Правительство Российской Федерации

федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

УДК: 511.2 , 512.66 , 512.73 ,
512.74 , 514.765

№ госрегистрации: __________

Инв. № __________

УТВЕРЖДАЮ
первый проректор НИУ ВШЭ,
докт. экон. наук, профессор

_______________ Л. М. Гохберг

«24» июня 2011 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ
ПО ГОСУДАРСТВЕННОМУ КОНТРАКТУ
№ 16.740.11.0307
(шифр заявки 2010-1.3.1-111-017-029)

«Исследование актуальных проблем теории представлений, алгебраической геометрии и теории чисел и их приложений к математической физике»

ВТОРОЙ ЭТАП
(окончательный)

Руководитель НИР,
канд. физ.-мат. наук

_________________ Е. Ю. Смирнов
дата, подпись

Москва 2011

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель

к.ф.-м.н.	______________________ дата, подпись	Е. Ю. Смирнов (введение, заключение, разд. 3)

Исполнители темы

к.ф.-м.н.	______________________ дата, подпись	А. И. Зыкин (разд. 4)
к.ф.-м.н.	______________________ дата, подпись	В. А. Кириченко (разд. 3)
к.ф.-м.н.	______________________ дата, подпись	Л. Г. Рыбников (разд. 1, 2)
к.ф.-м.н.	______________________ дата, подпись	М. В. Финкельберг (разд. 1)
к.э.н.	______________________ дата, подпись	Ю. В. Чарухин (разд. 1)
	______________________ дата, подпись	Т. Н. Зеленцова (разд. 3)
	______________________ дата, подпись	К. Н. Иванова (разд. 4)
	______________________ дата, подпись	Д. В. Корб (разд. 1)
	______________________ дата, подпись	Д. В. Кубрак (разд. 4)
	______________________ дата, подпись	А. П. Пушкарь (разд. 1)
	______________________ дата, подпись	А. К. Смирнов (разд. 2)
	______________________ дата, подпись	В. М. Сухачевская (разд. 3)

Нормоконтролер:

____________________________ В. В. Кузнецова

дата, подпись

РЕФЕРАТ

отчет о НИР: 60 стр., 72 источника

ключевые слова: АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ГРУППЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ, БАЗИСЫ ГЕЛЬФАНДА–ЦЕТЛИНА, ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ ДЕДЕКИНДА, ИСЧИСЛЕНИЕ ШУБЕРТА, К-ТЕОРИЯ, КВАНТОВЫЕ ГРУППЫ, КВАНТОВЫЕ КОГОМОЛОГИИ, МНОГООБРАЗИЯ ФЛАГОВ, МНОГОГРАННИКИ НЬЮТОНА, ПРОСТРАНСТВА ЛОМОНА, ОДНОРОДНЫЕ ПРОСТРАНСТВА, СООТВЕТСТВИЕ ЛЕНГЛЕНДСА, ТЕОРЕМА БРАУЭРА–ЗИГЕЛЯ.

краткая аннотация. Приводятся результаты исследований по актуальным направлениям теории представлений, алгебраической геометрии, теории алгебраических групп преобразований, теории чисел.

Основными темами исследований являются: описание действия квантовых групп в эквивариантных когомологиях пространств модулей; описание взаимосвязи между кольцами когомологий однородных пространств редуктивных групп и комбинаторикой многогранников Ньютона; изучение дзета-функции Дедекинда в семействах числовых полей, уточнение оценок в теореме Брауэра–Зигеля.

Результаты носят теоретический характер, являются новыми и интересными. Они могут найти (и уже находят) применение в исследовательской работе во всех перечисленных областях и способны существенно улучшить методику преподавания соответствующих дисциплин в университетах.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Арифметика, алгебраическая геометрия и теория представлений — разделы математики с богатой историей, остающиеся и сегодня на переднем крае науки. В последнее время были обнаружены весьма глубокие и неожиданные взаимосвязи между этими, казалось бы, достаточно далёкими областями. Это послужило толчком к бурному развитию всех этих разделов математики. Благодаря этим новым взаимосвязям во всех указанных областях была получена масса весьма важных и содержательных результатов, а также было выдвинуто множество новых и интересных гипотез.

Важнейшую роль в этих взаимосвязях играют бесконечномерные алгебры Ли и группы симметрий. Их появление связано с проблемами квантования классических объектов конечномерной теории представлений,геометрии и математической физики. Так, в последние 20-25 лет были обнаружены замечательные связи между теорией представлений бесконечномерных алгебр и групп Ли и такими областями математики и математической физики, как интегрируемые системы, алгебраическая геометрия и квантовая теория поля. Было установлено, что алгебраическая информация о теории представлений групп и алгебр Ли может быть использована для изучения свойств решений системдифференциальных уравнений, свойств алгебраических многообразия, пространств состояний квантовых и топологических теорий поля (в том числе теории струн). Таким образом, изучение свойств алгебр и групп Ли, в том числе бесконечномерных, представляется очень важным и интересным как само по себе, так и с точки зрения разнообразных приложений.

Одним из самыхяркихявлений современной математики является двойственность (соответствие) Ленглендса, вовлекающая в себя в себя теорию чисел, алгебраическую геометрию, теорию представлений бесконечномерных алгебр Ли и теорию групп. Двойственность Ленглендса устанавливает соответствие между алгебро-геометрическими объектами, связанными с простой конечномерной группой Ли, и объектами (вообще говоря, совершенно другой природы), связанными с двойственной простой конечномерной группой Ли. Изначально она возникла в алгебраической и аналитической теории чисел. В 1990-х годах В. Г. Дринфельдом был предложен вариант соответствия Ленглендса для алгебраических кривых над полем комплексных чисел, который оказался связан с ключевыми вопросами современной математической физики. Одной из основных целей нашего проекта является установление связей между разными проявлениями соответствия Ленглендса.

На втором, основном этапе работ исследовательской группой были проведены изыскания по следующим направлениям:

1) описание аффинных пространств Ломона и связанных с ними аффинных базисов Гельфанда-Цетлина;

2) формулировки гипотез о квантовых когомологиях пространств Ломона и их аффинных аналогов;

3) явное описание кольца когомологий регулярных компактификаций редуктивной группы присоединённого типа с помощью многогранников Ньютона;

4) явное допредельного описание асимптотического поведения дзета-функции Дедекинда в критической полосе, приложения этих результатов к улучшению оценок в явной теореме Брауэра-Зигеля.

Результаты этой деятельности и составляют содержание настоящего отчёта, организованного следующим образом.

Четыре представленных в оглавлении раздела в точности соответствуют пунктам приведённого выше перечня. Их краткое содержание таково:

- Получено описание неособых компактификаций пространств аффинных пространств Ломона и связанных с ними аффинных базисов Гельфанда-Цетлина. Построено действие аффинного янгиана в когомологиях аффинных пространств Ломона.

- Сформулированы гипотезы о квантовых когомологиях пространств Ломона (неособых компактификаций пространств модулей отображений проективной прямой в пространство флагов группы GL_n) и их аффинных аналогов;

- Получено явное описание кольца когомологий регулярных компактификаций редуктивной группы присоединённого типа с помощью многогранников Ньютона и тел Ньютона–Окунькова. В качестве следствия данного подхода обобщены результаты Постникова–Стенли о характерах модулей Демазюра.

- Доказана формула для предела логарифмических производных дзета-функций в семействах глобальных полей (в предположении обобщенной гипотезы Римана в числовом случае) с явным остаточным членом. В качестве одного из приложений этих результатов получено улучшение оценки остаточного члена в явной теореме Брауэра–Зигеля, если разрешить зависимость этого остаточного члена от рассматриваемого семейства глобальных полей.

ОСНОВНОЙ ЭТАП ИССЛЕДОВАНИЙ

1. ОПИСАНИЕ АФФИННЫХ ПРОСТРАНСТВ ЛОМОНА И СВЯЗАННЫХ С НИМИ АФФИННЫХ БАЗИСОВ ГЕЛЬФАНДА–ЦЕТЛИНА

1.1. Введение

Пространства модулей Ломона суть некоторые гладкие замыкания пространств модулей отображений из проективной прямой в многообразие флагов группы GL_n. Мы строим действие янгиана группы $\mathfrak{sl}_n$ в когомологиях пространств Ломона при помощи некоторых естественных соответствий. Мы строим действие аффинного янгиана (двухпараметрической деформации универсальной обёртывающей алгебры универсального центрального расширения алгебры $\mathfrak{sl}_n[s^{\pm1}, t]$) в когомологиях аффинных версий пространств Ломона. Мы вычисляем матричные коэффициенты генераторов аффинного янгиана в базисе когомологий, связанном с неподвижными точками. Этот базис есть аффинный аналог базиса Гельфанда–Цетлина. Аффинный аналог алгебры Гельфанда–Цетлина сюръективно отображается в кольца эквивариантных когомологий аффинных пространств Ломона. Кольцо когомологий пространства модулей $\mathfrak{M}_{n,d}$ пучков без кручения на плоскости, имеющих ранг n и второй класс Черна d, тривиализованных на бесконечности, естественным образом вкладывается в кольцо когомологий некоторого аффинного пространства Ломона. Оно является образом центра Z янгиана алгебры $\mathfrak{gl}_n$, естественно вложенного в аффинный янгиан. В частности, первый класс Черна детерминантного линейного расслоения на $\mathfrak{M}_{n,d}$ есть образ некоммутативной степенной суммы в Z.

В [18] нами было изучено кольцо эквивариантных когомологий $H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}})$, где $\widetilde{T}$ есть картановский тор в GL_n, действующий на пространстве $\mathscr{B}_n$, а $\mathbb{C}^*$ действует как "повороты окружности" на пространстве $\mathbb{P}^1$. В [18] использовался следующий метод: определить действие алгебры $U(\mathfrak{gl}_n)$ на $V = \bigoplus_{\underline{d}} H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}) \otimes_{H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt)} \mathrm{Frac}(H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt))$ при помощи некоторых естественных соответствий и впоследствии реализовать кольцо когомологий $H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}})$ как некоторый фактор подалгебры Гельфанда–Цетлина $\mathfrak{G} \subset U(\mathfrak{gl}_n)$.

В этой работе мы используем подход к алгебре Гельфанда–Цетлина, восходящий к И. Череднику. А именно, $\mathfrak{G}$ есть образ максимальной коммутативной подалгебры $\mathfrak{A}$ янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$ (подалгебры Гельфанда–Цетлина) при гомоморфизме вычисления в $U(\mathfrak{gl}_n)$ (см. [52]). Композиция гомоморфизма вычисления из $Y(\mathfrak{gl}_n)$ в $U(\mathfrak{gl}_n)$ с действием алгебры $U(\mathfrak{gl}_n)$ на V даёт действие $Y(\mathfrak{gl}_n)$ на V. Основное наблюдение состоит в том, что "новые дринфельдовские генераторы" [13] алгебры $Y(\mathfrak{sl}_n) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$ действуют на V естественными соответствиями (теорема 1.3). В действительности они очень похожи на соответствия, использовавшиеся М. Вараньоло [71] для построения действия янгианов в эквивариантных когомологиях колчанных многообразий.

Также имеется аффинная версия пространств Ломона, а именно, пространства модулей $\mathscr{P}_{\underline{d}}$ параболических пучков на $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$, см. [21]. Аналогичные соответствия поднимаются до действия аффинного янгиана $\widehat{Y}$ (двухпараметрической деформации универсальной обертывающей алгебры универсального центрального расширения алгебры $\mathfrak{sl}_n[s^{\pm 1}, t]$, см. [30]) на локализованных эквивариантных когомологиях $M = \bigoplus_{\underline{d}} H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{P}_{\underline{d}}) \otimes_{H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*}(pt)} \mathrm{Frac}(H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*}(pt))$, где вторая копия $\mathbb{C}^*$ действует поворотами окружности на второй копии $\mathbb{P}^1$ (Теорема 1.6). Мы явно вычисляем действие дринфельдовских генераторов из $\widehat{Y}$ на базисе из неподвижных точек M (Теорема 1.7).

Поскольку базис неподвижных точек в V соответствует базису Гельфанда–Цетлина универсального модуля Верма над $U(\mathfrak{gl}_n)$, мы предлагаем называть базис из неподвижных точек в M *аффинным базисом Гельфанда–Цетлина*. В частности, гипотеза 1.1 утверждает, что M изоморфно универсальному модулю Верма над $U(\widehat{\mathfrak{gl}}_n)$. Далее, мы предполагаем, что специализация аффинного базиса Гельфанда–Цетлина поднимается до базиса в интегрируемых $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$-модулях (который мы также предлагаем называть аффинным базисом Гельфанда–Цетлина), см. гипотезу 1.2. Набор аффинных таблиц Гельфанда–Цетлина имеет структуру $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$-кристалла для интегрируемого $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$-модуля (теорема 1.10), эквивалентную структуре цилиндрических плоских разбиений [64]. Мы ожидаем, что действие Y на интегрируемых $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$-модулях совпадает с описанным Д. Угловым действием янгиана [70].

1.2. Пространства Ломона и $\mathfrak{sl}_n$-янгианы

1.2.1.

Напомним обозначения из работы [18]. Пусть $\mathbf{C}$ — гладкая проективная кривая рода нуль. Фиксируем координату z на $\mathbf{C}$ и рассмотрим действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathbf{C}$, для которого $v(z) = v^{-2}z$. Имеем $\mathbf{C}^{\mathbb{C}^*} = \{0, \infty\}$.

Рассмотрим n-мерное векторное пространство W с базисом $w_1, \ldots, w_n$. Оно определяет картановский тор $T \subset G = GL_n \subset Aut(W)$. Мы также рассмотрим его 2^n-листное накрытие, больший тор $\widetilde{T}$, действующий на W так: для $\widetilde{T} \ni \underline{t} = (t_1, \ldots, t_n)$ имеем $\underline{t}(w_i) = t_i^2 w_i$. Обозначим через $\mathscr{B}$ многообразие флагов группы G.

1.2.2.

Для заданного набора из $n-1$ неотрицательного целого числа $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_{n-1})$ рассмотрим ломоновское пространство квазифлагов $\mathscr{Q}_{\underline{d}}$, см. [46], 4.2. Это пространство модулей флагов локально свободных подпучков

$$0 \subset \mathscr{W}_1 \subset \ldots \subset \mathscr{W}_{n-1} \subset \mathscr{W} = W \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{C}}$$

для которых $\mathrm{rank}(\mathscr{W}_k) = k$, и $\deg(\mathscr{W}_k) = -d_k$.

Как известно, оно является гладким проективным многообразием размерности $2d_1 + \ldots + 2d_{n-1} + \dim \mathscr{B}$, см. [45], 2.10.

1.2.3.

Рассмотрим локально замкнутое подмножество $\mathfrak{Q}_{\underline{d}} \subset \mathscr{Q}_{\underline{d}}$ (квазифлаги с базой в $\infty \in \mathbf{C}$), образованное флагами

$$0 \subset \mathscr{W}_1 \subset \ldots \subset \mathscr{W}_{n-1} \subset \mathscr{W} = W \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{C}}$$

для которых $\mathscr{W}_i \subset \mathscr{W}$ есть векторное подрасслоение в окрестности $\infty \in \mathbf{C}$, а слой $\mathscr{W}_i$ в ∞ равняется линейной оболочке $\langle w_1, \ldots, w_i \rangle \subset W$.

Известно, что это гладкое квазипроективное многообразие размерности $2d_1 + \ldots + 2d_{n-1}$.

1.2.4. Неподвижные точки

Группа $G \times \mathbb{C}^*$ естественным образом действует на $\mathscr{Q}_{\underline{d}}$, а группа $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*$ естественно действует на $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$. Множество неподвижных точек действия $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*$ on $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ конечно; напомним его описание из [22], 2.11.

Пусть $\widetilde{\underline{d}}$ — набор неотрицательных целых чисел (d_{ij}), $i \geq j$, для которых $d_i = \sum_{j=1}^{i} d_{ij}$, и к тому же если $i \geq k \geq j$, то $d_{kj} \geq d_{ij}$. Допуская вольность обозначений, мы будем обозначать через $\widetilde{\underline{d}}$ и соответствующую $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*$-неподвижную точку в $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$:

$\mathscr{W}_1 = \mathscr{O}_{\mathbf{C}}(-d_{11} \cdot 0) w_1,$

$\mathscr{W}_2 = \mathscr{O}_{\mathbf{C}}(-d_{21} \cdot 0) w_1 \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{C}}(-d_{22} \cdot 0) w_2,$

$\ldots \ \ldots \ \ldots \ ,$

$\mathscr{W}_{n-1} = \mathscr{O}_{\mathbf{C}}(-d_{n-1,1} \cdot 0) w_1 \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{C}}(-d_{n-1,2} \cdot 0) w_2 \oplus \ldots \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{C}}(-d_{n-1,n-1} \cdot 0) w_{n-1}.$

1.2.5.

При $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ и $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_{n-1})$, положим $\underline{d} + i := (d_1, \ldots, d_i + 1, \ldots, d_{n-1})$. Имеется соответствие $\mathscr{E}_{\underline{d},i} \subset \mathscr{Q}_{\underline{d}} \times \mathscr{Q}_{\underline{d}+i}$, образованное всеми парами $(\mathscr{W}_\bullet, \mathscr{W}'_\bullet)$, для которых при $j \neq i$ мы имеем $\mathscr{W}_j = \mathscr{W}'_j$, и $\mathscr{W}'_i \subset \mathscr{W}_i$, см. [22], 3.1. Иными словами, $\mathscr{E}_{\underline{d},i}$ есть пространство модулей флагов локально свободных пучков

$$0 \subset \mathscr{W}_1 \subset \ldots \mathscr{W}_{i-1} \subset \mathscr{W}'_i \subset \mathscr{W}_i \subset \mathscr{W}_{i+1} \ldots \subset \mathscr{W}_{n-1} \subset \mathscr{W}$$

для которых $\operatorname{rank}(\mathscr{W}_k) = k$, и $\deg(\mathscr{W}_k) = -d_k$, тогда как $\operatorname{rank}(\mathscr{W}'_i) = i$, и $\deg(\mathscr{W}'_i) = -d_i - 1$.

Согласно [45], 2.10, $\mathscr{E}_{\underline{d},i}$ является гладким проективным алгебраическим многообразием размерности $2d_1 + \ldots + 2d_{n-1} + \dim \mathscr{B} + 1$.

Обозначим через $\mathbf{p}$ (соотв. $\mathbf{q}$) естественную проекцию $\mathscr{E}_{\underline{d},i} \to \mathscr{Q}_{\underline{d}}$ (соотв. $\mathscr{E}_{\underline{d},i} \to \mathscr{Q}_{\underline{d}+i}$). У нас также имеется отображение $\mathbf{r}: \ \mathscr{E}_{\underline{d},i} \to \mathbf{C}$,

$$(0 \subset \mathscr{W}_1 \subset \ldots \mathscr{W}_{i-1} \subset \mathscr{W}'_i \subset \mathscr{W}_i \subset \mathscr{W}_{i+1} \ldots \subset \mathscr{W}_{n-1} \subset \mathscr{W}) \mapsto \operatorname{supp}(\mathscr{W}_i / \mathscr{W}'_i).$$

Соответствие $\mathscr{E}_{\underline{d},i}$ даёт естественное линейное расслоение $\mathscr{L}_i$, слой которого в точке

$$(0 \subset \mathscr{W}_1 \subset \ldots \mathscr{W}_{i-1} \subset \mathscr{W}'_i \subset \mathscr{W}_i \subset \mathscr{W}_{i+1} \ldots \subset \mathscr{W}_{n-1} \subset \mathscr{W})$$

равняется $\Gamma(\mathbf{C}, \mathscr{W}_i / \mathscr{W}'_i)$.

Наконец, имеется транспонированное соответствие ${}^T\mathscr{E}_{\underline{d},i} \subset \mathscr{Q}_{\underline{d}+i} \times \mathscr{Q}_{\underline{d}}$.

1.2.6.

Ограничивая на $\mathfrak{Q}_{\underline{d}} \subset \mathscr{Q}_{\underline{d}}$, получаем соответствие $\mathfrak{E}_{\underline{d},i} \subset \mathfrak{Q}_{\underline{d}} \times \mathfrak{Q}_{\underline{d}+i}$, линейное расслоение $\mathfrak{L}_i$ и естественные отображения $\mathbf{p}: \ \mathfrak{E}_{\underline{d},i} \to \mathfrak{Q}_{\underline{d}}$, $\mathbf{q}: \ \mathfrak{E}_{\underline{d},i} \to \mathfrak{Q}_{\underline{d}+i}$, $\mathbf{r}: \mathfrak{E}_{\underline{d},i} \to \mathbf{C} - \infty$. Также имеется транспонированное соответствие ${}^T\mathfrak{E}_{\underline{d},i} \subset \mathfrak{Q}_{\underline{d}+i} \times \mathfrak{Q}_{\underline{d}}$. Это гладкое квазипроективное многообразие размерности $2d_1 + \ldots + 2d_{n-1} + 1$.

1.2.7.

Обозначим через $'V$ прямую сумму эквивариантных (комплексифицированных) когомологий: $'V = \oplus_{\underline{d}} H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}})$. Это модуль над $H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt) = \mathbb{C}[\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C}] = \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n, \hbar]$. Здесь $\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C}$ — это алгебра Ли группы $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*$. Обозначим через $\hbar$ удвоенную положительную образующую пространства $H^2_{\mathbb{C}^*}(pt, \mathbb{Z})$. Аналогично определим $x_i \in H^2_{\widetilde{T}}(pt, \mathbb{Z})$ в терминах соответствующих однопараметрических подгрупп. Положим $V = {}'V \otimes_{H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt)} \mathrm{Frac}(H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt))$.

Имеется естественная градуировка $V = \oplus_{\underline{d}} V_{\underline{d}}$, $V_{\underline{d}} = H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}) \otimes_{H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt)} \mathrm{Frac}(H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt))$.

1.2.8.

Обозначим через $\mathfrak{U}$ универсальную обертывающую алгебру для $\mathfrak{gl}_n$ над полем $\mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})$. При $1 \le j, k \le n$ обозначим через $E_{jk} \in \mathfrak{gl}_n \subset \mathfrak{U}$ обычные элементарные матрицы. Стандартные образующие Шевалле представляются так:

$$\mathfrak{e}_i := E_{i+1,i}, \ \mathfrak{f}_i := E_{i,i+1}, \ \mathfrak{h}_i := E_{i+1,i+1} - E_{ii}$$

(отметим, что $\mathfrak{e}_i$ представлен *нижнетреугольной* матрицей). Также заметим, что $\mathfrak{U}$ порождается всеми E_{ii}, $1 \le i \le n$, $E_{i,i+1}, E_{i+1,i}$, $1 \le i \le n-1$. Обозначим через $\mathfrak{U}_{\le 0}$ подалгебру в $\mathfrak{U}$, порожденную E_{ii}, $1 \le i \le n$, $E_{i,i+1}$, $1 \le i \le n-1$. Она действует на поле $\mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})$ таким образом: $E_{i,i+1}$ действует тривиально при $1 \le i \le n-1$, и E_{ii} действует умножениями на $\hbar^{-1}x_i + i - 1$. Определим *универсальный модуль Верма* $\mathfrak{V}$ над $\mathfrak{U}$ как $\mathfrak{U} \otimes_{\mathfrak{U}_{\le 0}} \mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})$. Универсальный модуль Верма $\mathfrak{V}$ является неприводимым $\mathfrak{U}$-модулем.

1.2.9.

Градуировка и соответствия ${}^T\mathfrak{E}_{\underline{d},i}, \mathfrak{E}_{\underline{d},i}$ определяют следующие операторы на V (отметим, что хотя $\mathbf{p}$ и не является собственным, $\mathbf{p}_*$ корректно определен на локализованных эквивариантных когомологиях, поскольку множество неподвижных точек конечно):

$E_{ii} = \hbar^{-1}x_i + d_{i-1} - d_i + i - 1: \ V_{\underline{d}} \to V_{\underline{d}}$;

$\mathfrak{h}_i = \hbar^{-1}(x_{i+1} - x_i) + 2d_i - d_{i-1} - d_{i+1} + 1: \ V_{\underline{d}} \to V_{\underline{d}}$;

$\mathfrak{f}_i = E_{i,i+1} = \mathbf{p}_*\mathbf{q}^*: \ V_{\underline{d}} \to V_{\underline{d}-i}$;

$\mathfrak{e}_i = E_{i+1,i} = -\mathbf{q}_*\mathbf{p}^*: \ V_{\underline{d}} \to V_{\underline{d}+i}$.

Следующая теорема есть теорема 2.10 из работы [18].

Теорема 1.1
Операторы $\mathfrak{e}_i = E_{i+1,i}, E_{ii}, \mathfrak{f}_i = E_{i,i+1}$ на V, определенные в 1.2.9, удовлетворяют соотношениям из $\mathfrak{U}$, то есть задают действие $\mathfrak{U}$ на V. Имеется единственный изоморфизм Ψ между $\mathfrak{U}$-модулями V и $\mathfrak{V}$, переводящий $1 \in H^0_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_0) \subset V$ в вектор младшего веса $1 \in \mathbb{C}(\mathfrak{t}\oplus\mathbb{C}) \subset \mathfrak{V}$.

1.2.10. Базис Гельфанда–Цетлина универсального модуля Верма

Мы следуем обозначениям из [51] относительно базисов Гельфанда–Цетлина в представлениях алгебры $\mathfrak{gl}_n$. Набору $\widetilde{\underline{d}} = (d_{ij}),\ n-1 \geq i \geq j$ сопоставляется *таблица Гельфанда–Цетлина* $\Lambda = \Lambda(\widetilde{\underline{d}}) := (\lambda_{ij}),\ n \geq i \geq j$ следующим образом: $\lambda_{nj} := \hbar^{-1}x_j + j - 1,\ n \geq j \geq 1;\ \lambda_{ij} := \hbar^{-1}x_j + j - 1 - d_{ij},\ n-1 \geq i \geq j \geq 1$. Теперь определим $\xi_{\widetilde{\underline{d}}} = \xi_\Lambda \in \mathfrak{V}$ при помощи формул (2.9)–(2.11) из *loc. cit.* (где $\xi = \xi_0 = 1 \in \mathfrak{V}$). Согласно теореме 2.7 из *loc. cit.*, множество $\{\xi_{\widetilde{\underline{d}}}\}$ (отвечающее всевозможным наборам $\widetilde{\underline{d}}$) образует базис в $\mathfrak{V}$.

