскоков $G^\psi \in P_\psi$ для процесса $F \in \mathcal{P}ro_\Psi(P_\psi)$ с результатом $X = F^{-\infty} \in \mathcal{T}$ функториален в X .

Доказательство. Пусть $X_1, X_2 \in \mathcal{T}$ появились в результате двух процессов F_1, F_2 с событиями в Ψ и подскоками в P_ψ . Покажем, что любое отображение $f : X_1 \rightarrow X_2$ однозначно поднимается до естественного преобразования процессов $f^\psi : F_1^\psi \rightarrow F_2^\psi$, которое канонически индуцирует функториальный по f набор стрелок $g^\psi : G_1^\psi \rightarrow G_2^\psi$. Будем строить требуемое поднятие индуктивно, последовательно следя за событиями слева направо. Пусть в некоторый момент ψ один из процессов претерпевает

¹определённые с точностью до, вообще говоря, не единственного и не канонического изоморфизма

²это своего рода аналог «отсутствия последействия»

нетривиальное событие. Тогда возникает диаграмма отмеченных треугольников:

$$\begin{array}{ccccccc}
 F_1^{>\psi}[1] & \longleftarrow & G_1^\psi & \longleftarrow & F_1^\psi & \longleftarrow & F_1^{>\psi} \\
 & & \downarrow g^\psi & & \downarrow f^\psi & & \downarrow f^{>\psi} \\
 & & G_2^\psi & \longleftarrow & F_2^\psi & \longleftarrow & F_2^{>\psi} \\
 & & & & & & \longleftarrow G_2^\psi[-1]
 \end{array} \quad (10.7)$$

где средняя сплошная вертикальная стрелка имеется по предположению индукции, а две пунктирные стрелки строятся таким образом, чтобы диаграмма была коммутативна¹: композиции f' , f'' (идущие наискосок точечные стрелки на диаграмме (10.7)) поднимаются до до пунктирных отображений g^ψ , $f^{>\psi}$, поскольку пространство препятствий $\text{Hom}^0(F_1^{>\psi}, G_2^\psi)$ нулевое, и эти поднятия единственны, так как пространство неопределённостей $\text{Hom}^{-1}(F_1^{>\psi}, G_2^\psi)$ также нулевое. Оба зануления

$$\text{Hom}^0(F_1^{>\psi}, G_2^\psi) = \text{Hom}^{-1}(F_1^{>\psi}, G_2^\psi) = 0$$

следуют из того, что $F_1^{>\psi}$ является результатом элементарного процесса с подскоками G_1^φ наклона $\varphi > \psi$, для которых $\text{Hom}^{\leq 0}(G_1^\varphi, G_2^\psi) = 0$. \square

Следствие 10.1

Если категории $\{P_\psi\}_{\psi \in \Psi}$ образуют положительный набор и любой объект $X \in \mathcal{T}$ может быть получен как результат некоторого процесса из $\mathcal{P}ro_\psi(P_\psi)$, то каждая из них замкнута относительно расширений, т. е. в любом точном треугольнике

$$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A[1] \quad (10.8)$$

с $A, C \in P_\psi$ автоматически $B \in P_\psi$.

Доказательство. Пусть B — результат процесса $F \in \mathcal{P}ro_\psi(P_\psi)$. Тогда отмеченный треугольник (10.8) поднимается до естественного преобразования процессов

$$A \rightarrow F \rightarrow B,$$

где A, B рассматриваются как тривиальные процессы с единственным событием в ψ с подскоками A, B соответственно. Это расширение даёт для всех $\alpha < \psi$ и $\beta > \psi$ пару коммутативных диаграмм из отмеченных треугольников

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \longrightarrow & F^{>\alpha} & \longrightarrow & C \\
 \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
 A & \longrightarrow & F^\alpha & \longrightarrow & C \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & G^\alpha & \longrightarrow & 0
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccccc}
 0 & \longrightarrow & F^{>\beta} & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 0 & \longrightarrow & F^\beta & \longrightarrow & 0 \\
 \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & G^\beta & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

¹конструкция по-сути же, что и в [195]

из видно, что $G^\alpha = 0$ при $\alpha < \psi$, $F^\alpha = B$ при $\alpha \leq \psi$ и $F^\beta = G^\beta = 0$ при $\beta > \psi$. В момент ψ обе диаграммы превращаются в

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & F^{>\psi} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & F^\psi & \longrightarrow & C \\ \parallel & & \downarrow & & \parallel \\ A & \longrightarrow & G^\psi & \longrightarrow & C \end{array}$$

что даёт $B = F^\psi = G^\psi \in P_\psi$. □

10.2.3. Отступление об измельчениях. Лемма и следствие позволяют определить t -стабильность как положительный набор подкатегорий $\{P_\varphi\}_{\varphi \in \Phi}$, занумерованный подходящим множеством наклонов (= временем) Φ , который вместе с каждой P_φ содержит и все её сдвиги $P_\varphi[m]$. Из них также следует, что фильтрация Гардера – Нарасимхана автоматически функториальна по X . Измельчение t -стабильности на таком языке означает неубывающий эпиморфизм $\Phi \rightarrow \Psi$, склеивающий некоторые связные линейно упорядоченные семейства подкатегорий P_φ в одну подкатегорию P_ψ (свою для каждого из склеиваемых семейств).

Хотелось бы сопоставить данной триангулированной категории \mathcal{T} внутренним образом определённое семейство множеств времён Ψ_x , зависящее от какого-либо «модуля» x , в котором каждое время Ψ_x допускает положительный набор полустабильных категорий P_ψ , канонически определяемый по Ψ . В частности, было бы очень интересно исследовать «положительный нерв» категории \mathcal{T} , симплексами в котором, по определению, являются элементарные положительные процессы над $[0, 1]$ (ср. с [201]), и постараться снабдить его локальной системой подкатегорий $P \in \mathcal{T}$, полученной подходящим предельным переходом.

10.3. Тончайшее измельчение t -стабильностей на абелевых категориях

10.3.1. t -стабильности как измельчённые t -структуры. В этом разделе мы построим тончайшую t -стабильность на любой триангулированной категории \mathcal{T} , допускающей невырожденную t -структуру с абелевой сердцевиной \mathcal{A} , удовлетворяющей некоторым естественным условиям конечности. Отсюда, в частности, будет следовать существование тончайшего измельчения у любой модулярной t -стабильности и у всех стандартных t -стабильностей на производных категориях когерентных пучков на гладких алгебраических кривых, равно как и на производных категориях представлений колчанов.

Процесс построения тончайшего измельчения разбивается на несколько последовательность шагов, описанных в [204], §1, которые мы вкратце напомним.

10.3.2. Абелевы данные стабильности. Существует стандартная процедура [204], [198] получения t -стабильности на \mathcal{T} из данных стабильности $\{P_\varphi\}_{\varphi \in \Phi}$, определённых на \mathcal{A} . Если на \mathcal{A} задано семейство замкнутых относительно расширений подкатегорий $P_\varphi \subset \mathcal{A}$, занумерованных вполне упорядоченным множеством Φ так, что

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_{\varphi'}, P_{\varphi''}) = 0 \quad \forall \varphi' > \varphi''$$

и любой ненулевой объект $X \in \mathcal{A}$ обладает фильтрацией Гардера – Нарасимхана

$$\begin{array}{ccccccc} X = F^0 X & \longleftarrow & F^1 X & \longleftarrow & F^2 X & \longleftarrow & \dots & \longleftarrow & F^n X & \longleftarrow & F^{n+1} X = 0, \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \\ & & G_1 & & G_2 & & \dots & & G_n & & \end{array}$$

с $G_i = F^i X / F^{i+1} X \in \Pi_{\varphi_i}$ и $\varphi_i < \varphi_j$ при $i < j$. Такие абелевы данные стабильности, в свою очередь, могут быть построены по любому отношению предпорядка R на объектах категории \mathcal{A} , обладающему следующими двумя свойствами [208]:

(лемма о качелях) средний член любой короткой точной последовательности ненулевых объектов

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

либо лежит строго между A, C , либо $A \sim B \sim C$ по отношению к естественной эквивалентности, индуцированной предпорядком R^1 , так что возникает следующая альтернатива:

$$\begin{aligned} & \text{или } A < B \Leftrightarrow A < C \Leftrightarrow B < C, \\ & \text{или } A > B \Leftrightarrow A > C \Leftrightarrow B > C, \\ & \text{или } A = B \Leftrightarrow A = C \Leftrightarrow B = C. \end{aligned}$$

(условие конечности) в \mathcal{A} нет бесконечных цепочек строго вложенных объектов вида

$$\begin{aligned} & A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \dots, \text{ с } A_1 \leq A_2 \leq A_3 \leq \dots \\ & A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A, \text{ с } A_1 < A_2 < A_3 < \dots \\ & A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \dots \subset A, \text{ с } A_1 > A_2 > A_3 > \dots \end{aligned}$$

Предпорядок R задаёт данные стабильности так. Назовём объект $A \in \mathcal{A}$ R -полустабильным (соотв. R -стабильным), если $B \leq A$ (соотв. $B < A$) для любого собственного подобъекта $B \subset A$. Обозначим через Φ множество классов эквивалентности² R -полустабильных объектов в \mathcal{A} и для каждого $\varphi \in \Phi$ обозначим через Π_φ множество всех полустабильных объектов в классе φ . В [208] доказана

Лемма 10.2

Подкатегории $\{\Pi_\varphi\}_{\varphi \in \Phi}$ образуют абелевы данные стабильности на \mathcal{A} . Эти данные стабильности имеют следующие дополнительные свойства:

1. полустабильная подкатегория Π_φ абелева;
2. для любого $\varphi \in \Pi_\varphi$ существует стабильный объект $A \in \Pi_\varphi$;
3. стабильный объект в полустабильной категории несократим в том смысле, что у него нет собственных подобъектов в той же подкатегории;

¹напомним, что $A \sim B$ означает одновременное выполнение условий $A \leq B$ и $A \geq B$ в R

²

4. два стабильных объекта в \mathcal{P}_φ либо изоморфны, либо не имеют ненулевых морфизмов из одного в другой;
5. каждый ненулевой объект в \mathcal{P}_φ имеет конечную фильтрацию Жордана – Гёльдера со стабильными факторами.
6. каждая полустабильная подкатегория \mathcal{P}_φ нётерова и артинова.

Мы будем называть возникающие таким образом данные стабильности R -стабильностями на абелевой сердцеvine \mathcal{A} .

10.3.3. Векторные наклоны. Предпорядок R , удовлетворяющий условиям конечности и лемме о качелях, можно задавать при помощи *векторных наклонов*. А именно, зафиксируем на множестве $\text{Irr}(\mathcal{A})$ всех неразложимых объектов категории \mathcal{A} какой-нибудь линейный порядок и предположим, что на категории \mathcal{A} имеется семейство аддитивных функций

$$d_A : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad A \in \text{Irr}(\mathcal{A})$$

(занумерованное) и ещё одна аддитивная функция

$$\ell : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z},$$

такие что

1. $\ell(X) > 0$ для любого ненулевого объекта $X \in \mathcal{A}$
2. для любого объекта $X \in \mathcal{A}$ множество $\text{Irr}(X) \stackrel{\text{def}}{=} \{A \in \text{Irr}(\mathcal{A}) \mid d_A(X) \neq 0\}$ конечно.

Обозначим через \mathcal{F} векторное пространство над \mathbb{Q} с базисом $\text{Irr}(\mathcal{A})$ и определим функцию наклона $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{F}$ правилом

$$\lambda(X) = \frac{1}{\ell(X)} \sum_A d_A(X) \cdot A.$$

Так понимаемые наклоны являются векторами с рациональными координатами и снабжены лексикографическим упорядочением, индуцированным зафиксированным нами линейным порядком на $\text{Irr}(\mathcal{A})$.

Зададим предпорядок на \mathcal{A} , полагая $X < Y$ тогда и только тогда, когда $\lambda(X) < \lambda(Y)$. Легко видеть, что если \mathcal{A} нётерова или артинова¹, то этот предпорядок обладает нужными нам свойствами.

10.3.4. Основная теорема Остаток этого раздела посвящён доказательству следующей теоремы.

Теорема 10.1

Любая R -стабильность $\{\mathcal{P}_\varphi\}_{\varphi \in \Phi}$ на абелевой категории \mathcal{A} имеет тончайшее измельчение.

¹т.е. ни один объект A в \mathcal{A} не допускает бесконечных цепочек строго вложенных подобъектов вида $A \supset A_1 \supset A_2 \supset \dots$ или $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A$

Доказательство. Мы построим бесконечную цепочку последовательно измельчающихся данных стабильности

$$\Phi = L_0 > L_1 > \dots > L_k > L_{k+1} \dots$$

так что

$$\begin{aligned} L_k\text{-стабильный объект } L_{k+1}\text{-стабилен;} \\ L_{k+1}\text{-полуостабильный объект } L_k\text{-полуостабилен.} \end{aligned} \quad (10.9)$$

После этого рассмотрим множество Stab всех объектов, которые L_k -стабильны для всех $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ и снабдим его полным порядком так, чтобы

$$\forall A, B \in \text{Stab}^0 \quad A > B \Rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) = 0. \quad (10.10)$$

Затем зададим тончайшие данные стабильности на \mathcal{A} с множеством наклонов $\Psi = \text{Stab}$.

Первое измельчение L_1 строится так. Зафиксируем некоторое $\varphi \in \Phi$. Согласно нашим предположениям, соответствующая полуостабильная категория Π_φ имеет конечную длину. В частности, каждый объект $X \in \Pi_\varphi$ имеет конечную фильтрацию Жордана – Гельдера. Число стабильных факторов такой фильтрации задаёт неотрицательную аддитивную функцию $\ell_0 : \Pi_\varphi \rightarrow \mathbb{Z}$, которая зануляется лишь в нуле. Обозначим через Stab_φ^0 множество всех Φ -стабильных объектов в Π_φ . Для любых $A, B \in \text{Stab}_\varphi^0$ выполняется либо $A \simeq B$, либо $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathcal{A}}(B, A) = 0$. Зафиксируем некоторый линейный порядок на каждом множестве Stab_φ^0 . Лексикографически комбинируя эти порядки в соответствии с порядком на множестве Φ , получим на множестве $\text{Stab}^0 = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \text{Stab}_\varphi^0$ линейный порядок со свойством (10.10).

Далее, для каждого $A \in \text{Stab}_\varphi^0$ обозначим через $\text{deg}_A : \Pi_\varphi \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ аддитивную функцию, сопоставляющую каждому объекту X число его факторов Жордана – Гельдера, изоморфных A . Для каждого ненулевого $X \in \Pi_\varphi$ определим наклон $\lambda_\varphi^1(X)$ правилом:

$$\lambda_\varphi^1(X) = \sum_{A \in \text{Stab}_\varphi^0} \frac{\text{deg}_A(X)}{\ell_0(X)} \cdot A.$$

Так как фильтрация Жордана – Гельдера на любом объекте $X \in \Pi_\varphi$ конечна, написанная выше сумма конечна и равна

$$\lambda_\varphi^1(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\text{deg}_{A_i}(X)}{\ell_0(X)} \cdot A_i,$$

где $\text{Simpl}^1(X) = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ – множество попарно неизоморфных стабильных факторов X .

