Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский университет
"Высшая школа экономики"

Засыпко Вероника Владимировна

Разработка численно-аналитического метода и алгоритма решения задачи оптимального управления (на примере трехсекторной инвестиционной экономической модели)

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ
на соискание ученой степени кандидата наук
по прикладной математике НИУ ВШЭ

Научный руководитель:
кандидат физико-математических
наук, доцент
Шнурков Петр Викторович

Москва - 2018

Постановка проблемы

Будем рассматривать так называемую классическую задачу оптимального управления, в которой интервал времени является фиксированным, а граничные условия имеют характер закрепленного левого и свободного правого конца. Такая постановка задачи включает в себя многие конкретные задачи управления в экономических и технических системах.

Постановка классической задачи оптимального управления имеет вид

$$B(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_1} f(t, x(t), u(t))dt + l(x(t_1)) \to \min;$$
$$\dot{x} - \varphi(t, x(t), u(t)) = 0 \quad \forall t \in T, \tag{1}$$
$$u(t) \in U \quad \forall t \in [t_0, t_1], \quad x(t_0) = x_0,$$

где функция состояния $x(\cdot) \in PC^1([t_0, t_1], \mathbf{R^n})$ - множество кусочно- непрерывно дифференцируемых вектор-функций, заданных на $[t_0, t_1]$ и принимающих значения в R^n; управление $u(\cdot) \in PC([t_0, t_1], \mathbf{R^r})$ - множество кусочно-непрерывных вектор-функций, заданных на $[t_0, t_1]$ и принимающих значения в заданном подмножестве $U \subset \mathbf{R^r}$ (множество допустимых управлений), $T \subset [t_0, t_1]$ множество точек непрерывности управления $u(\cdot)$.

Приведем формулировку основного утверждения о необходимых условиях экстремума в поставленной задаче оптимального управления. Данное утверждение называется принципом максимума Понтрягина.

Введем вспомогательную функцию, называемую функцией Понтрягина

$$H(t, x, u, p, \lambda_0) = (p, \varphi(t, x, u)) - \lambda_0 f(t, x, u).$$

Теорема. Пусть $(x_*(\cdot), u_*(\cdot))$ - оптимальный управляемый процесс в задаче оптимального управления (1) ($(x_*, u_*) \in strlocminP$), функции f, φ непрерывны в некоторой окрестности множества $\Gamma_{x_*} = \{(t, x_*(t)) | t \in [t_0, t_1]\}$, декартово умноженное на U, частные производные (по Фреше) f_x, φ_x определены на этом множестве и непрерывны в точках множества $\Gamma_{x_*, u_*} = \{(t, x_*(t), u_*(t)) | t \in [t_0, t_1]\}$, а функция l дифференцируема (по Фреше) в точке $x_*(t_1)$, ($l \in D(x_*(t_1))$).

Тогда выполняются следующие условия

$$\max_{u \in U} H(t, x_*(t), u, p(t), \lambda_0) = H(t, x_*(t), u_*(t), p(t), \lambda_0), t \in T \tag{2}$$

или в другой форме

$$(p(t), \varphi(t, x_*(t), u_*(t)) - f(t, x_*(t), u_*(t)) \geq (p(t), \varphi(t, x_*(t), u) - f(t, x_*(t), u), \quad t \in T, \forall u \in U \tag{3}$$

причем множитель Лагранжа λ_0 можно принять равным 1. Функция $p(t)$, которая называется сопряженной переменной, является единственным решением задачи Коши, состоящей из дифференциального уравнения

$$\dot{p}(t) = -\varphi_x^*(t, x_*(t), u_*(t))p + f_x(t, x_*(t), u_*(t)) \tag{4}$$

и граничного условия

$$p(t_1) = -l'(x_*(t_1)). \tag{5}$$

Замечания к теореме.

Условие оптимальности, принимающее формы (2) или (3), называется условием максимума, от него и происходит название данного фундаментального утверждения о необходимых условиях экстремума. Соотношение (4), которое аналитически представляет собой систему дифференциальных уравнений относительно векторфункции $p(t)$, называется сопряженным уравнением. Граничные условия к этому уравнению называются условием трансверсальности. В данной задаче условие трансверсальности является содержательным только в точке $t = t_1$, соответствующее условие в точке $t = t_0$ не информативно и не включается в систему необходимых условий экстремума.