Согласно теореме Томасона о локализации, ограничение на множество $\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*$-неподвижных точек индуцирует изоморфизм

$$H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}) \otimes_{H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt)} \mathrm{Frac}(H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt)) \to H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}^{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}) \otimes_{H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt)} \mathrm{Frac}(H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt))$$

Фундаментальные циклы $[\widetilde{\underline{d}}]$, отвечающие $\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*$-неподвижным точкам $\widetilde{\underline{d}}$ (см. 1.2.4) образуют базис в $\oplus_{\underline{d}} H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}^{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}) \otimes_{H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt)} \mathrm{Frac}(H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt))$. Вложение точки $\widetilde{\underline{d}}$ в $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ есть собственный морфизм, так что прямой образ в эквивариантных когомологиях корректно определен, и мы будем обозначать через $[\widetilde{\underline{d}}] \in V_{\underline{d}}$ прямой образ фундаментального цикла точки $\widetilde{\underline{d}}$. Множество $\{[\widetilde{\underline{d}}]\}$ образует базис в V.

Следующая теорема — это теорема 2.12 из [18], см. также [55] 8.2.

Теорема 1.2
a) Изоморфизм $\Psi:\ V \xrightarrow{\sim} \mathfrak{V}$, описанный в теореме 1.1, переводит $[\widetilde{\underline{d}}]$ в $(-\hbar)^{|\underline{d}|}\xi_{\widetilde{\underline{d}}}$, где $|\underline{d}| = d_1 + \ldots + d_{n-1}$.

b) Матричные коэффициенты операторов $\mathfrak{e}_i, \mathfrak{f}_i$ в базисе $\{[\widetilde{\underline{d}}]\}$ таковы:

$$\mathfrak{e}_{i[\widetilde{\underline{d}},\widetilde{\underline{d}}']} = -\hbar^{-1}\prod_{j\neq k\leq i}(x_j - x_k + (d_{i,k} - d_{i,j})\hbar)^{-1}\prod_{k\leq i-1}(x_j - x_k + (d_{i-1,k} - d_{i,j})\hbar)$$

если $d'_{i,j} = d_{i,j} + 1$ для некоторого $j \leq i$;

$$\mathfrak{f}_{i[\widetilde{\underline{d}},\widetilde{\underline{d}}']} = \hbar^{-1}\prod_{j\neq k\leq i}(x_k - x_j + (d_{i,j} - d_{i,k})\hbar)^{-1}\prod_{k\leq i+1}(x_k - x_j + (d_{i,j} - d_{i+1,k})\hbar)$$

если $d'_{i,j} = d_{i,j} - 1$ для некоторого $j \leq i$;

Все остальные матричные коэффициенты операторов $\mathfrak{e}_i, \mathfrak{f}_i$ равны нулю.

1.2.11. Янгиан алгебры $\mathfrak{sl}_n$

Пусть $(a_{kl})_{1\le k,l\le n-1} = A_{n-1}$ — это картановская матрица алгебры $\mathfrak{sl}_n$. Янгиан $Y(\mathfrak{sl}_n)$ — это свободная $\mathbb{C}[\hbar]$-алгебра, порожденная $\mathbf{x}^{\pm}_{k,r}, \bar{h}_{k,r},\ 1\le k\le n-1,\ r\in\mathbb{N}$, со следующими соотношениями:

$$[\bar{h}_{k,r},\bar{h}_{l,s}] = 0,\ [\bar{h}_{k,0},\mathbf{x}^{\pm}_{l,s}] = \pm a_{kl}\mathbf{x}^{\pm}_{l,s}, \tag{1.1}$$

$$2[\bar{h}_{k,r+1},\mathbf{x}^{\pm}_{l,s}] - 2[\bar{h}_{k,r},\mathbf{x}^{\pm}_{l,s+1}] = \pm\hbar a_{kl}(\bar{h}_{k,r}\mathbf{x}^{\pm}_{l,s} + \mathbf{x}^{\pm}_{l,s}\bar{h}_{k,r}), \tag{1.2}$$

$$[\mathbf{x}^{+}_{k,r},\mathbf{x}^{-}_{l,s}] = \delta_{kl}\bar{h}_{k,r+s}, \tag{1.3}$$

$$2[\mathbf{x}^{\pm}_{k,r+1},\mathbf{x}^{\pm}_{l,s}] - 2[\mathbf{x}^{\pm}_{k,r},\mathbf{x}^{\pm}_{l,s+1}] = \pm\hbar a_{kl}(\mathbf{x}^{\pm}_{k,r}\mathbf{x}^{\pm}_{l,s} + \mathbf{x}^{\pm}_{l,s}\mathbf{x}^{\pm}_{k,r}), \tag{1.4}$$

$$[\mathbf{x}^{\pm}_{k,r},[\mathbf{x}^{\pm}_{k,p},\mathbf{x}^{\pm}_{l,s}]] + [\mathbf{x}^{\pm}_{k,p},[\mathbf{x}^{\pm}_{k,r},\mathbf{x}^{\pm}_{l,s}]] = 0,\ k = l\pm 1,\ \forall p,r,s\in\mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Для формальной переменной u введем производящий ряд $\bar{h}_k(u) := 1+\sum_{r=0}^{\infty}\bar{h}_{k,r}\hbar^{-r}u^{-r-1}$; $\mathbf{x}^{\pm}_k(u) := \sum_{r=0}^{\infty}\mathbf{x}^{\pm}_{k,r}\hbar^{-r}u^{-r-1}$. Тогда уравнения (1.2,1.4) можно переписать в следующей форме:

$$\partial_u\partial_v\bar{h}_k(u)\mathbf{x}^{\pm}_l(v)(2u-2v\mp a_{kl}) = -\partial_u\partial_v\mathbf{x}^{\pm}_l(v)\bar{h}_k(u)(2v-2u\mp a_{kl}) \tag{1.6}$$

$$\partial_u\partial_v\mathbf{x}^{\pm}_k(u)\mathbf{x}^{\pm}_l(v)(2u-2v\mp a_{kl}) = -\partial_u\partial_v\mathbf{x}^{\pm}_l(v)\mathbf{x}^{\pm}_k(u)(2v-2u\mp a_{kl}) \tag{1.7}$$

1.2.12.

При всех $0\le i\le n$ обозначим через $\underline{\mathscr{W}}_i$ тавтологическое i-мерное векторное расслоение на $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}\times\mathbf{C}$. Согласно формуле Кюннета, $H^{\bullet}_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}\times\mathbf{C}) = H^{\bullet}_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}})\otimes 1\oplus H^{\bullet}_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}})\otimes\tau$, где $\tau\in H^2_{\mathbb{C}^*}(\mathbf{C})$ есть первый класс Черна расслоения $\mathscr{O}(1)$. При этом разложении для первого класса Черна $c_j(\underline{\mathscr{W}}_i)$ имеем $c_j(\underline{\mathscr{W}}_i) =: c_j^{(j)}(\underline{\mathscr{W}}_i)\otimes 1 + c_j^{(j-1)}(\underline{\mathscr{W}}_i)\otimes\tau$ где $c_j^{(j)}(\underline{\mathscr{W}}_i)\in H^{2j}_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}})$, и $c_j^{(j-1)}(\underline{\mathscr{W}}_i)\in H^{2j-2}_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}})$.

Для $0\le m\le n$ определим производящие функции $\mathbf{a}_m(u)$ с коэффициентами в кольце эквивариантных когомологий пространства $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ следующим образом: $\mathbf{a}_m(u) := u^m+\sum_{r=1}^{m}(-\hbar)^{-r}\left(c_r^{(r)}(\underline{\mathscr{W}}_m) - \hbar c_r^{(r-1)}(\underline{\mathscr{W}}_m)\right)u^{m-r}$. В частности, $\mathbf{a}_0(u) := 1$.

Пусть через q обозначен характер $\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*:\ (\underline{t},v)\mapsto v^2$. Определим линейное расслоение $\mathscr{L}'_k := q^{\frac{1-k}{2}}\mathscr{L}_k$ на соответствии $\mathscr{E}_{\underline{d},k}$, то есть $\mathscr{L}'_k$ и $\mathscr{L}_k$ оказываются изоморфны как линейные расслоения, но эквивариантная структура на $\mathscr{L}'_k$ получается из эквивариантной структуры на $\mathscr{L}_k$ подкруткой на характер $q^{\frac{1-k}{2}}$.

Также определим операторы

$$\mathbf{x}^{+}_{k,r} := \mathbf{p}_*(c_1(\mathscr{L}'_k)^r\cdot\mathbf{q}^*):\ V_{\underline{d}}\to V_{\underline{d}-k} \tag{1.8}$$

$$\mathbf{x}^{-}_{k,r} := -\mathbf{q}_*(c_1(\mathscr{L}'_k)^r\cdot\mathbf{p}^*):\ V_{\underline{d}}\to V_{\underline{d}+k} \tag{1.9}$$

Рассмотрим следующие производящие функции для операторов на V:

$$\bar{h}_k(u) = 1 + \sum_{r=0}^{\infty} \bar{h}_{k,r}\hbar^{-r}u^{-r-1} :=$$
$$= \mathbf{a}_k(u+\frac{k+1}{2})^{-1}\mathbf{a}_k(u+\frac{k-1}{2})^{-1}\mathbf{a}_{k-1}(u+\frac{k-1}{2})\mathbf{a}_{k+1}(u+\frac{k+1}{2}) :\ V_{\underline{d}} \to V_{\underline{d}}[[u^{-1}]]; \tag{1.10}$$

$$\mathbf{x}_k^+(u) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{x}_{k,r}^+ \hbar^{-r}u^{-r-1} :\ V_{\underline{d}} \to V_{\underline{d}-k}[[u^{-1}]] \tag{1.11}$$

$$\mathbf{x}_k^-(u) = \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{x}_{k,r}^- \hbar^{-r}u^{-r-1} :\ V_{\underline{d}} \to V_{\underline{d}+k}[[u^{-1}]] \tag{1.12}$$

Теорема 1.3
Операторы $\bar{h}_{k,r}, \mathbf{x}_{k,r}^{\pm}$ на V, определенные в 1.2.12, удовлетворяют соотношениям в $Y(\mathfrak{sl}_n)$, то есть задают действие алгебры $Y(\mathfrak{sl}_n)$ на V.

Доказательство. Отождествим V с универсальным модулем Верма $\mathfrak{V}$ при помощи изоморфизма Ψ из теоремы 1.1. Рассмотрим операторы $\mathbf{A}_m(u), \mathbf{B}_m(u), \mathbf{C}_m(u) :$ $\mathfrak{V} \to \mathfrak{V}[u],\ 1 \le m \le n-1$, а также $\mathbf{A}_0(u) = 1$ и $\mathbf{A}_n(u)$, введенные в [52] 5.3. The explicit formula for the (diagonal) action of $\mathbf{A}_m(u)$ in the Gelfand-Tsetlin basis $\{\xi_{\widetilde{\underline{d}}}\}$ of $\mathfrak{V}$ is given in Theorem 5.3.4 of [52]. It reads

$$\mathbf{A}_m(u)\xi_{\widetilde{\underline{d}}} = (u + \hbar^{-1}x_1 - d_{m1})\dots(u+\hbar^{-1}x_m - d_{mm})\xi_{\widetilde{\underline{d}}} \tag{1.13}$$

Явная формула для (диагонального) действия $\mathbf{a}_m(u)$ в базисе неподвижных точек $\{[\widetilde{\underline{d}}]\}$ пространства V приведена в доказательстве теоремы 3.5 работы [18]. Сопоставляя эти две формулы, видим, что собственные значения оператора $\mathbf{A}_m(u)$ в базисе Гельфанда–Цетлина совпадают с собственными значениями оператора $\mathbf{a}_m(u)$ в базисе неподвижных точек. Тогда из теоремы 1.2 следует, что Ψ переводит $\mathbf{a}_m(u)$ в $\mathbf{A}_m(u)$.

Напомним, что имеется другое представление (так называемое RTT) алгебры $Y(\mathfrak{sl}_n)$, см. [52]. Оно связано с “новым дринфельдовским представлением” 1.2.11 посредством изоморфизма Дринфельда (см. [52] 5.3 и 3.1.8):

$$\bar{h}_k(u) = \mathbf{A}_k(u+\frac{k+1}{2})^{-1}\mathbf{A}_k(u+\frac{k-1}{2})^{-1}\mathbf{A}_{k-1}(u+\frac{k-1}{2})\mathbf{A}_{k+1}(u+\frac{k+1}{2}) \tag{1.14}$$

$$\mathbf{x}_k^+(u) = \mathbf{A}_k(u+\frac{k-1}{2})^{-1}\mathbf{B}_k(u+\frac{k-1}{2}) \tag{1.15}$$

$$\mathbf{x}_k^-(u) = \mathbf{C}_k(u+\frac{k-1}{2})\mathbf{A}_k(u+\frac{k-1}{2})^{-1} \tag{1.16}$$

Согласно [52], операторы $\mathbf{A}_k(u), \mathbf{B}_k(u), \mathbf{C}_k(u)$ получаются из действия $Y(\mathfrak{sl}_n)$ в RTT-представлении, так что левые части равенств (1.14,1.15,1.16) удовлетворяют соотношениям (1.1–1.5). Тогда для доказательства теоремы остается доказать, что изоморфизм Ψ переводит производящую функцию для левой части равенств (1.11) (соотв. (1.12)) в левую часть равенств (1.15) (соотв. (1.16)). Рассмотрим случай $\mathbf{x}_k^-(u)$; случай $\mathbf{x}_k^+(u)$ абсолютно аналогичен.

Характер $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*$ в слое линейного расслоения $\mathscr{L}_i$ в точке $(\widetilde{\underline{d}}, \widetilde{\underline{d}}') \in \mathfrak{E}_{\underline{d},i}$ равен $-x_j + d_{ij}\hbar$, если $d'_{ij} = d_{ij} + 1$ при некотором $j \leq i$. Из теоремы 1.2 b) следует,что матричные коэффициенты $\mathbf{x}_{i,r}^-$ в базисе $\{[\widetilde{\underline{d}}]\}$ задаются равенствами

$$\begin{gathered}\mathbf{x}^-_{i,r[\widetilde{\underline{d}},\widetilde{\underline{d}}']} = (-x_j + (d_{ij} + \frac{1-i}{2})\hbar)^r \mathfrak{e}_{i[\widetilde{\underline{d}},\widetilde{\underline{d}}']} = \\ = -\hbar^{-1}(-x_j + (d_{ij} + \frac{1-i}{2})\hbar)^r \prod_{j \neq k \leq i} (x_j - x_k + (d_{i,k} - d_{i,j})\hbar)^{-1} \prod_{k \leq i-1} (x_j - x_k + (d_{i-1,k} - d_{i,j})\hbar)\end{gathered} \tag{1.17}$$

если $d'_{i,j} = d_{i,j} + 1$ при некотором $j \leq i$, а все остальные матричные коэффициенты равны нулю.

С другой стороны, матричные коэффициенты оператора$\mathbf{A}_i(u)^{-1}\mathbf{C}_i(u)$ в базисе Гельфанда–Цетлина были вычислены в теореме 5.3.4 книги [52]. А именно, если $d'_{i,j} = d_{i,j} + 1$ при некотором $j \leq i$, то, полагая $u = d_{ij} - \hbar^{-1}x_j$, получаем

$$\mathbf{C}_i(d_{ij} - \hbar^{-1}x_j)\xi_{\widetilde{\underline{d}}} = \prod_{k=1}^{i-1} (\hbar^{-1}(x_k - x_j) - d_{i-1,k} + d_{ij})\xi_{\widetilde{\underline{d}'}} \tag{1.18}$$

Поскольку $\deg \mathbf{C}_i(u) = i - 1$, мы можем вычислить матричные коэффициенты оператора $\mathbf{C}_i(u)$, и получить коэффициенты $\mathbf{A}_i(u + \frac{i-1}{2})^{-1}\mathbf{C}_i(u + \frac{i-1}{2})$ при помощи интерполяции Лагранжа. Полученная формула с точностью до знака совпадает с (1.17). Поскольку изоморфизм Ψ переводит $[\widetilde{\underline{d}}]$ в $(-\hbar)^{|\underline{d}|}\xi_{\widetilde{\underline{d}}}$, совпадение этих двух формул завершает доказательство теоремы. $\square$

1.2.13.

Мы формулируем гипотезу, которая будет использована в разд. 1.3. Для любых $0 \leq m < i \leq n$ обозначим через $\underline{\mathscr{W}}_{mi}$ фактор $\underline{\mathscr{W}}_i/\underline{\mathscr{W}}_m$ тавтологических векторных расслоений на $\mathfrak{Q}_{\underline{d}} \times \mathbf{C}$. Из кюннетовского разложения полчаем, что класс Черна $c_j(\underline{\mathscr{W}}_{mi})$ равен $c_j(\underline{\mathscr{W}}_{mi}) =: c_j^{(j)}(\underline{\mathscr{W}}_{mi}) \otimes 1 + c_j^{(j-1)}(\underline{\mathscr{W}}_{mi}) \otimes \tau$ где $c_j^{(j)}(\underline{\mathscr{W}}_{mi}) \in H^{2j}_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}})$, и $c_j^{(j-1)}(\underline{\mathscr{W}}_{mi}) \in H^{2j-2}_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}})$. Определим производящие функции $\mathbf{a}_{mi}(u) := u^{i-m} + \sum_{r=1}^{\infty}(-\hbar)^{-r}\left(c_r^{(r)}(\underline{\mathscr{W}}_{mi}) - \hbar c_r^{(r-1)}(\underline{\mathscr{W}}_{mi})\right)u^{i-m-r}$.

Следствие 1.1
$\bar{h}_i(u) = \mathbf{a}_{mi}(u + \frac{i-1}{2})^{-1}\mathbf{a}_{mi}(u + \frac{i+1}{2})^{-1}\mathbf{a}_{m,i-1}(u + \frac{i-1}{2})\mathbf{a}_{m,i+1}(u + \frac{i+1}{2}) : \ V_{\underline{d}} \to V_{\underline{d}}[[u^{-1}]]$
for any $m < i$.

Доказательство. Обозначим правую часть формулы из следствия через $\bar{h}_{mi}(u)$. Необходимо доказать, что $\bar{h}_{mi}(u) = \bar{h}_i(u)$. В силу соотношения (1.3) нужно проверить, что $\bar{h}_{mi,r+s} = [\mathbf{x}^+_{i,r}, \mathbf{x}^-_{i,s}]$. Это делается редукцией к стеку модулей $\mathfrak{Z}_n$, определенному в разд. 3.11 работы [9], абсолютно аналогично *loc. cit.* □

1.3. Параболические пучки и аффинные янгианы

В этом разделе предыдущие результаты обобщаются на аффинную ситуацию.

1.3.1. Параболические пучки

Напомним обозначения из раздела 3 работы [9]. Пусть $\mathbf{X}$ — другая гладкая проективная кривая рода нуль. Фиксируем координату y на $\mathbf{X}$ и рассмотрим действие $\mathbb{C}^*$ на $\mathbf{X}$, для которого $c(x) = c^{-2}x$. Имеем $\mathbf{X}^{\mathbb{C}^*} = \{0_\mathbf{X}, \infty_\mathbf{X}\}$. Пусть $\mathbf{S}$ — поверхность, являющаяся прямым произведением $\mathbf{C} \times \mathbf{X}$. Пусть через $\mathbf{D}_\infty$ обозначается дивизор $\mathbf{C} \times \infty_\mathbf{X} \cup \infty_\mathbf{C} \times \mathbf{X}$. Пусть $\mathbf{D}_0$ — дивизор $\mathbf{C} \times 0_\mathbf{X}$.

Для данного набора n целых неотрицательных чисел $\underline{d} = (d_0, \ldots, d_{n-1})$, *параболическим пучком* $\mathscr{F}_\bullet$ степени $\underline{d}$ называется бесконечный флаг когерентных пучков без кручения ранга n на $\mathbf{S}$: $\ldots \subset \mathscr{F}_{-1} \subset \mathscr{F}_0 \subset \mathscr{F}_1 \subset \ldots$, для которого

(a) $\mathscr{F}_{k+n} = \mathscr{F}_k(\mathbf{D}_0)$ при всех k;

(b) $ch_1(\mathscr{F}_k) = k[\mathbf{D}_0]$ при всех k: первые классы Черна пропорциональны фундаментальному классу дивизора $\mathbf{D}_0$;

(c) $ch_2(\mathscr{F}_k) = d_i$ при $i \equiv k \pmod n$;

(d) $\mathscr{F}_0$ локально свободен в $\mathbf{D}_\infty$ и тривиализован над $\mathbf{D}_\infty$: $\mathscr{F}_0|_{\mathbf{D}_\infty} = W \otimes \mathscr{O}_{\mathbf{D}_\infty}$;

(e) при $-n \le k \le 0$ пучок $\mathscr{F}_k$ локально свободен в $\mathbf{D}_\infty$, и факторпучки $\mathscr{F}_k/\mathscr{F}_{-n}$, $\mathscr{F}_0/\mathscr{F}_k$ (оба с носителем в $\mathbf{D}_0 = \mathbf{C} \times 0_\mathbf{X} \subset \mathbf{S}$) локально свободны в точке $\infty_\mathbf{C} \times 0_\mathbf{X}$; более того, локальные сечения $\mathscr{F}_k|_{\infty_\mathbf{C} \times \mathbf{X}}$ суть те сечения пучка $\mathscr{F}_0|_{\infty_\mathbf{C} \times \mathbf{X}} = W \otimes \mathscr{O}_\mathbf{X}$, которые принимают значение из $\langle w_1, \ldots, w_{n-k} \rangle \subset W$ в $0_\mathbf{X} \in \mathbf{X}$.

Тонкое пространство модулей $\mathscr{P}_{\underline{d}}$ параболических пучков степени $\underline{d}$ существует и является гладким связным квазипроективным многообразием размерности $2d_0 + \ldots + 2d_{n-1}$.

1.3.2. Неподвижные точки

Группа $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ действует естественным образом на $\mathscr{P}_{\underline{d}}$, и его множество неподвижных точек конечно. Чтобы описать его, напомним хорошо известное описание множества неподвижных точек действия $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ на схеме Гильберта $(\mathbf{C} - \infty_\mathbf{C}) \times (\mathbf{X} - \infty_\mathbf{X})$. А именно, неподвижные точки параметризуются диаграммами Юнга, и для диаграммы $\lambda = (\lambda_0 \ge \lambda_1 \ge \ldots)$ (где $\lambda_N = 0$ for $N\mathfrak{g}0$) соответствующая неподвижная точка есть идеал $J_\lambda = \mathbb{C}[z] \cdot (\mathbb{C}y^0 z^{\lambda_0} \oplus \mathbb{C}y^1 z^{\lambda_1} \oplus \ldots)$. Мы будем рассматривать J_λ как идеал в $\mathscr{O}_{\mathbf{C}\times\mathbf{X}}$, совпадающий с $\mathscr{O}_{\mathbf{C}\times\mathbf{X}}$ в окрестности бесконечности.

Будем говорить, что $\lambda \supset \mu$, если $\lambda_i \ge \mu_i$ при всех $i \ge 0$. Будем говорить также, что $\lambda \widetilde{\supset} \mu$ если $\lambda_i \ge \mu_{i+1}$ при всех $i \ge 0$.

Рассмотрим набор $\underline{\lambda} = (\lambda^{kl})_{1\le k,l\le n}$ диаграмм Юнга, удовлетворяющих следующим неравенствам:

$$\lambda^{11} \subset \lambda^{21} \subset \ldots \subset \lambda^{n1} \tilde{\subset} \lambda^{11};\ \lambda^{22} \subset \lambda^{32} \subset \ldots \subset \lambda^{12} \tilde{\subset} \lambda^{22};\ \ldots;\ \lambda^{nn} \subset \lambda^{1n} \subset \ldots \subset \lambda^{n-1,n} \tilde{\subset} \lambda^{nn} \tag{1.19}$$

Положим $d_k(\underline{\lambda}) = \sum_{l=1}^{n} |\lambda^{kl}|$ и $\underline{d}(\underline{\lambda}) = (d_0(\underline{\lambda}) := d_n(\underline{\lambda}), \ldots, d_{n-1}(\underline{\lambda}))$.

Для такого набора $\underline{\lambda}$ определим параболический пучок $\mathscr{F}_\bullet = \mathscr{F}_\bullet(\underline{\lambda})$, или просто $\underline{\lambda}$, следующим образом: при $1 \le k \le n$ положим

$$\mathscr{F}_{k-n} = \bigoplus_{1\le l\le k} J_{\lambda^{kl}} w_l \oplus \bigoplus_{k<l\le n} J_{\lambda^{kl}}(-\mathbf{D}_0) w_l \tag{1.20}$$

Лемма 1.1

Соответствие $\underline{\lambda} \mapsto \mathscr{F}_\bullet(\underline{\lambda})$ есть биекция между множеством наборов $\underline{\lambda}$, удовлетворяющих (1.19), и для которых $\underline{d}(\underline{\lambda}) = \underline{d}$, и множеством $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$-неподвижных точек в $\mathscr{P}_{\underline{d}}$.

Доказательство. Очевидно. □

1.3.3.

Теперь введем другую реализацию параболических пучков и другую параметризацию множества неподвижных точек, весьма тесно связанную с этой новой реализацией. Мы узнали об этой конструкции от А.Ю.Окунькова, хотя она уже была описана в работе Бисваса [7]. Пусть через $\sigma : \mathbf{C} \times \mathbf{X} \to \mathbf{C} \times \mathbf{X}$ обозначено отображение $\sigma(z, y) = (z, y^n)$, и пусть $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Тогда G действует на $\mathbf{C} \times \mathbf{X}$ умножением координаты на $\mathbf{X}$ на корни $n-$й степени из единицы.

Параболический пучок $\mathscr{F}_\bullet$ полностью определяется флагом пучков

$$\mathscr{F}_0(-\mathbf{D}_0) \subset \mathscr{F}_{-n+1} \subset \ldots \subset \mathscr{F}_0,$$

удовлетворяющих приведенным выше условиям $a - e$. С $\mathscr{F}_\bullet$ можно связать один G-инвариантный пучок $\tilde{\mathscr{F}}$ на $\mathbf{C} \times \mathbf{X}$:

$$\tilde{\mathscr{F}} = \sigma^* \mathscr{F}_{-n+1} + \sigma^* \mathscr{F}_{-n+2}(-\mathbf{D}_0) + \ldots + \sigma^* \mathscr{F}_0(-(n-1)\mathbf{D}_0).$$

Этот пучок будет должен удовлетворять некоторым численным и граничным условиям, получающимся из условий 1.3.1.(b)–(e). Обратно, всякий G-инвариантный пучок $\tilde{\mathscr{F}}$, удовлетворяющий этим численным и граничным условиям, будет определять единственный параболический пучок.

Если $\mathscr{F}_\bullet$ — это $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$-неподвижный параболический пучок, соответствующий набору $\underline{\lambda}$, как описано в предыдущем разделе, тогда

$$\tilde{\mathscr{F}} = \bigoplus_{l=1}^{n} J_{\lambda^l}(-(l-1)\mathbf{D}_0) w_l, \tag{1.21}$$

где $(\lambda^1, ..., \lambda^n)$ — это набор разбиений, заданный при помощи равенств

$$\lambda^l_{ni-n\lfloor\frac{k-l}{n}\rfloor+k-l} = \lambda^{kl}_i. \tag{1.22}$$

Здесь через $\lfloor\frac{k-l}{n}\rfloor$ обозначается максимальное целое число, не превосходящее $\frac{k-l}{n}$.

