

**Решение текстовых математических
задач: этапы, трудности, и роль
помощи.**

**Результаты экспериментального
исследования.**

Тюменева Ю., Гончарова М.

Введение в проблему

Как меняется мышление ребенка при решении типичной и нетипичной текстовой задачи?

- Текстовые математические задачи – один из инструментов обучения и оценки
- Перевод с языка контекста (обыденного) на язык математики, затем – обратный перевод – моделирование – 5 этапов
- Основные трудности прохождения этапов / помощь («scaffolding»; «зона ближайшего развития»)

Исследовательские вопросы

- Как различается процесс решения задач на моделирование и роль помощи при решении типичной и аналогичной, но нетипичной, задачи?
- Какие этапы процесса моделирования являются самыми трудными и каковы эти трудности?
- Каков эффект помощи для прохождения последующих этапов?

Участники

- Всего: 142 человека
(112 – девушки и 30 – юноши).
- Из них: 37 школьников
(10 кл. – 18 чел., 11 кл. – 9 чел.)
и 105 студентов первого курса
бакалавриата ВШЭ.

Инструмент:

- Задача Никель из школьного учебника, типичная для школьной программы по математике раздела «Растворы и сплавы».
- Задача Ассорти из американского учебника по математике для 8-9 классов.
- Обе задачи решаются через систему линейных уравнений.

Задача «Никель»

Есть два сплава. Первый - содержит 10 % никеля, второй – 30% никеля. Из этих двух сплавов получили третий массой 200 кг., содержащий 25% никеля. Какова масса первого сплава и масса второго в составе третьего сплава?

Задача «Ассорти»

Владелец кондитерской хочет быстрее продать дорогие шоколадные конфеты, но не снижать на них цену. Для этого он думает сделать ассорти, смешав шоколадные конфеты по 350 рублей за килограмм с более дешевой карамелью по 72 рубля за килограмм. Сколько шоколадных конфет и карамели должно быть в этом ассорти, чтобы его стоимость была приблизительно 149 рублей за килограмм?

Процедура:

- Самостоятельное решение (10/15мин), далее – карточки помощи по 3 мин. на каждую. Карточки соответствуют этапам моделирования.
- Протокол решения: последовательная запись рассуждений и вычислений, фиксация взятия карточек помощи.
- Порядок предъявления задач варьировался.
- После завершения решения обеих задач испытуемым были предложены вопросы о том, были ли задачи трудными /легкими, знакомыми /не знакомыми по школе, и о том, есть ли между ними сходство и различие, и в чем оно состоит.

Кодирование:

- правильность решения (1 – верно, 0 – неверно),
- взятие карточек помощи (количество) /самостоятельность решения,
- способ решения (1 – метод подбора; 0 - система уравнений/уравнение),
- порядок предъявления задач.

Типичность задачи как определяющий фактор для:

- Выбора способа решения
- Эффективности способа решения
- Прохождения этапов моделирования

сравнение успешности решения обеих задач на общей выборке

(t-test для связанных выборок, непараметрический критерий Вилкоксона и критерий знаков)

Задача	Кол-во чел	Решили верно (%) (* - $\alpha = 0.04$)	Верно без подсказок (%)	Использовали подсказки (%)	Подсказка, после которой задача была успешно решена (%)			Среднее время решения (мин)
					1	2	3	
Н Никель	136	81*	66,2	25,4	19	31	45	13
А Ассорти	136	69*	50,7	25	12	43	50	16

Порядок предъявления и способ решения
изменение порядка предъявления задачи
Ассорти драматическим образом изменяет
способ решения, который использует
испытуемый

Порядок предъявления задачи «Ассорти»	способ решения (%)	
	подбор	система уравнений
1	62	38
2	9	91

Порядок предъявления, способ решения и успешность решения

(t-test для связанных выборок, непараметрический критерий Вилкоксона и критерий знаков, * - $\alpha < 0.05$)

	% решивших верно	% решивших верно
задача	первая задача - НИКЕЛЬ	первая задача - ассорти
никель	91,4*	78,7
ассорти	79,3*	76,6

Эффект порядка предъявления и способ решения

- если Ассорти решается первой, то метод подбора становится не менее эффективным, чем система уравнений
- если Ассорти решается второй, эффективна система уравнений.