Условие максимума функции Понтрягина (2) имеет ключевую роль в системе необходимых условий экстремума. При решении задачи оно дает возможность определить общую структуру оптимального управления. В наиболее распространенном, стандартном варианте функция Понтрягина линейно зависит от управления $u \in U$. Обозначим через $Q(t)$ коэффициент при $u \in U$ в формуле для функции Понтрягина. При этом функция $Q(t)$ явно зависит от сопряженной переменной $p(t)$. Если предположить, что множество допустимых управлений представляет собой интервал $U = [u_0, u_1] \subset R$, то из условия максимума следует, что оптимальное управление $u_*(t)$ имеет следующую структуру

$$u_*(t) = \begin{cases} u_1, & \text{если } Q(t) > 0, \\ u^{(0)}(t), & \text{если } Q(t) = 0, \\ u_0, & \text{если } Q(t) < 0. \end{cases} \tag{6}$$

Функция $u^{(0)}(t)$, фигурирующая в соотношении (6), называется особым управлением. Это управление возникает, когда функция $Q(t)$ принимает нулевое значение; в этом случае функция Понтрягина явно не зависит от управления $u \in U$. Особое управление не определяется из условий максимума, и для его нахождения используются специальные методы.

В дальнейшем будем называть функцию $Q(t)$ функцией, определяющей управление. Из соотношения (6) следует, что поведение этой функции в основном определяет вид оптимального управления.

Основная проблема использования необходимых условий экстремума в форме принципа максимума заключается в том, что необходимо исследовать сложную систему соотношений, состоящую из нескольких систем дифференциальных уравнений и граничных условий, которые связаны между собой. В частности, сопряженная система дифференциальных уравнений может зависеть от управлений $u(t)$ и состояний $x(t)$, а дифференциальная связь, определяющая изменение состояний $x(t)$, зависит от управлений $u(t)$. Аналитически решить такую систему можно только в специальных случаях. Таким образом, возникает необходимость разработки методов численного исследования системы, состоящей из необходимых условий экстремума и ограничений исходной задачи. В настоящей работе предлагается один из таких методов.

Степень разработанности

В пятидесятых годах потребности прикладных дисциплин (техники, экономики и др.) стимулировали постановку и рассмотрение нового класса задач, получивших название задач оптимального управления. Необходимое условие экстремума для задач этого класса -"Принцип максимума - сформулированное Л.С. Понтрягиным в 1956 г, было доказано и развито впоследствии им, его учениками и сотрудниками.

Со времени создания метода решения задач оптимального управления, основанного на принципе максимума, были известны аналитические трудности, связанные с его применением. В связи с этим были выполнены многие научные исследования, целью которых являлось численное решение различных задач оптимального управления. Большинство из таких исследований использовали численные методы решения систем дифференциальных уравнений, входящих в необходимые условия и ограничения исходной задачи. В настоящем исследовании задача оптимального управления анализируется в целом, с учетом структуры возможных управлений.

Цели и задачи исследования

Цель исследования.

Разработка численно-аналитического метода и алгоритма исследования системы необходимых условий в классической задаче оптимального управления на основе принципа максимума.

Задачи исследования:

1. Проведение анализа проблемы оптимального управления инвестициями в динамической модели трехсекторной экономики на основе принципа максимума, определение общей структуры функций, задающих оптимальное управление.

2. Получение аналитических представлений для функций, описывающих состояние рассматриваемой системы, а также для сопряженных переменных при оптимальном управлении.

3. Построение алгоритма и создание программы, позволяющей провести численный анализ системы соотношений, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи и получить численное решение этой системы, то есть найти допустимые экстремали.

Актуальность диссертации

Наиболее известным результатом математической теории оптимального управления, на котором основываются такие исследования, является принцип максимума Понтрягина. Метод, основанный на данном теоретическом утверждении, использовался в классических работах математической экономики, а так же в ряде современных исследований.

К сожалению, метод, основанный на использовании принципа максимума, крайне редко позволяет получить аналитические решения задач оптимального управления. Непосредственное применение этого метода связано с необходимостью решения нескольких взаимосвязанных систем соотношений (необходимых условий экстремума и ограничений исходной задачи). Получить аналитические решения этой системы чаще всего невозможно. В связи с этим особое значение приобретает проблем разработки новых численно-аналитических и численных методов, позволяющих анализировать упомянутые системы соотношений, находить допустимые экстремали и оптимальные управляемые процессы. Данное диссертационное исследование посвящено именно этой проблеме.

Личный вклад автора в разработку проблемы

Соискатель Засыпко В.В. принимала личное участие в получении всех основных результатов диссертации, а также подготовке всех публикаций по теме диссертации.

