Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский государственный университет имени
М. В. Ломоносова»
Механико-математический факультет
Кафедра высшей алгебры

Богачев Николай Владимирович

Рефлективные гиперболические решётки

Резюме диссертации
на соискание учёной степени
кандидата математических наук НИУ ВШЭ

Научный руководитель:
профессор, доктор физико-математических наук
Эрнест Борисович Винберг

Москва 2019

Глава 1. Введение

Аннотация

Данная диссертация посвящена задаче классификации рефлективных гиперболических решёток, которая является открытой проблемой примерно с 70-х годов прошлого века. Диссертация была написана под руководством Э. Б. Винберга во время моей аспирантуры на кафедре высшей алгебры механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова.

Диссертация состоит из пяти глав. Первая глава является введением в область исследования. В ней формулируются основные определения, известные результаты, открытые проблемы, а также основные результаты самой диссертации. Глава 2 представляет из себя подробный набор предварительных сведений, включающих в себя описание моделей пространств постоянной кривизны, остроугольных многогранников в них, дискретных групп отражений, и, наконец, основы теории рефлективных гиперболических решёток и арифметических групп отражений.

Основные результаты настоящей диссертации получены в главах 3, 4 и 5. Глава 3 содержит теоретическое описание алгоритма Винберга, а также описание проекта (совместного с А.Ю. Перепечко) VinAl компьютерной реализации алгоритма Винберга для гиперболических решёток над $\mathbb{Z}$. Наконец, последние главы 4 и 5 содержат результаты классификации устойчиво рефлективных гиперболических решёток ранга 4 над $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ соответственно.

Дискретные группы отражений

Пусть $\mathbb{X}^n$ — одно из трех пространств постоянной кривизны, то есть либо n-мерное евклидово пространство $\mathbb{E}^n$, либо n-мерная сфера $\mathbb{S}^n$, либо n-мерное (гиперболическое) пространство Лобачевского $\mathbb{H}^n$.

Рассмотрим выпуклый многогранник P в пространстве $\mathbb{X}^n$. Если мы подействуем на P группой Γ, порождённой отражениями в гиперплоскостях его граней, то может получиться так, что образы этого многогранника при действии разными элементами группы Γ покроют всё пространство $\mathbb{X}^n$ и не будут иметь попарно общих внутренних точек. В таком случае мы будем говорить, что группа Γ является *дискретной группой отражений*, а многогранник P является её *фундаментальным многогранником*. Если многогранник P является *ограниченным* (или, эквивалентно, *компактным*), то группа Γ называется *кокомпактной группой отражений*, если же многогранник P имеет *конечный объём*, то группа Γ называется *коконечной* или дискретной группой *конечного кообъёма*.

Какие свойства характеризуют фундаментальные многогранники P для дискретных групп отражений? Например, всякие две гиперплоскости H_i и H_j, ограничивающие P, либо не пересекаются, либо образуют двугранный угол, равный π/n_{ij}, где $n_{ij} \in \mathbb{Z}$, $n_{ij} \geq 2$.

Такие многогранники называют *многогранниками Кокстера*, поскольку дискретные группы отражений (значит, и их фундаментальные многогранники) для $\mathbb{X}^n = \mathbb{E}^n, \mathbb{S}^n$ были определены и найдены Г. Кокстером в 1933 году (см. работу [25]).

В 1967 году (см. [17]) Э. Б. Винберг разработал теорию дискретных групп, порождённых отражениями в пространствах Лобачевского. Он предложил новые методы исследований гиперболических групп отражений, в частности, описание таких групп в виде схем Кокстера, сформулировал и доказал критерий арифметичности для гиперболических групп отражений, а также привел ряд различных примеров.

Арифметические группы отражений и рефлективные гиперболические решётки

Пусть $\mathbb{F}$ — вполне вещественное поле алгебраических чисел, A — кольцо его целых элементов. Для удобства будем считать, что оно является кольцом главных идеалов.

