Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Зверев Олег Владимирович

Минимаксное хеджирование европейского опциона на неполном рынке

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ
на соискание ученой степени кандидата наук
по прикладной математике НИУ ВШЭ

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Хаметов Владимир Минирович

Москва – 2018

Введение

Диссертация посвящена теории оптимального управления портфелем рисковых активов на неполных многомерных рынках без трения с дискретным временем с конечным горизонтом. В диссертации эта теория применяется к решению ряда задач расчета европейских опционов на неполных многомерных рынках рисковых активов.

Для описания подхода, который используется в работе, приведем необходимые сведения из теории опционов. Под рисковыми активами понимаются объекты, имеющие стоимость, эволюция которых описывается согласованными случайными последовательностями (например, акции). Многомерные рынки – это совокупность рисковых активов, которые полностью описываются распределением вероятностей этих последовательностей. Многомерные предсказуемые случайные последовательности (имеющие туже размерность, что и многомерные рынки) называются портфелем. Рассматриваются только рынки без транзакционных издержек (без трения), т.е. когда отсутствует плата за перевод одного вида актива в другой.

Европейский опцион – это контракт, в соответствии с которым продавец активов (эмитент) продает, а его покупатель имеет право (но не обязанность) совершить покупку по заранее оговоренной цене в момент времени в будущем, который указан в контракте и называемый моментом исполнения. При этом, за право приобрести эти активы в будущем, покупатель должен в момент заключения этого контракта выплатить эмитенту некоторое количество средств (например, деньги) которые называют премией или ценой опциона. При предъявлении опциона покупателем в момент исполнения контракта эмитент должен поставить эти активы покупателю, т.е. у эмитента в момент исполнения опциона возникает обязательство, которое он (эмитент), должен исполнить и которое называют платежным обязательством. Само платежное обязательство является измеримой функцией, возможно, зависящей от всех значений цен рисковых активов вплоть до момента его исполнения. Поэтому, для того чтобы исполнить платежное обязательство эмитент должен построить такой портфель рисковых активов, капитал которого был бы не меньше платежного обязательства с заданной вероятностью. При этом под капиталом портфеля в каждый момент времени понимают сумму произведений количеств рисковых активов на стоимость каждого из них, т.е. его стоимость.

Отметим, что рынки обычно классифицируются на арбитражные и безарбитражные. Под арбитражными понимают рынки, в которых при нулевых вложениях можно извлечь доход с положительной вероятностью. В противном случае рынки называют безарбитражными.

Известен[1] критерий безарбитражности который допускает простую формулировку: рынок безарбитражен тогда и только тогда, когда цены рисковых активов в процессе их эволюции в среднем не меняются. Это означает, что случайные последовательности, описывающие эволюцию цен рисковых активов, являются мартингалами[2], при этом соответствующие им вероятностные меры называют мартингальными или нейтральными к риску. Безарбитражные рынки делятся на полные и неполные. Полные рынки характерны тем, что любое платежное обязательство исполняется достоверно. Последнее означает, что существует такой портфель рисковых активов стоимость которого равна стоимости платежного обязательства. Известен[1] критерий полноты: рынок полон тогда и только тогда, когда существует единственная мартингальная мера. Полный рынок – это идеализация которая, как правило, не имеет места, т.е. реальные многомерные рынки являются неполными. Последнее означает, что вероятностная мера, описывающая неполный рынок – неединственна. Поэтому эмитент для исполнения платежного обязательства должен: 1) выбрать вероятностную меру относительно которой следует проводить расчет европейского опциона, 2) построить портфель рисковых активов, обеспечивающий исполнение платежного обязательства с заданной вероятностью, 3) сформировать цену опциона.

Актуальность темы

Для проведения расчета европейского опциона на неполных рынках обычно используют принцип справедливой цены[1,3]. В диссертации, в отличие от выше указанных работ, использован принцип минимакса. Выбор этого принципа основан на следующих соображениях. Априори эмитенту не известно распределение вероятностей наблюдаемой последовательности цен рисковых активов. Предполагается, что функция риска эмитента экспоненциальная и зависит от его дохода. Он (эмитент) минимизирует ожидаемое значение экспоненциального риска. Последнее может достигаться за счет такого портфеля, который давал бы возможность эмитенту парировать любые неблагоприятные для него распределения вероятностей рисковых активов. Для реализации этого подхода потребовалось обосновать возможность применения стохастического варианта метода динамического программирования, когда наблюдается согласованная последовательность, а целевой функционал мультипликативен. Стало быть, мы пришли к минимаксной задаче оптимального стохастического управления портфелем, которая в научной литературе не рассматривалась.

