Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Ахмедова Валерия Эдуардовна

Редукции бездисперсионных интегрируемых иерархий и уравнение Левнера

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук
НИУ ВШЭ

Научный руководитель
Забродин Антон Владимирович
доктор физ.-мат. наук

Москва – 2018

Введение

На сегодняшний день хорошо известно, что параметрические семейства однолистных конформных отображений областей с разрезом вдоль некоторой кривой на фиксированную каноническую область (как правило, верхнюю полуплоскость или единичный круг) подчиняются дифференциальному уравнению Левнера. Именно с этого уравнения мы начнем наше исследование. Обыкновенное дифференциальное уравнение Левнера задает однопараметрическое семейство конформных отображений канонических областей в себя и служит мощным инструментом исследования свойств однолистных функций. Впервые оно появилось в работе Карла Левнера в 1923 году и относилось к функциям, определенным в единичном круге $\mathbb{D}$. Уравнение содержит произвольную измеримую функцию, которая играет роль "управляющей"функции. Позднее в новых версиях уравнения Левнера рассматривались другие канонические области: полуплоскость, полоса, кольцо. Наибольшее внимание в последние годы уделяется "радиальному" уравнению для $\mathbb{D}$ и "хордовому" уравнению для верхней полуплоскости $\mathbb{H}$. В первой главе данной работы описаны некоторые исторические факты развития метода Левнера и уравнений, носящих сегодня его имя.

Как было показано в работах Дж. Гиббонса и С. Царева, возникает интересная связь уравнения Левнера с интегрируемыми иерархиями нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Хордовое уравнение Левнера играет ключевую роль в классификации редукций иерархии Кадомцева-Петвиашвили (КП, KP) в бездисперсионном (длинноволновом) пределе. А именно, оно является условием согласованности однокомпонентной редукции со всей бесконечной иерархией. Радиальное уравнение Левнера играет аналогичную роль в иерархии бездисперсионной двумеризованной цепочки Тоды. Увидеть связь бездисперсионных иерархий с уравнением Левнера легче всего с помощью иерархии КП. Бездисперсионное уравнение КП выглядит следующим образом:

$$(u_t - \frac{3}{2}uu_x)_x - \frac{3}{4}u_{yy} = 0. \qquad (1)$$

Бездисперсионная иерархия Кадомцева-Петвиашвили представляет собой бесконечную систему нелинейных дифференциальных уравнений (в частных производных). Эта иерархия неплохо изучена, и у нее есть несколько эквивалентных представлений, однако для иллюстрации связи с уравнением Левнера мы будем пользоваться только соответствующим уравнением Хироты:

$$e^{D(z)D(\zeta)F} = 1 - \frac{\partial_{t_1}(D(z) - D(\zeta))F}{z - \zeta}. \tag{2}$$

Рассмотрев однокомпонентные редукции данной иерархии, мы увидим связь с уравнением Левнера.

После иллюстрации возникающей связи, мы перейдем непосредственно к изучению бездисперсионного предела иерархий Пфафф-КП и Пфафф-Тоды.

Иерархия Пфафф-КП (также известная как DKP, спаренная иерархия КП, Пфаффова решетка) является иерархией с D_∞-симметриями. Впервые она была предложена М. Джимбо и Т. Мивой в 1983 году. Впоследствии она появлялась под разными названиями в различных контекстах. Термин "пфаффова" обусловлен тем, что солитоноподобные решения выражаются через пфаффианы. В тексте диссертации мы будем называть эту иерархию Пфафф-КП или DKP.

Хотя в данном исследовании мы будем изучать только бездисперсионные иерархии, полезно, однако, посмотреть на "полную" иерархию, чтобы увидеть, что происходит при переходе к бездисперсионному пределу. Итак, первое уравнение иерархии Пфаффовой решетки, так называемое уравнение DKP, выглядит следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t_1}\left(-4\frac{\partial u}{\partial t_3} + \frac{\partial^3 u}{\partial t_1^3} + 12u\frac{\partial u}{\partial t_1}\right) + 3\frac{\partial^2 u}{\partial t_2^2} = 12\frac{\partial^2 u}{\partial t_1^2}(v^+v^-) \\ \\ 2\frac{\partial v^\pm}{\partial t_3} + \frac{\partial^3 v^\pm}{\partial t_1^3} + 6u\frac{\partial v^\pm}{\partial t_1} \mp 3\left(\frac{\partial^2 v^\pm}{\partial t_1 \partial t_2} + 2v^\pm \int \frac{\partial u}{\partial t_2} dt_1\right) = 0. \end{cases}$$

Как можно увидеть, левая сторона первого уравнения – уравнение КП, а правая сторона представляет собой спаренный член поля $v^\pm$. Именно поэтому уравнение DKP иногда и называют спаренным КП (cKP). Тут мы воспользовались привычными обозначениями $x = t_1$, $y = t_2$ и $t = t_3$.