***Определение* 1.** *Свободный конечно-порождённый A-модуль L, снабжённый скалярным умножением $(\cdot\,,\cdot)$ сигнатуры $(n,1)$ со значениями в A, называется гиперболической решёткой, если для всякого нетождественного вложения $\sigma : \mathbb{F} \to \mathbb{R}$ квадратичное пространство $L \otimes_{\sigma(A)} \mathbb{R}$ положительно определено.*

Пусть L — гиперболическая решётка. Тогда векторное пространство

$$\mathbb{E}^{n,1} = L \otimes_{\mathrm{id}(A)} \mathbb{R}$$

является $(n+1)$-мерным вещественным *пространством Минковского*. Группа $\Gamma = \mathcal{O}'(L)$ целочисленных (то есть с коэффициентами из A) линейных преобразований, сохраняющих решётку L и отображающих на себя каждую связную компоненту конуса

$$\mathfrak{C} = \{v \in \mathbb{E}^{n,1} \mid (v,v) < 0\} = \mathfrak{C}^+ \cup \mathfrak{C}^-,$$

является дискретной группой движений *пространства Лобачевского*. Здесь подразумевается *векторная модель* пространства Лобачевского $\mathbb{H}^n$, заданная как множество точек гиперболоида

$$\{v \in \mathbb{E}^{n,1} \mid (v,v) = -1\},$$

лежащих внутри конуса $\mathfrak{C}^+$. Группа движений $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n) = \mathcal{O}'(n,1)$ есть группа псевдоортогональных преобразований пространства $\mathbb{E}^{n,1}$, оставляющая на месте конус $\mathfrak{C}^+$.

Из общей теории арифметических групп (см. статью [11] А. Бореля и Харишчандры 1962 года, а также работу [29] Г. Мостова и Т. Тамагавы 1962 года) известно, что если решётка L изотропна (то есть ассоциированная с ней квадратичная форма представляет нуль; заметим, что это может быть выполнено только для решеток над $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$), то факторпространство $\mathbb{H}^n/\Gamma$ (то есть фундаментальная область группы Γ) некомпактно, но имеет конечный объём (в таком случае говорят, что Γ — *дискретная подгруппа конечного кообъёма*), а во всех остальных случаях оно компактно. При $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$ доказательство этих утверждений было впервые дано в 1937 году в работе [16] Б. А. Венкова.

***Определение* 2.** *Две подгруппы Γ_1 и Γ_2 какой-либо группы называются соизмеримыми, если группа $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ является подгруппой конечного индекса в каждой из них.*

***Определение* 3.** *Группы Γ, полученные указанным выше способом, и все соизмеримые с ними дискретные подгруппы группы $\mathrm{Isom}(\mathbb{H}^n)$ называются арифметическими дискретными группами простейшего типа. Поле $\mathbb{F}$ называется полем определения (или основным полем) группы Γ (и всех групп, соизмеримых с ней).*

Примитивный вектор $e \in L$ называется *корнем* или, более точно, *k-корнем*, где $k = (e,e) > 0$, если $2(e,x) \in kA$ для всех $x \in L$. Всякий корень e определяет *ортогональное отражение* (называемое *k-отражением*, где $k = (e,e)$) в пространстве $\mathbb{E}^{n,1} = L \otimes_{\mathrm{id}(A)} \mathbb{R}$

$$\mathcal{R}_e : x \mapsto x - \frac{2(e,x)}{(e,e)}e,$$

которое сохраняет решётку L. Отражение $\mathcal{R}_e$ определяет отражение в пространстве $\mathbb{H}^n$ относительно гиперплоскости

$$H_e = \{x \in \mathbb{H}^n \mid (x,e) = 0\},$$

называемой *зеркалом* отражения $\mathcal{R}_e$.

Обозначим через $\mathcal{O}_r(L)$ подгруппу группы $\mathcal{O}'(L)$, порождённую всеми содержащимися в ней отражениями.

***Определение* 4.** *Гиперболическая решётка L называется рефлективной, если индекс $[\mathcal{O}'(L) : \mathcal{O}_r(L)]$ конечен.*

***Теорема* 1.** *(*Винберг*, 1967, см. [17])*

Дискретная группа отражений конечного кообъёма является арифметической группой отражений с полем определения $\mathbb{F}$ (или $\mathbb{F}$-арифметической), если она содержится в качестве подгруппы конечного индекса в группе вида $\mathcal{O}'(L)$, где L — какая-то (автоматически рефлективная) гиперболическая решетка над вполне вещественным полем $\mathbb{F}$.