Пусть $X, Y \in \Pi_\varphi$ и $\{A_1, A_2, \dots, A_n\} = \text{Simpl}^1(X) \cup \text{Simpl}^1(Y)$. Без потери общности мы можем предположить, что $A_1 > A_2 > \dots > A_n$. Мы перепишем наклоны $\lambda_\varphi^1(X)$ и $\lambda_\varphi^1(Y)$ вот так:

$$\begin{aligned} \lambda_\varphi^1(X) &= \left(\frac{\text{deg}_{A_1}(X)}{\ell_0(X)} \cdot A_1, \frac{\text{deg}_{A_2}(X)}{\ell_0(X)} \cdot A_2, \dots, \frac{\text{deg}_{A_n}(X)}{\ell_0(X)} \cdot A_n \right) \\ \lambda_\varphi^1(Y) &= \left(\frac{\text{deg}_{A_1}(Y)}{\ell_0(Y)} \cdot A_1, \frac{\text{deg}_{A_2}(Y)}{\ell_0(Y)} \cdot A_2, \dots, \frac{\text{deg}_{A_n}(Y)}{\ell_0(Y)} \cdot A_n \right) \end{aligned}$$

Сравнивая их лексикографически, мы получаем R -стабильность в абелевой категории \mathcal{P}_φ . Теперь применим эту процедуру к каждой подкатегории \mathcal{P}_φ и рассмотрим новый векторный наклон $\lambda^1 = (\varphi, \lambda_\varphi^1)$ на всей категории \mathcal{A} :

$$\lambda^1(X) = \begin{cases} (\varphi(X), \lambda_\varphi^1(X)) & \text{когда } X \in \mathcal{P}_\varphi \\ (\varphi(X), 0) & \text{когда } X \notin \bigcup_{\varphi \in \Phi} \mathcal{P}_\varphi \end{cases}$$

Отсюда возникает следующая R -стабильность L_1 , истончающая $L_0 = \Phi$. Следует обратить внимание, что предпорядок на \mathcal{A} , индуцированный функцией наклона λ^1 совместим с изначальным, происходящим из R -стабильности: $\lambda^1(A) < \lambda^1(B)$ для всех $A < B$.

Чтобы лучше понять, что произошло в результате первого измельчения, рассмотрим простейший пример: пусть объект $X \in \mathcal{P}_\varphi$ имеет $\lambda_0(X) = 2$. Тогда для фильтрации Жордана – Гельдера для на X есть три взаимоисключающие возможности:

$$X \rightsquigarrow (A, A) \quad \text{или} \quad X \rightsquigarrow (A, B), \quad A > B, \quad \text{или} \quad X \rightsquigarrow (B, A), \quad A > B.$$

В первом случае $\lambda^1(X) = (\varphi, A)$ и любой собственный подобъект $A \subset X$ имеет $\lambda^1(A) = (\varphi, A)$. Следовательно, X L_1 -полустибилен, но не L_1 -стабилен. Во втором случае

$$\lambda^1(X) = \left(\varphi, \frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right).$$

Если точная тройка $0 \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow 0$ не расщепляется, то объект X имеет единственный нетривиальный подобъект, а именно, B с

$$\lambda^1(B) = \left(\varphi, 0, \frac{B}{1}\right) < \lambda^1(X).$$

Следовательно, X λ^1 -стабилен. В последнем случае

$$\lambda^1(X) = \left(\varphi, \frac{A}{2}, \frac{B}{2}\right),$$

но X имеет подобъект A с $\lambda^1(A) = (\varphi, A, 0) > \lambda^1(X)$ и, стало быть, нестабилен.

Возвращаясь к доказательству, обозначим через L_φ^1 образа функции наклона λ_φ^1 , а через $\text{Stab}_{\lambda_\varphi^1}^1$ – множество тех λ^1 -стабильных объектов в $\mathcal{P}_{\lambda_\varphi^1}$, у которых λ^1 -наклон равняется λ_φ^1 , и зафиксируем линейный порядок на каждом $\text{Stab}_{\lambda_\varphi^1}^1$. Мы получим линейно упорядоченное множество

$$\text{Stab}^1 = \bigcup_{\varphi \in \Phi} \bigcup_{\lambda_\varphi^1 \in L_\varphi^1} \text{Stab}_{\lambda_\varphi^1}^1,$$

удовлетворяющее условию (10.10). Более того, стабильности L_0 и L_1 удовлетворяют условию (10.9). Следовательно, $\text{Stab}^0 \subset \text{Stab}^1$.

Теперь предположим, что у нас есть конечная цепь R -стабильностей

$$L_0 > L_1 > \dots > L_k,$$

удовлетворяющая условию (10.9) и такая, что для каждого $i > 0$ стабильность L_i индуцируется функцией наклона λ^i и имеет множество наклонов L_i . Это даёт цепочку удовлетворяющее условию (10.10) линейно упорядоченных множеств

$$\text{Stab}^0 \subset \text{Stab}^1 \subset \dots \subset \text{Stab}^k$$

образованных λ^i -стабильными объектами фиксированного наклона λ^i . Мы собираемся продлить эти цепочки, построив следующую R -стабильность L_{k+1} .

Для каждой L_k -полустабильной абелевой подкатегории Π_{λ^k} и любого ненулевого объекта $X \in \Pi_{\lambda^k}$ обозначим через $l_k(X)$ — длину фильтрации Жордана – Гельдера на X с λ^k -стабильными факторами в Π_{λ^k} , и для каждого λ^k -стабильного $A \in \Pi_{\lambda^k}$ рассмотрим неотрицательную аддитивную функцию

$$\text{deg}_A : \Pi_{\lambda^k} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

значение которой на объекте $X \in \Pi_{\lambda^k}$ равно числу изоморфных A компонент Жордана – Гельдера в X . Определим новую функцию наклона $\lambda_{\lambda^k}^{k+1}$ на Π_{λ^k} правилом

$$\lambda_{\lambda^k}^{k+1}(X) = \sum_{A \in \text{Stab}_{\lambda^k}^k} \frac{\text{deg}_A(X)}{l_k(X)} \cdot A,$$

где $\text{Stab}_{\lambda^k}^k = \text{Stab}^k \cap \Pi_{\lambda^k}$, и продолжим её на всю \mathcal{A} как

$$\lambda^{k+1}(X) = \begin{cases} (\lambda^k(X), \lambda_{\lambda^k}^{k+1}(X)) & \text{когда } X \in \Pi_{\lambda^k} \\ (\lambda^k(X), 0) & \text{когда } X \notin \bigcup_{\lambda^k \in L_k} \Pi_{\lambda^k}. \end{cases}$$

Упорядочивая значения $\lambda^{k+1}(X)$ лексикографически, получаем более тонкую, чем L_k , и удовлетворяющую (10.9) R -стабильность L_{k+1} на \mathcal{A} . Далее обозначаем множество всех λ^{k+1} -стабильных объектов в $\Pi_{\lambda^{k+1}}$ через $\text{Stab}_{\lambda^{k+1}}^{k+1}$, линейно упорядочиваем его любым способом, и формируем линейно упорядоченное множество

$$\text{Stab}^{k+1} = \bigcup \text{Stab}_{\lambda^{k+1}}^{k+1},$$

очевидно, удовлетворяющее условию (10.10), и т. д.

Этот индуктивный процесс построит бесконечную цепочку R -стабильностей

$$L_0 > L_1 > \dots > L_k > \dots$$

на \mathcal{A} и цепочку вполне упорядоченных множеств стабильных объектов

$$\text{Stab}^0 \subset \text{Stab}^1 \subset \dots \subset \text{Stab}^k \subset \dots .$$

Тончайшие данные стабильности L , которые мы строим, суть не что иное как проективный предел L_i . Точнее, возьмём в качестве множества наклонов искомой тончайшей стабильности объединение $\text{Stab} = \bigcup_k \text{Stab}^k$. Это вполне упорядоченное множество, удовлетворяющее условию (10.10). Полустабильная подкатегория Π_A наклона $A \in \text{Stab}$ определяется как $\Pi_A = \langle A \rangle$.

Чтобы проверить, что L действительно является данными стабильности, остаётся построить конечную фильтрацию Гардера – Нарасимхана для любого ненулевого объекта $X \in \mathcal{A}$. В качестве первого приближения к ней возьмём фильтрацию Гардера – Нарасимхана на X относительно стабильности L_0 . Потом заменим все факторы $X_i \notin \text{Stab}^0$ их фильтрациями Гардера – Нарасимхана относительно стабильности L_1 , после чего заменим в ней все L_2 -нестабильные факторы и т. д. Эта процедура конечна, поскольку все X_i имеют конечную длину.

□

Следствие 10.2

Пусть $\{P_\psi\}_{\psi \in \Psi}$ – t -стабильность на триангулированной категории \mathcal{T} . Предположим, что существует подмножество $\Phi \subset \Psi$ и t -структура $(\mathcal{T}^{\geq 0}, \mathcal{T}^{\leq 0})$ с центром \mathcal{A} такие, что

- (1) ограничение $\{P_\psi\}_{\psi \in \Psi}$ на \mathcal{A} задаёт там данные R -стабильности $\{P_\varphi\}_{\varphi \in \Phi}$;
- (2) для любого $\psi \in \Psi$ существуют $\varphi \in \Phi$ и $n \in \mathbb{Z}$ такие, что $P_\psi = P_\varphi[n]$;

Тогда существует тончайшая t -стабильность $\{P_\psi\}_{\psi \in \Psi}$, которая измельчает $\Psi \leq \Phi$.

10.4. Категория порожденная исключительной Ном-парой

10.4.1. Напоминания и обозначения. Пусть \mathcal{P}_h – \mathbb{C} -линейная триангулированная категория порожденная парами объектов (E_0, E_1) такими, что:

$$\text{Hom}^0(E_0, E_0) = \text{Hom}^0(E_1, E_1) = \mathbb{C}, \quad (10.11)$$

$$\text{Hom}^k(E_1, E_0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}, \quad (10.12)$$

$$\text{Hom}^k(E_0, E_0) = \text{Hom}^k(E_1, E_1) = \text{Hom}^k(E_0, E_1) = 0 \quad \forall k \neq 0, \quad (10.13)$$

$$\text{Hom}^0(E_0, E_1) = H, \quad \dim H = h \geq 2. \quad (10.14)$$

Мы будем называть пары такого типа (E_0, E_1) *исключительными Ном-парами*.

Хорошо известно [196], [197], что \mathcal{P}_h эквивалентна ограниченной производной категории модулей Кронекера над H^* , т. е. представлений колчана с двумя вершинами $[0]$, $[1]$ и h -мерным пространством стрелок $[0] \rightarrow [1]$, изоморфным H^* . Такое представление задается линейным отображением

$$V_1 \xrightarrow{\psi} H \otimes V_2,$$

где V_1, V_2 – произвольные векторные пространства. Здесь существенно только количество стрелок, которое равно $\dim H$, потому что любой линейный изоморфизм $H_1 \xrightarrow{\cong} H_2$ задаёт эквивалентность категорий модулей Кронекера над H_1^* и над H_2^* . В частности, категории модулей Кронекера над H и над H^* (неканонически) эквивалентны. Эквивалентность \mathcal{P}_h и производной категории модулей Кронекера отправляет два одномерных неразложимых модуля $\mathbb{C} \xrightarrow{0} H \otimes 0$ и $0 \xrightarrow{0} H \otimes \mathbb{C}$ в E_0 и $E_1[-1]$ соответственно.

Для $d = 2$ категория \mathcal{P}_2 также отождествляется с ограниченной производной категорией когерентных пучков на проективную прямую \mathbb{P}_1 сопоставлением объектам E_0, E_1 обратимых пучков $\mathcal{O}, \mathcal{O}(1)$.

Обозначим за M решетку $K_0(\mathcal{P}_h) \simeq \mathbb{Z}^2$ оснащенную (несимметричной) билинейной формой

$$\chi([E], [F]) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^k \dim \text{Hom}^k(E, F).$$

Если обозначить классы $[E_0], [E_1]$ через e_0, e_1 , скалярное произведение $x = x_0 e_0 + x_1 e_1$ и $y = y_0 e_1 + y_1 e_1$ будет таково:

$$\chi(x, y) = x_0 y_0 + h x_0 y_1 + x_1 y_1.$$

10.4.2. Ортогональная геометрия решётки M является пересказом теории уравнения Пэлля в специальном случае, когда все векторы $e \in M$ с $\chi(e, e) = 1$ организуются в две цепи

$$\{e_i\}_{i \in \mathbb{Z}} \quad \text{и} \quad \{-e_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$$

образованные последовательными целыми точками, лежащими на двух ветвях гиперболы¹

$$x^2 + hxy + y^2 = 1 \tag{10.15}$$

(см. рис. 21 и работу [203]).

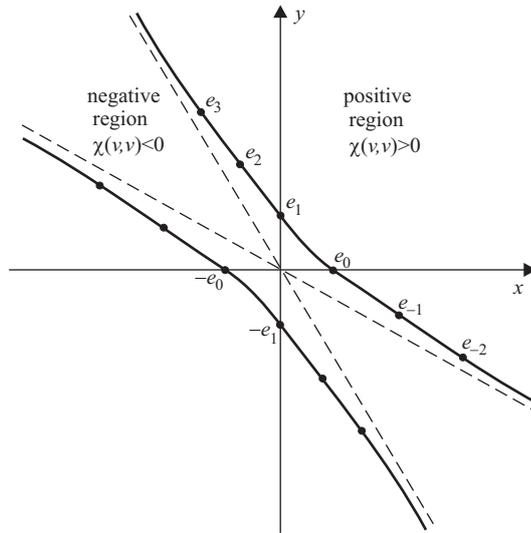


Рис. 21: Единичные вектора M

Все единичные векторы e_i рекурсивно восстанавливаются из любых двух последовательных элементов e_0, e_1 посредством рекурсии

$$e_{i-1} + e_{i+1} = h e_i \tag{10.16}$$

Любая тройка последовательных элементов e_{i-1}, e_i, e_{i+1} каждой цепочки задаёт на M пару двойственных полуортономированных базисов

$$\{e, f\} = \{e_i, e_{i+1}\} \quad \text{and} \quad \{f^\vee, e^\vee\} = \{e_{i-1}, e_i\}$$

удовлетворяющих условиям $\chi(e, e^\vee) = 1, \chi(f, f^\vee) = -1, \chi(e, f^\vee) = \chi(f, e^\vee) = 0$. В частности, координаты любого вектора $v = x e + y f$ могут быть вычислены как

¹при $h = 2$ эта гипербола вырождается в пару прямых $x + y = \pm 1$

$x = \chi(v, e^\vee)$, $y = -\chi(v, f^\vee)$. Более того, все полуортонормальные базисы¹ (e, f) for M имеют вид $(e, f) = (\pm e_i, \pm e_{i+1})$. Матрица Грамма такого базиса всегда равна

$$\begin{pmatrix} 1 & \pm h \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где знак плюс появляется для базисов (e_i, e_{i+1}) и $(-e_i, -e_{i+1})$ состоящие из последовательных единичных векторов лежащих на одной и той же ветви гиперболы (10.15). Из fig. 21 ясно, что для любого положительного вектора $v \in M$ (то есть такого, что $\chi(v, v) > 0$) имеется единственный базис этого вида (то есть с положительно определенной матрицей Грамма), такой что v имеет в этом базисе положительные координаты.

10.4.3. Исключительные объекты \mathcal{P}_h . Предыдущий арифметический анализ показывает, что все исключительные объекты² категории \mathcal{P}_h исчерпываются $E_i[m]$, $i, m \in \mathbb{Z}$, которые являются сдвигами последовательных левых и правых перестроек исходных исключительных образующих E_0, E_1 .

Напомним, что перестройки в исключительной паре (E, F) определены выделенным треугольниками:

$$\begin{aligned} L_E F &\rightarrow \text{Hom}^*(E, F) \otimes E \rightarrow F \rightarrow L_E F[1], \\ R_F E[-1] &\rightarrow E \rightarrow \text{Hom}^{\times*}(E, F) \otimes F \rightarrow R_F E, \end{aligned} \quad (10.17)$$

индуцированными каноническими изоморфизмами

$$\begin{aligned} \text{Hom}^*(E, F) \otimes E &\rightarrow F, \\ E &\rightarrow \text{Hom}^{\times*}(E, F) \otimes F. \end{aligned}$$

Легко проверить [203], что $(L_E F, E)$ и $(F, R_F E)$ — исключительные Ном-пары порожденные \mathcal{P}_h точно также как и (E, F) . Более того, левые и правые перестройки обратны друг к другу.

Таким образом, если мы зададим рекурсивно $E_{i-1} \stackrel{\text{def}}{=} L_{E_i} E_{i+1}$, $E_{i+2} \stackrel{\text{def}}{=} R_{E_{i+1}} E_i$ для всех $i \in \mathbb{Z}$ начиная с $i = 0$, то мы получим серию исключительных объектов, чьи классы $e_i = [E_i] = [E_i[2m]] \in M$ совпадают с единичными векторами расположенными на правой верхней ветви гиперболы (10.15) рассматриваемой ранее. Нечетные сдвиги $E_i[2m+1]$ расположены на левой нижней ветви.