В терминах τ-функций, u и $v^\pm$ определяются как

$$u = \frac{\partial^2}{\partial t_1^2} \log \tau_n, \quad v^\pm = \frac{\tau_{n\pm 1}}{\tau_n}.$$

Можно воспользоваться операторами Хироты (производными Хироты), которые определяются следующим образом:

$$D_k f \cdot g := \left(\frac{\partial}{\partial t_k} - \frac{\partial}{\partial t'_k}\right) f(t_k) g(t'_k)\Big|_{t_k = t'_k}.$$

С их помощью уравнение DKP задается

$$\begin{cases} (-4D_1D_3 + D_1^4 + 3D_2^2)\tau_n\tau_n = 24\tau_{n+1}\tau_{n-1} \\ (2D_3 + D_1^3 \mp 3D_1D_2)\tau_{n\pm1}\tau_n = 0. \end{cases} \tag{3}$$

Хотя данная иерархия имеет определенное сходство с иерархией КП и цепочкой Тоды, она, безусловно, существенно отличается от них и на данный момент гораздо хуже изучена.

Бездисперсионная версия иерархии Пфафф-КП (dPfaff-KP, dDKP) была предложена Такасаки. В форме Хироты она представляет собой бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$e^{D(z)D(\zeta)F}\left(1 - \frac{1}{z^2\zeta^2}\, e^{2\partial_{t_0}(2\partial_{t_0} + D(z) + D(\zeta))F}\right) = 1 - \frac{\partial_{t_1} D(z)F - \partial_{t_1} D(\zeta)F}{z - \zeta}, \tag{4}$$

$$e^{-D(z)D(\zeta)F}\, \frac{z^2 e^{-2\partial_{t_0} D(z)F} - \zeta^2 e^{-2\partial_{t_0} D(\zeta)F}}{z - \zeta} = z + \zeta - \partial_{t_1}\Big(2\partial_{t_0} + D(z) + D(\zeta)\Big)F \tag{5}$$

на функцию $F = F(\mathbf{t})$ от бесконечного числа (действительных) времен $\mathbf{t} = \{t_0, t_1, t_2, \ldots\}$, где

$$D(z) = \sum_{k\geq1} \frac{z^{-k}}{k}\, \partial_{t_k}. \tag{6}$$

Функция F является бездисперсионным аналогом тау-функции. Дифференциальные уравнения получаются из уравнений (4), (5) разложением по степеням z и ζ. Тогда бездисперсионное уравнение Пфаффовой решетки задается

$$\begin{cases} 6F_{11}^2 + 3F_{22} - 4F_{13} = 12e^{4F_{00}} \\ \\ 2F_{03} + 4F_{01}^3 + 6F_{01}F_{11} - 6F_{01}F_{02} = 3F_{12}. \end{cases} \tag{7}$$

Для краткости мы используем обозначения $F_{mn} \equiv \partial_{t_m}\partial_{t_n}F$. Этот же результат мы могли получить непосредственно из уравнения DKP (3), воспользовавшись пределами $v^{\pm} = \exp(\log\tau_{n\pm1} - \log\tau_n) \to \exp(\pm\hbar^{-1}F_0)$ и $v^+v^- = \exp(\log\tau_{n+1} - 2\log\tau_n + \log\tau_{n-1}) \to \exp(F_{00})$ при $\hbar \to 0$.

Двумерная иерархия Пфафф-Тоды, предложенная в Такасаки, является обобщением иерархии Пфафф-КП и связана с ней так же, как двумеризованная цепочка Тоды связана с иерархией КП. В частности, обобщение Пфафф-КП $\longrightarrow$ Пфафф-Тода предполагает удвоение набора иерархических времен. В данной работе мы будем работать с "вещественными формами" иерархий, что означает, что времена КП считаются действительными числами, в то время как два набора времен Тоды являются комплексно сопряженными друг другу.