Для $j \in \mathbb{Z}$, пусть через $(j \bmod n)$ обозначается элемент множества $\{1, \ldots, n\}$, сравнимый с j по модулю n. Для $i \geq j \in \mathbb{Z}$, обозначив

$$d_{ij} = \lambda^{j \bmod n}_{i-j} \tag{1.23}$$

мы получаем набор $(d_{ij}) = \underline{\widetilde{d}} = \underline{\widetilde{d}}(\underline{\lambda})$ целых неотрицательных чисел, удовлетворяющих равенствам

$$d_{kj} \geq d_{ij}\ \forall i \geq k \geq j;\ d_{i+n,j+n} = d_{ij}\ \forall i \geq j;\ d_{ij} = 0 \text{ for } i - j \gg 0. \tag{1.24}$$

При $1 \leq k \leq n$ запишем

$$d_k(\underline{\widetilde{d}}) = \sum_{j\leq k} d_{kj} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i\leq\lfloor\frac{k-l}{n}\rfloor} d_{k(l+ni)} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i\geq 0} \lambda^l_{ni-n\lfloor\frac{k-l}{n}\rfloor+k-l} = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i\geq 0}\lambda^{kl}_i = d_k(\underline{\lambda}).$$

Подводя итог предыдущему, получаем

Лемма 1.2
Соответствие $\underline{\lambda} \mapsto \underline{\widetilde{d}}(\underline{\lambda})$ есть биекция между множеством наборов $\underline{\lambda}$, удовлетворяющих (1.19), и множеством D наборов $\underline{\widetilde{d}}$, удовлетворяющих(1.24). При этом $\underline{d}(\underline{\lambda}) = \underline{d}(\underline{\widetilde{d}}(\underline{\lambda}))$.

При помощи лемм 1.1 и 1.2 параметризуем (и иногда обозначаем) $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$-неподвижные точки в $\mathscr{P}_{\underline{d}}$ наборами $\underline{\widetilde{d}}$, для которых $\underline{d} = \underline{d}(\underline{\widetilde{d}})$.

1.3.4. Соответствия

Если наборы $\underline{d}$ и $\underline{d}'$ отличаются только в одном месте $i \in I := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, и $d'_i = d_i + 1$, можно рассмотреть соответствие $E_{\underline{d},i} \subset \mathscr{P}_{\underline{d}} \times \mathscr{P}_{\underline{d}'}$, образованное парами $(\mathscr{F}_\bullet, \mathscr{F}'_\bullet)$, для которых при $j \not\equiv i \pmod n$ верно, что $\mathscr{F}_j = \mathscr{F}'_j$, и при $j \equiv i \pmod n$ верно, что $\mathscr{F}'_j \subset \mathscr{F}_j$.

Это гладкое квазипроективное алгебраическое многообразие размерности $2\sum_{i\in I} d_i + 1$.

Обозначим через $\mathbf{p}$ (соотв. $\mathbf{q}$) естественную проекцию $E_{\underline{d},i} \to \mathscr{P}_{\underline{d}}$ (соотв. $E_{\underline{d},i} \to \mathscr{P}_{\underline{d}'}$). При $j \equiv i \pmod n$ соответствию $E_{\underline{d},i}$ можно сопоставить естественное линейное расслоение L_j, слой которого в $(\mathscr{F}_\bullet, \mathscr{F}'_\bullet)$ равен $\Gamma(\mathbf{C}, \mathscr{F}_j/\mathscr{F}'_j)$. Наконец, имеется транспонированное соответствие ${}^TE_{\underline{d},i} \subset \mathscr{P}_{\underline{d}'} \times \mathscr{P}_{\underline{d}}$.

1.3.5.

Обозначим через $'M$ прямую сумму эквивариантных (комплексифицированных) когомологий: $'M = \oplus_{\underline{d}} H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{P}_{\underline{d}})$. Это модуль над $H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*}(pt) = \mathbb{C}[\mathfrak{t}\oplus\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}] =$

$\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n,\hbar,\hbar']$. Здесь $\hbar'$ равняется удвоенной положительной образующей пространства $H^2_{\mathbb{C}^*}(pt,\mathbb{Z})$ для второго экземпляра $\mathbb{C}^*$. Определим $M = {}'M\otimes_{H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*}(pt)}$ $\mathrm{Frac}(H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*}(pt))$.

Имеется очевидная градуировка $M=\oplus_{\underline{d}}M_{\underline{d}},\ M_{\underline{d}}=H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{P}_{\underline{d}})\otimes_{H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*}(pt)}$ $\mathrm{Frac}(H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*}(pt))$.

1.3.6.

Градуировка и соответствия ${}^TE_{\underline{d},i},E_{\underline{d},i}$ поднимаются до следующих операторов на M (отметим, что, хотя $\mathbf{p}$ и не собственный, $\mathbf{p}_*$ корректно определен на локализованных эквивариантных когомологиях в силу конечности множества неподвижных точек группы $\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$):

$$\mathfrak{h}_i=\hbar^{-1}(x_{i+1}-x_i)+\delta_{i,0}\hbar^{-1}\hbar'+2d_i-d_{i-1}-d_{i+1}+1:\ M_{\underline{d}}\to M_{\underline{d}};\qquad(1.25)$$

$$\mathfrak{f}_i=\mathbf{p}_*\mathbf{q}^*:\ M_{\underline{d}}\to M_{\underline{d}-i};\qquad(1.26)$$

$$\mathfrak{e}_i=-\mathbf{q}_*\mathbf{p}^*:\ M_{\underline{d}}\to M_{\underline{d}+i}.\qquad(1.27)$$

Теорема 1.4
При $n>2$ операторы $\mathfrak{e}_i,\mathfrak{h}_i,\mathfrak{f}_i$ of 1.3.6 на M удовлетворяют соотношениям на образующие Шевалле в алгебре Каца–Муди $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$.

Доказательство полностью аналогично доказательству гипотезы 3.7 из работы [9] в пп. 3.8–3.10 *loc. cit.* □

Аналогично теореме 1.2 можно вычислить матричные коэффициенты операторов $\mathfrak{e}_i,\mathfrak{f}_i$ в базисе, образованном фундаментальными классами $\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$-неподвижных точек $[\widetilde{\underline{d}}]\in M$. Для этого сопоставим набору $\widetilde{\underline{d}}$ набор весов $p_{ij}:=-x_{j\ (\mathrm{mod}\ n)}+d_{ij}\hbar+\lfloor\frac{-j}{n}\rfloor\hbar'$.

Теорема 1.5
Матричные коэффициенты операторов $\mathfrak{e}_i,\mathfrak{f}_i$ в базисе $\{[\widetilde{\underline{d}}]\}$ таковы:

$$\mathfrak{e}_{i[\widetilde{\underline{d}},\widetilde{\underline{d}}']}=-\hbar^{-1}\frac{p_{i-1,j}-p_{ij}}{p_{ii}-p_{ij}}\prod_{j\neq k\le i-1}\frac{p_{i-1,k}-p_{ij}}{p_{ik}-p_{ij}}$$

если $d'_{i,j}=d_{i,j}+1$ для некоторых $j\le i$ (отметим, что почти все сомножители в этом произведении равны 1 в силу условия (1.24));

$$\mathfrak{f}_{i[\widetilde{\underline{d}},\widetilde{\underline{d}}']}=\hbar^{-1}(p_{i+1,j}-p_{ij})(p_{i+1,i+1}-p_{ij})\prod_{j\neq k\le i}\frac{p_{i+1,k}-p_{ij}}{p_{ik}-p_{ij}}$$

если $d'_{i,j}=d_{i,j}-1$ для некоторых $j\le i$;

Все остальные матричные коэффициенты $\mathfrak{e}_i,\mathfrak{f}_i$ равны нулю.

Доказательство будет приведено ниже.

1.3.7.

В отличие от случая пространств Ломона (теорема 1.1), M не изоморфно универсальному модулю Верма над $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$. Мы предполагаем, что M изоморфно универсальному модулю Верма над $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$. Введем ещё несколько обозначений и соответствий, чтобы точно сформулировать эту гипотезу..

Отметим, что центр алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$ порожден элементом $C = \mathfrak{h}_0 + \ldots + \mathfrak{h}_{n-1}$, действующим на M как $n + \hbar'\hbar^{-1}$. Обозначим через $\mathfrak{H}$ алгебру Гейзенберга с образующими a_i, $i \in \mathbb{Z}$ и C', и соотношениями $[a_p, C'] = 0$, $[a_p, a_q] = \delta_{p,-q} pC'$. Обозначим через $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$ факторалгебру $(\mathfrak{H} \oplus \widehat{\mathfrak{sl}}_n)/(C' - nC)$.

При $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_n)$ и $m \geq 1$ положим $\underline{d} + m\delta := (d_1 + m, \ldots, d_n + m)$. Пусть $\mathfrak{E}_{\underline{d},m\delta} \subset \mathscr{P}_{\underline{d}} \times \mathscr{P}_{\underline{d}+m\delta}$ — соответствие, образованное всеми такими парами $(\mathscr{F}_\bullet, \mathscr{F}'_\bullet)$, для которых $\mathscr{F}_\bullet \supset \mathscr{F}'_\bullet$, и носитель фактора $\mathscr{F}_\bullet / \mathscr{F}'_\bullet$ сосредоточен в одной точке кривой $\mathbf{C}$. В этом случае набор факторов $(\mathscr{F}_1/\mathscr{F}'_1, \ldots, \mathscr{F}_n/\mathscr{F}'_n)$ можно рассматривать как нильпотентное представление $T_\bullet$ циклического колчана $\widetilde{A}_{n-1}$, см. [21] 7.4. Пусть $E^\circ_{\underline{d},m\delta} \subset \mathfrak{E}_{\underline{d},m\delta}$ — локально замкнутое подмножество, образованное всеми парами $\mathscr{F}_\bullet \supset \mathscr{F}_\bullet$, для которых соответствующее представление колчана $\widetilde{A}_{n-1}$ неразложимо. Согласно предложению 7.8 из [21], $E^\circ_{\underline{d},m\delta}$ есть объединение n компонент средней размерности. Обозначим через $E_{\underline{d},m\delta}$ замыкание $E^\circ_{\underline{d},m\delta}$.

Соответствие $E_{\underline{d},m\delta} \subset \mathscr{P}_{\underline{d}} \times \mathscr{P}_{\underline{d}+m\delta}$ задает оператор $M_{\underline{d}} \to M_{\underline{d}+m\delta}$, который мы обозначаем через a_m. Транспонированное соответствие задает оператор $M_{\underline{d}+m\delta} \to M_{\underline{d}}$, который мы обозначаем через a_{-m}. Положим $a_0 = n + \frac{\hbar'}{\hbar}$. Следующая гипотеза была сформулирована А.Г.Кузнецовым несколько лет назад.

Гипотеза 1.1
a) Операторы a_m, $m \in \mathbb{Z}$ и операторы $\mathfrak{e}_i, \mathfrak{h}_i, \mathfrak{f}_i$ из (1.25,1.26,1.27) удовлетворяют соотношениям алгебры Ли $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$ и задают на M структуру $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$-модуля.

b) M изоморфно универсальному модулю Верма над $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$.

1.3.8. Аффинный янгиан

Пусть $(a_{kl})_{1 \leq k,l \leq n} = \widehat{A}_{n-1}$ — матрица Картана алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$. Янгиан $Y(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$ есть свободная $\mathbb{C}[\hbar]$-алгебра, порожденная $\mathbf{x}^\pm_{k,r}, \bar{h}_{k,r}$, $1 \leq k \leq n$, $r \in \mathbb{N}$, с соотношениями (1.1–1.5), где k, l понимаются как вычеты по модулю n, так что, например, если $k = n$, то $k + 1 = 1$.

Аффинный янгиан $\widehat{Y}$ типа $\widehat{A}_{n-1}$ есть свободная $\mathbb{C}[\hbar, \hbar']$-алгебра, порожденная $\mathbf{x}^\pm_{k,r}, \bar{h}_{k,r}$, $1 \leq k \leq n$, $r \in \mathbb{N}$, с теми же соотношениями, как и в $Y(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$, за исключением соотношений (1.2,1.4) для пар $(k,l) = (n,1), (1,n)$. Эти соотношения следует модифицировать следующим образом. Рассмотрим сдвинутые производящие функции $\bar{h}_n(u - \frac{\hbar'}{\hbar} - \frac{n}{2}) =: {}'\bar{h}_n(u) := 1 + \sum_{r=0}^\infty {}'\bar{h}_{n,r} \hbar^{-r} u^{-r-1}$; $\mathbf{x}^\pm_n(u - \frac{\hbar'}{\hbar} - \frac{n}{2}) =: {}'\mathbf{x}^\pm_n(u) := \sum_{r=0}^\infty {}'\mathbf{x}^\pm_{k,r} \hbar^{-r} u^{-r-1}$. Тогда новые соотношения выглядят так:

$$2[{}'\bar{h}_{n,r+1}, \mathbf{x}^\pm_{1,s}] - 2[{}'\bar{h}_{n,r}, \mathbf{x}^\pm_{1,s+1}] = \mp\hbar({}'\bar{h}_{n,r}\mathbf{x}^\pm_{1,s} + \mathbf{x}^\pm_{1,s}{}'\bar{h}_{n,r}), \tag{1.28}$$

$$2[\bar{h}_{1,r+1}, {}'\mathbf{x}^\pm_{n,s}] - 2[\bar{h}_{1,r}, {}'\mathbf{x}^\pm_{n,s+1}] = \mp\hbar(\bar{h}_{1,r}{}'\mathbf{x}^\pm_{n,s} + {}'\mathbf{x}^\pm_{n,s}\bar{h}_{1,r}), \tag{1.29}$$

$$2[{}'\mathbf{x}^\pm_{n,r+1}, \mathbf{x}^\pm_{1,s}] - 2[{}'\mathbf{x}^\pm_{n,r}, \mathbf{x}^\pm_{1,s+1}] = \mp\hbar({}'\mathbf{x}^\pm_{n,r}\mathbf{x}^\pm_{1,s} + \mathbf{x}^\pm_{1,s}{}'\mathbf{x}^\pm_{n,r}). \tag{1.30}$$

Таким образом, $Y(\widehat{\mathfrak{sl}}_n) = \widehat{Y}/(\hbar' + \frac{n\hbar}{2})$.

Отметим, что $\widehat{Y}$ изоморфен $\widehat{\mathbf{Y}}_{\beta,\lambda}$, введенному в [30], определение 3.3. Действительно, янгиан $\widehat{\mathbf{Y}}_{\beta,\lambda}$ порожден образующими $X^{\pm}_{k,r}$ и $H^{\pm}_{k,r}$, удовлетворяющими соотношениям (1.1,1.3,1.5), и видоизмененным соотношениям (1.2,1.4). Эти видоизмененные соотношения можно переписать в терминах производящих функций $X^{\pm}_k(u) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} X^{\pm}_{k,r}\lambda^{-r}u^{-1-r}$, $H_k(u) = \sum\limits_{r=0}^{\infty} H^{\pm}_{k,r}\lambda^{-r}u^{-1-r}$. Ряды $X^{\pm}_k(u)$, $H_l(u)$ удовлетворяют соотношениям (1.6,1.7), за тем исключением, что для пар $(k,l) = (1,n),(n,n-1)$ эти соотношения модифицируются таким образом:

$$\partial_u\partial_v H_k(u)X^{\pm}_l(v)(2u-2v\pm1-\frac{2\beta}{\lambda}+1) = -\partial_u\partial_v X^{\pm}_l(v)H_k(u)(2v-2u\pm1+\frac{2\beta}{\lambda}-1) \tag{1.31}$$

$$\partial_u\partial_v H_l(u)X^{\pm}_k(v)(2u-2v\pm1+\frac{2\beta}{\lambda}-1) = -\partial_u\partial_v X^{\pm}_k(v)H_l(u)(2v-2u\pm1-\frac{2\beta}{\lambda}+1) \tag{1.32}$$

$$\partial_u\partial_v X^{\pm}_k(u)X^{\pm}_l(v)(2u-2v\pm1-\frac{2\beta}{\lambda}+1) = -\partial_u\partial_v X^{\pm}_l(v)X^{\pm}_k(u)(2v-2u\pm1+\frac{2\beta}{\lambda}-1) \tag{1.33}$$

Изоморфизм $\widehat{Y} \to \widehat{\mathbf{Y}}_{\beta,\lambda}$ переводит $\hbar$ в λ, и $\hbar'$ в $-\frac{n\lambda}{2}+2\beta-\lambda$. Он определен на производящих функциях следующим образом:

$$\mathbf{x}^{\pm}_k(u) \mapsto X^{\pm}_k(u),\ \bar{h}_k(u) \mapsto H_k(u) \text{ при } k \neq n, \tag{1.34}$$

$$\mathbf{x}^{\pm}_n(u-\frac{\hbar'}{2\hbar}-\frac{n}{4}) \mapsto X^{\pm}_n(u),\ \bar{h}_n(u-\frac{\hbar'}{2\hbar}-\frac{n}{4}) \mapsto H_n(u). \tag{1.35}$$

1.3.9.

Для всех $m \le i \in \mathbb{Z}$ обозначим через $\underline{\mathscr{W}}_{mi}$ фактор $\underline{\mathscr{F}}_i/\underline{\mathscr{F}}_m$ тавтологических векторных расслоений на $\mathscr{P}_{\underline{d}} \times \mathbf{C}$. При кюннетовском разложении для класса Черна $c_j(\underline{\mathscr{W}}_{mi})$ получаем, что $c_j(\underline{\mathscr{W}}_{mi}) =: c_j^{(j)}(\underline{\mathscr{W}}_{mi}) \otimes 1 + c_j^{(j-1)}(\underline{\mathscr{W}}_{mi}) \otimes \tau$ где $c_j^{(j)}(\underline{\mathscr{W}}_{mi}) \in H^{2j}_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}})$, и $c_j^{(j-1)}(\underline{\mathscr{W}}_{mi}) \in H^{2j-2}_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}})$. Введем производящие функции $\mathbf{a}_{mi}(u) := u^{i-m} + \sum_{r=1}^{\infty}(-\hbar)^{-r}\left(c_r^{(r)}(\underline{\mathscr{W}}_{mi}) - \hbar c_r^{(r-1)}(\underline{\mathscr{W}}_{mi})\right)u^{i-m-r}$.

Следствие 1.2
Выражение $\mathbf{a}_{mi}(u+\frac{i-1}{2})^{-1}\mathbf{a}_{mi}(u+\frac{i+1}{2})^{-1}\mathbf{a}_{m,i-1}(u+\frac{i-1}{2})\mathbf{a}_{m,i+1}(u+\frac{i+1}{2}) : M_{\underline{d}} \to M_{\underline{d}}[[u^{-1}]]$ *не зависит от* $m < i$.

Доказательство следует из следствия 1.1 при помощи редукции к стеку $\mathfrak{Z}_N$, ср. п. 3.11 работы [9]. □

Обозначим через $\bar{h}_i(u)$ общее значение выражений
$\mathbf{a}_{mi}(u+\frac{i-1}{2})^{-1}\mathbf{a}_{mi}(u+\frac{i+1}{2})^{-1}\mathbf{a}_{m,i-1}(u+\frac{i-1}{2})\mathbf{a}_{m,i+1}(u+\frac{i+1}{2})$.

Напомним, что через q обозначается характер $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* : (\underline{t}, v, c) \mapsto v^2$. Определим линейное расслоение $L'_k := q^{\frac{1-k}{2}}L_k$ на соответствии $E_{\underline{d},k}$ так, чтобы L'_k и L_k были бы изоморфны как линейные расслоения, но эквивариантная структура на L'_k получалась бы из эквивариантной структуры на L_k подкруткой на характер $q^{\frac{1-k}{2}}$.

При $1 \le k \le n$ рассмотрим следующие производящие функции операторов на M:

$$\bar{h}_k(u) =: 1 + \sum_{r=0}^{\infty} \bar{h}_{k,r} \hbar^{-r} u^{-r-1} : \ M_{\underline{d}} \to M_{\underline{d}}; \tag{1.36}$$

$$\mathbf{x}_k^{\pm}(u) =: \sum_{r=0}^{\infty} \mathbf{x}_{k,r}^{\pm} \hbar^{-r} u^{-r-1} : \ M_{\underline{d}} \to M_{\underline{d} \mp k}[[u^{-1}]], \tag{1.37}$$

где

$$\mathbf{x}_{k,r}^{+} := \mathbf{p}_*(c_1(L'_k)^r \cdot \mathbf{q}^*) : \ M_{\underline{d}} \to M_{\underline{d}-k}; \tag{1.38}$$

$$\mathbf{x}_{k,r}^{-} := -\mathbf{q}_*(c_1(L'_k)^r \cdot \mathbf{p}^*) : \ M_{\underline{d}} \to M_{\underline{d}+k}. \tag{1.39}$$

Теорема 1.6
При $n > 2$ операторы $\bar{h}_{k,r}, \mathbf{x}_{k,r}^{\pm}$ на M, определенные в (1.36,1.38,1.39), удовлетворяют соотношениям в $\widehat{Y}$, то есть задают действие янгиана $\widehat{Y}$ на M.

Доказательство. При произвольном $k \in \mathbb{Z}$ определим $\mathbf{x}_{k,r}^{\pm} : \ M_{\underline{d}} \to M_{\underline{d} \mp k}$ теми же формулами (1.38,1.39).

Пусть q' — характер $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^* : \ (\underline{t}, v, c) \mapsto c^2$. Тогда имеем $\underline{\mathscr{W}}_{m-n,i-n} = q' \underline{\mathscr{W}}_{mi}$, то есть $\underline{\mathscr{W}}_{m-n,i-n}$ и $\underline{\mathscr{W}}_{mi}$ изоморфны как векторные расслоения, но эквивариантная структура на $\underline{\mathscr{W}}_{m-n,i-n}$ получается из эквивариантной структуры на $\underline{\mathscr{W}}_{mi}$ подкруткой на характер q'. Следовательно, $\mathbf{a}_{m-n,i-n}(u) = \mathbf{a}_{mi}(u - \frac{\hbar'}{\hbar})$, а значит, $\bar{h}_{k-n}(u) = \bar{h}_k(u - \frac{\hbar'}{\hbar} - \frac{n}{2})$.

Аналогично для эквивариантных линейных расслоений на соответствии $E_{\underline{d},k}$ имеем $L_{k-n} = qL_k$, а значит, $\mathbf{x}_{k-n}^{\pm}(u) = \mathbf{x}_k^{\pm}(u - \frac{\hbar'}{\hbar} - \frac{n}{2})$. In particular, $\mathbf{x}_0^{\pm}(u) = \mathbf{x}_n^{\pm}(u - \frac{\hbar'}{\hbar} - \frac{n}{2}) = {}'\mathbf{x}_n(u)$.

Теперь соотношения (1.28,1.29,1.30) снова следуют из теоремы 1.3 при помощи редукции к стеку $\mathfrak{Z}_N$, ср. п. 3.11 работы [9]. □

Напомним определение весов $p_{ij} := -x_{j \pmod n} + d_{ij}\hbar + \lfloor \frac{-j}{n} \rfloor \hbar'$, введенное перед теоремой 1.5.

Теорема 1.7
Матричные коэффициенты операторов $\mathbf{x}_{i,r}^{\pm}$ в базисе неподвижных точек $\{[\underline{\widetilde{d}}]\}$ на M таковы:

$$\mathbf{x}_{i,r[\underline{\widetilde{d}},\underline{\widetilde{d}}']}^{-} = (p_{ij} + \frac{1-i}{2}\hbar)^r \mathfrak{e}_{i[\underline{\widetilde{d}},\underline{\widetilde{d}}']} = -\hbar^{-1}(p_{ij} + \frac{1-i}{2}\hbar)^r \frac{p_{i-1,j} - p_{ij}}{p_{ii} - p_{ij}} \prod_{j \neq k \le i-1} \frac{p_{i-1,k} - p_{ij}}{p_{ik} - p_{ij}}$$

если $d'_{i,j} = d_{i,j} + 1$ для какого-то $j \le i$ (отметим, что почти все сомножители в этом произведении равны 1 в силу условия (1.24));

$$\mathbf{x}_{i,r[\underline{\widetilde{d}},\underline{\widetilde{d}}']}^{+} = (p_{ij} + \frac{1-i}{2}\hbar)^r \mathfrak{f}_{i[\underline{\widetilde{d}},\underline{\widetilde{d}}']} = \hbar^{-1}(p_{ij} + \frac{1-i}{2}\hbar)^r (p_{i+1,j} - p_{ij})(p_{i+1,i+1} - p_{ij}) \prod_{j \neq k \le i} \frac{p_{i+1,k} - p_{ij}}{p_{ik} - p_{ij}}$$

если $d'_{i,j} = d_{i,j} - 1$ для какого-то $j \leq i$;

Все остальные матричные коэффициенты $\mathbf{x}^{\pm}_{i,r}$ равны нулю.

Собственное значение оператора $\bar{h}_i(u)$ на $[\widetilde{\underline{d}}]$ равняется

$$\prod_{j\leqslant i}(u+\frac{i+1}{2}-p_{ij})^{-1}(u+\frac{i-1}{2}-p_{ij})^{-1}(u+\frac{i+1}{2}-p_{i+1,j+1})(u+\frac{i-1}{2}-p_{i-1,j-1})$$

Доказательство. Немедленно следует из теоремы 1.5 и определения $\mathbf{x}^{\pm}_{i,r}$. Формула для $\bar{h}_i(u)$ следует из того, что собственное значение оператора $\mathbf{a}_{mi}(u)$ на $[\widetilde{\underline{d}}]$ есть $\prod_{j\leqslant i}(u-p_{ij})\prod_{k\leqslant m}(u-p_{mk})^{-1}$. □

Теорема 1.8
M есть неприводимый $\widehat{Y}$-модуль.

Доказательство. Согласно теореме 1.7, подалгебра Гельфанда–Цетлина в $\widehat{Y}$, порожденная $\bar{h}_{i,r}$, диагонально действует в базисе $\{[\widetilde{\underline{d}}]\}$ с попарно различными собственными значениями. Тогда остается проверить два утверждения:

1) для всякого $[\widetilde{\underline{d}}]$ найдется такой индекс i, что $\mathbf{x}^{-}_{i,0}[\widetilde{\underline{d}}] \neq 0$;

2) для всякого $[\widetilde{\underline{d}}] \neq [\widetilde{\underline{0}}]$ найдется такой индекс i, что $\mathbf{x}^{+}_{i,0}[\widetilde{\underline{d}}] \neq 0$.