Легко проверить, что пространство гомоморфизмов между исключительными объектами E_i (формирующих одну орбиту сохраняемую перестройками (10.17)) удовлетворяют следующему:

$$\begin{aligned} \text{Hom}^0(E_i, E_j) &\neq 0, \quad \text{iff } i \leq j, \\ \text{Hom}^1(E_i, E_j) &\neq 0, \quad \text{iff } i > j + 1, \\ \text{Hom}^k(E_i, E_j) &= 0 \quad \forall i, j \text{ for } k \neq 0, 1. \end{aligned} \quad (10.18)$$

Это немедленно влечет следующие неравенства для наклона исключительных объектов (учитывая что они полустабильны).

Лемма 10.3

Если $i \leq j$, то $\varphi(E_i) \leq \varphi(E_j)$ для всех t -стабильных Φ таких, что E_i, E_j — Φ -полустабильные.

¹то есть такие, что $\chi(e, e) = \chi(f, f) = 1$ и $\chi(f, e) = 0$

²т.е. такие E , что $\text{Hom}^*(E, E)$ — одномерная алгебра \mathbb{C} расположенная в степени 0

10.4.4. Ортогональное разложение \mathcal{P}_h Эта часть представляет из себя последовательность теорем типа Белинсона для исключительно порожденной триангулированной категории [203]. Каждый объект X из \mathcal{P}_h вписывается в выделенный треугольник:

$$X \rightarrow \bigoplus_i U_0^i \otimes E_0[-i] \xrightarrow{\delta} \bigoplus_i U_1^i \otimes E_1[-i] \rightarrow X[1], \quad (10.19)$$

который является функториальным в X и имеет

$$\begin{aligned} U_0^i &= \text{Hom}^{i+1}({}^\vee E_1, X) = \text{Hom}^{-i}(X, E_1^\vee)^*, \\ U_1^i &= \text{Hom}^{i+1}({}^\vee E_0, X) = \text{Hom}^{-i}(X, E_0^\vee)^*, \end{aligned} \quad (10.20)$$

где ${}^\vee E_1 = R_{E_1} E_0 = E_2$, ${}^\vee E_0 = E_1$, $E_1^\vee = E_0$, $E_0^\vee = L_{E_0} E_1 = E_{-1}$. Обычно, треугольник (10.19) сокращается до

$$X \rightarrow U_0^\bullet \otimes E_0 \rightarrow U_1^\bullet \otimes E_1$$

предполагая, что U_0^\bullet, U_1^\bullet градуированное векторное пространство и тензорное произведение градуированных векторных пространств с объектом, определенным следующим образом $V^\bullet \otimes E = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} V^k \otimes E[-k]$.

Поскольку (E_0, E_1) исключительная Ном-пара, отображение δ в (10.19) разделяется на прямую сумму отображений

$$U_0^{-i} \otimes E_0[i] \xrightarrow{\delta_i} U_1^{-i} \otimes E_1[i].$$

Значит, любой объект X канонически раскладывается в прямую сумму $X = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} X_i$, где X_i лежит в выделенном треугольнике

$$X_i \rightarrow U_0^{-i} \otimes E_0[i] \rightarrow U_1^{-i} \otimes E_1[i] \rightarrow X_i[1]. \quad (10.21)$$

Мы будем называть такие X_i *простыми объектами уровня i* для витка (E_0, E_1) . Прямое вычисление, использующее условие ортогональности (10.11) – (10.13) показывает, что $\text{Hom}^0(X_i, X_j)$ не обращается в ноль, только если $j - i = 0, 1$.

Поэтому если мы напишем $\mathcal{P}_h^{\leq n}$ для полного продолжение замкнутой подкатегории категории \mathcal{P}_h порожденный всеми простыми объектами уровня¹ $i \geq n$ и запишем $\mathcal{P}_h^{\geq n}$ для похожей подкатегории порожденной всеми простыми объектами уровня $i \leq n$, тогда пара $(\mathcal{P}_h^{\leq 0}, \mathcal{P}_h^{\geq 1})$ влечет \mathcal{P}_h с t -структуры чьи ядро $\mathcal{P}_h^0 = \mathcal{P}_h^{\leq 0} \cap \mathcal{P}_h^{\geq 0}$ состоит из всех X из \mathcal{P}_h подставленных в выделенный треугольник

$$X \rightarrow V_0 \otimes E_0 \rightarrow V_1 \otimes E_1 \rightarrow X[1]$$

Так как морфизмы между такими объектами согласованы с морфизмами в треугольниках

$$\begin{array}{ccccc} Y_0 & \longrightarrow & V_0 \otimes E_0 & \longrightarrow & V_1 \otimes E_1 \\ f \uparrow & & f_0 \otimes id \uparrow & & f_1 \otimes id \uparrow \\ X_0 & \longrightarrow & U_0 \otimes E_0 & \longrightarrow & U_1 \otimes E_1 \end{array}$$

категория \mathcal{P}_h^0 – это поросту абелева категория модулей Кронекера над H^* (в частности, гомологическая размерность \mathcal{P}_h^0 равна 1, потому что $\text{Hom}^k(X, Y) = 0$ для $k \neq 0, 1$, если $X, Y \in \mathcal{P}_h^0$).

¹несогласованность неравенств возникает из-за традиционного определения t -структур, смотри [195], [202]

Лемма 10.4

Пусть X — объект из \mathcal{P}_h такой, что его клас $x = [X] \in M$ положителен, т. е. $\chi(x, x) > 0$. Тогда X неразложим тогда и только тогда, когда X исключительный.

Доказательство. Так как $\chi(x, x) > 0$, существуют две целые точки на гиперболе (10.15), скажем e_0, e_1 такие, что $x = v_0 e_0 + v_1 e_1$, где целые числа v_0, v_1 имеют один знак, или, более точно, удовлетворяют неравенству $v_0 \cdot v_1 \geq 0$. С другой стороны, так как X неразложимо, лишь одна из его компонент (10.21) ненулевая, то есть после соответствующего сдвига $X \rightarrow X[m]$ мы можем считать, что ортогональное разложение X на E_0, E_1 получена из выделенного треугольника

$$X \rightarrow V_0 \otimes E_0 \rightarrow V_1 \otimes E_1 \rightarrow X[1]$$

для некоторых (не градуированных) векторных пространств V_0, V_1 . А значит, в M найдутся $v_0 = \dim V_0, v_1 = -\dim V_1$, которые удовлетворяют $v_0 \cdot v_1 \geq 0$ только если одно из V_0, V_1 обращается в ноль. Поскольку X неразложимо, оставшееся ненулевое пространство $V_i = \mathbb{C}$. \square

10.5. Исключительная t -стабильность на \mathcal{P}_h

10.5.1. Определение исключительной t -стабильности. Пусть (F_0, F_1) — исключительная пара порождающая \mathcal{P}_h . Тогда *исключительная t -стабильность* $\{P_\varepsilon\}$ на \mathcal{P}_h строится следующим образом (смотри [204]). Множество наклонов $\{\varepsilon\}$ состоит в 1-1 соответствии с множеством исключительных объектов формы $F_i[k]$, где $i = 0, 1, k \in \mathbb{Z}$. Они вполне упорядочены таким образом: $F_0[k] < F_1[m]$ для всех $m, k \in \mathbb{Z}$ и $F_i[k] < F_i[m]$ для всех $k < m$ и каждого $i = 0, 1$. Для наклона ε соответствующего $F_i[k]$, полустабильная категория P_ε эквивалентна категории векторных пространств и состоит из всех объектов формы $V \otimes F_i[k]$, где V - (не градуированное) векторное пространство. Другими словами, полустабильные объекты исключительной стабильности полученные из (F_0, F_1) исчерпываются прямыми степенями $F_i[k]^{\oplus d}$.

В [204] описаны некоторые примеры t -стабильностей построенные, для конкретной исключительной пары (F_0, F_1) . Все они имеют одинаковые множества полустабильных подкатегорий и отличаются друг от друга только выбором полного порядка на них. Этот порядок описывается целым числом $p \in [1, +\infty)$ и выстраивает исключительные объекты таким образом:

$$\dots < F_0[p-1] < F_1[-1] < F_0[p] < F_1 < F_0[p+1] < F_1[1] < \dots$$

Мы будем рассматривать здесь лишь один порядок соответствующий $p = +\infty$ и описанный ранее.

10.5.2. Классификация исключительных t -стабильностей. Оставшаяся часть данного раздела будет посвящена доказательству следующего факта

Предложение 10.1

Пусть Ψ — t -стабильность на \mathcal{P}_h такая, что некоторый исключительный объект E не Ψ -полустабильный. Тогда, вплоть до выбора линейного порядка на множестве наклонов, Ψ - исключительная t -стабильность построенная из некоторой исключительной пары (F_0, F_1) .

Доказательство. Зафиксируем исключительный базис (E_0, E_1) с $E_1 = E$ и пусть фильтрация Гардера – Нарисимхана для E_1 начинается отмеченным треугольником

$$\begin{array}{ccc} & Y & \\ \nearrow & & \dashrightarrow \\ E_1 & \longleftarrow & X, \end{array} \quad (10.22)$$

где Y – Ψ -полустабильно и $\text{Hom}^{\leq 0}(X, Y) = 0$. Пусть $Y = \bigoplus Y_i$ – разложение в прямую сумму чистых объектов (10.21) сохраняющих исключительный базис (E_0, E_1) . Тогда все Y_i за исключением Y_1 должны быть нулевыми. Действительно, $\text{Hom}^0(E_1, Y_i) = 0$ для $i \neq 1$ влечет, что $Y_i[-1]$ является прямым слагаемым X и из этого вытекает, что $\text{Hom}^{-1}(X, Y) \neq 0$. Тем самым, Y чистый уровня 1 и включается в отмеченный треугольник

$$Y \rightarrow U_0 \otimes E_0[1] \rightarrow U_1 \otimes E_1[1].$$

тогда по аксиоме октаэдра X включается в диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & U_0 \otimes E_0 & \longrightarrow & U'_1 \otimes E_1 & \longrightarrow & X[1] \\ & & \parallel & & \uparrow & & \uparrow \\ & & U_0 \otimes E_0 & \longrightarrow & U_1 \otimes E_1 & \longrightarrow & Y \\ & & & & \uparrow & & \uparrow f \\ & & & & E_1 & \xlongequal{\quad} & E_1 \\ & & & & & & \uparrow \\ & & & & & & X \end{array} \quad (10.23)$$

и чист уровня 0. В частности, $\text{Hom}^i(X, X) = \text{Hom}^i(Y, Y) = 0$ при $i \neq 0, 1$.

Покажем, что $\text{Hom}^1(X, X) = \text{Hom}^1(Y, Y) = 0$ (откуда, в частности, будут следовать неравенства $\chi(X, X) > 0$ и $\chi(Y, Y) > 0$). Из первой строки в (10.23) вытекает, что $\text{Hom}^1(X, E_1) = 0$. Применяя $\text{Hom}(X, *)$ к правому столбцу (10.23), получаем точный треугольник

$$\text{Hom}^0(X, Y) \rightarrow \text{Hom}^1(X, X) \rightarrow \text{Hom}^1(X, E_1),$$

который показывает, что $\text{Hom}^1(X, X) = 0$. Аналогично, из центральной строки (10.23) углядывается, что $\text{Hom}^1(E_1, Y) = 0$, и, применяя $\text{Hom}(*, Y)$ к правому столбцу (10.23), получим точный треугольник

$$\text{Hom}^0(X, Y) \rightarrow \text{Hom}^1(Y, Y) \rightarrow \text{Hom}^1(E_1, Y),$$

который показывает, что $\text{Hom}^1(Y, Y) = 0$.

Из асферичности¹ и положительности X, Y сразу следует, что все их неразложимые прямые слагаемые также положительны. Значит, по лем. 10.4, X и Y – прямые суммы нескольких исключительных объектов. Применяя асферичность еще раз, мы видим, что $X = E_i[m]^{\oplus u_0} \oplus E_{i+1}^{\oplus u_0}[m]$ и $Y = E_j[k]^{\oplus v_0} \oplus E_{j+1}^{\oplus v_0}[k]$ для некоторых целых i, j, k, m . Принимая во внимание условие $\text{Hom}^0(X, E_1) \neq 0$, $\text{Hom}^0(E_1, Y) \neq 0$, и $\text{Hom}^{\leq 0}(X, Y) = 0$, мы видим, что либо $m = 0, k = 1, i \leq 1, j \leq -1$, либо $m = -1$,

¹мы будем называть объект X асферичным, если $\text{Hom}^i(X, X) = 0$ для всех $i \neq 0$

$k = 0, i \geq 2, j \leq 0$. Так как $\text{Hom}^{-1}(E_n, E_m[1]) \neq 0$ для $m \geq n$ и $\text{Hom}^0(E_n, E_m[1]) \neq 0$ для $m \leq n - 2$, есть только две возможности для X и Y :

$$\text{либо } X = U \otimes E_i, Y = V \otimes E_{i-1}[1], \quad \text{где } i < 1 \quad (10.24)$$

$$\text{либо } X = U \otimes E_i[-1], Y = V \otimes E_{i+1}, \quad \text{где } i > 1. \quad (10.25)$$

В частности, $X, Y[-1]$ являются кратностями последовательных исключительных объектов формирующих исключительную Ном-пару.

Давайте предположим, что имеет место первый случай (10.24) и докажем, что Ψ должно быть исключительной полустабильностью полученной из пары (E_{i-1}, E_i) . Действительно, все повороты $E_{i-1}[k]$ — Ψ -полустабильны, из-за Ψ -полустабильности Y . Если мы покажем, что X также Ψ -полустабильна, то мы также получим Ψ -полустабильность всех поворотов $E_i[m]$. Так как $\psi(E_i[m]) > \psi(E_{i-1}[k])$ для всех m, k (из-за нашего предположения из 10.5.1), t -стабильность Ψ влечет исключительную t -стабильность построенную из пары (E_{i-1}, E_i) , а значит все доказано. Таким образом, осталось проверить Ψ -полустабильность X .

Для этого продолжим фильтрацию Хардера – Нарасимхана (10.22) треугольником

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & Y' \\ & \nearrow & \text{---} & \searrow & \nearrow \\ E_1 & & & & X' \\ & \longleftarrow & X & \longleftarrow & \\ & & & & \end{array}$$

дестабилизирующим X и удовлетворяющим соотношениям ортогональности

$$\text{Hom}^{\leq 0}(X', Y') = \text{Hom}^{\leq 0}(X', Y) = \text{Hom}^{\leq 0}(Y', Y) = 0. \quad (10.26)$$

Правый треугольник представляет собою прямую сумму самого с собой нескольких экземпляров первого треугольника фильтрации Хардера – Нарасимхана для E_i . Последний совпадает с (10.22). Тем самым, как и ранее

$$\begin{aligned} \text{или } X'' &= U'' \otimes E_j, Y'' = V'' \otimes E_{j-1}[1] \\ \text{или } X'' &= U'' \otimes E_j[-1], Y'' = V'' \otimes E_{j+1}. \end{aligned}$$

Но это противоречит условиям ортогональности (10.26) и соотношениям (10.18) на Ном'ы между исключительными объектами одного уровня. Таким образом, X должен быть стабильным. Второй возможный случай (10.25) разбирается аналогично. \square

10.6. Модулярные t -стабильности на \mathcal{P}_h

Напомним, что t -стабильность $\{P_\psi\}_{\psi \in \Psi}$ на \mathcal{P}_h называется *модулярной*, если все исключительные объекты полустабильны, имеют разные наклоны, и функция наклона пропускается через $K_0(\mathcal{P}_h)$ в следующем точном смысле: если образы каких-либо двух полустабильных объектов $X \in P_\psi$ и $X' \in P_{\psi'}$ в $K_0(\mathcal{P}_h)$ совпадают, то $P_{\psi'} = P_\psi[2m]$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$.