В рамках этого подхода удается установить новые условия существования:

[1] Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики (теория). М.: Фазис. 1998. - 1056с.
[2] Ширяев А.Н. Вероятность. М.: Наука. 1980. - 576с.
[3] Бертсекас Д., Шрив С. Оптимальное стохастическое управление. М.: Наука. 1985. - 280с.

1) оптимальных портфелей, являющихся предсказуемыми случайными последовательностями и инвариантными относительно любой меры из класса эквивалентных вероятностных мер,
2) равномерного разложения Дуба относительно любой вероятностной меры из класса эквивалентных вероятностных мер для измеримых ограниченных функционалов, заданных на траекториях согласованных случайных последовательностей,
3) экстремальных мер, доставляющих наибольшее значение ожидаемому риску и установить свойства этих мер, а также доказать (впервые), что относительно экстремальной меры исходный неполный рынок оказывается полным.

Вышеуказанные результаты позволяют провести конструктивный расчет опционов европейского типа на неполных рынках.

Отсюда следует актуальность как темы, так и результатов диссертационного исследования.

Целями исследования являются нахождение:
1) минимаксного значения ожидаемого экспоненциального риска эмитента,
2) конструктивных условий существования хеджирующего (суперхеджирующего, квантильного хеджирующего, квантильного суперхеджирующего) портфеля европейского опциона на неполном рынке без трения.

Как правило, в теории расчета европейских опционов на неполных рынках без трения рассматривается статическая постановка задачи. В диссертации рассматривается динамическая постановка, поэтому **научная новизна** диссертации заключается в следующем:
1) впервые, для случая дискретного времени, обоснована применимость стохастического варианта метода динамического программирования для немарковских систем с мультипликативной функции риска. Последнее позволило установить, что эволюция верхнего гарантированного значения ожидаемого экспоненциального риска эмитента описывается рекуррентным соотношением беллмановского типа, даже для последовательностей цен рисковых активов, которые являются семимартингалами;
2) получены новые условия существования равномерного разложения Дуба;
3) установлены условия существования суперхеджирующего, квантильного суперхеджирующего портфеля европейского опциона на многомерном неполном рынке без трения относительно любой эквивалентной вероятностной меры;
4) построен критерий существования экстремальной вероятностной меры, доставляющей максимальное значение ожидаемому экспоненциальному риску эмитента, и исследованы ее свойства.

Диссертация носит теоретический характер. Результаты, изложенные в диссертации, относятся к области стохастического оптимального управления. Они могут быть использованы как в стохастической теории оптимального управления, так и в стохастической финансовой математике. **Теоретическая значимость** результатов состоит в следующем:

1) найдены условия, при выполнении которых эволюция верхнего гарантированного значения ожидаемого экспоненциального риска эмитента удовлетворяет рекуррентному соотношению беллмановского типа, когда цены рисковых активов являются семимартингалами,

2) доказано, что любое ограниченное платежное обязательство допускает равномерное разложение Дуба, которое справедливо относительно любой вероятностной меры из класса эквивалентных вероятностных мер,

3) построен критерий существования экстремальных вероятностной меры и портфеля которые доставляют минимаксное значение ожидаемому экспоненциальному риску эмитента, причем доказано, что относительно этой экстремальной меры исходный неполный рынок оказывается полным,

4) доказано, что для случая неполных многомерных рынков без трения с дискретным временем решение задачи квантильного хеджирования (суперхеджирования) сводится к решению двух задач совершенного хеджирования (суперхеджирования).

В работе применяются методы функционального анализа, теории вероятностей, теории случайных процессов и стохастического анализа.

Практическая значимость полученных результатов состоит в следующем:

1) поскольку последовательности цен рисковых активов, как правило, являются семимартингалами, то полученные утверждения могут быть использованы для выбора минимаксного управления портфелем активов,

2) установлен критерий существования экстремальной вероятностной меры, относительно которой: а) исходный рынок является полным; б) найдена верхняя граница стоимости опциона, в) построен хеджирующий портфель,

3) для неполных рынков без трения полученные результаты позволяют строить квантильный хеджирующий портфель.