Оба они напрямую следуют из теоремы 1.7. □

1.3.10. Специализация базиса Гельфанда–Цетлина

Фиксируем целое положительное число K (уровень). Рассмотрим набор из n чисел $\mu = (\mu_{1-n}, \dots, \mu_0) \in \mathbb{Z}^n$, для которого that $\mu_0 + K \geq \mu_{1-n} \geq \mu_{2-n} \geq \dots \geq \mu_{-1} \geq \mu_0$. Будем рассматривать μ как доминантный (интегрируемый) вес алгебры $\hat{\mathfrak{gl}}_n$ уровня K. Продолжим μ до невозрастающей последовательности $\widetilde{\mu} = (\widetilde{\mu}_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, полагая $\widetilde{\mu}_i := \mu_{i \pmod n} + \lfloor\frac{-i}{n}\rfloor K$.

Определим подмножество $D(\mu)$ (*аффинные таблицы Гельфанда–Цетлина*) множества D всех наборов $\widetilde{\underline{d}}$, удовлетворяющих условиям (1.24), следующим образом:

$$\widetilde{\underline{d}} \in D(\mu) \text{ iff } d_{ij} - \widetilde{\mu}_j \leq d_{i+l,j+l} - \widetilde{\mu}_{j+l} \ \forall\ j \leq i,\ l \geq 0. \tag{1.40}$$

Специализируем значения $x_1, \dots, x_n, \hbar, \hbar'$ так, что

$$\hbar = 1,\ \hbar' = -K-n,\ x_j = \widetilde{\mu}_j - j + 1. \tag{1.41}$$

Определим перенормированные векторы

$$\lfloor\widetilde{\underline{d}}\rfloor := C_{\widetilde{\underline{d}}}^{-1}[\widetilde{\underline{d}}] \tag{1.42}$$

где $C_{\widetilde{\underline{d}}}$ есть произведение $\prod_{w\in T_{\widetilde{\underline{d}}}\mathscr{P}_{\underline{d}}} w$ всех весов $\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}^*$ в касательном пространстве к $\mathscr{P}_{\underline{d}}$ в точке $\widetilde{\underline{d}}$. Явная формула для полимножества $\{w\}$ приведена ниже. А именно, следует подставить $\widetilde{\underline{d}}' = \widetilde{\underline{d}}$ в эту формулу, затем разложить её в сумму лорановских мономов от $\underline{t}, q, q'$ с целыми положительными коэффициентами и заменить каждый моном $q^b(q')^c\prod_{i=1}^n t_i^{2a_i}$ соответствующим весом $w =$

$b\hbar + c\hbar' + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$ (с кратностью, заданной соответствующим целым коэффициентом).

Определим $V(\mu)$ как $\mathbb{C}$-линейную оболочку векторов $\lfloor \widetilde{\underline{d}} \rfloor$ for $\widetilde{\underline{d}} \in D(\mu)$.

Теорема 1.9
Формулы из теоремы 1.7 задают действие $\widehat{Y}/(\hbar - 1, \hbar' + K + n)$ в $V(\mu)$.

Доказательство. Можно показать, что матричные коэффициенты в перенормированном базисе $\{\lfloor \widetilde{\underline{d}} \rfloor\}$ удовлетворяют равенствам $\mathfrak{e}_{i\lfloor \widetilde{\underline{d}}, \widetilde{\underline{d}'} \rfloor} = -\mathfrak{f}_{i[\widetilde{\underline{d}'}, \widetilde{\underline{d}}]}$, $\mathfrak{f}_{i\lfloor \widetilde{\underline{d}}, \widetilde{\underline{d}'} \rfloor} = -\mathfrak{e}_{i[\widetilde{\underline{d}'}, \widetilde{\underline{d}}]}$. Нужно проверить два утверждения:

a) при $\widetilde{\underline{d}} \in D(\mu)$ знаменатели матричных коэффициентов $\mathbf{x}^{\pm}_{i,r\lfloor \widetilde{\underline{d}}, \widetilde{\underline{d}'} \rfloor}$ не обращаются в нуль;

b) при $\widetilde{\underline{d}} \in D(\mu)$, $\widetilde{\underline{d}'} \notin D(\mu)$ числители матричных коэффициентов $\mathbf{x}^{\pm}_{i,r\lfloor \widetilde{\underline{d}}, \widetilde{\underline{d}'} \rfloor}$ обращаются в нуль. И то, и другое проверяется непосредственно. □

Ограничивая $V(\mu)$ на $U(\hat{\mathfrak{sl}}_n) \subset \widehat{Y}$, получаем одноименный $\hat{\mathfrak{sl}}_n$-модуль. Напомним конструкцию вложения $\hat{\mathfrak{sl}}_n \subset \hat{\mathfrak{gl}}_n$ из п. 1.3.7.

Гипотеза 1.2
$\hat{\mathfrak{sl}}_n$-модуль $V(\mu)$ продолжается до неприводимого интегрируемого $\hat{\mathfrak{gl}}_n$-модуля со старшим весом μ.

Хотя мы не знаем, как определить действие алгебры Гейзенберга на $V(\mu)$, нам удалось доказать следующую слабую версию гипотезы 1.2.

Теорема 1.10
Характер $V(\mu)$ равняется характеру неприводимого интегрируемого $\hat{\mathfrak{gl}}_n$-модуля со старшим весом μ.

2. ОПИСАНИЕ ДЕЙСТВИЯ КВАНТОВЫХ ГРУПП В ЭКВИВАРИАНТНЫХ КОГОМОЛОГИЯХ ПРОСТРАНСТВ МОДУЛЕЙ

2.1. Введение

Пространства модулей $\mathscr{Q}_{\underline{d}}$ были введены Г. Ломоном в [45] и [46]. Они представляют собой компактификации пространств отображений степени $\underline{d}$ из $\mathbb{P}^1$ в пространство флагов $\mathscr{B}_n$ группы GL_n. Первоначальной мотивацией Ломона было изучение геометрических рядов Эйзенштейна, но впоследствии пространства Ломона оказались полезны для вычисления квантовых когомологий и K-теории пространств $\mathscr{B}_n$, см. например [27], [9]. Цель настоящего раздела — дать гипотетический ответ для квантовых колец когомологий пространств Ломона.

2.2. Гипотезы о квантовых когомологиях пространств Ломона

2.2.1.

Согласно теореме 3 из [27], $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ есть многообразие Калаби–Яу. Для удобства читателя напомним доказательство. Во-первых, заметим, что если $\underline{d} = (d_1, \ldots, d_{n-1})$ и $d_k = 0$, то $\mathfrak{Q}_{\underline{d}} = \mathfrak{Q}_{\underline{d}'} \times \mathfrak{Q}_{\underline{d}''}$, где $\underline{d}' = (d_1, \ldots, d_{k-1})$, $\mathfrak{Q}_{\underline{d}'}$ есть соответствующее пространство Ломона для GL_k, $\underline{d}'' = (d_{k+1}, \ldots, d_{n-1})$, а $\mathfrak{Q}_{\underline{d}''}$ есть соответствующее пространство Ломона для GL_{n-k}. Поэтому можно считать, что все числа $d_1, \ldots, d_{n-1}$ положительны.

Для любого $1 \le i \le n-1$ рассмотрим локально замкнутое подмногообразие в $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$, состоящее из всех квазифлагов, имеющих дефектстепени ровно i. Обозначим за $\mathfrak{D}_i \subset \mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ замыкание этого подмногообразия. Это дивизор. Обозначим $[\mathscr{O}(\mathfrak{D}_i)]$ класс соответствующего линейного расслоения в $\mathrm{Pic}\,(\mathfrak{Q}_{\underline{d}})$.

Лемма 2.1
Пусть все числа $d_1, \ldots, d_{n-1}$ положительны. Тогда $[\mathscr{O}(\mathfrak{D}_1)] = [\mathscr{D}_2], \ldots, [\mathscr{O}(\mathfrak{D}_i)] = [\mathscr{D}_{i+1}] - [\mathscr{D}_i], \ldots, [\mathscr{O}(\mathfrak{D}_{n-1})] = -[\mathscr{D}_{n-1}]$.

Доказательство. Имеется морфизм $\pi_{\underline{d}} : \mathfrak{Q}_{\underline{d}} \to Z_{\underline{d}}$ в пространство Застав Дринфельда (малое разрешение особенностей). Для любого $1 \le k \le n-2$ выберем точку $s \in Z_{\underline{d}}$ со степенью дефекта ровно $k+(k+1)$. Пусть P_k – прообраз $\pi_{\underline{d}}^{-1}(s) \subset \mathfrak{Q}_{\underline{d}}$. Вычисление для GL_3 показывает, что P_k есть проективная прямаяі. Фндаментальные классы $[P_1], \ldots, [P_{n-2}]$ образуют базис в пространстве $H_2(\mathfrak{Q}_{\underline{d}}, \mathbb{C})$. Легко видеть, что ограничение $\mathscr{D}_i|_{P_k}$ тривиально, если $i \neq k+1$, в то время, как $\mathscr{D}_{k+1}|_{P_k} \simeq \mathscr{O}(1)$ (это, опять же, достаточно проверить для GL_3). Далее, легко видеть, что ограничение $\mathscr{O}(\mathfrak{D}_i)|_{P_k}$ тривиально для $i \neq k, k+1$, $\mathscr{O}(\mathfrak{D}_k)|_{P_k} \simeq \mathscr{O}(1)$, а $\mathscr{O}(\mathfrak{D}_{k+1})|_{P_k} \simeq \mathscr{O}(-1)$ (снова вычисление для GL_3). Лемма доказана. □

Пусть ${}^\circ\mathfrak{Q}_{\underline{d}} \subset \mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ – открытое подмножество, состоящее из квазифлагов без дефекта. Пусть Ω – симплектическая форма на ${}^\circ\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$, построенная в [23]. Заметим, что дополнение $\mathfrak{Q}_{\underline{d}} \setminus {}^\circ\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ есть объединение дивизоров $\bigcup_{1\le i\le n-1} \mathfrak{D}_i$. Таким образом, старшая степень $\omega := \Omega^{top}$ есть мероморфная форма объема на $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ с полюсами на $\bigcup_{1\le i\le n-1}\mathfrak{D}_i$. Формула для Ω, данная в замечании 3 в *loc. cit.* показывает, что порядок полюса формы ω на $\mathfrak{D}_i$ равен 2 для любого $1 \le i \le n-1$. Следовательно, канонический класс $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ in $\mathrm{Pic}(\mathfrak{Q}_{\underline{d}})$ равен $2\sum_{1\le i\le n-1}[\mathscr{O}(\mathfrak{D}_i)]$. По лемме 2.1 класс $2\sum_{1\le i\le n-1}[\mathscr{O}(\mathfrak{D}_i)] = 0$. Таким образом, доказано

Следствие 2.1
(Гивенталь, Ли [27]) Канонический класс многообразия $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ тривиален.

2.2.2. Подалгебры сдвига аргумента

Каждому регулярному элементу μ в подалгебре Картана $\mathfrak{h}$ полупростой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ можно сопоставить пространство Q_μ коммутирующих квадратичных элементов универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$. А именно,

$$Q_\mu = \{\sum_{\alpha\in\Delta_+}\frac{\langle h,\alpha\rangle}{\langle\mu,\alpha\rangle}e_\alpha e_{-\alpha},\ \mid h\in\mathfrak{h}\},$$

где Δ_+ – множество положительных корней, а e_α, $e_{-\alpha}$ – ненулевые элементы в корневых подпространствах, такие, что $(e_\alpha, e_{-\alpha}) = 1$. Заметим, что пространство Q_μ не меняется при растяжениях μ, следовательно, мы имеем семейство пространств коммутирующих квадратичных операторов, параметризованное регулярными элементами в $\mathbb{P}(\mathfrak{h})$.

Эти квадратичные элементы возникают в квазиклассическом пределе плоской связности *Казимира* в тривиальном векторном расслоении на регулярной части картановской подалгебры со слоем $\mathfrak{V}_{\underline{d}}$, (см. [12], [20], [65], [49]). Эта связность задается формулой

$$\nabla = d + \kappa\sum_{\alpha\in\Delta_+}e_\alpha e_{-\alpha}\frac{d\alpha}{\alpha},$$

где κ – параметр. Так как любой элемент алгебры $U(\mathfrak{g})$ вида $e_\alpha e_{-\alpha}$ коммутирует с подалгеброй Картана $\mathfrak{h}$, эта связность остается плоской после прибавления любой замкнутой $U(\mathfrak{h})$-значной 1-формы.

Централизатор этого подпространства коммутирующих квадратичных операторов в $U(\mathfrak{g})$ есть так называемая *подалгебра сдвига аргумента* $\mathscr{A}_\mu \subset U(\mathfrak{g})$, являющаяся свободной коммутативной подалгеброй с $\frac{1}{2}(\dim\mathfrak{g} + \mathrm{rk}\,\mathfrak{g})$ образующими. Для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ семейство коммутативных подалгебрthe $\mathscr{A}_\mu \subset U(\mathfrak{g})$ есть $(n-2)$-параметрическая деформация подалгебры Гельфанда–Цетлина (см. [2],[3]).

2.2.3. Гипотеза о квантовых когомологиях

Рассмотрим подалгебру сдвига аргумента для $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$, $\mu = \sum_{i=1}^{n-1} q_{i+1}q_{i+2}\dots q_n\omega_i$, где ω_i – фундаментальные веса алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$. Так как подалгебра сдвига аргумента не меняется при растяжении μ, можно считать, что $q_n = 1$. Полагая

$h_k = \sum\limits_{i=1}^{k-1} q_i q_{i+1} \dots q_n \omega_i$, получаем, что пространство Q_μ порождено элементами

$$\sum_{\alpha\in\Delta_+} \frac{\langle h_k, \alpha\rangle}{\langle \mu, \alpha\rangle} e_\alpha e_{-\alpha} = \sum_{i<j\le k} E_{ij}E_{ji} + \sum_{i<k<j} \frac{\sum\limits_{l=i+1}^{k} q_l q_{l+1}\dots q_n}{\sum\limits_{l=i+1}^{j} q_l q_{l+1}\dots q_n} E_{ij}E_{ji} =$$

$$= \sum_{i<j\le k} E_{ij}E_{ji} + \sum_{i<k<j} \frac{\sum\limits_{l=i+1}^{k} q_l q_{l+1}\dots q_{j-1}}{1+\sum\limits_{l=i+1}^{j-1} q_l q_{l+1}\dots q_{j-1}} E_{ij}E_{ji},$$

где $k = 2, \dots, n-1$.

Рассмотрим кольцо эквивариантных (малых) квантовых когомологий пространства $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$, зависящее от $n-2$ квантовых параметров $q_2, \dots, q_{n-1}$ соответствующих классам Черна детеринантных расслоений. Заметим, что $\sum\limits_{i<j\le k} E_{ij}E_{ji}$ есть Cas_k с точностью до прибавления выражения из картановской подалгебры. Следовательно, подалгебра сдвига аргумента содержит следующие (коммутирующие) элементы

$$QC_k := \widetilde{Cas_k} + \sum_{i<k<j} \frac{\sum\limits_{l=i+1}^{k} q_l q_{l+1}\dots q_{j-1}}{1+\sum\limits_{l=i+1}^{j-1} q_l q_{l+1}\dots q_{j-1}} E_{ij}E_{ji}.$$

Гипотеза 2.1

[1] *Изоморфизм $\Psi : V_{\underline{d}} \to \mathfrak{V}_{\underline{d}}$ переводит оператор $M_{\mathscr{D}_k}$ квантового умножения на $c_1(D_k)$ в оператор $\frac{\hbar}{2} QC_k$.*

Следствие 2.2

Локализованное кольцо эквивариантных квантовых когомологий пространства $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ изоморфно факторалгебре подалгебры сдвига аргумента $\mathscr{A}_\mu$ по аннулятору вектора $\mathfrak{v}_{\underline{d}}$.

Пусть $\underline{\mathscr{A}}_\mu$ – целая форма $\mathscr{A}_\mu \cap \underline{\mathfrak{U}}$.

Гипотеза 2.2

Кольцо эквивариантных квантовых когомологий пространства $\mathfrak{Q}_{\underline{d}}$ изоморфно факторалгебре алгебры $\underline{\mathscr{A}}_\mu$ по аннулятору вектора $\mathfrak{v}_{\underline{d}}$.

Отображение $(q_2, \dots, q_{n-1}) \mapsto \mu = \sum\limits_{i=1}^{n-1} q_{i+1}q_{i+2}\dots q_{n-1}\omega_i$ вкладывает тор $\mathsf{T} = \mathbb{C}^{*(n-2)}$ с координатами $q_2, \dots, q_{n-1}$ в картановскую подалгебру $\mathfrak{h} = \mathbb{C}^{n-1}$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$ как открытое подмножество аффинной гиперплоскости. Ограничивая

[1] Недавно доказано А. Негутом

связность Казимира на T и прибавляя нужный картановский член, получаем следующую плоскую связность на торе T в координатах q_i:

$$\nabla = d + \kappa \sum_{k=2}^{n-1} QC_k \frac{dq_k}{q_k}.$$

С другой стороны, тривиальное векторное расслоение со слоем $V_{\underline{d}}$ над пространством T квантовых параметров имеет *квантовую связность* $d + \sum_{k=2}^{n-1} M_{\mathscr{D}_k} \frac{dq_k}{q_k}$.

Следствие 2.3
Изоморфизм Ψ переводит квантовую связность в связность Казимира с $\kappa = \frac{\hbar}{2}$.

Замечание 2.1 *Согласно [1], семейство подпространств Q_μ образует открытое подмножество в пространстве модулей $(n-1)$-мерных пространств коммутирующих линейных комбинаций выражений $e_\alpha e_{-\alpha}$ в алгебре $U(\mathfrak{g})$. Таким образом, естественно ожидать, что операторы $M_{\mathscr{D}_k}$ порождают подпространство Q_μ для некоторого μ, зависящего от $q_2, \dots, q_{n-1}$ (но, к сожалению, мы не знаем, как доказать, что операторы $M_{\mathscr{D}_k}$ являются квадратичными выражениями от соответствий). Более того, так как единица остается единицей и в кольце квантовых когомологий, квантовая поправка должна аннулировать вектор $\mathfrak{v}_{\underline{d}}$. Следовательно, оператор $\Psi(M_{\mathscr{D}_k})$ есть QC_k с точностью до замены параметризации. Наконец, то, что связность $d + \sum_{k=2}^{n-1} M_{\mathscr{D}_k} \frac{dq_k}{q_k}$ плоская, влечет очень ограничительное условие на параметризацию $\mu(q_2, \dots, q_{n-1})$ — и не оставляет никакой другой возможности, кроме $\Psi(M_{\mathscr{D}_k}) = \frac{\hbar}{2} QC_k$.*

2.3. Глобальные пространства Ломона

2.3.1.

Напомним обозначения из первого раздела отчёта за первый этап проекта. Мы определяем две версии соответствий $\mathscr{E}_{\underline{d},i} \subset \mathscr{Q}_{\underline{d}} \times \mathscr{Q}_{\underline{d}+i}$, а именно, $\mathscr{E}^0_{\underline{d},i} := \mathbf{r}^{-1}\{0\}$, $\mathscr{E}^\infty_{\underline{d},i} := \mathbf{r}^{-1}\{\infty\}$. Их проекции на $\mathscr{Q}_{\underline{d}}$ (соотв. $\mathscr{Q}_{\underline{d}+i}$) будут обозначаться через $\mathbf{p}^0, \mathbf{p}^\infty$ (соотв. $\mathbf{q}^0, \mathbf{q}^\infty$). Проекция из $\mathscr{E}_{\underline{d},i}$ на $\mathscr{Q}_{\underline{d}}$ (соотв. $\mathscr{Q}_{\underline{d}+i}$) будет обозначаться через $\mathbf{p}^{\mathbf{C}}$ (соотв. $\mathbf{q}^{\mathbf{C}}$).

Мы обозначаем через $'A$ (соотв. $'B$) прямую сумму эквивариантных (комплексифицированных) когомологий: $'A = \oplus_{\underline{d}} H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{Q}_{\underline{d}})$ (соотв. $'B = \oplus_{\underline{d}} H^\bullet_{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{Q}_{\underline{d}})$). Определим $A = {}'A \otimes_{H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt)} \mathrm{Frac}(H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt))$, и $B = {}'B \otimes_{H^\bullet_{G\times\mathbb{C}^*}(pt)} \mathrm{Frac}(H^\bullet_{G\times\mathbb{C}^*}(pt))$.

Имеется очевидная градуировка $A = \oplus_{\underline{d}} A_{\underline{d}}$, $A_{\underline{d}} = H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{Q}_{\underline{d}}) \otimes_{H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt)} \mathrm{Frac}(H^\bullet_{\widetilde{T}\times\mathbb{C}^*}(pt))$; аналогично, $B = \oplus_{\underline{d}} B_{\underline{d}}$, $B_{\underline{d}} = H^\bullet_{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{Q}_{\underline{d}}) \otimes_{H^\bullet_{G\times\mathbb{C}^*}(pt)} \mathrm{Frac}(H^\bullet_{G\times\mathbb{C}^*}(pt))$.

Отметим, что $H^\bullet_{G\times\mathbb{C}^*}(pt) = \mathbb{C}[e_1, \dots, e_n, \hbar]$ где e_i есть i-тая элементарная симметрическая функция от $x_1, \dots, x_n$.

2.3.2. Неподвижные точки

Множество $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*$-неподвижных точек в $\mathscr{Q}_{\underline{d}}$ конечно; оно описано в [22], 2.11. Напомним, что это множество неподвижных точек находится в биективном соответствии со множеством наборов $\{\widehat{\underline{d}}\}$ следующих данных: а) перестановки $\sigma \in S_n$; б) матрицы (d_{ij}^0) (соотв. d_{ij}^∞), $i \geq j$ с неотрицательными целыми элементами, для которой при $i \geq j \geq k$ имеем $d_{kj}^0 \geq d_{ij}^0$ (соотв. $d_{kj}^\infty \geq d_{ij}^\infty$), так что $d_i = \sum_{j=1}^i (d_{ij}^0 + d_{ij}^\infty)$. Для упрощения обозначений мы будем обозначать через $\widehat{\underline{d}}$ соответствующую $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*$-неподвижную точку в $\mathscr{Q}_{\underline{d}}$:

$\mathscr{W}_1 = \mathscr{O}_{\mathbf{C}}(-d_{11}^0 \cdot 0 - d_{11}^\infty \cdot \infty) w_{\sigma(1)}$,

$\mathscr{W}_2 = \mathscr{O}_{\mathbf{C}}(-d_{21}^0 \cdot 0 - d_{21}^\infty \cdot \infty) w_{\sigma(1)} \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{C}}(-d_{22}^0 \cdot 0 - d_{22}^\infty \cdot \infty) w_{\sigma(2)}$,

$\ldots \ \ldots \ \ldots$,

$\mathscr{W}_{n-1} = \mathscr{O}_{\mathbf{C}}(-d_{n-1,1}^0 \cdot 0 - d_{n-1,1}^\infty \cdot \infty) w_{\sigma(1)} \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{C}}(-d_{n-1,2}^0 \cdot 0 - d_{n-1,2}^\infty \cdot \infty) w_{\sigma(2)} \oplus$
$\oplus \ldots \oplus \mathscr{O}_{\mathbf{C}}(-d_{n-1,n-1}^0 \cdot 0 - d_{n-1,n-1}^\infty \cdot \infty) w_{\sigma(n-1)}$.

Мы также условимся писать $\widehat{\underline{d}} = (\sigma, \widetilde{\underline{d}}^0, \widetilde{\underline{d}}^\infty)$.

В локализованных эквивариантных когомологиях A имеется базис из прямых образов фундаментальных классов неподвижных точек; этот базис мы также будем обозначать через $\{[\widehat{\underline{d}}]\}$.

2.3.3. Классы Черна тавтологических расслоений

Можно убедиться, что $H^\bullet_{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(pt)$-алгебра $H^\bullet_{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{Q}_{\underline{d}})$ порождена кюннетовскими компонентами классов Черна $c_j^{(j)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$, $c_j^{(j-1)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$, $1 \leq j \leq i \leq n-1$ тавтологических векторных расслоений $\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}}$ на $\mathscr{Q}_{\underline{d}} \times \mathbf{C}$. Вычислим операторы умножения на $c_j^{(j)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$, $c_j^{(j-1)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$, $1 \leq j \leq i \leq n-1$ в кольце эквивариантных когомологий $H^\bullet_{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{Q}_{\underline{d}})$ с базисом из неподвижных точек $\{[\widehat{\underline{d}}]\}$.

Введем следующие обозначения. Для функции $f(x_1, \ldots, x_n, \hbar) \in \mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})$ и перестановки $\sigma \in S_n$ положим $f^\sigma(x_1, \ldots, x_n, \hbar) := f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}, \hbar)$. Также положим $\bar{f}(x_1, \ldots, x_n, \hbar) := f(x_1, \ldots, x_n, -\hbar)$. Для $1 \leq j \leq i$, пусть через $e_{ji}^0(\widehat{\underline{d}})$ (соотв. $e_{ji}^\infty(\widehat{\underline{d}})$) обозначаются суммы произведений наборов из j различных элементов множества $\{-x_1 + d_{i,1}^0 \hbar, \ldots, -x_i + d_{i,i}^0 \hbar\}$ (соотв. множества $\{-x_1 + d_{i,1}^\infty \hbar, \ldots, -x_i + d_{i,i}^\infty \hbar\}$).

Лемма 2.2
Оператор умножения на $c_j^{(j)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$ (соотв. на $c_j^{(j-1)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$, $1 \leq j \leq i \leq n-1$) диагонален в базисе $\{[\widehat{\underline{d}}] = [(\sigma, \widetilde{\underline{d}}^0, \widetilde{\underline{d}}^\infty)]\}$ и имеет собственные значения $\{\frac{1}{2}(e_{ji}^0(\widehat{\underline{d}}) + e_{ji}^\infty(\widehat{\underline{d}}))^\sigma\}$ (соотв. $\{\frac{\hbar^{-1}}{2}(e_{ji}^\infty(\widehat{\underline{d}}) - e_{ji}^0(\widehat{\underline{d}}))^\sigma\}$).

Доказательство. Непосредственная проверка. □

Следствие 2.4
Оператор умножения на $c_1^{(1)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$ диагонален в базисе $\{[\widehat{\underline{d}}] = [(\sigma, \widetilde{\underline{d}}^0, \widetilde{\underline{d}}^\infty)]\}$ и имеет собственные значения $-(x_1 + \ldots + x_i)^\sigma + d_i \hbar$.

2.3.4.