Результаты работы были представлены Засыпко В.В. в форме докладов на следующих научных конференциях, симпозиумах и семинарах:

1. Научно-технические конференции студентов, аспирантов и молодых ученых МИЭМ и МИЭМ НИУ ВШЭ 2011, 2012, 2013, 2014 годов;

2. Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике. Осенняя открытая сессия (Сочи, сентябрь 2011 г.);

3. Всероссийская конференция "Прикладная теория вероятностей и теоретическая информатика"(Москва, апрель 2012 г.);

4. Международная конференция "Теория вероятностей и ее приложения посвященная 100-летию со дня рождения Б.В.Гнеденко (Москва, июнь 2012 г.);

5. Семинар "Теория приближений и теория экстремальных задач"кафедры общих проблем управления мехмата МГУ; руководитель семинара - проф. Тихомиров В.М. (Москва, октябрь 2012 г.);

6. XXXI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models (Moscow, April 2013);

7. Научно-исследовательский семинар "Оптимальное управление: математическая теория и прикладные задачи"кафедры оптимального управления факультета ВМиК МГУ; руководитель семинара - член-корр.РАН, проф. Асеев С.М. (Москва, февраль 2014).

8. Семинар "Анализ инвестиционных проектов"; руководитель семинара д.э.н. В.Н. Лившиц, ФИЦ Информатики и управления, Институт системного анализа РАН (Москва, июнь 2016 г.).

9. Семинар "Теория приближений и теория экстремальных задач"кафедры общих проблем управления мехмата МГУ; руководитель семинара - проф. Тихомиров В.М. (Москва, октябрь 2016 г.);

Описание методологии исследования

Для решения поставленной задачи в работе используются следующие математические методы.

1. Общие методы теории оптимального управления.

2. Методы теории дифференциальных уравнений.

3. Аналитические методы классического математического анализа.

4. Методы численного анализа.

Разработанный численно-аналитический метод реализован на примере исследования задачи оптимального управления в закрытой динамической модели трехсекторной экономики. В этой модели состояниями являются функции фондовооруженности (удельного капитала) в секторах, параметром управления является функция, представляющая собой долю инвестиций в ключевой фондосоздающий сектор в общем объъме инвестиций. Математически поставленная задача относится к классическим задачам оптимального управления на заданном конечном интервале времени со смешанным целевым функционалом, ограничениями в форме дифференциальной связи, закрепленным левым концом траектории и ограничениями на управление. Решение данной задачи основывается на использовании принципа максимума Понтрягина. При помощи условия максимума определяется общая структура оптимальных управлений. Для функций управления, имеющих данную структуру с произвольным конечным числом переключений, находятся аналитические представления для функций состояний и так называемых сопряженных переменных, которые по своему теоретическому содержанию представляют собой множители Лагранжа в исходной экстремальной задаче с ограничениями. Полученные аналитические результаты позволяют построить алгоритм, следуя которому можно численно определить те функции управления и соответствующие им функции состояний, которые удовлетворяют общей системе соотношений, состоящей из необходимых условий экстремума и ограничений исходной задачи оптимального управления. Построенный алгоритм реализован в наборе программ. Созданный программный продукт позволяет по заданным исходным параметрам модели численно проанализировать достаточно широкий класс теоретически возможных функций управления и определить управляемые процессы, удовлетворяющие необходимым условиям и ограничениям.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Разработка общего численно-аналитического метода исследования задач оптимального управления и его реализация на примере поставленной задачи управления.

2. Постановка новой математической задачи оптимального управления в рамках динамической трехсекторной экономической модели.

3. Разработка численного алгоритма решения систем, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи оптимального управления.

4. Разработка программы, реализующий указанный численный алгоритм.

Научная новизна работы

В работе получены следующие новые научные результаты:

1. Разработан новый численно-аналитический метод решения задачи опти-

мального управления. Данный метод позволяет провести анализ системы соотношений, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи, и численно определить допустимые экстремали.

2. Обоснована и поставлена новая содержательная математическая задача оптимального управления в рамках динамической модели трехсекторной экономики. Для решения поставленной задачи используется метод, основанный на принципе максимума Понтрягина.

3. Проведено аналитическое исследование системы, состоящей из необходимых условий и ограничений исходной задачи оптимального управления. Получены явные аналитические представления для функций состояний и сопряженных переменных для класса функций управления, структура которых определяется на основе принципа максимума.

4. Построен алгоритм, позволяющий найти управляемые процессы, которые представляют собой допустимые экстремали в исследуемой задаче оптимального управления. Данный алгоритм может быть использован для широкого класса задач управления, в которых сопряженные уравнения могут, вообще говоря, зависеть от функций состояний модели.