Бездисперсионная версия иерархии Пфафф-Тоды (dPfaff-Toda) пишется для функции F, зависящей от бесконечного в обе стороны набора времен $\{\dots, \bar{t}_2, \bar{t}_1, r, s, t_1, t_2, \dots\}$. Поскольку различные иерархии в данной работе не пересекаются, мы сохраним обозначение F для бездисперсионной тау-функции. Действительная форма иерархии, с которой мы будем иметь дело, подразумевает, что время $\bar{t}_k$ комплексно сопряжено к t_k, s действительно, а r - чисто мнимое. Основные уравнения выглядят следующим образом:

$$e^{D(z)D(\zeta)F}\left(1-\frac{1}{z\zeta}\,e^{\partial_s\left(\partial_s+\partial_r+D(z)+D(\zeta)\right)F}\right)=\frac{ze^{-\partial_r D(z)F}-\zeta e^{-\partial_r D(\zeta)F}}{z-\zeta}, \quad (8)$$

$$e^{\bar{D}(\bar{z})\bar{D}(\bar{\zeta})F}\left(1-\frac{1}{\bar{z}\bar{\zeta}}\,e^{\partial_s\left(\partial_s-\partial_r+\bar{D}(\bar{z})+\bar{D}(\bar{\zeta})\right)F}\right)=\frac{\bar{z}e^{\partial_r \bar{D}(\bar{z})F}-\bar{\zeta} e^{\partial_r \bar{D}(\bar{\zeta})F}}{\bar{z}-\bar{\zeta}}, \quad (9)$$

$$e^{D(z)D(\zeta)F}\left(1-\frac{1}{z\zeta}\,e^{\partial_r\left(\partial_s+\partial_r+D(z)+D(\zeta)\right)F}\right)=\frac{ze^{-\partial_s D(z)F}-\zeta e^{-\partial_s D(\zeta)F}}{z-\zeta}, \quad (10)$$

$$e^{\bar{D}(\bar{z})\bar{D}(\bar{\zeta})F}\left(1-\frac{1}{\bar{z}\bar{\zeta}}\,e^{-\partial_r\left(\partial_s-\partial_r+\bar{D}(\bar{z})+\bar{D}(\bar{\zeta})\right)F}\right)=\frac{\bar{z}e^{-\partial_s \bar{D}(\bar{z})F}-\bar{\zeta} e^{-\partial_s \bar{D}(\bar{\zeta})F}}{\bar{z}-\bar{\zeta}}, \quad (11)$$

$$e^{-D(z)\bar{D}(\bar{\zeta})F}\left(1-\frac{1}{z\bar{\zeta}}\,e^{\partial_r\left(\partial_r+D(z)-\bar{D}(\bar{\zeta})\right)F}\right)=1-\frac{1}{z\bar{\zeta}}\,e^{\partial_s\left(\partial_s+D(z)+\bar{D}(\bar{\zeta})\right)F}, \quad (12)$$

$$e^{-\left(\partial_s+\partial_r+D(z)\right)\bar{D}(\bar{\zeta})F}-1=\frac{z}{\bar{\zeta}}\,e^{-\partial_r\left(\partial_s+D(z)+\bar{D}(\bar{\zeta})\right)F}\left(e^{-\left(\partial_s-\partial_r+\bar{D}(\bar{\zeta})\right)D(z)F}-1\right). \quad (13)$$

Здесь $\bar{D}(\bar{z})=\sum\limits_{k\geq 1}\dfrac{\bar{z}^{-k}}{k}\,\partial_{\bar{t}_k}$ является комплексно сопряженным аналогом дифференциального оператора (6). Заметим, что уравнения (9), (11) получаются, соответственно, из (8), (10) с помощью "оператора постановки черты" $D\to\bar{D}$, $z\to\bar{z}$, $\zeta\to\bar{\zeta}$, $t_k\to\bar{t}_k$, $s\to\bar{s}=s$, $r\to\bar{r}=-r$, действие которого можно рассматривать как комплексное сопряжение при условии, что функция F действительна. Мы видим, что у каждого уравнения есть "чертованный аналог". В то же время уравнения (12) и (13) действительны, т.е. они не меняются при комплексном сопряжении. Далее в тексте мы не будем постоянно выписывать пары комплексно-сопряженных уравнений и ограничимся написанием лишь одного из каждой пары, не забывая при этом о том, что оба выполняются одновременно. Для дальнейшего удобно будет ввести комплексно-сопряженные "нулевые времена" $t_0 = s + r$, $\bar{t}_0 = s - r$, тогда $\partial_{t_0} = \frac{1}{2}(\partial_s + \partial_r)$, $\partial_{\bar{t}_0} = \frac{1}{2}(\partial_s - \partial_r)$.