Обозначим через $\mathfrak{U}^2$ универсальную обертывающую алгебру для $\mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n$ над полем $\mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})$. При $1 \leq i, j \leq n$ обозначим через $E_{ij}^{(1)}$ (соотв. $E_{ij}^{(2)}$) элемент $(E_{ij}, 0) \in \mathfrak{gl}_n \oplus$

$\mathfrak{gl}_n \subset \mathfrak{U}^2$ (соотв. элемент $(0, E_{ij}) \in \mathfrak{gl}_n \oplus \mathfrak{gl}_n \subset \mathfrak{U}^2$). Обозначим через $\mathfrak{U}^2_{\leq 0}$ подалгебру в $\mathfrak{U}^2$, порожденную элементами $E^{(1)}_{ii}, E^{(2)}_{ii}$, $1 \leq i \leq n$, $E^{(1)}_{i,i+1}, E^{(2)}_{i,i+1}$, $1 \leq i \leq n-1$. Она действует на поле $\mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})$ следующим образом: $E^{(1)}_{i,i+1}, E^{(2)}_{i,i+1}$ действуют тривиально при всех $1 \leq i \leq n-1$, а $E^{(1)}_{ii}$ (соотв. $E^{(2)}_{ii}$) действует умножением на $\hbar^{-1}x_i + i - 1$ (соотв. $-\hbar^{-1}x_i + i - 1$). Обозначим *универсальный модуль Верма* $\mathfrak{V}$ над $\mathfrak{U}^2$ через $\mathfrak{U}^2 \otimes_{\mathfrak{U}^2_{\leq 0}} \mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})$. Универсальный модуль Верма $\mathfrak{V}$ есть неприводимый $\mathfrak{U}$-модуль.

Для всякой перестановки $\sigma = (\sigma(1), \ldots, \sigma(n)) \in S_n$ (т.е. в группе Вейля группы $G = GL_n$) рассмотрим новое действие алгебры $\mathfrak{U}^2_{\leq 0}$ на $\mathbb{C}(\mathfrak{f} \oplus \mathbb{C})$, определенное следующим образом: $E^{(1)}_{i,i+1}, E^{(2)}_{i,i+1}$ действуют тривиально при всех $1 \leq i \leq n-1$, и $E^{(1)}_{ii}$ (соотв. $E^{(2)}_{ii}$) действуют умножением на $\hbar^{-1}x_{\sigma(i)} + i - 1$ (соотв. $-\hbar^{-1}x_{\sigma(i)} + i - 1$). Определим модуль $\mathfrak{V}^\sigma$ над $\mathfrak{U}^2$ как $\mathfrak{U}^2 \otimes_{\mathfrak{U}^2_{\leq 0}} \mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})$ (относительно этого нового действия алгебры $\mathfrak{U}^2_{\leq 0}$ на $\mathbb{C}(\mathfrak{f} \oplus \mathbb{C})$). Наконец, определим $\mathfrak{A} := \bigoplus_{\sigma \in S_n} \mathfrak{V}^\sigma$.

2.3.5.

Градуировка и соответствия $\mathscr{E}_{\underline{d},i}, \mathscr{E}^0_{\underline{d},i}, \mathscr{E}^\infty_{\underline{d},i}$ задают следующие операторы на A, B:

$\mathfrak{f}^{(1)}_i = E^{(1)}_{i,i+1} = \hbar^{-1}\mathbf{p}^0_*\mathbf{q}^{0*} :\ A_{\underline{d}} \to A_{\underline{d}-i}$ and $B_{\underline{d}} \to B_{\underline{d}-i}$;
$\mathfrak{f}^{(2)}_i = E^{(2)}_{i,i+1} = -\hbar^{-1}\mathbf{p}^\infty_*\mathbf{q}^{\infty*} :\ A_{\underline{d}} \to A_{\underline{d}-i}$ and $B_{\underline{d}} \to B_{\underline{d}-i}$;
$\mathfrak{e}^{(1)}_i = E^{(1)}_{i+1,i} = -\hbar^{-1}\mathbf{q}^0_*\mathbf{p}^{0*} :\ A_{\underline{d}} \to A_{\underline{d}+i}$ and $B_{\underline{d}} \to B_{\underline{d}+i}$;
$\mathfrak{e}^{(2)}_i = E^{(2)}_{i+1,i} = \hbar^{-1}\mathbf{q}^\infty_*\mathbf{p}^{\infty*} :\ A_{\underline{d}} \to A_{\underline{d}+i}$ and $B_{\underline{d}} \to B_{\underline{d}+i}$;
$\mathfrak{f}^\Delta_i = \mathbf{p}^{\mathbf{C}}_*\mathbf{q}^{\mathbf{C}*} :\ A_{\underline{d}} \to A_{\underline{d}-i}$ and $B_{\underline{d}} \to B_{\underline{d}-i}$;
$\mathfrak{e}^\Delta_i = -\mathbf{q}^{\mathbf{C}}_*\mathbf{p}^{\mathbf{C}*} :\ A_{\underline{d}} \to A_{\underline{d}+i}$ and $B_{\underline{d}} \to B_{\underline{d}+i}$.

Далее, определим действие $\mathbb{C}[\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C}]$ на B по следующему правилу: для $1 \leq i \leq n-1$, x_i действует на $B_{\underline{d}}$ при помощи умножения на $c^{(1)}_1(\underline{\mathscr{W}}^{\mathbf{C}}_{i-1}) - c^{(1)}_1(\underline{\mathscr{W}}^{\mathbf{C}}_i) - (d_i - d_{i-1})\hbar$ (ср. следствие 2.4); а x_n действует умножением на $e_1 - x_1 - \ldots - x_{n-1}$ (напомним, что e_1 есть образующая в $H^2_G(pt)$).

Теорема 2.1
а) Операторы $\mathfrak{e}^{(1)}_i = E^{(1)}_{i+1,i}, \mathfrak{e}^{(2)}_i = E^{(2)}_{i+1,i}, \mathfrak{f}^{(1)}_i = E^{(1)}_{i,i+1}, \mathfrak{f}^{(2)}_i = E^{(2)}_{i,i+1}$, вместе с действием $\mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})$ на B, определенном в 2.3.5, удовлетворяют соотношениям в $\mathfrak{U}^2$, т.е. задают действие всей алгебры $\mathfrak{U}^2$ на B;

б) Существует единственный изоморфизм Ψ^2 $\mathfrak{U}^2$-модулей B и $\mathfrak{V}$, переводящий $1 \in H^0_{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{Q}_0) \subset B$ в вектор младшего веса $1 \in \mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C}) \subset \mathfrak{V}$.

Доказательство. Опишем матричные коэффициенты $\mathfrak{e}^{(1)}_i = E^{(1)}_{i+1,i}, \mathfrak{e}^{(2)}_i = E^{(2)}_{i+1,i}, \mathfrak{f}^{(1)}_i = E^{(1)}_{i,i+1}, \mathfrak{f}^{(2)}_i = E^{(2)}_{i,i+1}$ в базисе из неподвижных точек $\{[\widehat{\underline{d}}]\}$. Напомним, чему равнялись матричные коэффициенты, $\mathfrak{e}_{i[\widetilde{\underline{d}},\widetilde{\underline{d}}']}, \mathfrak{f}_{i[\widetilde{\underline{d}},\widetilde{\underline{d}}']}$, вычисленные ранее. Доказательство следующей несложной леммы мы опускаем.

Лемма 2.3
Пусть $\widehat{\underline{d}} = (\sigma, \widetilde{\underline{d}}^0, \widetilde{\underline{d}}^\infty)$, и $\widehat{\underline{d}}' = (\sigma', \widetilde{\underline{d}}^{0\prime}, \widetilde{\underline{d}}^{\infty\prime})$. Значения матричных коэффициентов равны $\mathfrak{e}^{(1)}_{i[\widehat{\underline{d}},\widehat{\underline{d}}']} = \delta_{\sigma,\sigma'}(\mathfrak{e}_{i[\widetilde{\underline{d}}^0,\widetilde{\underline{d}}^{0\prime}]})^\sigma$; $\mathfrak{e}^{(2)}_{i[\widehat{\underline{d}},\widehat{\underline{d}}']} = \delta_{\sigma,\sigma'}(\bar{\mathfrak{e}}_{i[\widetilde{\underline{d}}^\infty,\widetilde{\underline{d}}^{\infty\prime}]})^\sigma$; $\mathfrak{f}^{(1)}_{i[\widehat{\underline{d}},\widehat{\underline{d}}']} = \delta_{\sigma,\sigma'}(\mathfrak{f}_{i[\widetilde{\underline{d}}^0,\widetilde{\underline{d}}^{0\prime}]})^\sigma$; $\mathfrak{f}^{(2)}_{i[\widehat{\underline{d}},\widehat{\underline{d}}']} = \delta_{\sigma,\sigma'}(\mathfrak{f}_{i[\widetilde{\underline{d}}^\infty,\widetilde{\underline{d}}^{\infty\prime}]})^\sigma$.$\square$

Отсюда следует, что операторы $\mathfrak{e}_i^{(1)} = E_{i+1,i}^{(1)}, \mathfrak{e}_i^{(2)} = E_{i+1,i}^{(2)}, \mathfrak{f}_i^{(1)} = E_{i,i+1}^{(1)}, \mathfrak{f}_i^{(2)} = E_{i,i+1}^{(2)}$ на A, определенные в 2.3.5, удовлетворяют соотношениям из $\mathfrak{U}^2$, т.е. они задают действие алгебры $\mathfrak{U}^2$ на A. Более того, отсюда следует, что $\mathfrak{U}^2$-модуль A изоморфен $\mathfrak{A}$. Для описания образа базиса $\{[\widehat{\underline{d}}]\}$ под действием этого изоморфизма введем следующие обозначения. Во-первых, определим $\mathfrak{U}$-модуль $\mathfrak{V}^\sigma := \mathfrak{U} \otimes_{\mathfrak{U}_{\leq 0}} \mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})$, где $\mathfrak{U}_{\leq 0}$ действует на $\mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})$ таким образом: $E_{i,i+1}$ действует тривиально при всех $1 \leq i \leq n-1$, и E_{ii} действует умножением на $\hbar^{-1} x_{\sigma(i)} + i - 1$. Аналогично определим $\mathfrak{U}$-модуль $\bar{\mathfrak{V}}^\sigma := \mathfrak{U} \otimes_{\mathfrak{U}_{\leq 0}} \mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})$, где $\mathfrak{U}_{\leq 0}$ действует на $\mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})$ так: $E_{i,i+1}$ действует тривиально при всех $1 \leq i \leq n-1$, и E_{ii} действует умножением на $-\hbar^{-1} x_{\sigma(i)} + i - 1$. Отметим, что $\mathfrak{B}^\sigma \simeq \mathfrak{V}^\sigma \otimes_{\mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})} \bar{\mathfrak{V}}^\sigma$.

Теперь набору $\widetilde{\underline{d}} = (d_{ij})$ и перестановке $\sigma \in S_n$ можно сопоставить таблицу Гельфанда–Цетлина $\Lambda^\sigma = \Lambda^\sigma(\widetilde{\underline{d}}) := (\lambda_{ij}^\sigma),\ n \geq i \geq j$, следующим образом: $\lambda_{nj}^\sigma := \hbar^{-1} x_{\sigma(j)} + j - 1,\ n \geq j \geq 1;\ \lambda_{ij}^\sigma := \hbar^{-1} x_{\sigma(j)} + j - 1 - d_{ij},\ n-1 \geq i \geq j \geq 1$. Определим $\xi_{\widetilde{\underline{d}}}^\sigma = \xi_{\Lambda^\sigma} \in \mathfrak{V}^\sigma$ при помощи формул (2.9)–(2.11) из [51] (где $\xi = \xi_0 = 1 \in \mathfrak{V}^\sigma$). Аналогично набору $\widetilde{\underline{d}} = (d_{ij})$ и перестановке $\sigma \in S_n$, сопоставим таблицу Гельфанда–Цетлина $\bar{\Lambda}^\sigma = \bar{\Lambda}^\sigma(\widetilde{\underline{d}}) := (\bar{\lambda}_{ij}^\sigma),\ n \geq i \geq j$ по правилу: $\bar{\lambda}_{nj}^\sigma := -\hbar^{-1} x_{\sigma(j)} + j - 1,\ n \geq j \geq 1;\ \bar{\lambda}_{ij}^\sigma := -\hbar^{-1} x_{\sigma(j)} + j - 1 - d_{ij},\ n-1 \geq i \geq j \geq 1$. Определим $\bar{\xi}_{\widetilde{\underline{d}}}^\sigma = \xi_{\bar{\Lambda}^\sigma} \in \bar{\mathfrak{V}}^\sigma$ при помощи формул (2.9)–(2.11) из [51] (где $\xi = \xi_0 = 1 \in \bar{\mathfrak{V}}^\sigma$). Наконец, набору $\widehat{\underline{d}} = (\sigma, \widetilde{\underline{d}}^0, \widetilde{\underline{d}}^\infty)$ мы сопоставим элемент $\xi_{\widehat{\underline{d}}} := \xi_{\widetilde{\underline{d}}^0}^\sigma \otimes \bar{\xi}_{\widetilde{\underline{d}}^\infty}^\sigma \in \mathfrak{V}^\sigma \otimes_{\mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})} \bar{\mathfrak{V}}^\sigma = \mathfrak{B}^\sigma$.

Из леммы 2.3 следует, что при вышеописанном изоморфизме $A \simeq \mathfrak{A}$ базисный элемент $[\widehat{\underline{d}}]$ переходит в $\xi_{\widehat{\underline{d}}}$.

Теперь мы готовы завершить доказательство теоремы. Поскольку действие $\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*$ на $\mathscr{Q}_{\underline{d}}$ продолжается до действия $G \times \mathbb{C}^*$, на эквивариантных когомологиях $H^\bullet_{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{Q}_{\underline{d}})$ имеется действие группы Вейля S_n, и $H^\bullet_{G \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{Q}_{\underline{d}}) = H^\bullet_{\widetilde{T} \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{Q}_{\underline{d}})^{S_n}$. Следовательно, $B = A^{S_n}$. Поскольку B замкнуто относительно действия операторов $\mathfrak{e}_i^{(1)} = E_{i+1,i}^{(1)}, \mathfrak{e}_i^{(2)} = E_{i+1,i}^{(2)}, \mathfrak{f}_i^{(1)} = E_{i,i+1}^{(1)}, \mathfrak{f}_i^{(2)} = E_{i,i+1}^{(2)}$ на B, отсюда следует часть а). Отметим, однако, что действие S_n на A не коммутирует с действием вышеописанных операторов.

Для доказательства части б) опишем действие группы S_n на A непосредственно в базисе $\{[\widehat{\underline{d}}]\}$. При $\widehat{\underline{d}} = (\sigma, \widetilde{\underline{d}}^0, \widetilde{\underline{d}}^\infty),\ \sigma' \in S_n,\ f \in \mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})$, имеем $\sigma'(f[\widehat{\underline{d}}]) = f^{\sigma'}[(\sigma'\sigma, \widetilde{\underline{d}}^0, \widetilde{\underline{d}}^\infty)]$. Отсюда заключаем, что $\widehat{\underline{d}} = (1, \widetilde{\underline{d}}^0, \widetilde{\underline{d}}^\infty)$ (так что $\xi_{\widehat{\underline{d}}} \in \mathfrak{B}^1 = \mathfrak{B}$), и $(\Psi^2)^{-1}(f\xi_{\widehat{\underline{d}}}) = \sum_{\sigma \in S_n} f^\sigma[(\sigma, \widetilde{\underline{d}}^0, \widetilde{\underline{d}}^\infty)]$. Доказательство теоремы завершено. □

Замечание 2.2 *Операторы $\mathfrak{f}_i^\Delta, \mathfrak{e}_i^\Delta$ из 2.3.5 были определены в [22]. Легко видеть, что $\mathfrak{f}_i^\Delta = \mathfrak{f}_i^{(1)} + \mathfrak{f}_i^{(2)},\ \mathfrak{e}_i^\Delta = \mathfrak{e}_i^{(1)} + \mathfrak{e}_i^{(2)}$.*

2.3.6.

Пополнение пространства $\mathfrak{B} = \mathfrak{V} \otimes_{\mathbb{C}(\mathfrak{t} \oplus \mathbb{C})} \mathfrak{V}$ содержит вектор Уиттекера $\sum_{\underline{d}} \mathfrak{b}_{\underline{d}} = \mathfrak{b} := \mathfrak{v} \otimes \mathfrak{v}$. Из доказательства теоремы 2.1 следует, что для единичного элемента кольца когомологий $1^{\underline{d}} \in H^0_{G \times \mathbb{C}^*}(\mathscr{Q}_{\underline{d}})$ имеем $\Psi^2(1^{\underline{d}}) = \mathfrak{b}_{\underline{d}}$. Двойная подалгебра Гельфанда–Цетлина $\mathfrak{G}^2 := \mathfrak{G} \otimes \mathfrak{G}$ действует эндоморфизмами на пространстве $\mathfrak{B}$. Обозначим через $\mathfrak{I}_{\underline{d}}^2 \subset \mathfrak{G}^2$ аннулятор вектора $\mathfrak{b}_{\underline{d}} \in \mathfrak{B}$, а через $\mathfrak{G}_{\underline{d}}^2$ — фактор $\mathfrak{G}^2$ по $\mathfrak{I}_{\underline{d}}^2$. Действие $\mathfrak{G}^2$ на $\mathfrak{b}_{\underline{d}}$ задает вложение $\mathfrak{G}_{\underline{d}}^2 \hookrightarrow \mathfrak{B}_{\underline{d}}$. Нетрудно доказать, что это вложение является изоморфизмом $\mathfrak{G}_{\underline{d}}^2 \xrightarrow{\sim} \mathfrak{B}_{\underline{d}}$.

Предложение 2.1
Морфизм композиции $\Psi^2: H^\bullet_{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{Q}_{\underline{d}})\otimes_{H^\bullet_{G\times\mathbb{C}^*}(pt)}\mathrm{Frac}(H^\bullet_{G\times\mathbb{C}^*}(pt)) = B_{\underline{d}}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{V}_{\underline{d}}\xrightarrow{\sim}\mathfrak{G}^2_{\underline{d}}$ *является изоморфизмом* алгебр.

Доказательство. Можно видеть, что $H^\bullet_{G\times\mathbb{C}^*}(pt)$-алгебра $H^\bullet_{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{Q}_{\underline{d}})$ порождена кюннетовскими компонентами классов Черна $c_j^{(j)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$, $c_j^{(j-1)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$, $1\le j\le i\le n-1$ тавтологических векторных расслоений $\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}}$ на $\mathscr{Q}_{\underline{d}}\times\mathbf{C}$. Для доказательства предложения достаточно проверить, что операторы умножения на $c_j^{(j)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$, $c_j^{(j-1)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$, $1\le j\le i\le n-1$, в кольце эквивариантных когомологий $H^\bullet_{G\times\mathbb{C}^*}(\mathscr{Q}_{\underline{d}})$ лежат в $\mathfrak{G}^2_{\underline{d}}$. Для этого вычислим эти операторы явно в базисе $\{(\Psi^2)^{-1}\xi_{\widehat{\underline{d}}},\ \widehat{\underline{d}}=(1,\widetilde{\underline{d}}^0,\widetilde{\underline{d}}^\infty)\}$ of $\mathfrak{V}$. Из леммы 2.2 следует, что оператор умножения на $c_j^{(j)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$ (соотв. на $c_j^{(j-1)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$, $1\le j\le i\le n-1$) диагонален в базисе $\{(\Psi^2)^{-1}\xi_{\widehat{\underline{d}}},\ \widehat{\underline{d}}=(1,\widetilde{\underline{d}}^0,\widetilde{\underline{d}}^\infty)\}$ с собственными значениями $\{e^0_{ji}(\widehat{\underline{d}})+e^\infty_{ji}(\widehat{\underline{d}})\}$ (соотв. $\{\hbar^{-1}(e^\infty_{ji}(\widehat{\underline{d}})-e^0_{ji}(\widehat{\underline{d}}))\}$). Отсюда получаем, что $e^0_{ji}(\widehat{\underline{d}})$ есть собственное значение элемента $\mathfrak{G}_{\underline{d}}\otimes 1\subset\mathfrak{G}^2_{\underline{d}}$, и $e^\infty_{ji}(\widehat{\underline{d}})$ есть собственное значение того же элемента в другой копии подалгебры Гельфанда–Цетлина $1\otimes\mathfrak{G}_{\underline{d}}\subset\mathfrak{G}^2_{\underline{d}}$, следовательно, $c_j^{(j)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$ и $c_j^{(j-1)}(\underline{\mathscr{W}}_i^{\mathbf{C}})$ лежат в $\mathfrak{G}^2_{\underline{d}}$.

□

2.3.7. Целые формы

Напомним обозначения из первой части отчета. Рассмотрим соответствия $\mathscr{E}^0_{\underline{d},\alpha_{ij}}\subset\mathscr{Q}_{\underline{d}}\times\mathscr{Q}_{\underline{d}+\alpha_{ij}}$ (соотв. $\mathscr{E}^\infty_{\underline{d},\alpha_{ij}}\subset\mathscr{Q}_{\underline{d}}\times\mathscr{Q}_{\underline{d}+\alpha_{ij}}$) определенные в точности, как ранее (соответственно с заменой условия б) на то условие, что $\mathscr{W}_\bullet/\mathscr{W}'_\bullet$ имеет носитель в $\infty\in\mathbf{C}$). Обозначим через $\mathbf{p}^0_{ij}:\mathscr{E}^0_{\underline{d},\alpha_{ij}}\to\mathscr{Q}_{\underline{d}}$, $\mathbf{q}^0_{ij}:\mathscr{E}^0_{\underline{d},\alpha_{ij}}\to\mathscr{Q}_{\underline{d}+\alpha_{ij}}$, $\mathbf{p}^\infty_{ij}:\mathscr{E}^\infty_{\underline{d},\alpha_{ij}}\to\mathscr{Q}_{\underline{d}}$, $\mathbf{q}^\infty_{ij}:\mathscr{E}^\infty_{\underline{d},\alpha_{ij}}\to\mathscr{Q}_{\underline{d}+\alpha_{ij}}$ естественные собственные проекции. Также рассмотрим соответствия и проекции $\mathscr{E}^{\mathbf{C}}_{\underline{d},\alpha_{ij}}\subset\mathscr{Q}_{\underline{d}}\times\mathscr{Q}_{\underline{d}+\alpha_{ij}}$, $\mathbf{p}^{\mathbf{C}}_{ij}$, $\mathbf{q}^{\mathbf{C}}_{ij}$, определенные как ранее, но безо всяких ограничений на носитель $\mathscr{W}_\bullet/\mathscr{W}'_\bullet$.

Рассмотрим следующие операторы в $'B$:
$\underline{E}^{(1)}_{ij}=\mathbf{p}^0_{ij*}\mathbf{q}^{0*}_{ij}:\ 'B_{\underline{d}}\to\ 'B_{\underline{d}-\alpha_{ij}}$;
$\underline{E}^{(2)}_{ij}=-\mathbf{p}^\infty_{ij*}\mathbf{q}^{\infty*}_{ij}:\ 'B_{\underline{d}}\to\ 'B_{\underline{d}-\alpha_{ij}}$;
$\underline{E}^{(1)}_{ji}=(-1)^{i-j}\mathbf{q}^0_{ij*}\mathbf{p}^{0*}_{ij}:\ 'B_{\underline{d}}\to\ 'B_{\underline{d}+\alpha_{ij}}$;
$\underline{E}^{(2)}_{ji}=-(-1)^{i-j}\mathbf{q}^\infty_{ij*}\mathbf{p}^{\infty*}_{ij}:\ 'B_{\underline{d}}\to\ 'B_{\underline{d}+\alpha_{ij}}$;
$E^\Delta_{ij}=\mathbf{p}^{\mathbf{C}}_{ij*}\mathbf{q}^{\mathbf{C}*}_{ij}:\ 'B_{\underline{d}}\to\ 'B_{\underline{d}-\alpha_{ij}}$;
$E^\Delta_{ji}=(-1)^{i-j}\mathbf{q}^{\mathbf{C}}_{ij*}\mathbf{p}^{\mathbf{C}*}_{ij}:\ 'B_{\underline{d}}\to\ 'B_{\underline{d}+\alpha_{ij}}$.

Имеем $E^\Delta_{ij}=\hbar^{-1}(\underline{E}^{(1)}_{ij}+\underline{E}^{(2)}_{ij})$, $E^\Delta_{ji}=\hbar^{-1}(\underline{E}^{(1)}_{ji}+\underline{E}^{(2)}_{ji})$.

Определим $\underline{\mathfrak{U}}^2\subset\mathfrak{U}^2$ как $\mathbb{C}[\mathfrak{t}\oplus\mathbb{C}]$-подалгебру, определенную так: $\underline{y}^{(1)}$, $\underline{y}^{(2)}$, y^Δ, $y\in\mathfrak{gl}_n$, где $\underline{y}^{(1)}$ (соотв. $\underline{y}^{(2)}$) равняется $\hbar(y,0)$ (соотв. $\hbar(0,y)$), а через y^Δ обозначается (y,y). Тогда легко видеть, что описанные операторы задают действие $\underline{\mathfrak{U}}^2$ на $'B$.

Также несложно проверить, что $\underline{\mathfrak{U}}^2/(\hbar=0)$ изоморфна алгебре $\mathsf{U}:=(\mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n]\rtimes U(\mathfrak{gl}_n))\otimes\mathbb{C}[\mathfrak{t}]$ (полупрямое произведение берется относительно присоединенного действия). Итак, $\bar{B}:=\ 'B/(\hbar=0)=\oplus_{\underline{d}}H^\bullet_G(\mathscr{Q}_{\underline{d}})$ наследует действие алгебры U.

Гипотеза 2.3
U-*модуль* $\bar{B}$ *изоморфен* $H^{\frac{n(n-1)}{2}}_{\{\mathfrak{g}_{\leq 0}\}}(\mathfrak{gl}_n, \mathscr{O})$. *При этом изоморфизме действие* $H^{\bullet}_{G}(pt)$ *на* $\bar{B}$ *соответствует действию* $\mathbb{C}[\mathfrak{gl}_n]^G$ *на* $H^{\frac{n(n-1)}{2}}_{\{\mathfrak{g}_{\leq 0}\}}(\mathfrak{gl}_n, \mathscr{O})$.

Гипотеза 6.4 из [22] относительно прямых сумм *неэквивариантных* когомологий пространства $\mathscr{Q}_{\underline{d}}$ есть немедленное следствие гипотезы 2.3.

3. ЯВНОЕ ОПИСАНИЕ КОЛЬЦА КОГОМОЛОГИЙ РЕГУЛЯРНЫХ КОМПАКТИФИКАЦИЙ РЕДУКТИВНОЙ ГРУППЫ ПРИСОЕДИНЕННОГО ТИПА

3.1. Введение

Важную роль в торической геометрии играет взаимосвязь между поляризованным проективным торическим многообразием и соответствующим выпуклым многогранником. К примеру, многочлен Гильберта многообразия можно вычислить при помощи подсчёта целочисленных точек в многогранниках, полученных из данного многогранника гомотетиями. В нашей недавней работе [36] исследуется связь между алгебраической и выпуклой геометрией в неторическом случае, а именно, для многообразий Шуберта в многообразии полных флагов.