Теперь мы сформулируем несколько фундаментальных теорем о существовании арифметических групп отражений и кокомпактных групп отражений в пространствах Лобачевского.

***Теорема* 2.** *(*Винберг*, 1984, см. [21])*

1. *Компактные многогранники Кокстера отсутствуют в пространствах Лобачевского $\mathbb{H}^n$ при $n \geq 30$.*
2. *Арифметические группы отражений отсутствуют в пространствах Лобачевского $\mathbb{H}^n$ при $n \geq 30$.*

Следующий важный результат принадлежит сразу нескольким авторам.

***Теорема* 3.** *Для каждого $n \geq 2$ существует лишь конечное с точностью до подобия число рефлективных гиперболических решёток сигнатуры $(n, 1)$. Аналогично, для каждого $n \geq 2$ существует лишь конечное с точностью до сопряжения число максимальных арифметических групп отражений в пространствах $\mathbb{H}^n$.*

Доказательство этой теоремы разбивается на следующие этапы:

- 1980, 1981 — В. В. Никулин доказал конечность числа максимальных арифметических групп отражений в пространствах $\mathbb{H}^n$ при $n \geq 10$, см. [31, 33];
- 2005 — Д. Д. Лонг, К. Маклахлан и А. В. Рид доказали конечность числа максимальных арифметических групп отражений в размерности $n = 2$, см. [26];
- 2005 — И. Агол доказал конечность в размерности $n = 3$, см. [1];
- 2007 — В. В. Никулин по индукции доказал конечность в оставшихся размерностях $4 \leq n \leq 9$, см. [36];
- 2008 — И. Агол, М. В. Белолипецкий, П. Сторм и К. Уайт независимо провели доказательство теоремы конечности для всех размерностей с помощью спектрального метода, см. [2] (см. также недавний обзор [7] М. В. Белолипецкого).

Данные результаты дают надежду на то, что все рефлективные гиперболические решётки, а также и максимальные арифметические группы отражений можно классифицировать.

Открытые проблемы

Сказанное выше подводит нас к следующим фундаментальным открытым проблемам, связанным с теорией дискретных групп отражений и многогранников Кокстера в пространствах Лобачевского $\mathbb{H}^n$.

***Проблема* 1.** *Какова максимальная размерность пространства Лобачевского, в котором существует компактный многогранник Кокстера? Аналогичный вопрос открыт и для многогранников Кокстера конечного объёма.*

***Проблема* 2.** *Классификация всех рефлективных гиперболических решёток и максимальных арифметических групп отражений.*

***Замечание* 1.** *Проблема классификации фактически поставлена Э. Б. Винбергом в 1967 году. Дальнейшие результаты 70-80-х годов прошлого века (а также и недавние результаты) подтверждают, что есть надежда на решение этой проблемы.*

Хорошим инструментом для решения обеих проблем является алгоритм Винберга (1972 год, см. [18]) построения фундаментального многогранника для гиперболической группы отражений. Практически он эффективен для арифметических групп отражений и позволяет определить, является ли заданная решётка рефлективной.

Рекордный пример компактного многогранника Кокстера был найден В. О. Бугаенко при $n = 8$ (см. [15]), хотя известно лишь, что $n < 30$ (см. теорему 2 выше).

Рекордный пример многогранника Кокстера конечного объёма принадлежит Р. Борчердсу в размерности $n = 21$ (см. [12]). При этом известно, что многогранники Кокстера конечного объёма могут существовать при $n < 996$ (см. работы [38] М. Н. Прохорова и [42] А.Г. Хованского, 1986 год).

Оба этих примера пришли из арифметических групп отражений. Многогранник Бугаенко является фундаментальным многогранником для некоторой арифметической группы отражений над полем $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$ в пространстве $\mathbb{H}^8$, а многогранник Борчердса является фундаментальным многогранником для арифметической группы отражений над полем $\mathbb{Q}$ в пространстве $\mathbb{H}^{21}$.