Результаты выносимые на защиту:

1) рекуррентное соотношение беллмановского типа, которому удовлетворяет последовательность верхних гарантированных значений ожидаемого экспоненциального риска эмитента на неполном многомерном рынке без трения;

2) условия существования суперхеджирующего, квантильного суперхеджирующего портфелей европейского опциона на многомерном неполном рынке без трения относительно любой меры из класса эквивалентных;

3) критерий существования вероятностной меры (наихудшей меры), доставляющей существенную верхнюю грань ожидаемого экспоненциального риска эмитента, и ее свойства;
4) условия существования минимаксного и квантильного минимаксного портфелей.

Степень проработанности проблемы исследования. Теории расчета европейского опциона на одномерном полном рынке без трения с дискретным временем посвящено большое количество работ. Это работы Кокса Дж., Росса Р., Рубинштейна М.[4], Харрисона Дж. и Крепса Д.[5], Ширяева А. Н., Кабанова Ю. М., Крамкова Д. О., Мельникова А. В.[6], Фельмера Г. и Шида А.[7]. В них установлена единственность мартингальной меры и приведен ее явный вид. Показано, что платежное обязательство допускает S-представление. Это позволило найти стоимость опциона и построить совершенный хеджирующий портфель. Теории расчета европейского опциона с квантильным критерием на одномерном полном рынке посвящены работы ряда авторов. Например, в статье Новикова А. А.[8] для случая одномерного полного рынка обоснован метод расчета стоимости опциона и хеджирующей стратегии. В работе Фельмера Г., Леукерта П.[9] рассматривается статическая постановка задачи минимизации стоимости опциона при заданной вероятности исполнения платежного обязательства. В ней утверждается, что решение вышеуказанной задачи совпадает с решением задачи расчета европейского опциона с некоторым модифицированным платежным обязательством. Для построения последнего используется лемма Неймана-Пирсона. В работе Григорьева П. В., Кана Ю. С.[10] рассматривается двухшаговая задача оптимального управления двумя видами активов с квантильным критерием качества, в предположении о равномерном распределении доходности рискового актива. На основе результатов работы Кана Ю. С.[11] строится аналитическое решение задачи управления портфелем ценных бумаг которое принадлежит классу марковских стратегий. В статье Кибзуна А. И., Наумова А. В., Норкина В. И.[12] для

[4] Cox J. C., Ross R.A., Rubinstein M. Option pricing: a simplified approach. / Journal of Financial Economics. - 1979. - v.7. - №3. - p.229-263
[5] Harrison, J.M., Kreps, D. Martingales and arbitrage in multiperiod security markets. / Journal of Economic Theory. - 1979. - v.20. - p.381-408
[6] Ширяев А.Н., Кабанов Ю.М., Крамков Д.О., Мельников А.В. К теории расчетов опционов Европейского и Американского типов. I. Дискретное время / Теория вероятности и ее применение. - 1994. - т.39. - в.1. - с.23-79
[7] Фёльмер Г., Шид А. Введение в стохастические финансы. Дискретное время. М.: МЦНМО. 2008. - 496с.
[8] Новиков А. А. Хеджирование опционов с заданной вероятностью. / Теория вероятности и ее применение. - 1998. - т.43. - в.1. - с.152-161
[9] Fëllmer H., Leukert, P. Quantile hedging. / Finance and Stochastics. - 1999. - v.3. - 3. - p.251-273
[10] Григорьев П.В. Кан Ю.С. Оптимальное управление по квантильному критерию портфелем ценных бумаг / Автоматика и телемеханика. - 2004. - 2. - с.179-197
[11] Кан Ю.С. Оптимизация управления по квантильному критерию / Автоматика и телемеханика. - 2001. - 5. - с.77-88
[12] Кибзун А. И., Наумов А. В., Норкин В. И. О сведении задачи квантильной оптимизации с дискретным распределением к задаче смешанного целочисленного программирования / Автоматика и телемеханика. – 2013. - т.6. – с.66-86

одномерного рынка с горизонтом равным единице установлены условия, при выполнении которых задача квантильного хеджирования сводится к задаче частично целочисленного программирования.