Дифференциальные уравнения иерархии получаются из уравнений (8)–(13) разложением по степеням z, ζ, $\bar{z}$, $\bar{\zeta}$. Первые два уравнения имеют вид

$$\begin{cases} e^{F_{00}} F_{0\bar{1}} = e^{F_{\bar{0}\bar{0}}} F_{\bar{0}1}, \\ \\ F_{1\bar{1}} = 2\, e^{F_{00}+F_{\bar{0}\bar{0}}} \sinh\bigl(2F_{0\bar{0}}\bigr). \end{cases} \tag{14}$$

Мы пользуемся обозначениями $F_{mn} \equiv \partial_{t_m}\partial_{t_n} F$, $F_{m\bar{n}} \equiv \partial_{t_m}\partial_{\bar{t}_n} F$, $F_{\bar{m}\bar{n}} \equiv$ $\equiv \partial_{\bar{t}_m}\partial_{\bar{t}_n} F$.

Глава 2

В этой главе мы предлагаем небольшой исторический экскурс об уравнении Левнера и,чтобы продемонстрировать, как именно оно возникает в контексте интегрируемых иерархий, рассмотриваем бездисперсионную иерархию Кадомцева-Петвиашвили. Уравнение Хироты для данной иерархии имеет вид:

$$e^{D(z_1)D(z_2)F} = \frac{z_1 - z_2 - \partial_{t_1} D(z_1)F + \partial_{t_1} D(z_2)F}{z_1 - z_2}. \tag{15}$$

Введем функцию

$$p(z) = z - \partial_{t_1} D(z)F. \tag{16}$$

Функция $z(p)$ является обратной к $p(z)$, считаем ее однолистной вблизи бесконечности.

$$z(p) = p + \frac{u_1}{p} + \frac{u_2}{p^2} + ...$$

Коэффициенты u_i зависят от действительных параметров t_1, t_2, t_3 ... ("времен") Мы можем рассмотреть следующую редукцию - пусть $z(p)$ зависит от всех времен t_j через функцию $U = U(\{t_j\})$. Т.е.

$$z(p; \{t_j\}) = z(p, U),$$

$$U = U(\{t_j\})$$

Условием согласованности однокомпонентной редукции с иерархией будет уравнение

$$\frac{\partial p(z)}{\partial U} = -\frac{1}{p(z) - \xi(U)}. \tag{17}$$

Аналогичное уравнение для $z(p)$ имеет вид:

$$\frac{\partial z(p)}{\partial U} = \frac{1}{p - \xi(U)} \frac{\partial z(p)}{\partial p}. \tag{18}$$

Таким образом, мы получили хордовое уравнение Левнера с управляющей функцией $\xi(U)$.

Глава 3

Мы подробно рассмотрим Пфаффовы иерархии в алгебраической формулировке, затем перейдем к рассмотрению эллиптической формулировки бездисперсионной иерархии Пфафф-КП, и обобщим результат на случай иерархии бездисперсионной Пфафф-Тоды. Мы покажем, что иерархии пфаффового типа допускают красивую переформулировку в терминах эллиптических функций (тэта-функций Якоби). После такой переформулировки число независимых уравнений уменьшается, и несколько неуклюжие на вид уравнения (4), (5) и (8)–(13) обретают более привлекательную форму, в которой они выглядят как естественные эллиптические деформации бездисперсионной иерархии KP (или модифицированной иерархии KP) и 2DTL.

В такой формулировке бездисперсионную иерархию Пфафф-КП вместо (4), (5) будет задавать уравнение:

$$\left(z_1^{-1} - z_2^{-1}\right) e^{\nabla(z_1)\nabla(z_2)F} = \frac{\theta_1\big(u(z_1) - u(z_2)\big)}{\theta_4\big(u(z_1) - u(z_2)\big)}, \tag{19}$$

где использовано обозначение для дифференциального оператора

$$\nabla(z) = \partial_{t_0} + D(z), \tag{20}$$

а функция $u(z)$ определяется из

$$e^{\partial_{t_0}(\partial_{t_0} + D(z))F} = z\, \frac{\theta_1(u(z)|\tau)}{\theta_4(u(z)|\tau)}. \tag{21}$$