10.6.1. Пример: μ -стабильность. Пример модулярной t -стабильности доставляет теория представлений колчанов. Зафиксируем исключительную пару E_0, E_1 и рассмотрим соответствующую t -структуру на \mathcal{P}_h описанную в 10.4.4. Ее ядро

$$\mathcal{P}_h^0 = \mathcal{P}_h^{\leq 0} \cap \mathcal{P}_h^{\geq 0}$$

состоит из всех X в \mathcal{P}_h входящих в выделенный треугольник

$$X \rightarrow U_0 \otimes E_0 \rightarrow U_1 \otimes E_1 \rightarrow X[1],$$

где U_0, U_1 неградуированные векторные пространства. Неупорядоченная пара аддитивных функций

$$(u_1, u_0) = (\dim U_1, \dim U_0)$$

определяет *наклон*

$$\mu = \frac{u_0}{u_1} \in \widehat{\mathbb{Q}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$$

на абелевой категории \mathcal{A} . В терминологии Т. Бриджлэнда [198] этот наклон соответствует *центральному заряду*

$$Z = -u_0 + iu_1 : K_0(\mathcal{P}_h) \rightarrow \mathbb{C}.$$

с центром в \mathcal{P}_h^0 . Объект X из \mathcal{P}_h^0 называется μ -полустабильным, если $\mu(Y) \leq \mu(X)$ для всех надлежащих подобъектов $Y \subset X$ в \mathcal{P}_h^0 . Если для всех надлежащих подобъектов $Y \subset X$ верно строгое неравенство $\mu(Y) < \mu(X)$, тогда X называется μ -стабильным. Полустабильная подкатегория $\Pi_\mu \subset \mathcal{A}$ состоит из всех полустабильных объектов X наклона μ . Эти данные стабильности стандартным образом [198], [204] расширяются с \mathcal{P}_h^0 до t -стабильности на \mathcal{P}_h и наделяют

$$\{\Pi_\mu[m]\}_{\mu \in \widehat{\mathbb{Q}}, m \in \mathbb{Z}}$$

множеством полустабильных подкатегорий упорядоченных так, что $\Pi_\mu[m] < \Pi_\mu[n]$ при $m < n$. Мы называем эту t -стабильность на \mathcal{P}_h μ -стабильностью. Тот факт, что все исключительные объекты μ -стабильны, восходит ещё к Д.-М. Дрезе [200].

Лемма 10.5

Все исключительные объекты из \mathcal{P}_h μ -стабильны.

Доказательство. Т.к. все исключительные объекты \mathcal{P}_h исчерпываются сдвигами исключительных объектов из ядра \mathcal{P}_h^0 , точнее E_i с $i \leq 0$ и $E_j[-1]$ с $j \geq 1$, достаточно проверить только полустабильность этих объектов. Эти исключительные объекты получены последовательными левыми и правыми перестройками в паре $E_0, E_1[-1]$. В терминах абелевой категории \mathcal{P}_h^0 , первая пара перестроек задана универсальным расширением

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow E_1[-1] \rightarrow E_{-1} \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_h^0}^1(E_0, E_1[-1]) \otimes E_0 \rightarrow 0, \\ 0 \rightarrow \text{Ext}_{\mathcal{P}_h^0}^1(E_0, E_1[-1])^* \otimes E_1[-1] \rightarrow E_2 \rightarrow E_0 \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (10.27)$$

а все остальные перестройки задаются универсальными точными тройками

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow E_{i-1} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_h^0}(E_i, E_{i+1}) \otimes E_i \rightarrow E_{i+1} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow E_{i-1}[-1] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{P}_h^0}(E_{i-1}, E_i)^* \otimes E_i[-1] \rightarrow E_{i+1}[-1] \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (10.28)$$

(первое используется для $i \leq -1$, а второе — для $i \geq 2$). При идентификации \mathcal{P}_h^0 с категорией модулей Кронекера над $H^* = \text{Hom}(E_0, E_1)^*$ начальные объекты $E_0, E_1[-1]$ переходят в неприводимые одномерные модули размерностей $(1, 0)$ и $(0, 1)$, которые очевидно μ -стабильны. Далее, исключительные объекты $E_{-1}, E_2[-1]$, полученные перестройками (10.27), переходят в модули диагональных эндоморфизмов с нулевым следом $H: \text{ad}(H) \hookrightarrow H \otimes H^*, \mathbb{C} \cdot \text{Id}_H \hookrightarrow H \otimes H^*$, которые также очевидно μ -стабильны. Все остальные перестройки (10.28) переходят в стандартные отражения этих полустабильных модулей в категории представлений колчанов¹. Вспомним (подробнее в [200]) что такие отражения переводят μ -стабильный модуль представленный левым отображением $f: U \hookrightarrow H \otimes V$ (обязательно инъективным) в модуль представленный линейным отображением $\text{coker}(f)^* \hookrightarrow H^* \otimes V^*$ в композиции с изоморфизмом $H^* \otimes V^* \xrightarrow{\sim} H \otimes V^*$ индуцированным некоторым фиксированным линейным изоморфизмом $H \xrightarrow{\sim} H^*$. Хорошо известно что такое отражение сохраняет μ -стабильность. \square

10.6.2. Общие замечания по поводу t -стабильности Пусть Ψ это модулярная t -стабильность на \mathcal{P}_h . Тогда все Ψ -полустабильные чистые объекты и их наклоны строго повышаются с уровнем. В самом деле, в разложении полустабильного объекта X в точную сумму $X = \bigoplus_i X_i$, чистых объектов объектов, все X_i должны быть полустабильны с тем же наклоном $\psi(X_i) = \psi(X)$. Но из выделенного треугольника (10.21)

$$U_1 \otimes E_1[i-1] \rightarrow X_i \rightarrow U_0 \otimes E_0[i]$$

следует неравенство $\psi(E_1[i-1]) < \psi(X_i) < \psi(E_0[i])$.

Далее, если X, Y Ψ -полустабильны с наклонами $\psi(X) < \psi(Y)$ и объект Z установленный в дестабилизирующий выделенный треугольник

$$X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow X[1]$$

тогда в разложении Хардера – Нарасимхана $Z \rightsquigarrow (G_0, G_1, \dots, G_n)$, наклоны всех частей лежат между наклонами X, Y :

$$\psi(X) \leq \psi(G_0) < \psi(G_1) < \dots < \psi(G_n) \leq \psi(Y), \quad \forall i,$$

в следствии противоположных неравенств: или $\psi(G_0) < \psi(X)$ или $\psi(G_n) > \psi(Y)$, запретит ненулевые отображения $Z \rightarrow G_0$ и $G_n \rightarrow Z$ приходящие из фильтрации Хардера – Нарасимхана.

Остаточная часть этого раздела посвящена доказательству следующего утверждения:

Предложение 10.2

Модулярная t -стабильность на \mathcal{P}_h единственна и совпадает с μ -стабильностью описанной в 10.6.1.

Доказательство состоит из двух шагов. В первую очередь, в 10.6.3, мы полностью описали все классы $m \in M = K_0(\mathcal{P}_h)$ которые реализуются как μ -полустабильные объекты. Это описание параллельно геометрической теории непрерывных дробей и само по себе достаточно интересно. Далее, в 10.6.4, мы получили это описание с

¹переводящие начальную вершину в конечную и наоборот

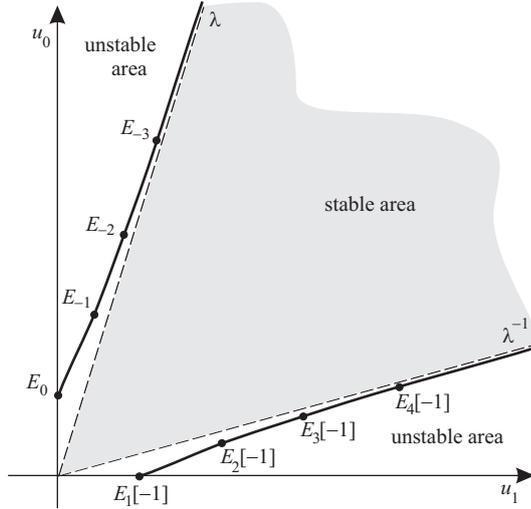


Рис. 22: Описание стабильных классов

замечаниями, описанными выше, чтобы сравнить μ -стабильность с произвольной модулярной t -стабильностью Ψ и проверили, что они должны иметь тот же набор полустабильных подкатегорий упорядоченный таким же образом.

10.6.3. Описание μ -полустабильных классов Будем обозначать вектор

$$m = x e_0 + y e_1 \in M$$

(соответствующий классу $x \cdot [E_0] + y \cdot [E_1]$) точкой с координатами (x, y) (смотри рис. 21). Целая точка на рис. 21 будет называться *стабильной*, если соответствующий класс в $K_0(\mathcal{P}_h)$ может быть реализован некоторым μ -стабильным объектом из \mathcal{P}_h .

Теперь заменим координаты (x, y) на координаты

$$(u_1, u_0) \stackrel{\text{def}}{=} (-y, x)$$

вычислим базис $(-e_1, e_0)$ сформированный классами $E_1[-1], E_0$ и перерисуем рис. 21 как показано на рис. 22 чтобы выделить классы элементов из ядра \mathcal{P}_h^0 , который заданы неотрицательными (u_1, u_0) . На рис. 22, наклон $\mu = u_0/u_1$ ничто иное как обычный геометрический наклон векторов и асимптотические направления гиперболы квадратично иррациональны

$$\lambda^{\pm 1} = (-h \pm \sqrt{h^2 - 4})/2.$$

Лемма 10.6

Если стабильный класс m удовлетворяет $\chi(m, m) > 0$, тогда $m = t \cdot e_i$ для некоторых $t, i \in \mathbb{Z}$, т.е. Все положительные стабильные классы целые кратные.

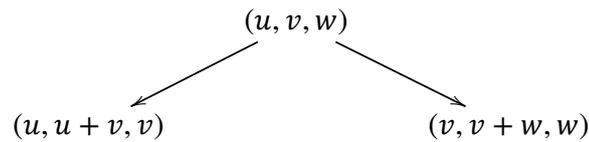
Доказательство. Пусть X μ полустабилен. Тогда X чист. Более того, мы можем сделать вывод, что X неразложимо, т.к. все прямые слагаемые полустабильных объектов тоже должны быть полустабильны с тем же наклоном. По Лемме лем. 10.4, все неразложимые объекты в положительном регионе исчерпываются исключительными объектами. \square

Теперь докажем, что все целые точки внутри «стабильной области» на рис. 22 могут быть реализованы некоторыми μ -стабильными объектами. Достаточно это понять только для несократимых целых векторов в стабильной области (тогда их произведения будут реализованы прямой суммой прямых сумм представляющих полустабильных объектов с ними самими). Хорошо известно, что все несократимые векторы могут быть перечислены проходами через вершины бесконечного бинарного дерева следующим образом.

Будем называть два несократимых целых вектора $u = (u_0, u_1)$, $v = (v_0, v_1)$ с неотрицательными координатами *соседствующими*, если

$$\det(u, v) \stackrel{\text{def}}{=} \det \begin{pmatrix} u_0 & v_0 \\ u_1 & v_1 \end{pmatrix} = -1.$$

Начнем с тройки векторов $\{(0, 1), (1, 1), (1, 0)\}$ и будем их изменять следующим образом: убирать самый левый или самый правый вектор и брать сумму двух оставшихся векторов как средний в новой тройке. Тогда мы получим бинарное дерево, вершины которого обозначены всеми тройками несократимых векторов (u, v, w) с неотрицательными координатами, такими что $v = u + w$ и все три упорядоченные пары (u, v) , (v, w) , (u, w) соседствующие. Ребра этого дерева соответствуют элементарным преобразованиям



Все несократимые векторы с неотрицательными координатами будут последовательно появляться в середине этих троек. Те из них, что лежат в «стабильной области» на рис. 22 могут быть индуктивно реализованы как μ -стабильные классы следующим образом:

Лемма 10.7

Пусть $X, Y \in \mathcal{P}_h^0$ являются μ -стабильными объектами классы которых $([X], [Y])$ соседствуют. Тогда в любом нетривиальном расширении $0 \rightarrow X \rightarrow Z \rightarrow Y \rightarrow 0$ средний член Z тоже μ -стабилен, классы $([X], [Z])$, $([Z], [Y])$ соседствующие, и оба пространства $\text{Hom}^0(Z, Y)$, $\text{Hom}^0(X, Z)$ ненулевые. Более того, если (Z, Y) не является исключительной парой, тогда $\text{Hom}^1(Y, Z) \neq 0$, и если (X, Z) не исключительная пара, то $\text{Hom}^1(Z, X) \neq 0$.

Доказательство. Т.к. $[Z] = [X] + [Y]$, прямое вычисление определителей показывает, что пары $([X], [Z])$, $([Z], [Y])$ соседствуют. Из этого сразу следует, что любой дестабилизирующий подобъект Z либо совпадает с Y или дестабилизирует Y (просто представьте соответствующую картину), из чего следует, что Z должен быть стабильным. Отсюда следует, что Hom^0 -пространства ненулевые. Чтобы вычислить $\text{Hom}^1(Y, Z)$, мы применим $\text{Hom}(Y, *)$ к нашему расширению. Т.к. $\text{Hom}^0(Y, X) = \text{Hom}^0(Y, Z) = 0$ по μ -стабильности, мы получаем точную последовательность

$$0 \rightarrow \text{Hom}^0(Y, Y) \rightarrow \text{Hom}^1(Y, X) \rightarrow \text{Hom}^1(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}^1(Y, Y) \rightarrow 0$$

Легко увидеть, что стабильные объекты определенные наклоном должны быть просты (смотри [208]). Итак, $\dim \text{Hom}^0(Y, Y) = 1$ и $\text{Hom}^1(Y, Z) = 0$ откуда $\dim \text{Hom}^1(Y, X) =$

1 и $\text{Hom}^1(Y, Y) = 0$. Это возможно только если Y исключительно и ортогонально Z . Следовательно, Z является кратным исключительно объекта, ортогонально Y . Т.к. Z чист и прост, он исключителен. Итак, (Z, Y) исключительная пара. \square

Следствие 10.3

μ -полустабильные классы в $K_0(\mathcal{P}_h)$ исчерпываются исключительными векторами и целыми векторами $u = (u_0, u_1)$ удовлетворяющих неравенству $\lambda^{-1} < \mu(u) = u_0/u_1 < \lambda$, где $\lambda = (h + \sqrt{h^2 - 4})/2$. Более того, для любых конкретных полустабильных векторов u, v с $\lambda^{-1} < \mu(u) \leq \mu(v) < \lambda$ существует цепь μ -полустабильных объектов (X_1, X_2, \dots, X_n) в ядре \mathcal{P}_h^0 таких что $[X_1] = u, [X_n] = v$, и $\text{Hom}^0(X_i, X_{i+1}) \neq 0$.

10.6.4. Доказательство предположения предл. 10.2 Пусть $\{P_\psi\}_{\psi \in \Psi}$ произвольная модулярная стабильность. В первую очередь, мы сравним Ψ с μ -стабильностью на абелевом ядре \mathcal{P}_h .

Лемма 10.8

Объект $X \in \mathcal{P}_h^0$ является Ψ -полустабильным если он μ -полустабилен. Более того $\psi(X) > \psi(Y) \iff \mu(X) > \mu(Y)$ для любого полустабильного объекта $X, Y \in \mathcal{P}_h^0$.

Доказательство. Мы будем использовать индукцию по сумме $s = u_0 + u_1$ координат классов $[X], [Y]$, которые лежат внутри координатного квадранта, показанного на рис. 22. База индукции, когда X, Y лежат среди $\{E_1[-1], E_0\}$, очевидна.

Пусть X μ -полустабилен и $s([X]) = t$. Если X не Ψ -полустабилен, тогда имеет нетривиальную фильтрацию Хардера – Нарасимхана $X \rightsquigarrow (G_0, G_1, \dots, G_n)$ уважающую Ψ . Т.к. каждый G_i является Ψ -полустабильным, лежит в ядре, и $s([G_i]) < s([X])$, по предположению индукции все G_i являются μ -полустабильными и их μ -наклоны упорядочены также, как их ψ -наклоны. Итак, они дают μ -дестабилизирующую фильтрацию также и для X . Это противоречит μ -полустабильности X и доказывает, что X Ψ -полустабилен.