Более того, Д. Аллкок, используя элегантный и простой трюк удвоения («a simple doubling trick») построил бесконечные серии (см. [3]) многогранников Кокстера

конечного объема в пространствах Лобачевского вплоть до размерности 19, а также компактных многогранников Кокстера вплоть до размерности 6. Отметим также, что в размерностях 7 и 8 есть как арифметические бесконечные серии, так и неарифметические.

Классификация всех дискретных групп отражений конечного кообъёма в пространствах Лобачевского не представляется возможной. Эффективное описание всех дискретных групп отражений конечного кообъёма в пространствах $\mathbb{H}^n$ получено лишь при $n = 2$ (см. работу [37] А. Пуанкаре 1882 года) и при $n = 3$ (знаменитые теоремы Е. М. Андреева 1970 года, см. [5] и [6]).

В классификации арифметических групп отражений достигнуты более существенные успехи. Над полем определения $\mathbb{Q}$ рефлективные гиперболические решётки сигнатуры $(n, 1)$ (а также максимальные арифметические группы отражений в $\mathbb{H}^n$) классифицированы при $n = 2$ (В.В. Никулин, 2000, см. [35] и Д. Аллкок, 2011, см. [4]), $n = 4$ (Р. Шарлау и К. Вальхорн, 1989–1993, см. [40, 43]), $n = 5$ (И. Туркал, 2017, см. [41]) и для некомпактного случая при $n = 3$ (Р. Шарлау и К. Вальхорн, 1989–1993, см. [39, 40]).

Также получена классификация рефлективных гиперболических решёток сигнатуры $(2, 1)$ с полем определения $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ (А. Марк, 2015, см. [27, 28]).

Во всех остальных случаях проблема 2 остаётся до сих пор открытой.

Глава 2. Дискретные группы отражений

Глава 2 представляет из себя подробный набор предварительных сведений, включающих в себя описание моделей пространств постоянной кривизны, остроугольных многогранников в них, дискретных групп отражений, и, наконец, основы теории рефлективных гиперболических решеток и арифметических групп отражений. Мы определяем в ней схемы Кокстера для многогранников Кокстера, и приводим также список связных эллиптических и параболических схем Кокстера.

Глава 3. Алгоритм Винберга

Проект VinAl: для гиперболических решёток над $\mathbb{Z}$

Глава посвящена алгоритму Винберга и созданию инструментария для решения проблем 1 и 2. С помощью различных компьютерных реализаций алгоритма Винберга были исследованы на рефлективность десятки гиперболических решё-

ток над $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$. Таким образом удалось получить еще много новых арифметических компактных многогранников Кокстера в пространствах Лобачевского.

Как было сказано выше, алгоритм Винберга является эффективным способом построения фундаментальных многогранников для арифметических групп отражений.

Попытки реализовать на компьютере алгоритм Винберга предпринимались с 80х годов прошлого века, но все они ограничивались решётками частного вида, как правило, имеющими ортогональный базис. Упоминания о таких программах можно встретить, к примеру, в работах В. О. Бугаенко (1992, см. [15]), Р. Шарлау и К. Вальхорн (1992, см. [40]), В. В. Никулина (2000, см. [35]) и Д. Аллкока (2011, см. [4]). Но сами программы не были опубликованы, за исключением работы В. В. Никулина, в которой приведён код программы для решёток нескольких частных видов. Единственной известной реализацией, опубликованной вместе с подробной документацией, является программа Р. Гульельметти 2016 года[1], работающая с решётками, имеющими ортогональный базис, инвариантные множители которых свободны от квадратов. Р. Гульельметти применял её в своей диссертации для классификации рефлективных решёток с ортогональным базисом, элементы которого имеют малые скалярные квадраты (2017, см. [23]). Эта программа работает эффективно во всех размерностях, где существуют рефлективные решётки.

В данной работе представлена собственная реализация (проект VinAl) алгоритма Винберга для произвольных гиперболических $\mathbb{Z}$-решёток, не накладывая на них никаких ограничений. Эта программа написана в 2017 году совместно с А. Ю. Перепечко и опубликована в Интернете (см. [9]). Её подробное описание доступно в статье [45].