С проективным вложением многообразия флагов естественным образом можно связать выпуклый многогранник, называемый *многогранником Гельфанда–Цетлина.* М. Коган в своей диссертации [38] предлагает способ сопоставления набора граней многогранника Гельфанда–Цетлина каждому из многообразий флагов. Наш основной результат — это формула для характера Демазюра многообразия Шуберта, представленная в виде экспоненциальной суммы по всем целочисленным точкам этого набора граней (теорема 3.1). В качестве следствия мы получаем формулу для функций Гильберта многообразий Шуберта, также использующую подсчёт целочисленных точек (следствие 3.1). В свою очередь, из этого следует формула, связывающая степени многообразий Шуберта и объёмы этих наборов граней (следствие 3.2); она аналогична теореме Кушниренко, появляющейся в торической геометрии. Эти результаты обобщают теорему Постникова–Стенли ([60], следствие 15.4), доказанную для *многообразий Кемпфа*, на все многообразия Шуберта.

Обозначим через X многообразие полных флагов в $\mathbb{C}^n$, а через X^w — многообразие Шуберта, соответствующее перестановке $w \in S_n$, как описано в разд. 3.2 (коразмерность многообразия X^w равняется длине $l(w)$ перестановки w). Для всякого строго доминантного веса λ обозначим через V_λ неприводимый GL_n-модуль со старшим весом λ. Напомним, что многогранник Гельфанда–Цетлина P_λ — это выпуклый целочисленный многогранник в $\mathbb{R}^d$, где $d = n(n-1)/2$, обладающий следующим свойством: его целочисленные точки параметризуют естественный базис (так называемый *базис Гельфанда–Цетлина*) в представлении V_λ (точное определение многогранника P_λ приведено в разделе 3.2). В частности, с каждой целочисленной точкой $z \in P_\lambda$ можно связать её вес $p(z)$ в решётке характеров группы GL_n.

Обозначим через $B^- \subset GL_n(\mathbb{C})$ подгруппу нижнетреугольных матриц. Рассмотрим проективное вложение $X^w \subset X \hookrightarrow \mathbb{P}(V_\lambda)$. Обозначим через $\chi^w(\lambda)$ характер Демазюра B^--модуля $V^-_{\lambda,w} := H^0(X^w, \mathscr{L}_\lambda)^*$, где $\mathscr{L}_\lambda$ есть ограничение на многообразие $X^w \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$ тавтологического линейного расслоения на $\mathbb{P}(V_\lambda)$. Мы показываем, что для любых λ и w имеет место равенство

$$\chi^w(\lambda) = \sum_{z \in A_{\lambda,w} \cap \mathbb{Z}^d} e^{p(z)}, \tag{1}$$

где $A_{\lambda,w} := \bigcup_{w(F_\lambda)=w} F_\lambda$ есть объединение всех *rc-граней, или приведённых когановских граней* F_λ (см. раздел 3.2) многогранника P_λ, отвечающих перестановке w.

Для случая $w = e$, т.е. если $X^w = X$ и $V^-_{\lambda,w} = V_\lambda$, формула (1) непосредственно следует из вышеприведённых свойств многогранника Гельфанда–Цетлина. Для других перестановок w, вообще говоря, неверно, что подмножество базиса Гельфанда–Цетлина (в частности, подмножетсво, отвечающее целочисленным точкам в $A_{\lambda,w}$) задаёт базис в модуле Демазюра $V^-_{\lambda,w}$. Наше доказательство формулы (1) использует формулу для характера модуля Демазюра и элементарные рассуждения, связанные с комбинаторикой и геометрией многогранника Гельфанда–Цетлина. В частности, мы используем комбинаторную процедуру (так называемый *митоз*) для работы с операторами разделённых разностей. Эта процедура была введена в работе [37]. В нашем доказательстве приводится геометрическая реализация митоза ([36], замечание 6.7). Попутно мы строим ранее не появлявшуюся в литературе реализацию симплекса в виде кубического комплекса ([36], предложение 6.6).

3.2. Определения

Обозначим через G группу $GL_n(\mathbb{C})$. Группу Вейля для G можно отождествить с симметрической группой S_n: перестановка $w \in S_n$ соответствует элементу G, действующему на векторах стандартного базиса по формуле $e_i \mapsto e_{w(i)}$. Для любого элемента $w \in S_n$ определим *многообразие Шуберта* X^w как замыкание B^--орбиты элемента w во флаговом многообразии $X = G/B$. Нетрудро проверить, что длина $l(w)$ элемента w равняется коразмерности подмногообразия X^w в X.

Пусть $V^-_{\lambda,w}$ — B^--модуль Демазюра, определяемый как двойственное пространство к пространству глобальных сечений $H^0(X^w, \mathscr{L}_\lambda|_{X^w})$, где $\mathscr{L}_\lambda$ есть очень обильное линейное расслоение на X, соответствующее строго доминантному весу λ. Заметим, что по теореме Бореля–Вейля–Ботта $V^-_{\lambda,e}$ изоморфно неприводимому представлению V_λ группы G со старшим весом λ. Выберем базис весовых векторов в пространстве $V^-_{\lambda,w}$. Напомним, что *характер Демазюра* $\chi^w(\lambda)$ модуля $V^-_{\lambda,w}$ есть сумма по всем весовым векторам, входящим в этот базис, экспонент от соответствующих весов, или, что то же самое,

$$\chi^w(\lambda) := \sum_{\mu \in \Lambda} m_{\lambda,w}(\mu) e^\mu,$$

где Λ — весовая решётка группы GL_n, а $m_{\lambda,w}(\mu)$ — кратность веса μ в $V^-_{\lambda,w}$.

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{Z}^n$ — строго доминантный вес группы $GL_n(\mathbb{C})$, то есть набор из n целых чисел λ_i, для которых $\lambda_i < \lambda_{i+1}$ при всех $i = 1, \ldots, n-1$. Многогранник Гельфанда–Цетлина P_λ — это выпуклый целочисленный многогранник

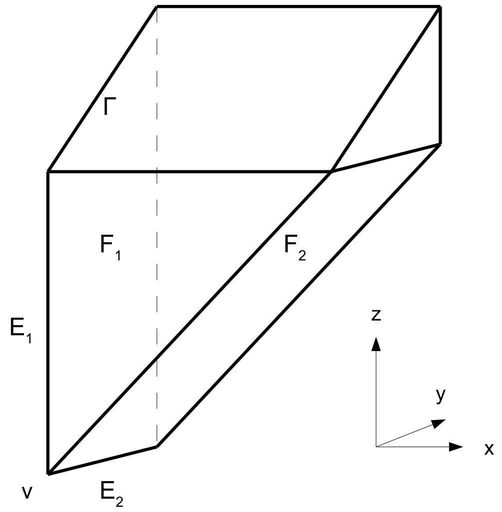

Рис. 1. Многогранник Гельфанда–Цетлина для группы GL_3

в $\mathbb{R}^d$, где $d = n(n-1)/2$, задаваемый неравенствами

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\lambda_1 & & \lambda_2 & & \lambda_3 & & & \ldots & & \lambda_n \\
& \lambda_{1,1} & & \lambda_{1,2} & & & \ldots & & \lambda_{1,n-1} & \\
& & \lambda_{2,1} & & \ldots & & & \lambda_{2,n-2} & & \\
& & & \ddots & & \ldots & & & & \\
& & & \lambda_{n-2,1} & & & \lambda_{n-2,2} & & & \\
& & & & \lambda_{n-1,1} & & & & &
\end{array} \qquad (GZ)$$

где $(\lambda_{1,1}, \ldots, \lambda_{1,n-1}; \lambda_{2,1}, \ldots, \lambda_{2,n-2}; \ldots; \lambda_{n-2,1}, \lambda_{n-2,2}; \lambda_{n-1,1})$ — координаты в $\mathbb{R}^d$, а запись

$$\begin{array}{ccc} a & & b \\ & c & \end{array}$$

означает, что $a \leqslant c \leqslant b$. На рисунке изображён многогранник Гельфанда–Цетлина для группы $G = GL_3$.

Для нас будет удобным представлять грани многогранника P при помощи *диаграмм граней.* Во-первых, заменим все λ_j и $\lambda_{i,j}$ в таблице (GZ) точками. Каждая грань многогранника P задаётся системой уравнений вида $a = b$, где a и b — координаты, представленные смежными точками в двух последовательных строках. Чтобы задать такое уравнение, нарисуем отрезок, соединяющий соответствующие точки (эти отрезки идут с северо-востока на юго-запад или с северо-запада на юго-восток). Так, система уравнений, задающая грань многогранника P, представляется набором отрезков, который мы будем называть диаграммой грани. *Строки* диаграммы грани определяются как наборы точек, соответствующих координатам $\lambda_{i,j}$ с фиксированным i. *Столбцами* мы будем называть наборы точек с фиксированным индексом j (на рисунках столбцы выглядят как диагонали).

В дальнейшем мы будем рассматривать грани многогранника Гельфанда–Цетлина, задаваемые уравнениями вида $\lambda_{i,j} = \lambda_{i+1,j}$. Такие грани мы будем называть *когановскими гранями.* Каждой когановской грани F сопоставим перестановку $w(F)$ следующим образом. Сначала сопоставим каждому уравнению $\lambda_{i,j} = \lambda_{i+1,j}$ элементарную транспозицию $s_{i+j} = (i+j, i+j+1)$. Далее, перемножим все элементарные транспозиции, соответсвующие уравнениям, задающим грань F, пройдя слева направо по каждой из строк диаграммы F, начиная с нижней строки и заканчивая верхней. Когановскую грань F будем называть *приведенной*, если полученное таким образом разложение перестановки $w(F)$ является приведенным. Приведенные когановские грани многогранника Гельфанда–Цетлина находятся в биективном соответствии с приведенными rc-графами (подробности см. в [38]).

Приведенные когановские грани в случае $n = 3$ (см. рис. 1) суть вершина v, ребра E_1 и E_2, передние грани F_1, F_2, задняя грань Γ и сам многогранник P_λ. Соответствующие перестановки — это соответственно $s_2s_1s_2$, s_2s_1, s_1s_2, s_2, s_2, s_1, id. Отметим, что граням F_1 и F_2 соответствует одна и та же перестановка.

Для каждого набора $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ рассмотрим аффинную гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ с координатами $y_1, \dots, y_n$, заданную уравнением $y_1 + \ldots + y_n + u_0 = 0$, где $u_0 = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n$. Выберем координаты $u_1, \dots, u_{n-1}$ in $\mathbb{R}^{n-1}$ так, что $y_i = u_i - u_{i-1}$ при $i = 1, \dots, n-1$. Рассмотрим следующее линейное отображение $p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{n-1}$ из пространства $\mathbb{R}^d$ с координатами $\lambda_{i,j}$ в гиперплоскость $\mathbb{R}^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n-i} \lambda_{i,j}.$$

Иначе говоря, если расположить координаты $\lambda_{i,j}$ в виде треугольной таблицы, как в (GZ), то u_i есть сумма всех элементов в i-той строке. Впоследствии мы отождествим $\mathbb{R}^n$ с вещественной оболочкой решётки весов Λ группы G, так, что при этом отождествлении i-тый базисный вектор в $\mathbb{R}^n$ будет соответствовать весу, задаваемому i-той компонентой диагонального тора в G. Тогда плоскость $\mathbb{R}^{n-1}$ получается параллельным переносом из гиперплоскости, порожденной всеми корнями группы G. Несложно проверить, что образ многогранника Гельфанда–Цетлина $P_\lambda \subset \mathbb{R}^d$ при отображении p есть весовой многогранник представления V_λ.

Пусть S — подмножество в многограннике Гельфанда–Цетлина P_λ (впоследствии S будет либо гранью, либо объединением граней). Определим *характер* χ_S подмножества S как сумму формальных экспонент $e^{p(z)}$ по всем целочисленным точкам $z \in S$, то есть

$$\chi(S) := \sum_{z \in S \cap \mathbb{Z}^d} e^{p(z)}.$$

Формальные экспоненты e^u, $u \in \mathbb{Z}^n$ порождают групповую алгебру решётки Λ. Таким образом, характер принимает значения в этой групповой алгебре.

3.3. Результаты

Основной результат данного раздела устанавливает взаимосвязь между характером Демазюра многообразия Шуберта и характером объединения соответствующих граней.

Теорема 3.1
Для всякой перестановки $w \in S_n$ характер Демазюра $\chi^w(\lambda)$ равняется характеру объединения всех когановских граней в многограннике Гельфанда–Цетлина P_λ, перестановка которых равна w:

$$\chi^w(\lambda) = \chi\left(\bigcup_{w(F_\lambda)=w} F_\lambda\right).$$

Если перестановка w является 132*–избегающей*, или *перестановкой типа Кемпфа*, то теорема 3.1 сводится к следствию 15.2 из работы [60]. Отметим, что, согласно предложению 2.3.2 из [38] перестановка w является кемпфовской тогда и только тогда, когда существует единственная когановская грань F, для которой $w(F) = w$, и именно эта грань рассматривается в [60]. Поэтому в этом случае $\chi^w(\lambda) = \chi(F)$.

Установим несколько следствий из этой теоремы. Во-первых, нетрудно описать функцию Гильберта многообразия Шуберта X^w, вложенного в $\mathbb{P}(H^0(X^w, \mathscr{L}_\lambda|_{X^w})^*) \subset \mathbb{P}(V_\lambda)$.

Следствие 3.1
Размерность пространства $H^0(X^w, \mathscr{L}_\lambda|_{X^w})$ равняется числу целых точек в объединении всех приведенных когановских граней, отвечающих перестановке w:

$$\dim H^0(X^w, \mathscr{L}_\lambda|_{X^w}) = \left|\bigcup_{w(F)=w} F_\lambda \cap \mathbb{Z}^d\right|.$$

В частности, функция Гильберта $H_{w,\lambda}(k) := \dim H^0(X^w, \mathscr{L}_\lambda^{\otimes k}|_{X^w})$ равняется многочлену Эрхарта множества $\bigcup_{w(F_\lambda)=w} F_\lambda$, то есть

$$H_{w,\lambda}(k) = \left|\bigcup_{w(F_\lambda)=w} kF_\lambda \cap \mathbb{Z}^d\right| \tag{2}$$

для всех целых положительных k.

Во-вторых, мы можем вычислить степень многообразия Шуберта X^w при вложении $X_w \hookrightarrow \mathbb{P}(V_\lambda)$. Обозначим через $\mathbb{R}F \subset \mathbb{R}^d$ аффинную оболочку грани F. В нижеприведенных формулах форма объёма на $\mathbb{R}F$ нормирована так, что кообъём решетки $\mathbb{Z}^d \cap \mathbb{R}F$ в $\mathbb{R}F$ равен 1. Тогда

Следствие 3.2
Имеется равенство

$$\deg_\lambda(X^w) = (d - l(w))! \sum_{w(F_\lambda)=w} \mathrm{Volume}(F_\lambda) \tag{3}$$

Следствие 3.2 немедленно вытекает из следствия 3.1 при помощи стандартного рассуждения из теории многогранников Ньютона [35], то есть из сравнения членов старшей степени в обеих частях равенства (2). Таким образом, (3) можно рассматривать как результат предельного перехода в равенстве (2). Отметим, что в недавно разработанной Кавехом и Хованским [34] общей теории многогранников Ньютона и тел Ньютона–Окунькова в большинстве случаев имеются только асимптотические равенства. Поэтому интересно, что для многообразий Шуберта и соответствующих объединений граней имеется точное равенство.

4. ЯВНОЕ ДОПРЕДЕЛЬНОЕ ОПИСАНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ДЕДЕКИНДА В КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ

4.1. Введение

Цель настоящего раздела — доказать формулу для предела логарифмических производных дзета-функций в семействах глобальных полей (в предположении обобщенной гипотезы Римана в числовом случае) с явным остаточным членом. Этот результат близок по духу одновременно к явным теоремам Брауэра–Зигеля и Мертенса из [47] и к асимптотической теореме о поведении дзета-функций Дедекинда из [72]. Мы также улучшаем остаточный член в явной теореме Брауэра–Зигеля из [47], если разрешить зависимость этого остаточного члена от рассматриваемого семейства глобальных полей.

В данном разделе константы в O и $\ll$ абсолютные и эффективные (и, на самом деле, не очень большие). Пусть K — глобальное поле, то есть конечное расширение поля $\mathbb{Q}$ или конечное расширение поля $\mathbb{F}_r(t)$, в последнем случае $K = \mathbb{F}_r(X)$ для гладкой абсолютно неприводимой проективной кривой X над полем $\mathbb{F}_r$, где $\mathbb{F}_r$ — конечное поле из r элементов. Мы будем использовать сокращения NF и FF для обозначения утверждений, доказываемых в числовом и функциональном случаях соответственно. Мы будем опускать индекс K в наших обозначениях, если это не вызывает путаницы.

Для числового поля K обозначим через n_K и D_K его степень и дискриминант соответственно. Пусть g_K — род функционального поля K, т. е. род соответствующей гладкой проективной кривой; положим $g_K = \log\sqrt{D_K}$ в случае числового поля K. Пусть $\mathscr{P}(K)$ обозначает множество простых идеалов K. Положим $\Phi_q = \Phi_q(K)$ — число простых идеалов нормы q в K, т. е. $\Phi_q = |\{\mathfrak{p} \in \mathscr{P}(K) | \mathrm{N}\mathfrak{p} = q\}|$. В числовом случае мы также вводим $\Phi_{\mathbb{R}} = r_1$ и $\Phi_{\mathbb{C}} = r_2$ — число вещественных и комплексных нормирований поля K соответственно.

Напомним, что дзета-функция глобального поля K определяется как

$$\zeta_K(s) = \prod_q (1 - q^{-s})^{-\Phi_q},$$

где произведение берется по всем степеням простых q. Обозначим через $Z_K(s) = -\sum\limits_q \frac{\Phi_q \log q}{q^s - 1}$ логарифмическую производную $\zeta_K(s)$. Известно, что $\zeta_K(s)$ допускает аналитическое продолжение на всю комплексную плоскость и удовлетворяет функциональному уравнению, связывающему $\zeta_K(s)$ и $\zeta_K(1-s)$. Более того, в функциональном случае, $\zeta_K(s)$ — рациональная функция переменной $t = r^{-s}$. При этом

$$\zeta_K(s) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{g}(\pi_j t - 1)(\bar{\pi}_j t - 1)}{(1-t)(1-rt)}, \tag{4.1}$$

и $|\pi_j| = \sqrt{r}$ (гипотеза Римана). В оставшейся части этой статьи мы предполагаем, что обобщённая гипотеза Римана (GRH) выполнена для дзета-функций числовых полей, то есть, что все нетривиальные нули $\zeta_K(s)$ лежат на прямой $\mathrm{Re}\, s = \frac{1}{2}$.

Вот наши первые основные результаты:

Теорема 4.1 (FF)
Для всякого функционального поля K, целого числа $N \geq 10$ и $\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1$ такого, что $\epsilon_0 = \operatorname{Re}\epsilon > 0$, имеет место:

$$\sum_{f=1}^{N} \frac{f\Phi_{rf}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f}-1} + \frac{1}{\log r}\cdot Z_K\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) + \frac{1}{r^{-\frac{1}{2}+\epsilon}-1} = O\left(\frac{g_K}{r^{\epsilon_0 N}}\left(1+\frac{1}{\epsilon_0}\right)\right) + O\left(r^{\frac{N}{2}}\right).$$

Теорема 4.2 (NF, GRH)
Для любого числового поля K, целого числа $N \geq 10$ и $\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1$ такого, что $\epsilon_0 = \operatorname{Re}\epsilon > 0$, имеет место:

$$\sum_{q\leq N} \frac{\Phi_q \log q}{q^{\frac{1}{2}+\epsilon}-1} + Z_K\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) + \frac{1}{\epsilon-\frac{1}{2}} =$$

$$= O\left(\frac{|\epsilon|^4+|\epsilon|}{\epsilon_0^2}(g+n\log N)\frac{\log^2 N}{N^{\epsilon_0}}\right) + O\left(\sqrt{N}\right).$$

Объясним более подробно значение этих теорем. Ранее было известно (см. ниже), что равенства в этих теоремах (без остаточных членов) верны в асимптотическом смысле (когда $N = \infty$ и $g = \infty$ для семейств глобальных полей). Наши теоремы дают эти результаты "на конечном уровне". Они позволяют оценить, насколько хорошо частичные суммы рядов для $Z_K(s)$ приближают эту функцию вне области сходимости этих рядов (они сходятся в полуплоскости $\operatorname{Re}s > 1$), когда мы меняем K.

Мы доказываем эти теоремы в пп. 4.2 и 4.3 соответственно. Оба доказательства основаны на явных формулах Вейля. Однако, в числовом случае аналитические трудности весьма впечатляющи, так что явную формулу приходится применять трижды с разным выбором тестовых функций. Заметим, что, как показано в замечаниях к соответствующим параграфам, в обоих случаях (в числовом и в функциональном) мы получаем новые доказательства основных неравенств из [66] и [68].

В наших следующих результатах рассматриваются семейства глобальных полей $\{K_i\}$ с растущим родом $g_i = g(K_i)$. Напомним ([67], [68]), что семейство глобальных полей называется асимптотически точным, если пределы

$$\phi_\alpha = \phi_\alpha(\{K_i\}) = \lim_{i\to\infty}\frac{\Phi_\alpha(K_i)}{g_i}$$

существуют для всех α, являющихся степенями r в функциональном случае и для всех степеней простых чисел и $\alpha = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ в числовом случае. Числа ϕ_α называются инвариантами Цфасмана–Влэдуца семейства $\{K_i\}$. С настоящего момента и до конца статьи мы предполагаем, что все рассматриваемые семейства асимптотически точные.

Введем предельную дзета-функцию семейства $\{K_i\}$ как

$$\zeta_{\{K_i\}}(s) = \prod_q (1-q^{-s})^{-\phi_q}.$$

Будем обозначать через $Z_{\{K_i\}}(s) = -\sum\limits_q \frac{\phi_q \log q}{q^s - 1}$ её логарифмическую производную. Из основного неравенства (см. [66] и [68] или п. 4.2 и п. 4.3 настоящего раздела) следует, что произведение и ряд сходятся абсолютно при $\mathrm{Re}\, s \geq \frac{1}{2}$, а значит определяют аналитические функции для $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$.

Прежде всего, сформулируем следствие из теорем 4.1 и 4.2.

Следствие 4.1
Для асимптотически точного семейства глобальных полей $\{K_i\}$, целого числа $N \geq 10$ и $\epsilon = \epsilon_0 + i\epsilon_1$ такого, что $\epsilon_0 = \mathrm{Re}\, \epsilon > 0$, имеет место следующее:

1) в функциональном случае:

$$\sum_{f=1}^{N} \frac{f\phi_{rf}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f} - 1} + \frac{1}{\log r} \cdot Z_{\{K_i\}}\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) = O\left(\frac{1}{r^{\epsilon_0 N}}\left(1 + \frac{1}{\epsilon_0}\right)\right);$$

2) в числовом случае в предположении GRH:

$$\sum_{q \leq N} \frac{\phi_q \log q}{q^{\frac{1}{2}+\epsilon} - 1} + Z_{\{K_i\}}\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) = O\left(\frac{(|\epsilon|^4 + |\epsilon|) \log^3 N}{\epsilon_0^2 N^{\epsilon_0}}\right).$$

Это следствие, в частности, влечёт сходимость логарифмических производных дзета-функций глобальных полей к логарифмической производной предельной дзета-функции при $\mathrm{Re}\, s > \frac{1}{2}$. Этот результат (без явного остаточного члена, но с гораздо более простым доказательством) получен в статье [72].

Следующий наш результат связан с поведением $Z_{\{K_i\}}(s)$ в точке $s = \frac{1}{2}$.

Теорема 4.3
Для асимптотически точного семейства глобальных полей $\{K_i\}$ существует число $\delta > 0$, зависящее от $\{K_i\}$, такое, что

1) в функциональном случае:

$$\sum_{f=1}^{N} \frac{f\phi_{rf}}{r^{\frac{f}{2}} - 1} + \frac{1}{\log r} \cdot Z_{\{K_i\}}\left(\frac{1}{2}\right) = O(r^{-\delta N});$$

2) в числовом случае, в предположении GRH:

$$\sum_{q \leq N} \frac{\phi_q \log q}{\sqrt{q} - 1} + Z_{\{K_i\}}\left(\frac{1}{2}\right) = O(N^{-\delta}).$$

Сформулируем следствие из этой теоремы, которое усиливает явную теорему Брауэра–Зигеля из [47]. Обозначим через $\varkappa_{K_i} = \operatorname*{Res}\limits_{s=1} \zeta_{K_i}(s)$ вычет $\zeta_{K_i}(s)$ в точке $s = 1$. Положим $\kappa = \kappa_{\{K_i\}} = \lim\limits_{i \to \infty} \frac{\log \varkappa_{K_i}}{g_i}$. Известно ([67] и [68]), что для асимптотически точного семейства этот предел существует и равен $\log \zeta_{\{K_i\}}(1)$ (мы предполагаем, что в числовом случае выполнена GRH). На самом деле, в случае числовых полей, этот результат может рассматриваться как обобщение классической теоремы Брауэра–Зигеля (см. [44]).

Следствие 4.2
Для асимптотически точного семейства глобальных полей $\{K_i\}$ существует число $\delta > 0$, зависящее от $\{K_i\}$, такое что:

1) *в функциональном случае:*
$$\sum_{f=1}^{N} \phi_{r^f} \log \frac{r^f}{r^f - 1} = \kappa + O\left(\frac{1}{r^{\left(\frac{1}{2}+\delta\right)N}}\right);$$

2) *в предположении GRH в числовом случае:*
$$\sum_{q \le N} \phi_q \log \frac{q}{q-1} = \kappa + O\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{2}+\delta}}\right).$$

Мы доказываем теорему 4.3, а также следствия 4.1 и 4.2 в п. 4.4.

4.2. Доказательство теоремы 4.1

Мы используем следующий аналог явной формулы Вейля для дзета-функций функциональных полей, см. [62] или [41] (в случае многообразий над конечными полями) для доказательства.

Теорема 4.4
Для последовательности $v = (v_n)$ такой, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n r^{\frac{n}{2}}$ сходится, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n r^{-\frac{n}{2}} \sum\limits_{m|n} m\Phi_{r^m}$ также сходится и имеет место следующее равенство:
$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n r^{-\frac{n}{2}} \sum_{f|n} f\Phi_{r^f} = \psi_v(r^{1/2}) + \psi_v(r^{-1/2}) - \sum_{j=1}^{g}\left(\psi_v\left(\frac{\pi_j}{\sqrt{r}}\right) + \psi_v\left(\frac{\bar{\pi}_j}{\sqrt{r}}\right)\right),$$
где $\pi_j, \bar{\pi}_j$ — числа, обратные к корням числителя дзета-функции K, $g = g_K$ и $\psi_v(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n t^n$.