Те же аргументы показывают, что любой Ψ -полустабильный объект X должен быть μ -полустабилен. Остается проверить, что для любого Ψ -полустабильного Y с $s([Y]) < t$ неравенства $\psi(Y) < \psi(X)$ и $\mu(Y) < \mu(X)$ эквивалентны. Пусть $\mu(Y) < \mu(X)$. Рассмотрим цепь μ -полустабильных объектов (X_1, X_2, \dots, X_n) из Вывода сл. 10.3. По предположению индукции все X_i являются Ψ -полустабильными. Тогда их ψ -наклоны должны быть упорядочены также, как и μ -наклоны, т.к. $\text{Hom}^0(X_i, X_{i+1}) \neq 0$. Из того что Ψ модулярен, мы делаем вывод, что $\psi(Y) < \psi(X)$. \square

Пусть $\Psi' \subset \Psi$ это набор всех Ψ -полустабильных подкатегорий P_ψ , лежащих внутри абелевого ядра \mathcal{P}_h^0 и все их сдвиги. Из леммы следует, что Ψ' совпадает с набором всех μ -полустабильных подкатегорий и упорядочено также. Действительно, $\Psi' = \Psi$, т.к. для набора Ψ' достаточно построить фильтрацию Хардера – Нарасимхана для любого ненулевого объекта X в \mathcal{P}_h . В самом деле, т.к. $X = \bigoplus_i X_i$, где X_i чистый уровня i , достаточно построить фильтрацию Хардера – Нарасимхана для чистого X уровня 0. Но в этом случае μ -фильтрация дает нам нужный результат. Это доказывает Предположение предл. 10.2.

10.6.5. Замечание по поводу t -структуры на \mathcal{P}_h Лучшие модулярные t -стабильности на \mathcal{P}_h порождают непрерывное семейство t -структур на \mathcal{P}_h как описано ниже. Нарисуем любую прямую $u_0 = \vartheta u_1$ на рис. 22 и сплавим вместе все полустабильные

категории лежащие в одной полуплоскости относительно это прямой. Это заставит нас абелево ядро для некоторой t -структуры на \mathcal{P}_h . Мы оставляем читателю проверку того, что это абелево ядро эквивалентно категории когерентных пучков на надлежащим образом взвешенной проективной прямой зависит от ϑ, λ .

Также поучительно сравнить наше описание *всех* (достаточно хороших) t -стабильностей на \mathcal{P}_h с «пространствами модулей данных о стабильности Т. Бриджленда» описанных в свежей статье¹ [206]: мы сразу видим, что функции наклона Бриджленда обслуживает в точности все возможные порядки, сохраняющие сплав, полученные проведением граничной прямой, как нарисованно выше.

10.7. Некоторые замечания относительно старших размерностей

10.7.1. Категории порожденные исключительными Ном-набор Мы называем упорядоченный набор объектов

$$(E_0, E_1, \dots, E_n) \quad (10.29)$$

исключительным Ном-набор, если любая пара (E_i, E_j) , с $i < j$ является исключительной Ном-пара. Пусть триангулируемая категория \mathcal{E} порождена исключительной Ном-набор (10.29). Тогда есть удобная t -структура на \mathcal{E} приходящая из теории представления колчанов ([196], [197]). Она формируется парой полных подкатегорий $(\mathcal{E}^{\leq 0}, \mathcal{E}^{\geq 0})$, где $\mathcal{E}^{\leq 0}$ порождена всеми $E_i[m]$ где $m \geq -i$ (т. е. $E_0, E_1[-1], \dots, E_n[-n]$) и всеми их положительными поворотами $E_i[-i + p]$, $p \geq 1$, и $\mathcal{E}^{\geq 0}$ порождена всеми $E_i[m]$, где $m \leq -i$ (т. е. теми же $E_0, E_1[-1], \dots, E_n[-n]$ и всеми их отрицательными поворотами). Ядро этой t -структуры является абелевой категорией² \mathcal{A} , которая состоит из всех объектов $X \in \mathcal{E}$ представимых (левыми) свертками

$$X \rightarrow V_0 \otimes E_0 \rightarrow V_1 \otimes E_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_n \otimes E_n .$$

всевозможных комплексов вида³

$$V_0 \otimes E_0 \rightarrow V_1 \otimes E_1 \rightarrow \dots \rightarrow V_n \otimes E_n , \quad (10.30)$$

Все аксиомы для t -структуры здесь абсолютно очевидны, за исключением разве что той, что утверждает, что любой объект $X \in \mathcal{E}$ включается в выделенный треугольник

$$X^{\leq 0} \rightarrow X \rightarrow X^{\geq 1} \rightarrow X^{\leq 0}[1] .$$

Чтобы проверить эту аксиому, заметим, что ортогональное разложение X по объектам E_i задает на X t -фильтрацию

$$X \rightsquigarrow \left(\bigoplus_i V_0^i \otimes E_0[-i], \dots, \bigoplus_i V_n^i \otimes E_n[-i] \right) .$$

Перестроим коэффициенты в соответствии с требуемым порядком:

$$\dots E_0 < E_1[-1] < \dots < E_n[-n] < E_0[1] < E_1[0] \dots$$

¹которая появилась, когда эта статья была уже почти готова

²на самом деле, А. Бондал доказал, что эта абелева категория эквивалентна категории представлений конечномерной алгебры $\text{End} \left(\bigoplus_{i=0}^n E_i \right)$ но нам это описание дальше не понадобится

³на самом деле, этот комплекс задает ортогональное разложение X по полуортогональному базису $\{E_i\}$, см. [204]; в частности, оно функториально в X

Это возможно в силу ортогональности

$$\text{Hom}^1(E_i[k], E_j[m]) = 0 \quad \text{только если не } i < j \text{ и } m - k = -1,$$

Существование требуемого треугольника вытекает теперь из аксиомы октаэдра:

Лемма 10.9

Пусть объект X имеет t -фильтрацию $X \rightsquigarrow (\dots, G_{i-1}, G_i, \dots)$ такую что $\text{Hom}^1(G_{i-1}, G_i) = 0$. Тогда существует фильтрация $X \rightsquigarrow (\dots, G_i, G_{i-1}, \dots)$

10.7.2. R -стабильности на \mathcal{E} . Имеется огромное семейство тонких модулярных t -стабильностей на \mathcal{E} , индуцированных тонкими R -стабильностями на абелевом ядре \mathcal{A} . Согласно [208], каждый частичный порядок на \mathcal{A} , удовлетворяющий условиям конечности и лемме о качелях из 10.3.2, задаёт данные стабильности на \mathcal{A} . На уровне $K_0(\mathcal{E})$ такие частичные порядки имеют достаточно прозрачное геометрическое описание, которое мы сейчас обсудим.

Пусть для простоты $n = 2$, т. е. \mathcal{E} порождается исключительной тройкой¹

$$E_0, E_1, E_2.$$

Обозначим через S сферу, полученную факторизацией множества ненулевых векторов вещественного векторного пространства

$$\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\mathcal{E})$$

по действию мультипликативной группы $\mathbb{R}_{>0}$ скалярными растяжениями. Функтор сдвига $X \mapsto X[1]$ действует на S центральной симметрией $v \mapsto -v$. Классы нужных нам элементов \mathcal{A} представлены на S рациональными точками треугольника $\sigma = (e_0, e_1, e_2)$, натянутого на классы исключительных образующих $E_0, E_1[-1], E_2[-2]$.

Если предпорядок на \mathcal{A} удовлетворяет лемме о качелях, то дуги вырезанные всеми рациональными геодезическими окружностями на S элементами σ должны быть упорядочены таким способом, чтобы этот порядок индуцировал трансляционное соотношение на множестве рациональных точек σ . Иными словами, все рациональные геодезические дуги в σ должны быть оснащены стрелками (следующие по дуге в сторону увеличения порядка) таким способом, что не возникнет циклических треугольников, то есть все рациональные геодезические треугольники в σ должны иметь максисальную. Минимальную и среднюю вершины как изображено на рисунке 23. Возьмем такой рациональный треугольник и назовем его *основанием* ребро, соединяющее экстремальные вершины и противоположащее средней вершине.

Из полной транзитивности следует, что для каждого рационального треугольника внутри σ существует *иррациональная* прямая ℓ из средней вершины на основание (пунктирная линия на рис. 23) такая что все рациональные прямые проходящие через среднюю вершину на основание и лежащие в левой полуплоскости ограниченной ℓ упорядочены как левая сторона треугольника и все рациональные прямые по правую сторону ℓ упорядочены как правая сторона треугольника. Более

¹общий случай абсолютно аналогичен — просто все треугольники заменяются на симплексы, а прямые — на гиперплоскости

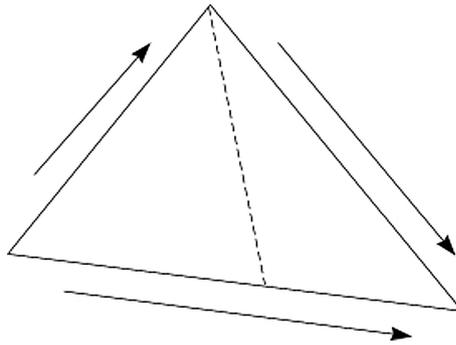


Рис. 23: Ориентированные геодезические треугольники

того, из транзитивности следует что эти иррациональные прямые не имеют точек пересечения внутри σ .

Наоборот, каждое непрерывное распределение иррациональных прямых без пересечений внутри σ обеспечивает все рациональные геодезические дуги внутри σ частичным порядком подходящим, чтобы определить R -стабильность. В самом деле, если взять непрерывную ориентацию каждой иррациональной линии семейства, мы получим корректно определенные непрерывные понятия правой и левой стороны линии, проходящей через семество. Имея рациональную прямую ϱ , рассмотрим ее пересечение с некоторой иррациональной прямой не из нашего семейства и упорядочем нарисовав стрелочку слева направо уважая выбранную прямую. Очевидно, это ориентация не зависит от выбора иррациональной прямой. Имея все эти ориентации мы получаем рациональные точки σ транзитивным частичным порядком.

В общем случае треугольник σ должен быть заменен на симплекс, образованный классами $E_i[-i]$, а непрерывное распределение иррациональных прямых на непрерывное распределение иррациональных гиперплоскостей, т.е. подходящей иррациональной кривой на вещественном грассманиане коразмерности два в $\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} K_0(\mathcal{E})$.

Напоследок заметим, что стабильности Бриджлэнда соответствуют семействам иррациональных прямых (гиперповерхностей) образующим пучок прямых (гиперплоскостей), проходящих через фиксированную точку вне σ . Значит, они образуют довольно тонкое подмножество в множестве всех модулярных t -стабильностей на \mathcal{A} .

11. ПРОГРАММА ВНЕДРЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ НИР В ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЙ ПРОЦЕСС

11.0.3. Взаимное проникновение научной и образовательной составляющей составляющих Все сотрудники нашего НОЦ ведут активную преподавательскую работу на факультете математики НИУ ВШЭ, в Независимом Московском университете, в МГУ, в МФТИ и на базовых кафедрах этих университетов в МИ РАН, в ИТЭФ и в ИП-ПИ. Сложившиеся традиции московского физико-математического образования не позволяют отделить учебно-методическую деятельность сотрудников нашего НОЦ от «чисто научных» изысканий. Причин этому несколько.

11.0.4. Стремление к достижению результатов высшего мирового уровня. Исследователи НОЦ и научные школы, к которым они принадлежат, занимают лидирующие мировые позиции по тем направлениям исследований, в которых они работают. Сама обстановка внутри этих школ, обстановка проводимых ими семинаров с самого начала ориентирует участников на достижение высочайших результатов, а в этой связи — на быстрое и эффективное овладение научными дисциплинами, необходимыми для получения таких результатов. Методические рекомендации, даваемые профессорами студентам направлены на скорейшее включение последних в научно-исследовательскую деятельность по кратчайшим и самым эффективным траекториям. Даже такие классические дисциплины как математический анализ, начальная геометрия и механика читаются у нас с позиций наиболее эффективной приложимости к наиболее интересным современным исследованиям.

11.0.5. Большое число спецкурсов и спецсеминаров. Научная работа в нашем НОЦ ведётся в рамках научных семинаров. Эти семинары полностью открыты для публики, а обстановка на факультете всячески стимулирует студентов (в том числе и младших курсов) к активному участию таких семинарах. Опыт показывает, что это — наилучший способ вовлечения студентов в научную работу, и многие наши студенты уже на 3 – 4 курсах становятся соавторами, а иногда и авторами содержательных научных результатов, публикуемых в ведущих научных журналах мира.

11.0.6. Ежегодное обновление и гибкость фундаментальных курсов. Достижение целей, описанных выше в 11.0.4, требует ежегодного обновления курсов. Замечательной традицией преподавания в Независимом Московском университете, перешедшей далее и на ф-т математ. НИУ ВШЭ, является то, что *все* (включая т. н. «регулярные» и «базисные») курсы являются *авторскими* в том смысле, что их содержание в первую очередь нацелено на научные интересы лектора и подчинено его точке зрения (как современного активного исследования) на роль дисциплины в решении актуальных научных задач, а уж потом на официальные «образовательные стандарты», зафиксированные в методической документации 20-ти (а то и 50-тилетней давности).

11.0.7. Индивидуальный подход и стимулирование самостоятельных занятий. Учебный процесс, принятый у нас, ставит во главу угла самостоятельное индивидуальное решение студентами поставленных преподавателем задач с последующим ин-

дивидуальным же обсуждением этих решений с преподавателем. Это требует продумывания больших циклов задач, способных заинтересовать студентов, привить у них вкус к самостоятельным исследованиям и почувствовать уверенность в собственном исследовательском потенциале.

11.0.8. Непрерывность и преемственность образования. Организация учебного процесса в описанном выше ключе требует огромного количества преподавателей. Поэтому в преподавательскую работу вовлекаются сами студенты. Профессора и доценты ведут научные семинары, читают лекции и разрабатывают подборки научных задач, задач для индивидуального самостоятельного решения и курсовых и/или дипломных работ, аспиранты и магистранты принимают решения этих задач (сиречь ведут индивидуальные беседы) на младших курсах и помогают более молодым участникам научных семинаров побыстрее войти в курс дела, студенты бакалавриата преподают в физико-математических школах и на кружках для младших школьников. Эта гибкая система обладает замечательными способностью к самоорганизации и обратными связями: интересующийся школьник может вживую видеть, как делаются современные научные открытия, сходяв вместе со своим преподавателем на научный семинар, в котором тот участвует, а ведущие профессора могут начинать работать со своими будущими студентами и аспирантами прямо со школьной скамьи.

11.0.9. Достигнутые нами результаты. В рамках работы по государственному контракту № 02.740.11.0608 от 29 марта 2010 г. «Разработка новых методов изучения интегрируемых систем и пространств модулей в геометрии, топологии и математической физике» сотрудниками НОЦ было разработано и внедрено в учебный процесс много новых учебных курсов, а также проведено большое количество регулярных научно-исследовательских семинаров. Ниже мы приводим перечень этих курсов и семинаров по учебным академическим годам.

