МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВЗАИМНОГО ВЛИЯНИЯ ВОЛАТИЛЬНОСТЕЙ ДОХОДНОСТИ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

С.А. Лапинова
НИУ ВШЭ, г. Нижний Новгород

Внутридневная волатильность имеет решающее значение как индикатор риска для оценки доходности финансовых активов. Прогнозирование различных видов волатильности на текущий момент и предсказание их поведения в следующий момент времени является сложной математической задачей. Существует довольно много инструментов оценки и их модификаций реализованной волатильности (см., например, Andersen et al. (2003), Zhang et al. (2005)). Основная идея их построения основывается на использовании цены открытия и закрытия на некотором интервале. Другой распространенной практикой является использование не двух значений (открытие-закрытие) логарифма цены в пределах определенного временного шага, а четырех значений, где используются еще и максимум и минимум логарифма цены (OHLC) на заданном интервале. Хорошо известными примерами здесь являются оценщики Garman и Klass (1980), Роджерс и Satchell (1980, 1991) и Паркинсона (парк) (1980).

Одной из интересных проблем, связанных с волатильностью является проблема взаимного влияния волатильностей на различных рынках. Основная цель данной работы была получить коэффициенты, характеризующие влияние волатильности различных финансовых продуктов.

В качестве эстиматора волатильности мы использовали броуновский мост (bridge estimator, OHLC) применяемый к случайным временным точкам с учетом максимумов и минимумов в пределах определенного временного шага. Дисперсия полученная данным эстиматором значительно более эффективна, чем полученные указанными выше оценщиками (Саичев и соавт. (2009, 2013)). Еще одно замечательное свойство моста заключается в том, что его оценки меньше зависят от дрейфа процесса. Мы полагаем, что лог-цена X(t) некоторого инструмента следует процессу Ито и подчиняется дифференциальному уравнению

$$dX(m) = \mu(t)dt + \sigma(t)\, dW(t),\ \ X(0) = X_0,$$

где $W(t)$ -стандартный винеровский процесс, в то время как $\mu(t)$ это мгновенная скорость дрейфа, и $\sigma^2(t)$ мгновенная дисперсия процесса $X(t)$.

Применим эстиматор Бриджа для оценки условной дисперсии

$V(t) = W(t) - t\, W(1)$, где $t \in (0,1]$, $W(0)=0$.

Применим для построения авто регрессии одного финансового инструмента GARH(1,k) модель с переключениями следующего вида

$$V_{jt}=V_{j0}+\beta_{j1}V_{jt-1}1(\mu_t>\mu_0)+\beta_{j2}V_{jt-1}1(\mu_t<\mu_0)+\gamma_j\varepsilon^2_{t-1}.$$

Для обсуждения мультифакторной модели с влиянием между M рынками рассмотрим уравнение:

$$V_t=V_0+\beta_1V_{t-1}1(\mu_t>\mu_0)+\beta_2V_{t-1}1(\mu_t<\mu_0)+\gamma\varepsilon^2_{t-1}\ ,$$

где V_{j0}- базовый (почти нулевой) уровень волатильности, $\beta_{j1,2}$- это факторы реакции рынка J на волатильности V_{jt-1}, в дополнение можно сказать, что $\beta_{j1,2}$ зависят от рыночного тренда в момент времени t-1, ε^2_{t-1} - это непредсказуемый шок, который возникает из-за внешних новостей и других случайных факторов в данный момент t -1. Мы предполагаем, что ε^2_{t-1} имеет нормальное распределение $\sim N(0,\ \sigma_\varepsilon^2)$. Как известно плохие новости, как правило, имеют большее влияние на волатильность, чем хорошие новости, т.е. ожидается большая волатильность на падающем рынке, чем на растущем. Этот эффект иногда называют эффектом рычага.

Рассмотрим модель, которая учитывает наблюдаемую асимметрию на финансовых рынках. Учитывая указанное выше факты, мы вводим в модель направление тренда μ_t . Так для "предсказуемой" ситуации с определенным направлением движения рынка и без глобальных внешних новостей $\mu_t > \mu_0$, с другой стороны $\mu_t < -\mu_0$. Кроме того, мы предполагаем, что ситуация, когда $|\mu_t| < \mu_0$ соответствует хаосу на рынках или боковому тренду. Где μ_0 - "нулевой" уровень тренда.

Для многомерной модели V_t, V_0 являются m X 1 -матрицами и $\beta_{1,2}$ - это m X m асимметричная матрица коэффициентов взаимного влияния финансовых инструментов. Кроме того, будем считать, что инструменты (или рынки, где они торгуются) подчиняются закону Zipfa. Этот закон использует эмпирические результаты и ссылается на то, что многие типы данных можно приблизить с помощью Zipfian распределения, это один из семейства родственных дистрибутивных дискретных степенных законов вероятности. Согласно нему, если рынок J является значительно большим, чем рынок I по объему торгов, или объем торгов инструмента J больше, чем торгов инструментом I, то коэффициент влияния $\beta_{ij} \neq \beta_{ji}$

Данная модель была проверена на волатильности доходности акций крупных и средних банков.

Литература

1. Sahalia, Y., P.A. Mykland, and L.~Zhang. How often to sample a continuous-time process in the presence of market microstructure noise.Rev. Fin. Stud. 18, 2005, 351–416.

2. Andersen, T. G., T. Bollershev, F. X. Diebolt and P. Labys. Modeling and Forecasting Realized Volatility. Econometrica, 71, 2003, 529–626.

3. Garman, M. and M. J. Klass. On the Estimation of Security Price Volatilities from Historical Data. Journal of Business, 53, 1980, 67–78.

4. Parkinson, M. The Extreme Value Method for Estimating the Variance of the Rate of Return. Journal of Business, 53, 1980, 61–65.

5. Rogers, L. C. G., and S. E. Satchell. Estimating Variance From High, Low and Closing Prices. The Annals of Applied Probability, 4, 1991, 504–512.