5. Разработана программа, реализующая указанный алгоритм. Данная программа позволяет для заданного набора входных параметров модели определить числовые и графические представления управляемых процессов, являющихся допустимыми экстремалями в исходной задаче оптимального управления.

Общие выводы исследования

По своему содержанию данная диссертационная работа представляет собой исследование конкретной фундаментальной проблемы математической экономики, а именно, проблемы оптимального управления в некоторой макроэкономической динамической модели. Само исследование имеет явно выраженный комплексный характер и состоит из двух этапов. На первом из них используются аналитические методы, связанные с современной математической теорией оптимального управления. Основу второго этапа составляет численный алгоритм, позволяющий найти одно или несколько решений весьма сложной системы уравнений, состоящей из необходимых условий экстремума и ограничений исходной задачи оптимального управления. Данный алгоритм является полностью оригинальным. Кроме того, он имеет достаточно общий характер и может быть использован при решении различных задач оптимального управления, имеющих не только экономическое содержание. Разработанный алгоритм реализован в виде программного комплекса, который позволяет при заданных исходных параметрах модели найти конкретные управляемые процессы, подозреваемые на оптимальность, то есть допустимые экстремали в исходной задаче оптимального управления.

Благодарность

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю к.ф-м.н., доценту Шнуркову П.В. за активное участие в научно-исследовательском процессе и помощь в решении вопросов научно-организационного характера; а также за внимание и высококвалифицированное руководство на протяжении работы над диссертацией.

Список работ, опубликованных по теме диссертации

Основные положения диссертации представлены в работах, опубликованных автором в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ:

1. Засыпко В.В. Оптимальное управление инвестициями в закрытой динамической модели трехсекторной экономики: математическая постановка задачи и общий анализ на основе принципа максимума. // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. - 2014. - № 2, С.101 - 115, 0.71 а.л. (в соавт. с Шнурковым П.В.; личный вклад автора - 0.35 а.л.).

2. Засыпко В.В. Аналитическое исследование задачи оптимального управления инвестициями в закрытой динамической модели трехсекторной экономики // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. Естественные науки. - 2014. - № 4, С. 101 - 120., 0.81 а.л. (в соавт. с Шнурковым П.В.; личный вклад автора - 0.4 а.л.).

3. Засыпко В. В. Разработка алгоритма численного решения задачи оптимального управления инвестициями в закрытой динамической модели трехсекторной экономики // Информатика и ее применения, 10:1 (2016). С. 82 - 95. (в соавт. с Шнурковым П.В., Белоусовым В.В., Горшениным А.К.).

а также в работах, опубликованных автором в других изданиях:

4. Писаренко В.В. Управление инвестициями фондосоздающего сектора в динамической модели трехсекторной экономики. // Обозрение прикладной и промышленной математики. Т.18. вып. 4. Научные доклады. XII Всероссийский симпозиум по прикладной и промышленной математике. 2011. Сочи. С.654-655, 0.12 а.л.

5. Писаренко В.В. Оптимальное управление инвестициями фондосоздающего сектора в динамической модели трехсекторной экономики. // Тезисы докладов.

Всероссийская конференция "Прикладная теория вероятностей и теоретическая информатика". - М.: ИПИ РАН, 2012. - С. 88 - 90, 0.14 а.л. (в соавт. с Шнурковым П.В.; личный вклад автора - 0.07 а.л.).

6. Писаренко В.В. Оптимальное управление инвестициями фондосоздающего сектора в динамической модели трехсекторной экономики. // Тезисы докладов. Международная конференция "Теория вероятностей и ее приложения посвященная 100-летию со дня рождения Б.В. Гнеденко. - М. ЛЕНАНД, 2012. - С. 269 - 270, 0.12 а.л. (в соавт. с Шнурковым П.В.; личный вклад автора - 0.06 а.л.).

7. Zasypko V. Trajectory analysis of control process for optimal control of investments in the model of a three-sector economy. // Book of abstracts. XXXI International Seminar on Stability Problems for Stochastic Models and VII International Workshop "Applied Problems in Theory of Probabilities and Mathematical Statistics Related to Modeling of Information Systems"and International Workshop 'Applied Probability Theory and Theoretical Informatics". - М.: ИПИ РАН, 2013. - С. 111 - 113., 0.1 а.л. (в соавт. с Шнурковым П.В.; личный вклад автора - 0.05 а.л.)