Теории расчета европейского опциона на неполном рынке без трения с дискретным временем посвящено ряд работ. Например, в работах Нейка В.[13], Дэлбаена Ф. и Шахермаера В.[14] для семимартингальной модели рынка с конечным числом активов и ограниченным снизу платежным обязательством *f*, доказывается, что верхняя стоимость опциона C_0^{sup} допускает представление

$$C_0^{sup} = \sup_{Q \in M(S)} E^Q f$$

где $M(S)$–множество эквивалентных локально мартингальных мер, заданных на траекториях цен рисковых активов. В статье Дэлбаена Ф. и Швайцмаера В.[15] устанавливается справедливость вышеприведенной формулы, в которой верхняя грань берется по множеству σ–мартингальных вероятностных мер. В работах Ширяева А. Н.[1], Фельмера Г. и Шида А.[7] выводится формула для верхней стоимости опциона когда платежное обязательство является неотрицательной ограниченной функцией. Кроме того, в них устанавливаются условия существования суперхеджирующего портфеля в классе эквивалентных мартингальных мер. В статье Бизида А. и Джуни Е.[16] в семимартингальной модели рынка, когда «короткие продажи» запрещены, для ограниченного снизу платежного обязательства выведена формула верхней стоимости опциона. В статье Рушендорфа Л.[17] выведены формулы, позволяющие найти оценки сверху и снизу стоимости опциона. В статье Гущина А. А. и Мордецки Э.[18] в одномерной семимартингальной модели (B,S)-рынка установлены условия когда нижняя и верхняя стоимости опциона достигаются. В работе Эберлейна Е., Папантолеоне А., Ширяева А. Н.[19] для одномерной семимартингальной модели рынка, когда цены рисковых активов описываются процессом с независимыми приращениями, устанавливаются условия

---

[13] Naik V., Uppal R. Leverage constraints and the optimal hedging of stock and bond options / Journal of Financial and Quantitative Analysis. - 1994. - v.29. -№2. - p.199-222

[14] Delbaen F., Schachermayer W. The no-arbitrage property under a change of numeraire / Stochastics and Stochastic Reports. - 1995. - v.53. - p.213-266

[15] Delbaen F., Schachermayer W. The Fundamental Theorem of Asset Pricing for Undounded Stochastic Processes / Mathematische Annalen. - 1998. - v.312. - №2. - p.215-250

[16] Bizid A., Jouini E. Incomplete markets and short-sales constraints: an equilibrium approach. / Int. J. of Theoretical and Applied Finance. - 2001. - v.4. - №2. - p.211-243

[17] Rüschendorf L. On Upper and Lower Prices in Discrete-Time Models / Tr. Mat. Inst. Steklova. - 2002. - V.237. - p.143-148

[18] Гущин А. А., Мордецки Э. Границы цен опционов для семимартингальных моделей рынка. // Тр. МИАН. - 2002. -Т. 237. - с. 80-122

[19] Eberlein E., Papapantoleon A., Shiryaev A. N. On the duality principle in option pricing: semimartingale setting. / Finance and Stochastics. - 2008. - v.12. - 2. - p.265-292

существования паритета опционов колл и пут: европейского, американского, азиатского типов. В диссертации Хасанова Р. В.[20] рассматривается задача расчета европейского опциона на многомерном рынке в статической постановке. В предположении, что цены рисковых активов являются семимартингалами, выведена формула верхней стоимости опциона

$$C_0^{sup} = \sup_{Z\in\mu^l} Ef\, Z_T = \sup_{Z\in\mu^\sigma} EfZ_T$$

где μ^l μ^σ -множества локально мартингальных и σ-мартингальных плотностей, соответственно. Показано, что разделяющая мера является конечно-аддитивной. Задаче расчета европейского опциона с квантильным критерием на неполном рынке без трения посвящены работы ряда авторов: Фельмера Г., Шида А., Леукерта П. [21] , Каратзаса И.[22],Квитаника Дж.[23], Лонга Т., Сонга К., Янга Дж.[24]. В них рассматривается статическая постановка задачи минимизации стоимости опциона при заданной вероятности исполнения платежного обязательства. Утверждается, что решение вышеуказанной задачи совпадает с решением задачи расчета европейского опциона с некоторым модифицированным платежным обязательством, равным произведению исходного платежного обязательства f на индикатор некоторого множества. В работе Азанова В. М. и Кана Ю. С.[25] рассматривается задача максимизации вероятности достижения заданного уровня размера капитала при фиксированном начальном капитале. Установлены соотношения для оптимальной стратегии.