11.1. Курсы и семинары 2009/2010 учебного года

В 2009/2010 учебном году нами были разработаны заново или полностью переработаны и введены в учебный процесс следующие курсы:

- Математический анализ — 2 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Алгебра — 2 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Топология – 2 — курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Компьютерная математика — 2 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Дифференциальные уравнения — 2 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Теория функций комплексного переменного — 2 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ

Также нами были разработаны новые подборки задач и индивидуальных заданий и проведены семинары по следующим дисциплинам:

- Геометрия 2 курс, НМУ
- Комплексный анализ — 3 – 4 курс, НМУ

Также в рамках НОЦ функционировали следующие научно-исследовательские семинары:

- Основные понятия математики — НИС для студентов, факультет математики НИУ ВШЭ
- Симметрическая группа, симметрические функции, грассманианы и флаги — НИС для студентов, факультет математики НИУ ВШЭ
- Спецсеминар по алгебре — НИС для студентов, факультет математики НИУ ВШЭ
- Избранные вопросы геометрии и топологии в задачах и примерах — НИС для студентов
- Спецсеминар кафедры дискретной математики — НИС для студентов, факультет математики НИУ ВШЭ
- Выпуклые множества — НИС, НМУ

11.2. Курсы и семинары 2010/2011 учебного года

В 2010/2011 учебном году нами были разработаны заново или полностью переработаны и введены в учебный процесс следующие курсы:

- Теория вероятностей — 3 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Функциональный анализ — 3 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Гамильтоновы и интегрируемые системы — 3 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Гомологическая алгебра — 3 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Уравнения в частных производных — 3 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Группы и алгебры Ли — 3 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Basic Algebra (Основы алгебры) — 1 курс магистратуры, факультет математики НИУ ВШЭ совместно с программой Math in Moscow. Курс читался на английском языке
- Дополнительные главы топологии — 1 курс магистратуры НИУ ВШЭ

- Комплексная алгебраическая геометрия — 1 курс магистратуры, факультет математики НИУ ВШЭ
- Algebraic Geometry.Start Up Course — 1 курс магистратуры, факультет математики НИУ ВШЭ совместно с программой Math in Moscow. Курс читался на английском языке
- Современные компьютерные технологии — 1 курс магистратуры, факультет математики НИУ ВШЭ
- Дополнительные главы алгебры — 1 курс магистратуры, факультет математики НИУ ВШЭ
- История и методология математики — 1 курс магистратуры, факультет математики НИУ ВШЭ

Также нами были разработаны новые подборки задач и индивидуальных заданий и проведены семинары по следующим дисциплинам:

- Геометрия — 1 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Динамические системы — 2 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Теория функции комплексного переменного — 2 курс бакалавриата. факультет математики НИУ ВШЭ

Также в рамках НОЦ функционировали следующие научно-исследовательские семинары:

- Геометрия и группы — НИС для студентов, факультет математики НИУ ВШЭ
- Арифметика и приложения — НИС для студентов, факультет математики НИУ ВШЭ
- Дискретные динамические системы — НИС для студентов, факультет математики НИУ ВШЭ
- Симметрические функции, грассманианы и флаги — НИС для студентов, факультет математики НИУ ВШЭ
- Теория представлений — НИС для студентов, факультет математики НИУ ВШЭ
- Основные понятия математики — НИС для студентов, факультет математики НИУ ВШЭ

11.3. Курсы и семинары 2011/2012 учебного года

В 2011/2012 учебном году нами были разработаны заново или полностью переработаны и введены в учебный процесс следующие курсы:

- Вариационные исчисления и оптимальные уравнения — 4 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Дифференциальная геометрия и общая теория относительности — 4 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Инварианты и представления классических групп — 4 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Квантовая механика — 4 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Введение в топологию 1 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Дополнительные главы геометрии и топологии — 1 курс магистратуры, факультет математики
- Дополнительные главы математической физики 1 курс магистратуры,
- Дополнительные главы математической физики 2 курс магистратуры
- Статистическая физика — 2 курс магистратуры
- Комбинаторика — 1 курс магистратуры, факультет математики НИУ ВШЭ совместно с программой Math in Moscow. Курс читался на английском языке
- Математические методы естествознания — 1 курс магистратуры, факультет математики НИУ ВШЭ
- Математические эксперименты с использованием компьютерных технологий — 1 курс магистратуры, факультет математики НИУ ВШЭ
- История и методология математики — аспиранты факультета математики НИУ ВШЭ

Также нами были разработаны новые подборки задач и индивидуальных заданий и проведены семинары по следующим дисциплинам:

- Введение в дискретную математику — 1 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Компьютерные вычисления — 2 курс бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Algebraic Geometry.Start Up Course — 1 курс 1 курс магистратуры, факультет математики НИУ ВШЭ совместно с программой Math in Moscow. Курс читался на английском языке

- Basic Algebra (Основы алгебры) — 1 курс магистратуры, факультет математики НИУ ВШЭ совместно с программой Math in Moscow. Курс читался на английском языке
- Дополнительные главы алгебры — 1 курс магистратуры, факультет математики НИУ ВШЭ
- Топология — 1 курс, НМУ

В дополнение к уже функционирующим научным семинарам, в рамках НОЦ 2011/2012 учебном году начали функционировать новые научно-исследовательские семинары и спецкурсы:

- Эллиптические кривые, модулярные формы и представления Галуа — НИС для студентов, факультет математики НИУ ВШЭ
- Теория представлений алгебры Вирасоро и конформная теория поля — спец.курс для студентов 3,4 курса бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- A_∞ -структуры — НИС для студентов, факультет математики НИУ ВШЭ
- Комплексные поверхности НИС для аспирантов, НМУ
- Теория чисел — спец.курс для магистрантов, НМУ
- Программа Мори спец.курс для магистрантов, НМУ

11.4. Курсы и семинары 2012/2013 учебного года

В 2012/2013 учебном году нами были разработаны заново или полностью переработаны и введены в учебный процесс следующие курсы:

- Механика и теория поля — для студентов 3 и 4 курсов бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Представления конечных групп — для студентов 3 и 4 курсов бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Пучки и гомологическая алгебра — для студентов 3 и 4 курсов бакалавриата, факультет математики НИУ
- Прикладные методы анализа — для студентов 3 и 4 курсов бакалавриата, факультет математики НИУ ВШЭ
- Основы квантовой теории — 2 курс магистратуры НИУ ВШЭ
- Методы функционального анализа — 2 курс магистратуры НИУ ВШЭ
- Basic Representative Theory — 1 курс магистратуры, факультет математики НИУ ВШЭ совместно с программой Math in Moscow. Курс читался на английском языке

- Topology — 1 курс магистратуры факультет математики НИУ ВШЭ, курс читается на английском языке
- Теория поля — 1 курс магистратуры факультет математики НИУ ВШЭ
- Теория групп и интегрируемые уравнения — 1 курс магистратуры факультет математики НИУ ВШЭ

В рамках НОЦ в этом году продолжают функционировать все научно-исследовательские семинары, упомянутые выше.

11.5. Образовательные программы дополнительного обучения

За период работы по государственному контракту № 02.740.11.0608 от 29 марта 2010 г. «Разработка новых методов изучения интегрируемых систем и пространств модулей в геометрии, топологии и математической физике» сотрудниками НОЦ были разработаны и проведены следующие программы дополнительного обучения и повышения квалификации:

- Вложенные графы (Embedded graphs), курс читается на английском языке, рассчитан на программы Math in Moscow, аспирантов и вольнослушателей, лектор: С. К. Ландо
- Когомологии алгебр Ли и теорема Римана-Роха, научно-исследовательский семинар, Лектор: Б. Л. Фейгин
- Гомологическая алгебра (Homological Algebra) научно-исследовательский семинар, лектор: М. В. Финкельберг
- Характеристические классы и теория пересечений, спецсеминар, лектор: С. К. Ландо
- Римановы поверхности, алгебры Ли и математическая физика спецсеминар, лектор: О. В. Шварцман
- Кэлеровы многообразия и комплексная алгебраическая геометрия, совместный курс с Математическим институтом им. В. А. Стеклова, лектор: М. С. Вербицкий
- Научно-исследовательский семинар по теории чисел, совместны курс с Лабораторией Понселе, лектор Зыкин А.И.
- Алгебра — мини-курс в рамках программы «Развитие профессиональной готовности учителя математики к дистанционному обучению одаренных учащихся» Лектор: Л. Г. Рыбников
- Комбинаторика — миникурс в рамках программы «Развитие профессиональной готовности учителя математики к дистанционному обучению одаренных учащихся» лектор: Е. Ю. Смирнов
- Олимпиадная геометрия — миникурс в рамках программы «Развитие профессиональной готовности учителя математики к дистанционному обучению одаренных учащихся» лектор: Е. Ю. Шварцман

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи шестого этапа разработки новых методов изучения интегрируемых систем и пространств модулей в геометрии, топологии и математической физике были полностью решены. При этом коллективом НОЦ получены следующие важные результаты:

- Мы интерпретируем ПБВ-изоморфизм как деформацию полиномиальной алгебры в универсальную обёртывающую, а также как вариант экспоненциального отображения и интерпретируем характер Тодда как инструмент для записи действия инвариантных векторных полей на алгебре функций на группе в экспоненциальных ПБВ-координатах. Это наблюдение переформулируется в различных геометрических, категорных и топологических ситуациях: в терминах классов Атьи, гомологий и когомологий Хохшильда, алгебры (производных) эндоморфизмов тождественного (производного) эндофунктора. Это также даёт новый взгляд на двойственность Серра и теорему Римана – Роха.
- Мы показываем, что число проходящих через циклы C_1, C_2, \dots, C_k голоморфных отображений из римановой поверхности Σ рода g в торическое многообразие M может быть представлено как сумма по графам того же рода в теории Бершадского – Чекотти – Оогури – Вафы (БЧОВ). Для этого мы заменяем торическое многообразие на его тропическую модель, а циклы C_α — на соответствующие тропические циклы и рассматриваем тропические кривые, проходящие через них. Тропические кривые задаются оснащёнными графами, которые могут быть проинтерпретированы как диаграммы Фейнмана в теории БЧОВ.
- Мы исследуем гипотезу о том, что коэффициент при возможной старшей степени значения весовой системы, которая строится по алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$, на проекции хордовой диаграммы на примитивные совпадает с алгебраическим числом гамильтоновых циклов в ориентированном графе пересечений ориентированной хордовой диаграммы. Мы проверяем, что эта величина является весовой системой и зависит лишь от матроида¹ графа пересечений. Вопрос, можно ли определить естественный инвариант матроидов со значениями в кольце многочленов от одной переменной, такой, что его значения на матроидах графов пересечений совпадают со значениями весовой системы, строящейся по алгебре Ли $\mathfrak{sl}(2)$, является, судя по всему, весьма нетривиальным.
- С помощью интегрируемой системы q -Тоды, полученной при помощи аналога редукции Костанта – Уиттэкера для квантовых групп², мы определяем занумерованное доминантными весами $\check{\lambda}$ полупростой односвязной группы Ли G над полем \mathbb{C} семейство функций q -Уиттэкера

$$\Psi_{\check{\lambda}}(q, z),$$

¹напомним, что матроид графа состоит из циклов в нем, понимаемых как подмножества в множестве рёбер графа

²см. [44] и [59]

которые образуют семейство инвариантных полиномов на максимальном торе $T \subset G$ от переменной $z \in T$ с коэффициентами, являющимися рациональными функциями переменной $q \in \mathbb{C}^*$. Для групп G типа ADE мы доказываем, что функция

$$\widehat{\Psi}_{\check{\lambda}}(q, z) = \Psi_{\check{\lambda}}(q, z) \cdot \prod_{i \in I} \prod_{r=1}^{\langle \alpha_i, \check{\lambda} \rangle} (1 - q^r)$$

(где I — множество вершин диаграммы Дынкина группы G) равна характеру конечномерного $G[[t]] \rtimes \mathbb{C}^*$ -модуля Демазюра $D(\check{\lambda})$. Если же G имеет другой тип, то выполняется подкрученный аналог этого же утверждения. Этот результат также известен для функций $\Psi'_{\check{\lambda}}$ из [58] и [56], однако, наши рассуждения используют алгебро-геометрические методы, развитые в [39] и полностью отличаются от [58] и [56] (в частности, мы даём новую алгебро-геометрическую интерпретацию модулей $D(\check{\lambda})$).

- В этом разделе обсуждаются специальные решения интегрируемых систем, начиная с хорошо известных бездисперсионных иерархий КдФ и Тоды, для которых проще всего построить производящие функции классов Громова – Виттена в терминах рациональной комплексной кривой (топологической теории струн типа A). В контексте зеркальной теории эти производящие функции можно отождествить с препотенциалами комплексных многообразий, и мы приводим несколько новых явно вычисляемых примеров таких препотенциалов. Для кривых старших родов, отвечающих в данном контексте неабелевым калибровочным теориям в рамках двойственности между топологическими струнами и калибровочными теориями, аналогичные решения строятся используя расширенный базис абелевых дифференциалов, включающий вообще говоря дифференциалы с особенностями в точках ветвления кривой. Связь между производящими функциями классов Громова – Виттена и препотенциалами комплексных многообразий детально изучается и явно просчитывается на разветвлённых накрытиях римановой сферы \mathbb{CP}_1
- Мы развиваем идеи и результаты, полученные на четвёртом этапе исследований (см. раздел 4 в [4]). Обсуждается соотношение между препотенциалами Виттена – Зайберга, функциями Некрасова и матричными моделями. Показано на квазиклассическом уровне, что матричные модели типа Егучи – Янга описывают инстантонные вклады в деформированную статсумму суперсимметричной калибровочной теории. Изучается подробно построенное явно точное решение четырехмерной конформной теории, а также обсуждаются некоторые аспекты его связи с недавно предложенными логарифмическими β -ансамблями. Рассматривается также «квантование» этой картины в терминах двумерной конформной теории с расширенной симметрией и подчеркивается отличие этой процедуры от хорошо известной картины пертурбативного разложения в матричных моделях. Вместо этого представление функций Некрасова с помощью конформных блоков или векторов Уитеккера предлагает их нетривиальную связь с пространствами Тейхмюллера и квантовыми интегрируемыми системами.

- Мы строим и исследуем связи между различными разложениями результатов и производящими функциями, возникающими в современной теоретической физике при анализе маломерных моделей (матричных и конформных теорий, теорией узлов и т. п.). Особое внимание уделяется явным эффективным формулам для результатов, практически полезным в современных исследованиях (эти наши формулы уже нашли применения в работах [152], [153], [154], [155], [156]). Кроме того, мы даём краткий обзор других известных связей между задачами нелинейной алгебры и 0-, 1-, 2- и 3-мерными квантовыми теориями.
- Мы интерпретируем фильтрации Гардера – Нарасимхана как случайные процессы в частично упорядоченном множестве наклонов и доказываем функториальность фильтров Гардера – Нарасимхана. В условиях естественной конечности мы строим тончайшее измельчение t -стабильности на абелевой категории. Мы вводим понятие модулярной t -стабильности (чьи полустабильные подкатегории могут различаться по уровню K_0) и даём полное описание совершенных и модулярных t -стабильностей на категории, порождённой исключительной парой. Для категорий, порождённых исключительными наборами большей длины мы строим большое семейство модулярных t -стабильностей, зависящих от выбора иррациональной кривой на подходящем грасмариане.

Все полученные результаты являются новыми, находятся на переднем крае современного развития мировой науки по рассматриваемым направлениям, дают исчерпывающие ответы на многие вопросы, поставленные на предыдущих этапах исследований, и ставят целый ряд новых интересных задач, привлекающих внимание российских и зарубежных специалистов по геометрии пространств модулей, интегрируемым системам и их приложению к задачам квантовой математической физики. Дальнейшие исследования поставленных проблем могут служить хорошим источником тем для дипломных и диссертационных работ и будут способствовать закреплению студентов и молодых учёных в научной работе.

Таким образом, все задачи, поставленные перед коллективом НОЦ государственным контрактом № 02.740.11.0608 «Разработка новых методов изучения интегрируемых систем и пространств модулей в геометрии, топологии и математической физике» от 29 марта 2010 г. были успешно решены.