Возьмём последовательность $v_n = v_n(N) = \frac{1}{r^{n\epsilon}}$, если $n \le N$ и 0 иначе. Подставляя её в явную формулу, мы получаем $S_0(N,\epsilon) = S_1(N,\epsilon) + S_2(N,\epsilon) - S_3(N,\epsilon)$, где
$$S_0(N,\epsilon) = \sum_{n=1}^{N} r^{-n\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)} \sum_{f|n} f\Phi_{r^f},$$
$$S_1(N,\epsilon) = \sum_{n=1}^{N} r^{n\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)},$$
$$S_2(N,\epsilon) = \sum_{n=1}^{N} r^{-n\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)},$$
$$S_3(N,\epsilon) = \sum_{j=1}^{g}\sum_{n=1}^{N} r^{-n\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}(\pi_j^n + \bar{\pi}_j^n).$$

Оценим каждую из сумм S_i.

Оценка S_0:

Прежде всего, поменяем порядок суммирования в S_0:

$$S_0(N,\epsilon) = \sum_{n=1}^{N} r^{-n\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)} \sum_{f|n} f\Phi_{r^f} = \sum_{f=1}^{N} f\Phi_{r^f} \sum_{m=1}^{[N/f]} \frac{1}{r^{fm\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}}.$$

Теперь

$$\begin{aligned}
R_0(N,\epsilon) &= \sum_{f=1}^{N} f\Phi_{r^f} \frac{1}{r^{\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)f}-1} - S_0(N,\epsilon)\\
&= \sum_{f=1}^{N} f\Phi_{r^f} \left(\frac{1}{r^{\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)f}-1} - \sum_{m=1}^{[N/f]} r^{-fm\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)} \right)\\
&= \sum_{f=1}^{N} f\Phi_{r^f} \sum_{m=[N/f]+1}^{\infty} r^{-fm\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}.
\end{aligned}$$

Переходя к абсолютным величинам, можно предположить, что ϵ вещественно. Суммируя геометрическую прогрессию, мы получаем

$$0 \le \sum_{f=1}^{N} f\Phi_{r^f} \frac{1}{r^{\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)f}-1} - S_0(N,\epsilon) \le \sum_{f=1}^{N} f\Phi_{r^f} r^{-\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)[N/f]f} \frac{1}{r^{\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)f}-1}.$$

Воспользуемся неравенством Вейля $f\Phi_{r^f} \le r^f + 1 + 2g\sqrt{r^f}$, а затем разделим сумму, рассматриваемую выше, на две части следующим образом. Для $f > [N/2]$ имеем $[N/f] = 1$, а для $f \le [N/2]$ мы используем неравенство $f[N/f] \ge N - f$.

$$\begin{aligned}
|R_0(N,\epsilon)| &\le \sum_{f=1}^{N} \frac{\left(1 + r^f + 2g\sqrt{r^f}\right)}{r^{f\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)[N/f]}\left(r^{\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)f}-1\right)}\\
&\le 8\sum_{f=1}^{[N/2]} \frac{r^{\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)f} + 2g\,r^{-f\epsilon}}{r^{(N-f)\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}} + 6\sum_{f>[N/2]}^{N} \frac{r^{\left(\frac{1}{2}-\epsilon\right)f} + 2g\,r^{-f\epsilon}}{r^{f\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}}\\
&\le \frac{6}{r^{N\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}} \sum_{f=1}^{[N/2]} (r^f + 2\,g\,r^{\frac{f}{2}}) + 6\sum_{f>[N/2]} (r^{-2\epsilon f} + 2\,g\,r^{-\left(\frac{1}{2}+2\epsilon\right)f})\\
&\le \frac{6}{r^{N\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}} \left(\frac{r^{\frac{N}{2}+1}-r}{r-1} + 2g\frac{r^{\frac{N}{4}+\frac{1}{2}} - r^{\frac{1}{2}}}{r^{\frac{1}{2}}-1} \right)\\
&\quad + \frac{6r^{-\epsilon N}}{1-r^{-2\epsilon}} + \frac{12gr^{-\frac{N}{4}-\epsilon N}}{1-r^{-\frac{1}{2}-2\epsilon}}\\
&\le \frac{48}{r^{\epsilon N}} \left(2gr^{-\frac{N}{4}} + \frac{1}{r^{\epsilon}-1} + 1 \right) \le \frac{96}{r^{\epsilon N}} \left(g\,r^{-\frac{N}{4}} + \frac{1+\epsilon}{\epsilon} \right).
\end{aligned}$$

Оценка S_1:

$$0 \le |S_1(N,\epsilon)| \le r^{\frac{1}{2}-\epsilon_0} \cdot \frac{r^{\left(\frac{1}{2}-\epsilon_0\right)N}-1}{r^{\frac{1}{2}-\epsilon_0}-1} \le 4r^{N/2},$$

так как функция $t \mapsto t \cdot \frac{t^N-1}{t-1}$ возрастает и непрерывна.

Оценка S_2:

$$0 \le |S_2(N,\epsilon)| \le \frac{1-r^{-\left(\frac{1}{2}+\epsilon_0\right)N}}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon_0}-1} \le 4.$$

Оценка S_3:

$$\begin{aligned} R_3(N,\epsilon) &= S_3(N,\epsilon) - \sum_{j=1}^{g}\left(\frac{\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\pi_j} + \frac{\bar\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\bar\pi_j}\right) \\ &= -\sum_{j=1}^{g}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\right)^n + \left(\frac{\bar\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\right)^n. \end{aligned}$$

Абсолютное значение правой части этого равенства может быть оценено, используя тот факт, что $|\pi_j| \le r^{\frac{1}{2}}$:

$$|R_3(N,\epsilon)| = \left|\sum_{j=1}^{g}\sum_{n=N+1}^{\infty}\left(\frac{\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\right)^n + \left(\frac{\bar\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}}\right)^n\right| \le 2g\,\frac{r^{-N\epsilon_0}}{r^{\epsilon_0}-1} \le 4g\,\frac{r^{-N\epsilon_0}}{\epsilon_0}.$$

Из формулы (4.1) для $\zeta_K(s)$, выражающей её как рациональную функцию переменной $t = r^{-s}$, легко выводится следующее выражение для её логарифмической производной:

$$\frac{1}{\log r}\cdot Z_K\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) = -\frac{1}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-1} - \frac{1}{r^{-\frac{1}{2}+\epsilon}-1} + \sum_{j=1}^{g}\left(\frac{\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\pi_j} + \frac{\bar\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\bar\pi_j}\right).$$

Объединяя все эти вычисления, мы получаем утверждение теоремы. □

Замечание 4.1 Используя нашу теорему, несложно получить новое доказательство основного неравенства из [67]. Возьмём вещественное $\epsilon < \frac{1}{4}$ и заметим, что

$$\frac{1}{\log r}\cdot Z_K\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) + \frac{1}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-1} + \frac{1}{r^{-\frac{1}{2}+\epsilon}-1} + g = \sum_{j=1}^{g}\left(\frac{\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\pi_j} + \frac{\bar\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\bar\pi_j} + 1\right) \ge 0,$$

так как

$$\frac{\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\pi_j} + \frac{\bar\pi_j}{r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\bar\pi_j} + 1 = \frac{r^{1+2\epsilon}-|\pi_j|^2}{(r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\pi_j)(r^{\frac{1}{2}+\epsilon}-\bar\pi_j)} \ge 0.$$

Из теоремы мы получаем, что

$$\sum_{f=1}^{N} \frac{f\Phi_{rf}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f}-1} \le g + O\left(\frac{g}{\epsilon r^{\epsilon N}}\right) + O(r^{\frac{N}{2}}).$$

Разделим обе части неравенства на g. Затем, сначала устремим $g \to \infty$ (меняя K), затем берем предел, когда $N \to \infty$ и, наконец, рассмотрим предел, когда $\epsilon \to 0$. Произведя все это, мы получим основное неравенство из [66]:

$$\sum_{f=1}^{\infty} \frac{f\phi_{rf}}{r^{\frac{f}{2}}-1} \le 1.$$

4.3. Доказательство теоремы 4.2

Нашей отправной точкой будет явная формула Вейля, доказательство которой может быть найдено в [59] или в [44] (с несколько более общими предположениями на тестовые функции).

Рассмотрим класс (W) чётных вещественно-значных функций, удовлетворяющих следующим условиям:

1) существует $\epsilon > 0$ такое, что $\int_0^\infty F(x)e^{(\frac{1}{2}+\epsilon)x}\,dx$ сходится в смысле Коши;

2) существует $\epsilon > 0$ такое, что $F(x)e^{(\frac{1}{2}+\epsilon)x}$ имеет ограниченную вариацию;

3) $\frac{F(0)-F(x)}{x}$ имеет ограниченную вариацию;

4) для всех x имеем $F(x) = \frac{F(x-0)+F(x+0)}{2}$.

Для такой функции F определим

$$\phi(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)e^{(s-\frac{1}{2})x}\,dx. \tag{4.2}$$

Явная формула Вейля для дзета-функции Дедекинда числовых полей — это следующее утверждение:

Теорема 4.5 (Вейль)
Пусть K — числовое поле. Пусть F — функция принадлежащая классу (W) и пусть $\phi(s)$ определена из (4.2). Тогда сумма $\sum\limits_{|\operatorname{Im}\rho|<T} \phi(\rho)$, где ρ пробегает нетривиальные нули дзета-функции Дедекинда поля K, сходится при $T \to \infty$ и имеет место следующая формула для предела $\sum\limits_{\rho}\phi(\rho)$:

$$\sum_{\rho}\phi(\rho) = F(0)\left(2g - n(\gamma+\log 8\pi) - r_1\frac{\pi}{2}\right) + 4\int_0^\infty F(x)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$+ r_1\int_0^\infty \frac{F(0)-F(x)}{2\operatorname{ch}(\frac{x}{2})}\,dx + n\int_0^\infty \frac{F(0)-F(x)}{2\operatorname{sh}(\frac{x}{2})}\,dx - 2\sum_{\mathfrak{p},m}\frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{\frac{m}{2}}}F(m\log \mathrm{N}\mathfrak{p}), \tag{4.3}$$

где последняя сумма берется по всем простым идеалам $\mathfrak{p}$ поля K и всем натуральным числам $m \ge 1$.

Прежде всего, заметим, что, если задана комплексно-значная функция $F(x)$, такая, что вещественная и мнимая её части $F_0(x)$ и $F_1(x)$ чётны и принадлежат классу (W), то можно применить формулу (4.3) отдельно к $F_0(x)$ и к $F_1(x)$. Таким образом, из линейности (4.3) по тестовой функции, мы заключаем, что явная формула применима к исходной комплексно-значной функции $F(x)$.

Применим явную формулу к функции, определённой следующим образом:

$$F_{N,\epsilon}(x) = \begin{cases} e^{-\epsilon|x|} & \text{если } |x| < \log(N+\frac{1}{2}), \\ 0 & \text{если } |x| > \log(N+\frac{1}{2}) \end{cases}$$

(здесь мы взяли $N+\frac{1}{2}$, чтобы избежать взятия некоторых членов с множителем $\frac{1}{2}$).

Теперь оценим каждый член в (4.3).

4.3.1. Сумма по простым

$$\sum_{\mathfrak{p},m} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{\frac{m}{2}}} F_{N,\epsilon}(m \log \mathrm{N}\mathfrak{p}) = \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p}^m \le N} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{(\frac{1}{2}+\epsilon)m}}$$
$$= \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p}\le N} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{\frac{1}{2}+\epsilon}-1} - \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p}\le N} \log \mathrm{N}\mathfrak{p} \sum_{m > \frac{\log N}{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}} \frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{(\frac{1}{2}+\epsilon)m}}.$$

Требуется оценить сумму:

$$\Delta(N,\epsilon) = \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p}\le N} \log \mathrm{N}\mathfrak{p} \sum_{m > \frac{\log N}{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}} \frac{1}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{(\frac{1}{2}+\epsilon)m}}.$$

Переходя к абсолютным значениям, мы можем считать, что ϵ вещественно. Суммируя геометрическую прогрессию, мы получаем:

$$\Delta(N,\epsilon) \le (2+\sqrt{2}) \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p}\le N} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{(\frac{1}{2}+\epsilon)([\frac{\log N}{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}]+1)}}$$

(так как $(1-\mathrm{N}\mathfrak{p}^{-1/2-\epsilon})^{-1} \le (1-2^{-1/2})^{-1} \le \sqrt{2}(1+\sqrt{2})$).

Разделим нашу сумму на две части, в соответствии с тем $\mathrm{N}\mathfrak{p} > \sqrt{N}$ или нет. Принимая во внимание тот факт, что $\log \mathrm{N}\mathfrak{p}[\log N/\log \mathrm{N}\mathfrak{p}] \ge \log N - \log \mathrm{N}\mathfrak{p}$, если $\log \mathrm{N}\mathfrak{p} \le [\log \sqrt{\mathrm{N}\mathfrak{p}}]$, мы получаем:

$$\Delta(N,\epsilon) \le (2+\sqrt{2}) \left(\sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p}\le\sqrt{N}} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{e^{\log \mathrm{N}(\frac{1}{2}+\epsilon)}} + \sum_{\sqrt{N}<\mathrm{N}\mathfrak{p}\le N} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{(1+2\epsilon)}} \right).$$

Запишем

$$\Delta_1(N,\epsilon) = \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p}\le\sqrt{N}} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{e^{\log \mathrm{N}(\frac{1}{2}+\epsilon)}},$$

$$\Delta_2(N,\epsilon) = \sum_{\sqrt{N}<\mathrm{N}\mathfrak{p}\le N} \frac{\log \mathrm{N}\mathfrak{p}}{\mathrm{N}\mathfrak{p}^{(1+2\epsilon)}}.$$

Для $\Delta_1(N,\epsilon)$ имеем:

$$\Delta_1(N,\epsilon) \leq \frac{1}{N^{\frac{1}{2}+\epsilon}} \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p} \leq \sqrt{N}} \log \mathrm{N}\mathfrak{p}.$$

Последняя сумма может быть оценена с использованием результатов Лагариаса и Одлыжко (которые используют GRH, см. [42]):

$$\sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p} \leq \sqrt{N}} \log \mathrm{N}\mathfrak{p} \leq \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p}^k \leq \sqrt{N}} \log \mathrm{N}\mathfrak{p} = \sqrt{N} + O(N^{\frac{1}{4}} \log N (g + n \log N))$$

с эффективно вычислимой абсолютной постоянной в O. Мы получаем:

$$\Delta_1(N,\epsilon) \leq \frac{2+\sqrt{2}}{N^{\epsilon}} + a_0 \frac{g \log N + n \log^2 N}{N^{\frac{1}{4}+\epsilon}}.$$

Сумма $\Delta_2(N,\epsilon)$ может быть оценена так:

$$\Delta_2(N,\epsilon) \leq \int_{\sqrt{N}}^{\infty} \frac{\log t}{t^{1+2\epsilon}}\, d\pi(t),$$

где $\pi(t)$ — функция, считающая простые: $\pi(t) = \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p} \leq t} 1$. Как и раньше, из результатов Лагариаса и Одлыжко следует, что $\pi(t) = \int_2^t \frac{dx}{\log x} + \delta(t)$, причём $|\delta(t)| \leq a_1 \sqrt{t}(g + n \log t)$. Подставляя, мы получим:

$$\Delta_2(N,\epsilon) \leq \int_{\sqrt{N}}^{\infty} t^{-1-2\epsilon}\, dt + 2|\delta(\sqrt{N})| \frac{\log N}{N^{\frac{1}{2}+\epsilon}} + \left| \int_{\sqrt{N}}^{\infty} \delta(t) \frac{1-(1+2\epsilon)\log t}{t^{2+2\epsilon}}\, dt \right|.$$

Отсюда мы выводим, что

$$\Delta_2(N,\epsilon) \leq \frac{1}{2\epsilon N^{\epsilon}} + 2a_1(g + n\log N) \frac{\log N}{N^{\frac{1}{4}+\epsilon}} + \int_{\sqrt{N}}^{\infty} a_1 (g + n \log t) \frac{|1-(1+2\epsilon)\log t|}{t^{\frac{3}{2}+2\epsilon}}\, dt.$$

Для $N \geq 8$ имеем:

$$\int_{\sqrt{N}}^{\infty} a_1(g + n\log t) \frac{|1-(1+2\epsilon)\log t|}{t^{\frac{3}{2}+2\epsilon}}\, dt \leq \int_{\sqrt{N}}^{\infty} a_1 (g + n \log t) \frac{(1+2\epsilon)\log t}{t^{\frac{3}{2}+2\epsilon}}\, dt.$$

Интегрируя по частям, можно найти, что

$$\int_{\sqrt{N}}^{\infty} \frac{\log t}{t^{\frac{3}{2}+2\epsilon}}\, dt = \frac{\log N}{2(\frac{1}{2}+2\epsilon)N^{\frac{1}{4}+\epsilon}} + \frac{1}{(\frac{1}{2}+2\epsilon)^2 N^{\frac{1}{4}+\epsilon}},$$

и

$$\int_{\sqrt{N}}^{\infty} \frac{\log^2 t}{t^{\frac{3}{2}+2\epsilon}}\, dt = \frac{\log^2 N}{4(\frac{1}{2}+2\epsilon)N^{\frac{1}{4}+\epsilon}} + \frac{\log N}{2(\frac{1}{2}+2\epsilon)^2 N^{\frac{1}{4}+\epsilon}} + \frac{1}{(\frac{1}{2}+2\epsilon)^3 N^{\frac{1}{4}+\epsilon}}.$$

Мы заключаем, что выполнена следующая оценка:

$$\Delta_2(N,\epsilon) \leq \frac{1}{2\epsilon N^{\epsilon}} + a_2 \left(\frac{n \log^2 N}{N^{\frac{1}{4}+\epsilon}} + \frac{g \log N}{N^{\frac{1}{4}+\epsilon}} \right).$$

Объединяя все вместе, мы получаем:

$$|\Delta(N,\epsilon)| \ll \frac{1}{\epsilon_0 N^{\epsilon_0}} + \frac{\log N}{N^{\frac{1}{4}+\epsilon_0}}(n \log N + g). \tag{4.4}$$

4.3.2. Архимедовы члены

Прежде всего,

$$\left|\int_0^\infty F_{N,\epsilon}(x)\,\mathrm{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\,dx\right| \leq \int_0^{\log(N+\frac{1}{2})} e^{(\frac{1}{2}-\epsilon_0)x}\,dx = \frac{(N+\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}-\epsilon_0}-1}{\frac{1}{2}-\epsilon_0} \ll \sqrt{N}. \qquad (4.5)$$

Положим

$$I_{N,\epsilon} = \int_0^\infty \frac{1-F_{N,\epsilon}(x)}{2\,\mathrm{sh}(\frac{x}{2})}\,dx$$

и

$$I_{\infty,\epsilon} = \int_0^\infty \frac{1-e^{-\epsilon x}}{2\,\mathrm{sh}(\frac{x}{2})}\,dx.$$

Для $N \geq 4$ имеем:

$$|I_{\infty,\epsilon} - I_{N,\epsilon}| \leq \int_{\log N}^\infty \frac{2}{e^{\frac{x}{2}}}\,dx \leq \frac{4}{\sqrt{N}}.$$

Теперь

$$\begin{aligned}
I_{\infty,\epsilon} &= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)x}}{1-e^{-x}}\right)\,dx \\
&= \int_0^\infty \left(\left(\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{1-e^{-x}} - \frac{e^{-x}}{x}\right) + \left(\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-(\frac{1}{2}+\epsilon)x}}{1-e^{-x}}\right)\right)\,dx \\
&= \psi\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) - \psi\left(\frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

так как

$$\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = \int_0^\infty \left(\frac{e^{-t}}{x} - \frac{e^{-xt}}{1-e^{-t}}\right)\,dt.$$

Второй интеграл

$$J_{N,\epsilon} = \int_0^\infty \frac{1-F_{N,\epsilon}(x)}{2\,\mathrm{ch}(\frac{x}{2})}\,dx$$

оценивается сходным образом, используя значение интеграла из [28] :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\epsilon x}}{\mathrm{ch}(\frac{x}{2})}\,dx = \psi\left(\frac{1}{4}+\frac{\epsilon}{2}\right) - \psi\left(\frac{3}{4}+\frac{\epsilon}{2}\right).$$

Принимая во внимание, что $\psi(2x) = \frac{1}{2}\left(\psi(x) + \psi\left(x+\frac{1}{2}\right)\right) + \log 2$, мы заключаем, что

$$\begin{aligned}
J_{N,\epsilon} &= \frac{\pi}{2} + \log 2 + \psi\left(\frac{1}{4}+\frac{\epsilon}{2}\right) - \psi\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right), \\
I_{N,\epsilon} &= \gamma + \log 4 + \psi\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).
\end{aligned} \qquad (4.6)$$

4.3.3. Сумма по нулям: главный член

Оценим теперь сумму $\sum\limits_{\rho} \phi(\rho)$ по нулям $\zeta_K(s)$. Пусть $\rho = \frac{1}{2} + it$ — ноль дзета-функции поля K на критической прямой. Положим $y = \log(N + \frac{1}{2})$. Имеем:

$$\phi(\rho) = \int_{-y}^{y} e^{-\epsilon|x|+itx}\,dx = \int_{0}^{y} e^{(-\epsilon+it)x}\,dx + \int_{0}^{y} e^{(-\epsilon-it)x}\,dx,$$

так что

$$\phi(\rho) = \frac{2}{\epsilon^2+t^2}(\epsilon + e^{-\epsilon y}(-\epsilon\cos(ty) + t\sin(ty))).$$

Разделим сумму по ρ на три части:

$$S_1(\epsilon) = \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\epsilon}{\epsilon^2+t^2};$$

$$S_2(y,\epsilon) = \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\cos(ty)}{\epsilon^2+t^2};$$

$$S_3(y,\epsilon) = \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{t\sin(ty)}{\epsilon^2+t^2};$$

так что

$$\sum_{\rho} \phi(\rho) = 2S_1(\epsilon) - 2\epsilon e^{-\epsilon y} S_2(y,\epsilon) + 2e^{-\epsilon y} S_3(y,\epsilon).$$

Сумма $S_1(\epsilon)$ может быть выражена через $Z_K(s)$, логарифмическую производную $\zeta_K(s)$. Формула Старка (см. [63]) дает нам, что

$$\sum_{\rho} \frac{1}{s-\rho} = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{s} + g - \frac{n}{2}\log\pi + \frac{r_1}{2}\psi\left(\frac{s}{2}\right) + r_2(\psi(s) - \log 2) + Z_K(s), \quad (4.7)$$

где, как и раньше, $\psi(s) = \frac{\Gamma'(s)}{\Gamma(s)}$. Подставляя $s = \frac{1}{2} + \epsilon$, мы получаем:

$$\sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\epsilon}{\epsilon^2+t^2} = \frac{1}{\epsilon-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\epsilon+\frac{1}{2}} + g - \frac{n}{2}\log\pi - r_2\log 2$$
$$+ \frac{r_1}{2}\psi\left(\frac{1}{4} + \frac{\epsilon}{2}\right) + r_2\psi\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) + Z_K\left(\frac{1}{2} + \epsilon\right). \quad (4.8)$$

Заметим, что архимедовы слагаемые из формулы Старка и изначальной явной формулы Вейля сокращаются друг с другом. Таким образом, остаётся доказать, что суммы $S_2(y,\epsilon)$ и $S_3(y,\epsilon)$ достаточно малы.

4.3.4. Сумма по нулям: остаточный член.

Для оценки

$$S_2(y,\epsilon) = \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\cos(ty)}{\epsilon^2+t^2}$$

мы возьмём модуль всех членов суммы, так что

$$|S_2(y,\epsilon)| \leq \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{1}{|\epsilon^2+t^2|} \leq \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{n(j)}{\epsilon_0^2+(t-|\epsilon_1|)^2}, \tag{4.9}$$

где $n(j)$ — число нулей, удовлетворяющих $|t-j|<1$. Стандартная оценка из [42] даёт $n(j) \ll g+n\log(j+2)$, а значит

$$\begin{aligned}|S_2(y,\epsilon)| &\ll \frac{g+n\log(|\epsilon_1|+2)}{\epsilon_0^2} + g+n\sum_{j=1}^{|\epsilon_1|+1} \frac{\log j}{|\epsilon_1|+2-j} + g+n\log(|\epsilon_1|+2) \\ &\ll (g+n\log^2(|\epsilon_1|+2))\left(1+\frac{1}{\epsilon_0^2}\right).\end{aligned}$$

Оценим, наконец, сумму

$$S_3(y,\epsilon) = \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{t\sin(ty)}{\epsilon^2+t^2}.$$

Имеем

$$S_3(y,\epsilon) = \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\sin ty}{t} - \sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\epsilon^2\sin(ty)}{t(\epsilon^2+t^2)} = A(y) - B(y,\epsilon).$$

Ряд для формальной производной $B(y,\epsilon)$ по y имеет следующий вид:

$$\sum_{\rho=\frac{1}{2}+it} \frac{\epsilon^2\cos(ty)}{\epsilon^2+t^2}.$$

Используя оценку для $S_2(y,\epsilon)$, мы заключаем, что на всяком компактном подмножестве $[0,+\infty)$ этот ряд абсолютно и равномерно сходится к $B'(y)$, и мы имеем $|B'(y,\epsilon)| \ll |\epsilon|^2(g+n\log^2(|\epsilon_1|+2))\left(1+\frac{1}{\epsilon_0^2}\right)$. Отсюда следует, что $|B(y)| \ll y|\epsilon|^2(g+n\log^2(|\epsilon_1|+2))\left(1+\frac{1}{\epsilon_0^2}\right)$, ибо $B(0,\epsilon)=0$.

4.3.5. Сумма по нулям: трудная часть.

Нам осталось оценить член $A(y)$.

Напомним частный случай явной формулы Вейля, доказанный Ландау [43]:

$$\sum_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho} = x - \Psi(x) - r\log x - b - \frac{r_1}{2}\log(1-x^{-2}) - r_2\log(1-x^{-1}), \tag{4.10}$$

где $\Psi(x) = \sum_{\mathrm{N}\mathfrak{p}^k \leq x} \log \mathrm{N}\mathfrak{p}$, b — постоянный член в разложении $Z_K(s)$ в ряд Тейлора в 0, $r=r_1+r_2-1$ и x не является степенью простого. Эта формула приводится в [43] для $x \geq \frac{3}{2}$, однако, применяя теорему 4.5 к функции

$$F_x(y) = \begin{cases} e^{|y|/2} & \text{при } |y| < \log x, \\ 0 & \text{при } |y| > \log x, \end{cases}$$

можно видеть, что формула остаётся верной для всех $x > 1$. Отметим также, что эффективная версия теоремы о простых идеалах [42] влечёт следующую оценку:

$$\Psi(x) - x = O\left(x^{\frac{1}{2}} \log x (g + n \log x)\right). \tag{4.11}$$

Введем $C(x) = \sum\limits_{\rho} \frac{x^\rho}{\rho}$, $D(x) = \sum\limits_{\rho \neq \frac{1}{2}} \frac{x^\rho}{\rho - \frac{1}{2}}$ и $E(x) = D(x) - C(x)$. Из (4.10) и (4.11) мы видим, что $C(x)$ интегрируема на компактных подмножествах $(1, +\infty)$. Используя рассуждения, похожие на те, что применялись в прошлом параграфе, можно получить, что ряд для $E(x)$ абсолютно и равномерно сходится на компактных подмножествах $[1, +\infty)$, а значит $E(x)$ непрерывна на этом интервале. Из всего этого мы заключаем, что ряд для $D(x)$ также сходится к локально интегрируемой функции.