Результаты логистической регрессии

Зависимая переменная – успешность решения

(кодировка: порядок предъявления: Ассорти - первая, никель - вторая=1; наоборот =2; способ решения: 1-подбор; 2- система уравнений)

Step 1a	B	Sig.	Exp(B)
Порядок предъявления(1)	,875	,184	2,400
способ решения		,002	
способ решения(1)	-,223	,825	,800
способ решения(2)	1,864	,001	6,450
Порядок предъявления * способ решения		,029	
Порядок предъявления(1) * способ решения(1)	1,139	,363	3,125
Порядок предъявления(1)* способ решения(2)	-1,864	,047	,155
Constant	-,182	,670	,833

Качественный анализ и интерпретация (1):

- наиболее трудный второй этап моделирования (построение схемы задачи)
- карточки помощи эффективны, когда они находились в логике самостоятельных рассуждений (решение через систему уравнений)

Качественный анализ и интерпретация (2):

- Ассорти: сложности с оценкой логичности и реалистичности ответа, формулировании ответа на языке задачи (на языке реальной жизни), получении ответа в адекватных единицах измерения.
- Трудности с «*приблизительным ответом*»
- Трудности перевода вопроса задачи (обыденный язык) на язык математики

Решение типичной задачи

- Типичная задача решалась преимущественно типичным же, культурно-формальным способом, освоенным в школе. Успешность решения зависела от правильности построения системы уравнений и вычислений.
- Типичность подменяет процессы понимания и схематизации восстановлением из памяти заученного алгоритма.
- Типичная задача решается в большинстве случаев через математическую модель, опять же – типичную.

Решение НЕтипичной задачи

- Нетипичная задача активизировала понимание и схематизацию, но вместо перехода к математической модели, использовался обыденный способ решения – подбор.
- Подбор был не менее эффективен, чем решение через систему уравнений.
- Интерпретация при решении методом подбора шла легче и была более осмысленной.

Общий вывод:

- Если задача решается как не относящаяся к какому-то типу, она значительно чаще решается обыденным способом (подбор), чем культурно-формальным способом, и этот обыденный способ оказывается не менее эффективным, чем формальный.
- Если же задача решается как отнесенная к какому-то "типу", то она значительно чаще решается "типичным", культурно-формальным способом, чем обыденным, и этот формальный способ становится более эффективным, чем обыденный.

Спасибо за внимание!

Карточки помощи к «Никель»

1. Разбери: где часть, а где целое? Определи долю части в целом?

Соотнеси массу каждого сплава с долей никеля в нем. Первый сплав 10%, его масса с третьем сплаве - ? Второй сплав 30%, его масса с третьем сплаве - ? Третий сплав 25%, общей массой 200 кг.

2. Здесь две меры: масса сплавов и масса никеля в сплаве. Массы первого и второго сплавов вместе дают нам массу третьего сплава. Масса никеля в массе первого сплава и масса никеля во втором, дают массу никеля в третьем. Оба соотношения должны выполняться одновременно.

3. Построим систему уравнений, где за x примем массу первого сплава, а за y – массу второго.

$$\begin{cases} x + y = 200 \\ 0,1x + 0,3y = 0,25 \cdot 200 \end{cases}$$

Карточки помощи к «Ассорти»

1. Ассорти 149 рублей за килограмм. Масса = 1 кг. Шоколадные конфеты 350 рублей за килограмм. С какой массой они «вошли» в ассорти - ? Карамель 72 рублей за килограмм. С какой массой они «вошли» в ассорти - ?

2. Здесь три единицы измерения: масса, цена за килограмм и стоимость конфет в ассорти. Соотношение масс: масса шоколадных конфет и масса карамели дают массу ассорти. Соотношение стоимостей частей ассорти в стоимости 1 кг. ассорти: неизвестная массовая доля шоколадных конфет по 350 руб/кг и неизвестная массовая доля карамели по 72 руб/кг дают стоимость ассорти 149 руб/кг. Оба соотношения выполняются одновременно.

3. Построим систему уравнений, где за x примем массу шоколадных конфет, а за y – массу карамели.

$$x + y = 1$$

$$350 \cdot x + 72 \cdot y = 149$$