СПИСОК
ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- 1 Отчёт о научно-исследовательской работе по государственному контракту № 02.740.11.0608. Первый этап / НОЦ факультета математики ВШЭ // На правах рукописи, М. 2010.
- 2 Отчёт о научно-исследовательской работе по государственному контракту № 02.740.11.0608. Второй этап / НОЦ факультета математики ВШЭ // На правах рукописи, М. 2010.
- 3 Отчёт о научно-исследовательской работе по государственному контракту № 02.740.11.0608. Третий этап / НОЦ факультета математики НИУ ВШЭ // На правах рукописи, М. 2011.
- 4 Отчёт о научно-исследовательской работе по государственному контракту № 02.740.11.0608. Четвёртый этап / НОЦ факультета математики НИУ ВШЭ // На правах рукописи, М. 2011.
- 5 Отчёт о научно-исследовательской работе по государственному контракту № 02.740.11.0608. Пятый этап / НОЦ факультета математики НИУ ВШЭ // На правах рукописи, М. 2012.
- 6 N. Markarian. The Atiyah class, Hochschild cohomology and the Riemann – Roch theorem// arXiv:math/0610553v3 [math.AG]
- 7 M. F. Atiyah. Complex analytic connections in fibre bundles// Trans. Amer. Math. Soc. – V.85 – 1957 – P.181 – 207
- 8 N. Bourbaki. Éléments de mathématique. Fasc. XXXVII. Groupes et algèbres de Lie. Chapitre II: Algèbres de Lie libres. Chapitre III: Groupes de Lie// Hermann – Paris – 1972
- 9 N. Bourbaki. Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitre 10. Algèbre homologique// Masson – Paris – 1980
- 10 A. Căldăraru. The Mukai pairing. II. The Hochschild – Kostant – Rosenberg isomorphism// Adv. Math. – V.194 – N.1 – 2005 – P.34 – 66
- 11 B. Conrad. Grothendieck duality and base change// Lecture Notes in Mathematics – V.1750 of – Springer-Verlag – 2000
- 12 J. Dieudonné, A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. IV. Étude locale des schémas et des morphismes de schémas. I// Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. – N.20 – 1964 – P.259
- 13 M. Gerstenhaber, S. D. Schack. Algebras, bialgebras, quantum groups, and algebraic deformations// In Deformation theory and quantum groups with applications to mathematical physics (Amherst, MA, 1990) – Contemp. Math. – V.134 – 1992 – P.51 – 92
- 14 R. Hartshorne. Residues and duality// Lecture Notes in Mathematics – V.20 – 1966.
- 15 G. Hochschild, B. Kostant, A. Rosenberg. Differential forms on regular affine algebras// Trans. Amer. Math. Soc. – V.102 – 1962 – P.383 – 408
- 16 L. Illusie. Complexe cotangent et déformations. I// Springer-Verlag – Berlin – 1971

- 17 J. P. May. The additivity of traces in triangulated categories// *Adv. Math.* – V. 163 – N. 1 – 2001 – P. 34–73
- 18 N. R. O'Brian, D. Toledo, Y. L. L. Tong. The trace map and characteristic classes for coherent sheaves// *Amer. J. Math.* – V. 103 – N. 2 – 1981 – P. 225–252
- 19 A. Ramadoss. The relative Riemann – Roch theorem from Hochschild homology// [math/0603127](https://arxiv.org/abs/math/0603127).
- 20 R. G. Swan. Hochschild cohomology of quasiprojective schemes// *J. Pure Appl. Algebra* – V. 110 – N. 1 – 1996 – P. 57–80
- 21 A. Yekutieli. The continuous Hochschild cochain complex of a scheme// *Canad. J. Math.* – V. 54 – N. 6 – 2002 – P. 1319–1337
- 22 A. L. Gorodentsev, A. S. Losev, V. E. Lysov. Functorial A_∞ -coproduct of combinatorial simplicial chains transferred to itself under barycentric subdivision // ESI preprint <http://www.mat.univie.ac.at/~esiprpr/shadow/esi2257.html>
- 23 S. Eilenberg, S. MacLane. On the groups $H(\pi, n)$, I & II// *Ann. Math.* – V. 58 – 1953 – P. 55--106 & V. 60 – 1954 – P. 49--139
- 24 Д. Б. Фукс, А. Т. Фоменко. Курс гомотопической топологии// М. – Наука – 1989
- 25 S. I. Gelfand, Yu. I. Manin. *Methods of homological algebra*// Springer – 1996
- 26 V. K. A. M. Gugenheim, L. A. Lambe. Perturbation theory in differential homological algebra, I & II// *IL. J. Math.* – V. 33 – 1989 – P. 556--582 & V. 35 – 1991 – P. 359--373 – <http://www.math.su.se/~lambe/public/pubs.html>
- 27 J. Huebschmann and T. Kadeishvili. Small models for chain algebras// *Math. Z.* – V. 207 – 1991 – P. 245-280.
- 28 J. Huebschmann, J. Stasheff. Formal solution of master equation via HPT and deformation theory// Preprint [arXiv:math/9906036](https://arxiv.org/abs/math/9906036).
- 29 T. V. Kadeishvili. On the theory of homology of fiber spaces// *Rus. Math. Surv.* – V. 35 – 1980 – P. 231--238
- 30 B. Keller. Introduction to A_∞ algebras and modules// [arxiv:math.RA/9910179v2](https://arxiv.org/abs/math.RA/9910179v2).
- 31 B. Keller. Hochschild cohomology and derived Picard groups// <http://www.institut.math.jussieu.fr/~keller/publ/hdP.pdf>
- 32 M. Markl. Transferring A_∞ strongly homotopy associative structures// Preprint [arXiv:math.AT/0401007](https://arxiv.org/abs/math.AT/0401007).
- 33 V. A. Smirnov. Homology of fiber spaces// *Rus. Math. Surv.* V. 35 – 1980 - P. 294--298
- 34 J. D. Stasheff. Homotopy associativity of H-spaces, I, II// *Trans. Amer. Math. Soc.* - V. 108 – 1963 - P. 275--312.
- 35 А. К. Звонкин, С. К. Ландою Графы на поверхностях и их приложения// М. – МЦНМО – 2010
- 36 S. Chmutov, S. Duzhin, Y. Mostovoy. CDBook// – 2010 – <http://www.pdmi.ras.ru/~duzhin>
- 37 S. V. Chmutov, S. K. Lando. Mutant knots and intersection graphs// *Algebraic and Geometric Topology* – V. 7 – 2007 – P. 101–120
- 38 A. Braverman, M. Finkelberg. Finite difference quantum Toda lattice via equivariant K -theory// *Transformation Groups* – V. 10 – 2005 – P. 363–386
- 39 A. Braverman, M. Finkelberg. Semi-infinite Schubert varieties and quantum K -theory of flag manifolds// [arXiv:math/1111.2266](https://arxiv.org/abs/math/1111.2266)

- 40 V. Chari, G. Fourier, T. Khandai. A categorical approach to Weyl modules// Transformation Groups – V. 15 – N. 3 – 2010 – P. 517 – 549
- 41 V. Chari, G. Fourier and P. Senesi, Weyl modules for the twisted loop algebras// J. Algebra – V. 319 – N. 12 – 2008 – P. 5016 – 5038.
- 42 I. Cherednik. Whittaker limits of difference spherical functions// Int. Math. Res. Notices – V. 20 – 2009 – P. 3793 – 3842.
- 43 V. Drinfeld. On the Grinberg – Kazhdan formal arc theorem// arXiv:math/0203263
- 44 P. Etingof. Whittaker functions on quantum groups and q -deformed Toda operators// Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 – V. 194 – 1999 – P. 9 – 25
- 45 B. Feigin, M. Finkelberg, I. Mirković, A. Kuznetsov. Semi-infinite flags. II. Local and global Intersection Cohomology of Quasimaps' spaces// Differential topology, infinite-dimensional Lie algebras, and applications – AMS Transl. Ser. 2 – V. 194 – 1999 – P. 113 – 148
- 46 B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin. Fermionic formulas for eigenfunctions of the difference Toda Hamiltonian// Lett. Math. Phys. – V. 88 – 2009 – P. 39 – 77
- 47 M. Finkelberg, A. Kuznetsov. Global Intersection Cohomology of Quasimaps' Spaces// Int. Math. Res. Notices – V. 7 – 1997 – P. 301 – 328.
- 48 G. Fourier, D. Kus. Demazure and Weyl modules: The twisted current case// arXiv:math/1108.5960
- 49 G. Fourier, P. Littelmann. Weyl modules, Demazure modules, KR-modules, crystals, fusion products and limit constructions// Adv. Math. – V. 211 – N. 2 – 2007 – P. 566 – 593
- 50 A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin. On q -deformed \mathfrak{gl}_{l+1} -Whittaker function. I// Comm. Math. Phys. – V. 294 – 2010 – P. 97 – 119
- 51 A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin. On q -deformed \mathfrak{gl}_{l+1} -Whittaker function. II// Comm. Math. Phys. – V. 294 – 2010 – P. 121 – 143
- 52 A. Gerasimov, D. Lebedev, S. Oblezin. On q -deformed \mathfrak{gl}_{l+1} -Whittaker function. III// Lett. Math. Phys. – V. 97 – N. 1 – 2011 – P. 1 – 24
- 53 A. Givental, Y.-P. Lee. Quantum K-theory on flag manifolds, finite-difference Toda lattices and quantum groups// Invent. math. – V. 151 – 2003 – P. 193 – 219.
- 54 M. Grinberg, D. Kazhdan. Versal deformations of formal arcs// Geometric and Functional Analysis – V. 10 – 2000 – P. 543 – 555
- 55 M. Haiman. Macdonald polynomials and geometry// in: New perspectives in algebraic combinatorics (Berkeley, CA, 1996–97) – Math. Sci. Res. Inst. Publ. – V. 38 – CUP – 1999 – P. 207 – 254
- 56 B. Ion. Nonsymmetric Macdonald polynomials and Demazure characters// Duke Math. J. – V. 116 – N. 2 – 2003 – P. 299 – 318
- 57 I. G. Macdonald. Symmetric functions and orthogonal polynomials// Dean Jacqueline B. Lewis Memorial Lectures presented at Rutgers University – New Brunswick – NJ. University Lecture Series, – V. 12 – 1998
- 58 Y. Sanderson. On the connection between Macdonald polynomials and Demazure characters// J. Algebraic Combin. – V. 11 – N. 3 – 2000 – P. 269–275
- 59 A. Sevostyanov. Regular Nilpotent Elements and Quantum Groups// Commun. Math. Phys. – V. 204 – 1999 – P. 1 – 16
- 60 E. Witten// Nucl. Phys. – V. 340 – 1990 – P. 281

- 61 R.Dijkgraaf, E.Witten// Nucl.Phys. - V.342 - 1990 - P.486
- 62 V.Кас, A.Schwarz// Phys.Lett. - V.B257 - 1991 - P.329
- 63 М.Концевич// Функц. Ан. и Прилож. - V.25 - 1991 - P.50
- 64 М.Kontsevich// Comm. Math. Phys. - V.147 - 1992 - P.1
- 65 S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zabrodin// Phys. Lett. B - V.275 - 1992 - P.311 - arXiv:hep-th/9111037
- 66 S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Zabrodin// Nucl.Phys.B - V.380 - 1992 - P.181 - arXiv:hep-th/9201013
- 67 M. Fukuma, H. Kawai, R. Nakayama// Int. J. Mod. Phys., - V.A6 - 1991 - P.1385
- 68 R. Dijkgraaf, E. Verlinde, H. Verlinde// Nucl. Phys. - V.B348 - 1991 - P.435
- 69 М.Тода. Теория нелинейных решеток// М. - «Мир» - 1984
- 70 A. S. Losev, A. Marshakov, N. Nekrasov. Small instantons, little strings and free fermions// in Ian Kogan memorial volume «From fields to strings: circumnavigating theoretical physics» - P.581-621 - arXiv:hep-th/0302191
- 71 A. Gorsky, I. Krichever, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov. Integrability and Seiberg – Witten exact solution// Phys. Lett.B - V.355 - 1995 - P.466 - arXiv:hep-th/9505035
- 72 A. Marshakov, N. Nekrasov. Extended Seiberg – Witten theory and integrable hierarchy// JHEP - V.0701 - 2007 - P.104 - arXiv:hep-th/0612019
- 73 A. Маршаков. On Microscopic Origin of Integrability in Seiberg – Witten Theory// ТМФ - V.154 - 2008 - P.362 - arXiv:hep-th/0706.2857
- 74 I. Krichever. The τ -function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories// Commun. Pure. Appl. Math. - V.47 - 1992 - P.437 - arXiv:hep-th/9205110
- 75 N. Nekrasov. Seiberg – Witten prepotential from instanton counting// Adv. Theor. Math. Phys. - V.7 - 2004 - P.831 - arXiv:hep-th/0206161
- 76 A. Okounkov. Toda equations for Hurwitz numbers// arXiv:math/0004128
- 77 N. Nekrasov, A. Okounkov. Seiberg – Witten theory and random partitions// arXiv:hep-th/0306238
- 78 T. Eguchi, K. Hori, S. K. Yang. Topological sigma models and large N matrix integral // Int. J. Mod. Phys. A - V.10 - 1995 - P.4203 - arXiv:hep-th/9503017
- 79 E. Getzler. The equivariant Toda lattice, I// arXiv:math/0207025
- 80 E. Getzler. The equivariant Toda lattice, II// arXiv:math/0209110
- 81 A. Givental. Gromov – Witten invariants and quantization of quadratic hamiltonians// arXiv:math/0108100
- 82 A. Okounkov, R. Pandharipande. Gromov – Witten theory, Hurwitz theory, and completed cycles// arXiv:math.AG/0204305
- 83 A. Okounkov, R. Pandharipande. The equivariant Gromov – Witten theory of \mathbb{P}^1 // arXiv:math.AG/0207233
- 84 G. Carlet, B. Dubrovin, Y. Zhang. The extended Toda hierarchy// arXiv:nlin/0306060
- 85 G. Carlet, Y. Zhang. Virasoro symmetries of the extended Toda hierarchy// arXiv:math/0308152
- 86 A. Marshakov. Seiberg – Witten Theory and Extended Toda Hierarchy// JHEP - V.0803 - 2008 - P.055 - arXiv:hep-th/0712.2802
- 87 K. Saito. On the periods of primitive integrals// Harvard Lecture Notes - 1980

- 88 A. S. Losev. Descendants constructed from matter field in topological Landau – Ginzburg theories coupled to topological gravity// *Theor. Math.Phys.* – V.95 – 1993 – P.595 – arXiv:hep-th/9211090
- 89 T. Eguchi, H. Kanno, Y. Yamada, S. K. Yang. Topological strings, flat coordinates and gravitational descendants// *Phys. Lett. B* – V.305 – 1993 – P.235 – arXiv:hep-th/9302048.
- 90 T. Eguchi, S. K. Yang. The Topological $\mathbb{C}P^1$ model and the large N matrix integral// *Mod. Phys. Lett. A* – V.9 – 1994 – P.2893 – arXiv:hep-th/9407134.
- 91 A. Alexandrov, N. Nekrasov// preprint ITEP/TH-42/08
- 92 H. W. Braden, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov. WDVV equations for 6d Seiberg – Witten theory and bi-elliptic curves// *Acta Applicandae Mathematicae* – V.99:3 – 2007 – P.223–244 – arXiv:hep-th/0606035
- 93 M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri, C. Vafa. Holomorphic anomalies in topological field theories// *Nucl. Phys. B* – V.405 – 1993 – P.279 – arXiv:hep-th/9302103
- 94 M. Bershadsky, S. Cecotti, H. Ooguri, C. Vafa. Kodaira – Spencer theory of gravity and exact results for quantum string amplitudes// *Commun. Math. Phys.* – V.165 – 1994 – P.311 – arXiv:hep-th/9309140
- 95 A. Klemm, M. Marino, S. Theisen. Gravitational corrections in supersymmetric gauge theory and matrix models// *JHEP* – V.0303 – 2003 – P.051 arXiv:hep-th/0211216
- 96 R. Dijkgraaf, A. Sinkovics, M. Temurhan. Matrix models and gravitational corrections// *Adv. Theor. Math. Phys.* – V.7 – 2004 – P.1155 – arXiv:hep-th/0211241
- 97 M. Aganagic, V. Bouchard, A. Klemm. Topological Strings and (Almost) Modular Forms// *Commun. Math. Phys.* – V.277 – 2008 – P.771 – arXiv:hep-th/0607100
- 98 N. Seiberg, E. Witten. Electric-magnetic duality, monopole condensation, and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang – Mills theory// *Nucl. Phys. B* – V.426 – 1994 – P.19 – arXiv:hep-th/9407087
- 99 N. Seiberg, E. Witten// *Nucl. Phys.* – V.431 – 1994 – P.484 – arXiv:hep-th/9408099
- 100 P. Argyres, M. Plesser, N. Seiberg// *Nucl. Phys.* – V.471 – 1996 – 159 – arXiv:hep-th/9603042
- 101 A. Marshakov, A. Yung. Strong versus Weak Coupling Confinement in $N = 2$ Supersymmetric QCD// *Nucl. Phys.* – V.831 – 2010 – P.72–104 – arXiv:hep-th/0912.1366
- 102 A. Marshakov. Period Integrals, Quantum Numbers and Confinement in SUSY QCD// *Theor. Math. Phys.* – V.165 – 2010 – P.488–502 – arXiv:hep-th/1003.2089
- 103 B. Eynard, M. Marino and N. Orantin. Holomorphic anomaly and matrix models// *JHEP* – V.0706 – 2007 – P.058 arXiv:hep-th/0702110 –
- 104 B. Eynard// *J. Stat. Mech.* – V.0910 – 2009 – P.10011 – arXiv:hep-th/0905.0535
- 105 L. Chekhov, B. Eynard, O. Marchal// arXiv:hep-th/1009.6007.
- 106 A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov. Matrix Model Conjecture for Exact BS Periods and Nekrasov Functions// *JHEP* – V.1002 – 2010 – P.030 – arXiv:hep-th/0911.5721
- 107 A. Mironov, A. Morozov, Sh. Shakirov// arXiv:hep-th/1011.5629