Отметим, что в большинстве работ, задача расчета европейского опциона на неполном рынке без трения, рассматривается в статической постановке. Последнее позволяет найти формулы верхней (нижней) стоимости опциона или их оценки. Однако такой подход не позволяет ответить на вопрос о виде хеджирующего портфеля и соответствующего ему капитала.

Личный вклад автора в разработку проблемы: результаты, составляющие содержание статей, получены диссертантом лично; участие Хаметова В. М. заключается в формулировках постановок задач и осуществлении общего руководства.

---

[20] Хасанов Р. В. Максимизация полезности со случайным вкладом и хеджирование платежных обязательств. Дис. канд. физ.-мат. наук. М. 2013. - 91с.
[21] Föllmer H., Leukert P. Efficient hedging: Cost versus shortfall risk. / Finance and Stochastics. - 2000. - v. 4. - 2. - p.117-146
[22] Cvitanić J., Karatzas I. On dynamic measures of risk. / Finance and Stochastics. - 1999. - v.3. - 4. - p.451-482
[23] Cvitanić J. Minimizing expected loss of hedging in incomplete and constraint markets. / SIAM Journal on Control and Optimization. - 2000. - v.38 - 4. - p.1050-1066
[24] Leung T., Song Q., Yang J. Outperformance portfolio optimization via the equivalence of pure and randomized hypothesis testing. / Finance and Stochastics. - 2013. - v.17. - 4. - p.839-870
[25] Азанов В. М., Кан Ю. С. Двухсторонняя оценка функции Беллмана в задачах стохастического оптимального управления дискретными системами по вероятностному критерию качества. / Автоматика и телемеханика. - 2018. - №2. - с.3-18

Список публикаций по теме диссертации

Результаты диссертации опубликованы в рецензируемых научных изданиях, входящих в перечень ВАК и список журналов высокого уровня НИУ ВШЭ.

Работы, опубликованные автором в ведущих рецензируемых научных журналах, рекомендованных ВАК Министерства образования и науки РФ:

1. Зверев О.В. Об условиях справедливости опционального разложения. / Зверев О.В., Хаметов В. М. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009. Том 16. Выпуск 6. С. 1067-1068. (личный вклад автора 0,04 п.л.)

2. Зверев О.В. Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках без трения. Ч. 1. Суперхеджирование / Зверев О.В., Хаметов В.М. // Проблемы управления. 2014. Выпуск 6. С. 31–44. (личный вклад автора 0,7 п.л.)

3. Зверев О.В. Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках без трения. Ч. 2. Минимаксное хеджирование / Зверев О.В., Хаметов В.М. // Проблемы управления. 2015. Выпуск 1, С. 47–52. (личный вклад автора 0,3 п.л.)

Работы, опубликованные автором в других изданиях:

4. Зверев О.В. Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (Дискретное время). / Зверев О.В., Хаметов В. М. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Том 18. Выпуск 1. С. 26-54. (личный вклад автора 0,8 п.л.)

5. Зверев О.В. Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на компактном (1,S)-рынке. / Зверев О.В., Хаметов В. М. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Том 18. Выпуск 1. С. 121-122. (личный вклад автора 0,06 п.л.)

6. Зверев О. В. Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (Дискретное время). / Зверев О. В., Хаметов В. М. // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2011. Том 18. Выпуск 2. С. 193-204. (личный вклад автора 0,5 п.л.)

Результаты исследования в материалах научных конференций:

1. O.V. Zverev Quantile hedging of European option in multidimensional incomplete market without transaction costs (discrete time) / O.V. Zverev // VIII Московская международная конференция по исследованию операций. 2016. М. МАКС Пресс. Труды конференции. Том 1. С. 109-112с.

2. Зверев О. В. «Квантильное хеджирование европейского опциона на полном рынке без трения (дискретное время)» / Зверев О. В. // конференция «Молодая экономика: экономическая наука глазами молодых ученых». 2016. М. ЦЭМИ РАН. Материалы конференции. С. 16-17.

3. Зверев О. В. «Построение множества успешного хеджирования в задаче расчета европейского опциона на неполном многомерном рынке без трения (дискретное время)» / Зверев О. В. // конференция «Молодая экономика: экономическая наука глазами молодых ученых». 2017. М. ЦЭМИ РАН. Материалы конференции. С. 32-34.