Также для дальнейших исследований полезно ввести функцию

$$S(u,\tau) := \log \frac{\theta_1(u,\tau)}{\theta_4(u,\tau)}\,, \tag{22}$$

с ее помощью мы можем переписать уравнение (19) в виде

$$\nabla(z_1)S(u(z_2)|\tau) = \partial_{t_0}S(u(z_1)-u(z_2)|\tau). \tag{23}$$

Уравнения бездисперсионной иерархии Пфафф-Тоды (8)–(13), после определенных манипуляций и эллиптической параметризации приводятся, соответсвенно, к

$$\begin{aligned} (z_1^{-1}-z_2^{-1})\,e^{\nabla(z_1)\nabla(z_2)F} &= \frac{\theta_1(u(z_1)-u(z_2))}{\theta_4(u(z_1)-u(z_2))}, \\ e^{\nabla(z_1)\bar{\nabla}(\bar{z}_2)F} &= \frac{\theta_1(u(z_1)+\bar{u}(z_2)+\eta)}{\theta_4(u(z_1)+\bar{u}(z_2)+\eta)}, \\ (z_1^{-1}-z_2^{-1})\,e^{\bar{\nabla}(z_1)\bar{\nabla}(z_2)F} &= \frac{\theta_1(\bar{u}(z_1)-\bar{u}(z_2))}{\theta_4(\bar{u}(z_1)-\bar{u}(z_2))}. \end{aligned} \tag{24}$$

Здесь также использовано обозначение

$$\bar{\nabla}(z) = \partial_{\bar{t}_0} + \bar{D}(z). \tag{25}$$

Обратим внимание на первое уравнение, оно такое же, как и в (19). Это означает, что "половина" бездисперсионной иерархии Пфафф-Тоды (с фиксированными временами "с чертой") совпадает с бездисперсионной Пфафф-КП. Этот факт было бы нелегко увидеть в алгебраической формулировке. Третье уравнение является комплексно сопряженной версией первого. Оно представляет собой другую копию бездисперсионной иерархии Пфафф-КП, только уже относительно времен $\bar{t}_k$, с фиксированными t_k. Второе уравнение содержит смешанные производные по временам $\{t_k\}$ и $\{\bar{t}_k\}$ и, таким образом, объединяет две иерархии в одну более общую. Это уравнение инвариантно относительно комплексного сопряжения.

Хотелось бы также отметить, что в эллиптической параметризации модулярный параметр τ является динамической переменной. Это свойство указывает на некоторое сходство с уравнениями Уизема для рода 1. и интегрируемыми структурами, связанными с краевыми задачами в плоских двусвязных областях.

Так как Пфаффовы иерархии гораздо менее изучены, чем более привычные иерархии КП или Тоды, то мы нашли полезным дать подробное сравнение этих иерархий.

Глава 4

Эта глава посвящена однокомпонентным редукциям пфаффовых иерархий. Как и в предыдущей главе, изучение пфаффовых иерархий начинаем с более простой иерархии dDKP. Рассмотрим ее однокомпонентные редукции, считая, что все динамические переменные зависят от времен $\mathbf{t}$ через одну единственную переменную, в качестве которой, без ограничения общности, можно выбрать модулярный параметр τ. Мы покажем, что такие редукции классифицируются решениями дифференциального уравнения, которое является эллиптическим аналогом уравнения Левнера. В комплексном анализе это "эллиптическое уравнение Левнера" также известно как уравнение Голузина-Комацу:

$$4\pi i\, \partial_\tau u(z,\tau) = -\,\zeta_1\Big(u(z,\tau)+\xi(\tau)\,\Big|\,\tfrac{\tau}{2}\Big) + \zeta_1\Big(\xi(\tau)\,\Big|\,\tfrac{\tau}{2}\Big), \tag{26}$$

где $\zeta_1(u,\tau) := \partial_u \log\theta_1(u|\tau)$ и $\xi(\tau)$ произвольная (непрерывная) функция τ – так называемая "функция управления" или "управляющая функция". Это уравнение является основным элементом теории параметрических конформных отображений двусвязных областей с разрезом на кольцо.