- 108 T. Nakatsu, K. Takasaki. Melting Crystal, Quantum Torus and Toda Hierarchy// Commun. Math. Phys. - V.285 - 2009 - P.445 - arXiv:hep-th/0710.5339
- 109 T. Nakatsu, Y. Noma, K. Takasaki. Integrable Structure of $5d \mathcal{N} = 1$ Supersymmetric Yang - Mills and Melting Crystal// Int. J. Mod. Phys. A - V.23 - 2008 - P.2332 - arXiv:hep-th/0806.3675
- 110 T. Nakatsu, Y. Noma, K. Takasaki. Extended $5d$ Seiberg - Witten Theory and Melting Crystal// Nucl. Phys. B - V.808 - 2009 - P.411 arXiv:hep-th/0807.0746
- 111 A. Braverman// arXiv:math/0401409
- 112 A. Braverman, P. Etingof// arXiv:math/0409441
- 113 L. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa// Lett. Math. Phys. - V.91 - 2010 - P.167 - 197 - arXiv:hep-th/0906.3219
- 114 A. Klemm, P. Sulkowski. Seiberg - Witten theory and matrix models// Nucl.Phys. B - V.819 - 2009 - P.400 - arXiv:hep-th/0810.4944
- 115 R. Dijkgraaf, C. Vafa// arXiv:hep-th/0909.2453
- 116 A. Marshakov. Strings, integrable systems, geometry and statistical models// arXiv:hep-th/0401199
- 117 A. Migdal. Loop Equations And $1/N$ -Expansion// Phys. Rept. - V.102 - 1983 - P.199
- 118 R. Dijkgraaf, C. Vafa// Nucl. Phys. - V.644 - 2002 - P.3 - arXiv:hep-th/0206255
- 119 R. Dijkgraaf, C. Vafa// Nucl. Phys. - V.644 - 2002 - P.21 - arXiv:hep-th/0207106
- 120 R. Dijkgraaf, C. Vafa// arXiv:hep-th/0208048
- 121 L. Chekhov, A. Mironov// Phys. Lett. - V.552 - 2003 - P.293 - arXiv:hep-th/0209085
- 122 L. Chekhov, A. Marshakov, A. Mironov, D. Vasiliev. DV and WDVV// Phys. Lett. B - V.562 - 2003 - P.323 - arXiv:hep-th/0301071
- 123 V. Kazakov and A. Marshakov. Complex curve of the two matrix model and its τ -function.. J. Phys. A - V.36 - 2003 - P.3107 - arXiv:hep-th/0211236.
- 124 A. Marshakov. Matrix models, complex geometry and integrable systems, I// Theor. Math. Phys. - V.147 - 2006 - P.583 - arXiv:hep-th/0601212
- 125 A. Marshakov. Matrix models, complex geometry and integrable systems, II// Theor. Math. Phys. - V.147 - 2006 - P.777 - arXiv:hep-th/0601214
- 126 A. Hanany, Y. Oz. On the Quantum Moduli Space of Vacua of $N = 2$ Supersymmetric $SU(N_c)$ Gauge Theories// Nucl. Phys. - V.452 - 1995 - P.283 - arXiv:hep-th/9505075
- 127 A.Gorsky, A.Marshakov, A.Mironov, A.Morozov// Phys. Lett. - V.380 - 1996 - P.75 - 80 - arXiv:hep-th/9603140.
- 128 A. Marshakov, A. Mironov and A. Morozov. Zamolodchikov asymptotic formula and instanton expansion in $N = 2$ SUSY $N_f = 2N_c$ QCD// JHEP - V.0911 - 2009 - P.048 - arXiv:hep-th/0909.3338
- 129 A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Orlov. Matrix models of $2 - D$ gravity and Toda theory// Nucl. Phys. B - V.357 - 1991 - P.565
- 130 A. Zamolodchikov, Al. Zamolodchikov. Structure constants and conformal bootstrap in Liouville field theory// Nucl. Phys. B - V.477 - 1996 - P.577 - arXiv:hep-th/9506136
- 131 D. Gaiotto. $N = 2$ dualities// arXiv:hep-th/0904.2715

- 132 T. Eguchi, K. Maruyoshi. Penner Type Matrix Model and Seiberg – Witten Theory// JHEP – V.1002 – 2010 – P.022 – arXiv:hep-th/0911.4797
- 133 T. Eguchi, K. Maruyoshi// JHEP – V.1007 – 2010 – P.081 – arXiv:hep-th/1006.0828
- 134 D. Gaiotto// urlarXiv:hep-th/0908.0307
- 135 A.Marshakov, A.Mironov, A.Morozov// Phys. Lett. – V. 682 – 2009 – P. 125 – 129 – arXiv:hep-th/0909.2052
- 136 E. Barnes// Proc. London Math. Soc. – V. 31 – 1899 – P. 358 – 381
- 137 E. Barnes// Phil. Trans. Roy. Soc. London – V. 196 – 1901 – P. 265 – 387
- 138 E. Barnes// Trans. Cambridge Phil. Soc. – V. 19 – 1904 – P. 374 – 425
- 139 M. Spreafico// Journ. of Number Theory – V. 129 – 2009 – P. 2035
- 140 A. Gerasimov, A. Levin, A. Marshakov. On W Gravity In Two-Dimensions// Nucl. Phys.B – V. 360 – 1991 – P. 537
- 141 I. Krichever. The τ -function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories// Commun. Pure. Appl. Math. – V. 47 – 1992 – P. 437 arXiv:hep-th/9205110
- 142 I. Krichever, A. Marshakov, A. Zabrodin. Integrable structure of the Dirichlet boundary problem in multiply-connected domains// Commun. Math. Phys. – V. 259 – 2005 – P. 1 – arXiv:hep-th/0309010
- 143 L. Faddeev, R. Kashaev// Mod. Phys. Lett. – V. 9 – 1994 – P. 427 – 434 – arXiv:hep-th/9310070
- 144 R. Kashaev// arXiv:q-alg/9705021
- 145
- L. Chekhov, V. V. Fock// Theor. Math. Phys. – V. 120 – 1999 – P. 1245 – 1259
- 146 Al. Zamolodchikov. Higher equations of motion in Liouville field theory// Int. J. Mod. Phys. A – V. 2 – 2004 – P. 510 – arXiv:hep-th/0312279
- 147 S. Kharchev, D. Lebedev, M. Semenov – Tian-Shanskyю Unitary representations of $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}))$, the modular double, and the multiparticle q -deformed Toda chains// Commun. Math. Phys. – V. 225 – 2002 – P. 573 – arXiv:hep-th/0102180
- 148 N.Nekrasov, S.Shatashvili// arXiv:hep-th/0901.4748
- 149 K.Kozłowski, J.Teschner// arXiv:hep-th/1006.2906
- 150 A. Morozov. Challenges of beta-deformation// arXiv:hep-th/1201.4595
- 151 A. Morozov. Faces of matrix models// JETP Lett. – V. 95 – 2012 – P. 586 – arXiv:hep-th/1204.3953
- 152 K. Fujii. Beyond the Gaussian// SIGMA – V. 7 – 22 – 2011 – arXiv:hep-th/0912.2135
- 153 K. Fuji, H. Oike. Beyond the Gaussian II : A Mathematical Experiment// – 2011 – arXiv:math-ph/1103.4428
- 154 U. M. Svensson. A note on a certain non-Gaussian integral// – 2009 – arXiv:0912.3172
- 155 A. Stoyanovsky. On integral of exponent of a homogeneous polynomial// – 2011 – arXiv:1103.0514
- 156 J. B. Lasserre. Level sets and non Gaussian integrals of positively homogeneous functions// – 2011 – arXiv:1110.6632
- 157 V. Dolotin, A. Morozov. Introduction to Non-Linear Algebra// World Scientific – 2007 – arXiv:hep-th/0609022
- 158 E. Bézout. Théorie générale des Equations Algébriques// 1779 – Paris

- 159 J. J. Sylvester. On a general method of determining by mere inspection the derivations from two equations of any degree// *Philosophical Magazine* – V.16 – 1840 – P.132 – 135
- 160 A. Cayley. On the theory of elimination// *Cambridge and Dublin Mathematical J.* – V.3 – 1848 – P.116 – 120
- 161 F. S. Macaulay. On some Formulae in Elimination// *Proceedings of The London Mathematical Society* – V.XXXV – 1903 – P.3 – 27
- 162 A. L. Dixon. The eliminant of three quantics in two independent variables// *Proceedings of The London Mathematical Society* – 6 – 1908 – P.468 – 478
- 163 I. M. Gelfand, M. Kapranov, A. Zelevinsky. *Discriminants, Resultants and Multi-dimensional Determinants*// Birkhauser – 1994
- 164 Discriminants of polynomials in several variables and triangulations of Newton polyhedra// *Leningrad Mathematical Journal* – V.2:3 – 1991 – P.499–505
- 165 A. Morozov. String Theory, What is it?// *Sov. Phys. Usp.* – V.35 – 1992 – P.671-714
- 166 A. Morozov, Sh. Shakirov. Introduction to Integral Discriminants// [arXiv:0903.2595](https://arxiv.org/abs/0903.2595)
- 167 P. Aluffi, F. Cukierman. Multiplicities of discriminants// *Manuscripta Mathematica* – V.78 – 1993 – P.245-458
- 168 M. Chardin. Multivariate subresultants// *J. Pure Appl. Algebra* – V.101-2 – 1995 – P.129–138
- 169 L. Ducos. Optimizations of the Subresultant Algorithm// *J. Pure Appl. Algebra* – V.145 – 2000 – P.149 – 163
- 170 L. Buse, C. D'Andrea. On the irreducibility of multivariate subresultants// *Ct. Rd. Math.* – V.338 – 4 – 2004 – P.287 – 290
- 171 C. D'Andrea, T. Krick, A. Szanto. Multivariate Subresultants in Roots// [arXiv:math.AG/0501281](https://arxiv.org/abs/math/0501281)
- 172 A. Vlasov. Complanart of polynomial equations// [arXiv:0907.4249](https://arxiv.org/abs/0907.4249)
- 173 A. Anokhina, A. Morozov, Sh. Shakirov. Resultant as Determinant of Koszul Complex// [arXiv:0812.5013](https://arxiv.org/abs/0812.5013)
- 174 L. I. Nicolaescu. Notes on the Reidemeister Torsion// <http://www.nd.edu/~lnicolae/Torsion.pdf>
- 175 V. Turaev. Reidemeister torsion in knot theory// *Russian Mathematical Surveys* – V.41:1 – 1986 – P.119 – 182
- 176 K. Kalorkoti. On Macaulay Form of the Resultant// <http://homepages.inf.ed.ac.uk/kk/Reports/Macaulay.pdf>
- 177 A. Khetan. Exact matrix formula for the unmixed resultant in three variables// [arXiv:math/0310478](https://arxiv.org/abs/math/0310478)
- 178 B. Gustafsson, V. Tkachev. The resultant on compact Riemann surfaces// *Comm. Math. Phys.* – V.286 – 2009 – P.313-358 – [arXiv:math/0710.2326](https://arxiv.org/abs/math/0710.2326),
- 179 A. Morozov, Sh. Shakirov. Analogue of the identity $\log \det = \text{tr} \log$ for resultants// [arXiv:0804.4632](https://arxiv.org/abs/0804.4632) –
- 180 A. Morozov, Sh. Shakirov. Resultants and Contour Integrals// [arXiv:0807.4539](https://arxiv.org/abs/0807.4539)
- 181 D. Eisenbud, F. O. Schreyer. Resultants and Chow forms via exterior syzygies// *J. Amer. Math. Soc.* – V.16 – 2003 – P.537-579 – [arXiv:math/0111040](https://arxiv.org/abs/math/0111040)
- 182 N. Beklemishev. Invariants of cubic forms of four variables// *Moscow Univ.Bull.* – V.37 – 1982 – P.54 – 62

- 183 D. Hilbert, B. Sturmfels, R. Laubenbacher. Theory of algebraic invariants// Cambridge University Press – 1993
- 184 H. Derksen, G. Kemper. Computational invariant theory. Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups// Springer Verlag – Encyclopaedia of Mathematical Sciences – V.130 – 2002
- 185 B. Sturmfels. Algorithms in invariant theory// Springer Verlag – 2008
- 186 N. Perminov, Sh. Shakirov. Discriminants of Symmetric Polynomials// arXiv:0910.5757 –
- 187 A. Morozov, M. Serbyn. Non-Linear Algebra and Bogolubov's Recursion// Theor. Math. Phys. – V.154 – 2008 – P.270-293 – hep-th/0703258
- 188 M. Abramowitz, I. Stegun. Handbook of Mathematical Functions with Graphs Formulas and Mathematical Tables// 9-th printing – New York Dover – 1972
- 189 I. Gradstein, I. Ryzhik. Tables of Integrals, Series and Products// New York – Academic – 1980
- 190 B. Sturmfels. Solving algebraic equations in terms of A -hypergeometric series.. Disc. Math. – V.15 – 1–3 2000 – P.171–181
- 191 B. Sturmfels, M. Glasser. The quadratic formula made hard: A less radical approach to solving equations// arXiv:math/9411224
- 192 A. Rej, M. Marcolli. Motives: an introductory survey for physicists// arXiv:0907.4046
- 193 V. Dolotin, A. Morozov. The Universal Mandelbrot Set. Beginning of the Story// Int. J. Mod. Phys. – V.A23 – 2008 – P.3613-3684 – arXiv:hep-th/0501235
- 194 An. Morozov. Universal Mandelbrot Set as a Model of Phase Transition Theory// JETP Lett. – V.86 – 2007 – P.745–748 – arXiv:nlin/0710.2315
- 195 A. Beilinson, I. Bernstein, P. Deligne. Faisceaux pervers// Asterisque – V.100 – 1982
- 196 A. I. Bondal. Representations of associative algebras and coherent sheaves// Math. USSR Izv. – V.34 – N.1 – 1990 – P.23–42
- 197 A. I. Bondal. Helixes, Representations of Quivers, and Koszul Algebras// In: Helixes and Vector Bundles, Lond. Math. Soc. L.N.S. – V.148 – 1990 – P.75–96.
- 198 T. Bridgeland. Stability conditions on triangulated categories// arXiv:math.AG/0212237
- 199 T. Bridgeland. Stability conditions on K3 surfaces// arXiv:math.AG/0307164
- 200 J.-M. Drézet. Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semistables sur $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ // J. Reine Angew. Math. – V.380 – 1987 – P.14–58.
- 201 V. Drinfeld. On the notion of geometric realization// arXiv:math.AG/0304064
- 202 S. I. Gelfand, Yu. I. Manin. Methods of homological algebra// Springer – 1996
- 203 A. L. Gorodentsev, S. A. Kuleshov. Helix theory// Moscow Math. J. – V.4:2 – 2004 – P.377–440.
- 204 A. L. Gorodentsev, S. A. Kuleshov, A. N. Rudakov. t -stabilities on triangulated categories// Izvestia RAN: ser. math. – V.68:4 – 2004 – P.117–150.
- 205 D. Joyce. Configurations in abelian categories II: Moduli stacks// arXiv:math.AG/0312192
- 206 E. Macrì. Some examples of moduli spaces of stability conditions on derived categories// arXiv:math.AG/0411613
- 207 A. Polishchuk, A. Schwarz. Categories of holomorphic vector bundles on non-commutative 2-tori// arXiv:math.QA/0211262

- 208 A. N. Rudakov. Stability for an abelian category// J. Algebra – V.197 – N.1
– 1997 – P.231 – 245
- 209 A. N. Tyurin. Special Lagrangian geometry as a small deformation of algebraic
geometry (Geometric quantization and mirror symmetry)// Russian Acad. Sci. Izv. Math.
– V.64:2 – 2000 – P.363 – 437 – arXiv:math.AG/9806006