Если положить $x = e^y$, то мы получим

$$\operatorname{Re} D(e^y) = e^{\frac{y}{2}} \sum_{\rho \neq \frac{1}{2}} \frac{\sin(ty)}{t},$$

что равно $e^{\frac{y}{2}} A(y)$ с точностью до члена, соответствующего возможному нулю $\zeta_K(s)$ в точке $\rho = \frac{1}{2}$.

Так как ряд для $C(x)$ не является равномерно сходящимся, то нам придется работать с распределениями, определяемыми $C(x), D(x)$ и $E(x)$. Основные понятия и результаты, используемые здесь, могут быть почерпнуты из [61]. Из того факта, что сходящийся ряд распределений можно дифференцировать почленно, мы заключаем, что имеет место следующее равенство:

$$\frac{d}{dx} \frac{E(x)}{\sqrt{x}} = \frac{C(x)}{2\sqrt{x^3}}.$$

Применим (4.10) к правой части этой формулы и проинтегрируем от $1 + \delta$ до x (здесь $\delta > 0$). Полученное равенство будет верно в смысле распределений, а значит почти всюду для локально интегрируемых функций, определяющих эти распределения. Так как функция $E(x)$ непрерывна, то мы видим, что получающееся тождество

$$\begin{aligned}\frac{E(x)}{\sqrt{x}} = E(1+\delta) &+ \int_{1+\delta}^{x} \frac{t - \Psi(t)}{2t^{\frac{3}{2}}}\, dt - r \int_{1+\delta}^{x} \frac{\log t}{2t^{\frac{3}{2}}}\, dt \\ &- \int_{1+\delta}^{x} \frac{b}{2t^{\frac{3}{2}}}\, dt - \frac{r_1}{2} \int_{1+\delta}^{x} \frac{\log(1 - t^{-2})}{2t^{\frac{3}{2}}}\, dt - r_2 \int_{1+\delta}^{x} \frac{\log(1 - t^{-1})}{2t^{\frac{3}{2}}}\, dt\end{aligned}$$

на самом деле имеет место поточечно на $[1 + \delta, +\infty)$. Для оценки $t - \Psi(t)$ воспользуемся (4.11). Легко видеть, что все интегралы сходятся, когда $\delta \to 0$. Из [43] следует, что $b \ll g + n$.

$$E(1) = \sum_{\rho \neq \frac{1}{2}} \frac{1}{\rho - \frac{1}{2}} - \sum_{\rho} \frac{1}{\rho} = -\frac{1}{2} \sum_{\rho = \frac{1}{2} + it} \frac{1}{\frac{1}{4} + t^2},$$

где первая сумма равна нулю, так как члены с ρ и $1-\rho$ сокращаются друг с другом. Последняя сумма может быть оценена с использованием (4.9). Это даёт $|E(1)| \ll g+n$. Соединяя все воедино, мы видим, что $|E(x)| \ll \sqrt{x}\log^2 x(g+n\log x)$. Оценка $|C(x)| \ll \sqrt{x}\log^2 x(n+g)$ может быть получена непосредственно с использованием (4.11). Таким образом, мы заключаем, что $|A(y)| \ll y^2(g+ny)$.

Объединяя все вместе, мы получаем:

$$\sum_{\rho}\phi(\rho) = 2S_1(\epsilon) + O\left(\frac{|\epsilon|^4+|\epsilon|}{\epsilon_0^2}(g+n\log N)\frac{\log^2 N}{N^{\epsilon_0}}\right).$$

Эта оценка вместе с (4.4), (4.5), (4.6) и (4.8) завершает доказательство теоремы. □

Замечание 4.2 Используя нашу теорему, мы можем передоказать основное неравенство из [68]. Действительно, применим формулу (4.8), чтобы выразить $Z_K\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)$ через $\sum\limits_{\rho=\frac{1}{2}+it}\frac{\epsilon}{\epsilon^2+t^2}$, плюс некоторые архимедовы члены. Для вещественного положительного $\epsilon < \frac{1}{4}$ последняя сумма неотрицательна, а значит

$$\sum_{q\le N}\frac{\Phi_q\log q}{q^{\frac{1}{2}+\epsilon}-1} + \frac{n}{2}\log\pi + r_2\log 2 - \frac{r_1}{2}\psi\left(\frac{1}{4}+\frac{\epsilon}{2}\right) - r_2\psi\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)$$
$$\le g + O\left((g+n\log N)\frac{\log^2 N}{\epsilon N^{\epsilon}}\right) + O\left(\sqrt{N}\right).$$

Теперь разделим на g и устремим $g\to\infty$ (меняя K). Затем перейдем к пределу, когда $N\to\infty$ и, наконец, возьмём предел, когда $\epsilon\to 0$. Принимая во внимание тот факт, что $\psi(\frac{1}{2}) = -\gamma - 2\log 2$ и $\psi(\frac{1}{4}) = -\frac{\pi}{2} - \gamma - 3\log 2$, мы получаем основное неравенство из [66]:

$$\sum_q \frac{\phi_q\log q}{\sqrt{q}-1} + \phi_{\mathbb{R}}\left(\log(2\sqrt{2\pi}) + \frac{\pi}{4} + \frac{\gamma}{2}\right) + \phi_{\mathbb{C}}\left(\log(8\pi)+\gamma\right) \le 1.$$

Замечание 4.3 Выбор тестовой функции $F_{N,\epsilon}(x)$ в явной формуле Вейля неслучаен. Действительно, получающиеся формулы “приближают” формулу Старка (4.7), когда $N\to\infty$.

4.4. Доказательство теоремы 4.3 и следствий

Мы проведем доказательства в функциональном случае, так как вычисления в случае числовых полей абсолютно такие же.

Доказательство следствия 4.1:. Предположим сначала, что $\epsilon \ne \frac{1}{2} + \frac{2\pi i k}{\log r}$, $k\in\mathbb{Z}$.

Заметим, что

$$\left|\sum_{f=1}^{\infty}\frac{f\phi_{rf}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f}-1}+\frac{1}{g_j\log r}Z_{K_j}\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)\right|\le$$

$$\le\left|\sum_{f=N+1}^{\infty}\frac{f\phi_{rf}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f}-1}\right|+\sum_{f=1}^{N}\frac{f\left|\frac{\Phi_{rf}}{g_j}-\phi_{rf}\right|}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f}-1}$$

$$+\frac{1}{g_j}\left|\sum_{f=1}^{N}\frac{f\Phi_{rf}}{r^{(\frac{1}{2}+\epsilon)f}-1}+\frac{1}{\log r}Z_{K_j}\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)\right|.$$

Взяв $\delta>0$, выберем целое число N такое, что первая сумма меньше δ (это возможно, благодаря основному неравенству) и такое, что $\frac{1}{r^{\epsilon_0 N}}\left(1+\frac{1}{\epsilon_0}\right)\le\delta$. Теперь, выбирая g достаточно большим и используя теорему 4.1, а также сходимость $\frac{\Phi_{rf}}{g_j}$ к ϕ_{rf}, мы заключаем, что вся сумма $\ll\delta$. Значит, мы выводим, что

$$\lim_{j\to\infty}\frac{Z_{K_j}\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right)}{g_j}=Z_{\{K_j\}}\left(\frac{1}{2}+\epsilon\right). \tag{4.12}$$

Теперь следствие немедленно вытекает из теоремы 4.1 и (4.12). Хотя изначально мы предположили, что $\epsilon\neq\frac{1}{2}+\frac{2\pi ik}{\log r}$, утверждение имеет место и при $\epsilon=\frac{1}{2}+\frac{2\pi ik}{\log r}$, так как все функции непрерывны (и даже аналитичны) при $\operatorname{Re}\epsilon>0$. □

Замечание 4.4 Формула (4.12) становится неверной при $\epsilon=0$, что может быть увидено из равенства $Z_K\left(\frac{1}{2}\right)=g_K-1$. На самом деле, равенство в (4.12) имеет место тогда и только тогда, когда семейство является асимптотически оптимальным. Вопрос о том, выполняется ли подобное равенство для $\log\zeta_K(s)$, а не для его производной, кажется весьма трудным. Даже для квадратичных полей он совершенно неочевиден. Известно, что в числовом случае существует последовательность (d_i) чисел из $\mathbb{N}$, плотности не меньшей $\frac{1}{2}$, такая, что

$$\lim_{i\to\infty}\frac{\log\zeta_{\mathbb{Q}(\sqrt{d_i})}(\frac{1}{2})}{\log d_i}=0$$

(см. [32]). Техника вычисления сглаженных моментов L-функций Дирихле, используемая в работе [32], весьма трудна. В общем случае можно доказать верхнюю границу для предела (см. [72]). Это аналог так называемого "лёгкого" неравенства из классической теоремы Брауэра–Зигеля.

Интерес к изучению поведения $\log\zeta_K\left(\frac{1}{2}\right)$ может быть, в некоторой степени, объяснен связью этого вопроса с вопросом об асимптотическом поведении порядка группы Шафаревича–Тейта и регулятора для постоянных суперсингулярных эллиптических кривых над функциональными полями. Такая связь имеет место благодаря гипотезе Бёрча–Свиннертона-Дайера. В общем случае, аналогичный вопрос может быть задан о поведении этих инвариантов в произвольных семействах эллиптических кривых. Некоторое обсуждение этой проблемы присутствует в [40] (заметим, однако, что доказательство основного результата этой статьи не может быть признано верным, так как перестановка предельных переходов, являющаяся ключевым моментом доказательства, не обоснована).

Доказательство теоремы 4.3:. Из основного неравенства следует, что ряд, определяющий $\log \zeta_{\{K_i\}}(s)$, сходится абсолютно при $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}$. Функция $\log \zeta_{\{K_i\}}(s)$ имеет разложение в ряд Дирихле с положительными коэффициентами, сходящийся при $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2}$. Значит, из стандартного утверждения про ряды Дирихле (см. [31]), этот ряд должен сходиться в некоторой открытой области $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2} - \delta_0$ для $\delta_0 > 0$, определяя в ней аналитическую функцию. Следовательно, в той же области ряд для $Z_{\{K_i\}}(s)$ сходится. Выбирая произвольное δ такое, что $0 < \delta < \delta_0$, мы получаем:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{f=1}^{N} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{\frac{f}{2}} - 1} - \frac{1}{\log r} Z_{\{K_i\}}\left(\frac{1}{2}\right)\right| &= \left|\sum_{f=N+1}^{\infty} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)f} - 1} \cdot \frac{r^{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)f} - 1}{r^{\frac{f}{2}} - 1}\right| \\ &\leq \left|\sum_{f=1}^{\infty} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)f} - 1}\right| \cdot \frac{r^{\left(\frac{1}{2}-\delta\right)N} - 1}{r^{\frac{N}{2}} - 1} = O(r^{-\delta N}).\end{aligned}$$

Это и даёт требуемый результат. □

Доказательство следствия 4.2:. Мы используем теорему 4.3 для получения нужной оценки, применяя тот же метод, что и при доказательстве самой теоремы 4.3. Используя теорему Брауэра–Зигеля для функциональных полей для получения значения κ, мы имеем:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{f=1}^{N} \phi_{r^f} \log \frac{r^f}{r^f - 1} - \kappa\right| &= \left|\sum_{f=N+1}^{\infty} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{\frac{f}{2}} - 1} \cdot (r^{\frac{f}{2}} - 1) \cdot \log \frac{r^f}{r^f - 1}\right| \\ &\leq \left|\sum_{f=N+1}^{\infty} \frac{f\phi_{r^f}}{r^{\frac{f}{2}} - 1}\right| \cdot (r^{\frac{N}{2}} - 1) \cdot \log \frac{r^N}{r^N - 1} \\ &= O(r^{-\delta N}) \cdot O\left(r^{-\frac{N}{2}}\right).\end{aligned}$$

Действительно, функция $N \mapsto (r^{\frac{N}{2}} - 1) \log \frac{r^N}{r^N - 1}$ не возрастает при $N \geq 2$, откуда и получается требуемая оценка. □

Замечание 4.5 Наш метод даёт простое и концептуальное доказательство явной версии теоремы Брауэра–Зигеля из [47] (утверждение которой, грубо говоря, является утверждением следствия 4.2 с $\delta = 0$). Это показывает, что остаточный член в явной теореме Брауэра–Зигеля, в сущности, зависит от того, как далеко влево аналитична функция $\zeta_{\{K_i\}}(s)$. В числовом случае наше следствие даёт оценку остаточного члена, лучшую, чем в [47] на $\log^2 N$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Поставленные на втором этапе задачи были решены полностью. При этом были получены следующие результаты:

- Получено описание неособых компактификаций пространств аффинных пространств Ломона и связанных с ними аффинных базисов Гельфанда-Цетлина. Построено действие аффинного янгиана в когомологиях аффинных пространств Ломона.

- Сформулированы гипотезы о квантовых когомологиях пространств Ломона (неособых компактификаций пространств модулей отображений проективной прямой в пространство флагов группы GL_n) и их аффинных аналогов;

- Получено явное описание кольца когомологий регулярных компактификаций редуктивной группы присоединённого типа с помощью многогранников Ньютона и тел Ньютона–Окунькова. В качестве следствия данного подхода обобщены результаты Постникова–Стенли о характерах модулей Демазюра.

- Получено явное допредельное описание асимптотического поведения дзета-функции Дедекинда в критической полосе, В качестве одного из приложений этих результатов улучшены оценки в явной теореме Брауэра-Зигеля.

Все полученные результаты являются новыми и актуальными. Они находятся на переднем крае современного развития мировой науки по рассматриваемым вопросам и ставят целый ряд интересных задач, способных привлечь внимание российских и зарубежных специалистов по алгебраической геометрии, теории чисел, теории представлений и её приложениям к задачам квантовой математической физики. Дальнейшая разработка открытых нами новых направлений может служить хорошей темой для дипломных и диссертационных работ и будет способствовать закреплению студентов и молодых ученых в научной работе.

Полученные в рамках заявленной нами программы достижения, а также ведущие мировые достижения в близких тематике проекта областях обсуждались на еженедельных научных семинарах

- «Общематематический семинар НОЦ факультета математики НИУ ВШЭ»
семинар проходит на факультете математики НИУ ВШЭ по понедельникам, с 17^{00}, руководители: А. Л. Городенцев и С. К. Ландо

- «Семинар лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ»
семинар проходит в лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ по пятницам, с 17^{00}, руководители: М. С. Вербицкий и Н. С. Маркарян.

- «Основы теории представлений»
семинар проходит в Независимом Московском университете по четвергам с 14^{30}, руководители: Б. Л. Фейгин и Л. Г. Рыбников.

- «Семинар лаборатории Ж. В. Понселе по теории чисел»
семинар проходит в Независимом Московском университете по вторникам с 18^{00}, руководители: М. А. Цфасман и А. И. Зыкин.

- «Алгебраические группы и теория инвариантов»
  семинар проходит на механико-математическом факультете МГУ по средам, с 16^{45}, руководители: Э. Б. Винберг и А. Л. Онищик.

- Семинар сектора 4.1 ИППИ РАН,
  семинар проходит в Институте проблем передачи информации Российской академии наук по пятницам с 12:00, руководитель М. А. Цфасман.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Э. Б. Винберг. О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры// Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:1 (1990), 3–25

2 Л. Г. Рыбников. Метод сдвига инвариантов и модель Годена// Функц. анализ и его прил. 40:3 (2006), 30–49

3 Л. Г. Рыбников. Централизаторы некоторых квадратичных элементов в алгебрах Пуассона-Ли и метод сдвига инвариантов// УМН, 60:2(362) (2005), 173–174.

4 А. А. Тарасов. Максимальность некоторых коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли// УМН, 57:5(347), (2002), 165–166.

5 Roman Bezrukavnikov, Michael Finkelberg. Equivariant Satake category and Kostant-Whittaker reduction// arXiv:0707.3799.

6 Roman Bezrukavnikov, Michael Finkelberg, Ivan Mirkovic'. Equivariant (K-)homology of affine Grassmannian and Toda lattice// arXiv:math/0306413.

7 I. Biswas, Parabolic bundles as orbifold bundles// Duke Math. Jour. **88** (1997), 305–325.

8 A. Braverman. Instanton counting via affine Lie algebras I. Equivariant J-functions of (affine) flag manifolds and Whittaker vectors// CRM Proc. Lecture Notes 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2004), 113–132.

9 A. Braverman, M. Finkelberg. Finite difference quantum Toda lattice via equivariant K-theory// Transformation Groups 10 (2005), 363–386.

10 E. Carlsson, A. Okounkov, Exts and Vertex Operators// preprint arXiv math/0801.2565.

11 N. Chriss, V. Ginzburg. Representation Theory and Complex Geometry// Birkhäuser, Boston (1997).

12 C. De Concini, unpublished manuscript (1995).

13 V. Drinfeld, A new realization of Yangians and quantized affine algebras// Soviet Math. Dokl. **36** (1988), 212–216.

14 G. Ellingsrud, S. A. Stromme. Towards the Chow ring of the Hilbert scheme of $\mathbb{P}^2$// J. reine angew. Math. 441 (1993), 33–44.

15 B. Feigin and E. Frenkel. Affine Kac–Moody algebras at the critical level and Gelfand–Dikii algebras// Int. Jour. Mod. Phys. A7, Supplement 1A (1992) 197–215.

16 B. Feigin and E. Frenkel. Quantization of soliton systems and Langlands duality, Preprint arXiv:0705.2486.

17 B. Feigin, E. Frenkel and L. Rybnikov. Opers with irregular singularity and spectra of the shift of argument subalgebra.// Duke Math. Journal, to appear, 2010.

18 B. Feigin, M. Finkelberg, I. Frenkel, L. Rybnikov, Gelfand-Tsetlin algebras and cohomology rings of Laumon spaces// preprint, arXiv math/0806.0072.

19 B. Feigin, M. Finkelberg, A. Kuznetsov, I. Mirković. Semiinfinite Flags II. Local and Global Intersection Cohomology of Quasimaps' spaces// Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2 194 (1999), 113–148.

20 G. Felder, Y. Markov, V. Tarasov, A. Varchenko. Differential equations compatible with KZ equations// Math. Phys. Anal. Geom. 3 (2000), 139–177.

21 M. Finkelberg, D. Gaitsgory, A. Kuznetsov, Uhlenbeck spaces for $\mathbb{A}^2$ and affine Lie algebra $\widehat{sl}_n$// Publ. RIMS, Kyoto Univ. **39** (2003), 721–766.

22 M. Finkelberg, A. Kuznetsov. Global Intersection Cohomology of Quasimaps' spaces// Intern. Math. Res. Notices 7 (1997), 301–328.

23 M. Finkelberg, A. Kuznetsov, N. Markarian, I. Mirković. A note on a Symplectic Structure on the Space of G-Monopoles// Commun. Math. Phys. 201 (1999), 411–421.

24 I. M. Gelfand, D. Krob, A. Lascoux, B. Leclerc, V. S. Retakh, J.-Y. Thibon, Noncommutative symmetric functions// Adv. Math. **112** (1995), 218–348.

25 V. Ginzburg. Perverse sheaves on a loop group and Langlands duality// Preprint alg-geom/9511007.

26 Alexander Givental, Bumsig Kim. Quantum cohomology of flag manifolds and Toda lattices// Commun.Math.Phys. 168 (1995) 609–642.

27 A. Givental, Y.-P. Lee, Quantum K-theory on flag manifolds, finite-difference Toda lattices and quantum groups// Invent. math. 151 (2003), 193–219.

28 I. S. Gradshteyn, I. M. Ryzhik. Table of integrals, series, and products. Translated from the fourth Russian edition. Fifth edition. Translation edited and with a preface by Alan Jeffrey. Academic Press, Inc., Boston, MA, 1994.

29 A. Grothendieck, Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. II// Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **17** (1963).

30 N. Guay, Affine Yangians and deformed double current algebras in type A// Advances in Math. **211** (2007), 436–484.

31 H. Iwaniec, E. Kowalski. Analytic number theory. American Mathematical Society Colloquium Publications, **53**. AMS, Providence, RI, 2004.

32 H. Iwaniec, P. Sarnak. Dirichlet L-functions at the central point. Number theory in progress, Vol. 2 (Zakopane-Koscielisko, 1997), 941–952, de Gruyter, Berlin, 1999.

33 M. Jimbo. Quantum R matrix related to the generalized Toda system: an algebraic approach// Lecture Notes in Phys. 246, Springer, Berlin (1986), 335–361.

34 Kiumars Kaveh, Askold Khovanskii, Newton convex bodies, semigroups of integral points, graded algebras and intersection theory// preprint arXiv:0904.3350v2

35 Askold Khovanskii Newton polyhedron, Hilbert polynomial, and sums of finite sets// Funct. Anal. and Appl., **26** (1992), no.4, 276–281

36 Valentina Kiritchenko, Evgeny Smirnov, Vladlen Timorin, Schubert calculus and Gelfand–Zetlin polytopes// preprint arXiv:1101.0278v1, submitted.

37 Allen Knutson and Ezra Miller, Gröbner geometry of Schubert polynomials// Ann. of Math. (2) **161** (2005), 1245–1318

38 Mikhail Kogan, Schubert geometry of flag varieties and Gelfand–Cetlin theory// Ph.D. thesis, Massachusetts Institute of Technology, 2000

39 B. Kostant, N. Wallach. Gelfand-Zeitlin theory from the perspective of classical mechanics. I// Progr. Math. 243, Birkhaüser Boston, Boston, MA (2006), 319–364.

40 B. E. Kunyavskii, M. A. Tsfasman. Brauer–Siegel theorem for elliptic surfaces, Int. Math. Res. Not. IMRN 2008, no. **8**.

41 G. Lachaud, M. A. Tsfasman. Formules explicites pour le nombre de points des variétés sur un corps fini// J. Reine Angew. Math. **493** (1997), 1–60.

42 J. C. Lagarias, A. M. Odlyzhko. Effective versions of the Chebotarev density theorem, Algebraic number fields: L-functions and Galois properties, Proc. Sympos., Univ. Durham, Durham, 1975, Academic Press, London, 1977, 409–464.

43 S. Lang. On the zeta function of number fields// Invent. Math. **12** (1971), 337–345.

44 S. Lang. Algebraic number theory, Graduate Texts in Mathematics, **110**, Springer–Verlag, New York, 1994.

45 G. Laumon. Un Analogue Global du Cône Nilpotent// Duke Math. Journal 57 (1988), 647–671.

46 G. Laumon. Faisceaux Automorphes Liés aux Séries d'Eisenstein// Perspect. Math. 10 (1990), 227–281.

47 P. Lebacque. Generalised Mertens and Brauer–Siegel Theorems// Acta Arith. **130** (2007), no. 4, 333–350.

48 G. Lusztig. Introduction to quantum groups// Progress in Mathematics 110, Birkhaüser Boston, Inc., Boston, MA (1993), xii+341 pp. ISBN: 0-8176-3712-5.

49 J. Millson, V. Toledano Laredo. Casimir operators and monodromy representations of generalised braid groups// Transform. Groups 10 (2005), no. 2, 217–254.

50 I. Mirković and K. Vilonen, Geometric Langlands duality and representations of algebraic groups over commutative rings// Preprint math.RT/0401222.

51 A. I. Molev. Gelfand-Tsetlin bases for classical Lie algebras// Handbook of Algebra 4 (M. Hazewinkel, Ed.), Elsevier (2006), 109–170.

52 A. I. Molev, Yangians and classical Lie algebras// Math. Surveys and Monographs **143** AMS, Providence, RI (2007).

53 A. I. Molev, V. N. Tolstoy, R. B. Zhang. On irreducibility of tensor products of evaluation modules for the quantum affine algebra// J. Phys. A: Math. Gen. 37 (2004), 2385–2399.

54 H. Nakajima, Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces// University Lecture Series **18** AMS, Providence, RI (1999).

55 A. Negut. Laumon spaces and many-body systems// thesis, Princeton University (2008).

56 A. Negut. Laumon spaces and the Calogero–Sutherland integrable system// Invent. Math. 178 (2009), 299–331.

57 C. Okonek, M. Schneider, H. Spindler, Vector Bundles on Complex Projective Spaces// Birkhäuser, Boston (1980).

58 A. Okounkov, R. Pandharipande. Quantum cohomology of the Hilbert scheme of points in the plane.// Preprint arXiv:math/0411210

59 G. Poitou. Sur les petits discriminants// Séminaire Delange–Pisot–Poitou, 18e année (1976/77), Théorie des nombres, Fasc. 1, Exp. No. 6, Secrétariat Math., Paris, 1977.

60 Alexander Postnikov, Richard P. Stanley, Chains in the Bruhat order// J. Algebr. Comb. **29** (2009), no. 2, 133–174

61 L. Schwartz. Théorie des distributions, Hermann, Paris, 1966.

62 J.-P. Serre. Rational points on curves over Finite Fields, Notes of Lectures at Harvard University by F. Q. Gouvêa, 1985.

63 H. M. Stark. Some effective cases of the Brauer–Siegel Theorem// Invent. Math. **23**(1974), 135–152.

64 P. Tingley, Three combinatorial models for $\widehat{\mathfrak{sl}}_n$-crystals, with applications to cylindric plane partitions// Intern. Math. Res. Notices rnm143, no. 2 (2008); Errata: arXiv math/0702062v3.

65 V. Toledano Laredo. A Kohno–Drinfeld theorem for quantum Weyl groups// Duke Math. J. 112 (2002), no 3, 421–451.

66 M. A. Tsfasman. Some remarks on the asymptotic number of points// Coding Theory and Algebraic Geometry, Lecture Notes in Math. **1518**, 178–192, Springer—Verlag, Berlin 1992.

67 M. A. Tsfasman, S. G. Vlăduţ. Asymptotic properties of zeta-functions// J. Math. Sci. **84** (1997), Num. 5, 1445–1467.

68 M. A. Tsfasman, S. G. Vlăduţ. Inifinite global fields and the generalized Brauer–Siegel Theorem// Moscow Mathematical Journal, Vol. **2** (2002), Num. 2, 329–402.

69 D. Uglov. Yangian actions on higher level irreducible integrable modules of affine $gl(N)$// Preprint arXiv:math/9802048.

70 D. Uglov, Skew Schur Functions and Yangian Actions on Irreducible Integrable Modules of $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$// Annals of Combinatorics **4** (2000), 383–400.

71 M. Varagnolo, Quiver varieties and Yangians// Letters in Math. Physics **53** (2000), 273–283.

72 A. Zykin. Asymptotic properties of Dedekind zeta functions in families of number fields// Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, **22**, no. 3 (2010), 689–696.