Чтобы описание однокомпонентной редукции было полным, мы должны вывести уравнение, которому удовлетворяет $\tau(\mathbf{t})$ и найти его решения.

$$\nabla(z)\tau = \frac{S'\Big(u(z)+\xi(\tau)\Big)}{S'(\xi(\tau))}\,\partial_{t_0}\tau. \tag{27}$$

Это производящее уравнение для иерархии уравнений гидродинамического типа. Чтобы записать их, воспользуемся выражением

$$S'(u(z)+u) = S'(u) + \sum_{k\ge 1}\frac{z^{-k}}{k}\,B'_k(u), \tag{28}$$

которое определяет функции $B'_k(u) = B'_k(u|\tau)$. В терминах этих функций, уравнения иерархии после редукции выглядят следующим образом:

$$\frac{\partial\tau}{\partial t_k} = \phi_k(\xi(\tau)|\tau)\,\frac{\partial\tau}{\partial t_0}\,, \qquad \phi_k(\xi(\tau)|\tau) := \frac{B'_k(\xi(\tau)|\tau)}{S'(\xi(\tau)|\tau)}\,, \quad k\ge 1. \tag{29}$$

Общее решение этих уравнений записывается в виде:

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k \phi_k(\xi(\tau)|\tau) = \Phi(\tau), \tag{30}$$

где $\Phi(\tau)$ –произвольная функция от τ. В самом простом случае, когда $\Phi(\tau) = 0$, мы заключаем из (30), что $\sum\limits_{k\geq 1} t_k \dfrac{\partial \tau}{\partial t_k} = 0$, т.е $\tau(\mathbf{t})$ однородная функция от времен степени 0.

Также мы отмечаем неожиданную связь с уравнением Пенлеве. А именно, мы покажем, что вторая производная по τ эллиптического уравнения Левнера (26), с определенным выбором управляющей функции, дает записанное в эллиптической форме уравнение Пенлеве VI со специальными значениями параметров.

Далее мы проделываем аналогичные вычисления для однокомпонентной редукции бездисперсионной иерархии Пфафф-Тоды. Наша цель - охарактеризовать класс функций $u(z, \lambda)$, $\eta(\lambda)$, $\tau(\lambda)$, которые согласуются со всей иерархии. Для простоты в дальнейшем мы полагаем $\lambda = \tau$.

Получаем, что достаточными условиями для функции $u(z, \tau)$, $\bar{u}(z, \tau)$ и $\eta(\tau)$, чтобы они были совместными с бесконечной иерархией Пфафф-Тоды являются:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} 4\pi i\, \partial_\tau \eta(\tau) & = & -\zeta_1\Big(\frac{\eta}{2} + i\kappa \;\Big|\; \frac{\tau}{2}\Big) - \zeta_1\Big(\frac{\eta}{2} - i\kappa \;\Big|\; \frac{\tau}{2}\Big) \\ 4\pi i \partial_\tau u(z, \tau) & = & -\zeta_1\Big(u + \frac{\eta}{2} + i\kappa \;\Big|\; \frac{\tau}{2}\Big) + \zeta_1\Big(\frac{\eta}{2} + i\kappa \;\Big|\; \frac{\tau}{2}\Big) \\ 4\pi i \partial_\tau \bar{u}(z, \tau) & = & -\zeta_1\Big(u + \frac{\eta}{2} - i\kappa \;\Big|\; \frac{\tau}{2}\Big) + \zeta_1\Big(\frac{\eta}{2} - i\kappa \;\Big|\; \frac{\tau}{2}\Big) \end{array} \right. \tag{31}$$

Производящие уравнения для бесконечной редуцированной иерархии:

$$\nabla(z)\tau = \frac{S'(u(z) + \xi)}{S'(\xi)}\, \partial_{t_0}\tau\,, \qquad \bar{\nabla}(\bar{z})\tau = -\,\frac{S'(\bar{u}(\bar{z}) + \bar{\xi})}{S'(\xi)}\, \partial_{t_0}\tau. \tag{32}$$

Они являются уравнениями гидродинамического типа. Чтобы написать их явно, как и в предыдущем случае, пользуемся эллиптическими аналогами полиномов Фабера. Получаем уравнения:

$$\frac{\partial \tau}{\partial t_k} = \phi_k(\xi(\tau)|\tau)\frac{\partial \tau}{\partial t_0}\,, \qquad \frac{\partial \tau}{\partial \bar{t}_k} = \psi_k(\xi(\tau)|\tau)\frac{\partial \tau}{\partial t_0}\,, \tag{33}$$

где
$$\phi_k(\xi(\tau)|\tau) = \frac{B_k'(\xi(\tau)|\tau)}{S'(\xi(\tau)|\tau)}, \qquad \psi_k(\xi(\tau)|\tau) = -\frac{\bar{B}_k'(\bar{\xi}(\tau)|\tau)}{S'(\xi(\tau)|\tau)}. \tag{34}$$

Общее решение этих уравнений можно представить в форме годографа:
$$\sum_{k\geq 1} t_k\phi_k(\xi(\tau)) + \sum_{k\geq 0} \bar{t}_k\psi_0(\xi(\tau)) = \Phi(\tau). \tag{35}$$
Здесь Φ - произвольная функция от τ.

Глава 5

Мы изучаем диагональные N -компонентные редукции иерархии dDKP, т.е. теперь u будет зависеть от времен через N вещественных переменных λ_j. Отправной точкой будет служить система N эллиптических уравнений Левнера, которая характеризует зависимость $u(z)$ от переменныхλ_j:

$$4\pi\mathrm{i}\,\partial_{\lambda_j} u(z,\{\lambda_i\}) = \Big[-\zeta_1\Big(u{+}\xi_j\,,\,\tfrac{\tau}{2}\Big) + \zeta_1\Big(\xi_j\,,\,\tfrac{\tau}{2}\Big)\Big]\frac{\partial\tau}{\partial\lambda_j}, \tag{36}$$

В свою очередь их условие совместимости выражается эллиптической системой Гиббонса-Царева
$$\frac{\partial\xi_k}{\partial\lambda_j} = \frac{1}{4\pi\mathrm{i}}\Big(\zeta_1(-\xi_k+\xi_j,\tau') - \zeta_1(\xi_j,\tau')\Big)\frac{\partial\tau}{\partial\lambda_j}, \tag{37}$$
$$\frac{\partial^2\tau}{\partial\lambda_k\partial\lambda_j} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\,\wp_1(\xi_k-\xi_j,\tau')\frac{\partial\tau}{\partial\lambda_k}\frac{\partial\tau}{\partial\lambda_j}, \tag{38}$$
для всех $j=1,\dots,N$, $j\neq k$. Зависимость переменных λ_j от времен фиксируется системой квазилинейных дифференциальных уравнений в частных производных следующего вида
$$\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_k} = \phi_{j,k}(\{\lambda_i\})\frac{\partial\lambda_j}{\partial t_0}, \tag{39}$$
с $\phi_{j,k}(\{\lambda_i\})$, определенных аналогично предыдущим случаям с помощью эллиптических полиномов Фабера. Мы покажем, что условием совместности системы (39) является
$$\frac{\partial_{\lambda_j}\phi_{i,n}}{\phi_{j,n}-\phi_{i,n}} = \frac{\partial_{\lambda_j}\phi_{i,n'}}{\phi_{j,n'}-\phi_{i,n'}} \qquad \text{для всех } i\neq j,\ n,n',$$

т.е. независимость

$$\Gamma_{ij} := \frac{\partial_{\lambda_j}\phi_{i,n}}{\phi_{j,n}-\phi_{i,n}} \tag{40}$$

от n. Далее мы заметим, что система ассоциированна с диагональной метрикой егоровского типа, а решение может быть найдено с помощью обобщенного метода годографа, разработанного Царевым.

Заключение

В данной диссертации изучались бездисперсионные иерархии Пфафф-КП и Пфафф-Тоды, их редукции и условия, при которых редукции допустимы. Основными техническими средствами являются методы эллиптических функций и теории интегрируемых систем.

Ссылки

1. V. Akhmedova and A. Zabrodin, *Dispersionless DKP hierarchy and elliptic Löwner equation*, J. Phys. A: Math. Theor. **47** (2014) 392001. `arXiv:1404.5135`

2. V. Akhmedova and A. Zabrodin, *Elliptic parametrization of Pfaff integrable hierarchies in the zero dispersion limit*, Theor. Math. Phys. **185** (2015) 410-422. `arXiv:1412.8435`

3. V. Akhmedova and A. Zabrodin, *Dispersionless Pfaff-Toda hierarchy and elliptic Löwner equation*, J. of Math. Phys. **57-10** (2016). `arXiv:1605.01561`

4. V. Akhmedova, T. Takebe, A. Zabrodin, *Multi-variable reductions of the dispersionless DKP hierarchy*, J. Phys. A: Math. Theor. **50** (2017) . `arXiv:1707.01528`