Программа была проверена на значительном количестве известных рефлективных гиперболических решёток. Помимо этого, нами был найден ряд новых рефлективных решёток.

Некоторые результаты работы нашей программы представлены в таблице 1. Здесь $U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ обозначает стандартную двумерную гиперболическую решётку, а A_n — евклидову корневую решётку типа A_n. Все представленные в данной таблице решётки новые, за исключением решёток $[-1] \oplus A_3$ и $[-4] \oplus A_3$.

Также нами установлена рефлективность решёток вида

$$[-2] \oplus A_2 \oplus \underbrace{[1] \oplus \ldots \oplus [1]}_{n-1}$$

при $n \leq 6$.

[1] см. проект AlVin https://rgugliel.github.io/AlVin

Таблица 1: Решётки вида $[-k] \oplus A_3$, $[-k] \oplus [1] \oplus A_2$ для некоторых $k \leq 15$, а также $U \oplus [36] \oplus [6]$.

L	# граней	t (сек)
$[-1] \oplus A_3$	4	0,7
$[-2] \oplus A_3$	5	1,9
$[-3] \oplus A_3$	5	1,0
$[-4] \oplus A_3$	4	0,66
$[-5] \oplus A_3$	6	1,56
$[-6] \oplus A_3$	6	1,5
$[-8] \oplus A_3$	7	1,72
$[-9] \oplus A_3$	9	79,5
$[-10] \oplus A_3$	12	1,72
$[-12] \oplus A_3$	5	1.02
$[-15] \oplus A_3$	12	28,7
$U \oplus [36] \oplus [6]$	15	56,6

L	# граней	t (сек)
$[-1] \oplus [1] \oplus A_2$	4	0,6
$[-2] \oplus [1] \oplus A_2$	6	0,8
$[-3] \oplus [1] \oplus A_2$	5	0,6
$[-4] \oplus [1] \oplus A_2$	5	1,02
$[-5] \oplus [1] \oplus A_2$	7	1,9
$[-6] \oplus [1] \oplus A_2$	8	1,2
$[-7] \oplus [1] \oplus A_2$	11	19,2
$[-8] \oplus [1] \oplus A_2$	6	1,02
$[-9] \oplus [1] \oplus A_2$	5	0,9
$[-10] \oplus [1] \oplus A_2$	11	11
$[-15] \oplus [1] \oplus A_2$	15	44
$[-30] \oplus [1] \oplus A_2$	20	36,6

На данный момент программа эффективно работает при $2 \leq n \leq 5$. Тем самым, она оказывается, к примеру, полезной в открытой проблеме классификации рефлективных решёток в размерности $n = 3$ и уже успешно применялась автором данной диссертации для получения частичных результатов для данной классификации.

Алгоритм Винберга для гиперболических решёток над $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$

Поскольку в диссертации исследуется также рефлективность решёток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, то возникла необходимость написать программу для алгоритма Винберга над квадратичными полями. На текущий момент у меня получилась программа для решёток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, которую нужно каждый раз немного править для каждой новой решётки. Эта программа предусматривает возможность того, что исследуемая нами решетка может не иметь ортогональный базис.

Для решеток с ортогональным базисом удобно использовать программу Р. Гульельметти, о которой упоминалось выше. Работа авторской программы была отчасти проверена на решётках таблицы 5. В ближайшем будущем планируется слияние авторской программы для решеток над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ с проектом VinAl. Дальнейшая работа над проектом, реализующим алгоритм Винберга для произвольных решеток уже над квадратичными полями $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$, ведется совместно с А. Ю. Перепечко.

В результате экспериментов с разными программами удалось получить новые серии рефлективных гиперболических решеток различных рангов над различными квадратичными полями. Часть этих результатов получена автором совместно с А. А. Колпаковым в 2017-2018 гг.

Таблица 2: Унимодулярные решётки над $\mathbb{Q}[\sqrt{13}]$ и $\mathbb{Q}[\sqrt{17}]$.

L	n	# граней
$[-\frac{3+\sqrt{13}}{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	2	4
$[-\frac{3+\sqrt{13}}{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	3	9
$[-\frac{3+\sqrt{13}}{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	4	40

L	n	# граней
$[-4-\sqrt{17}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	2	4
$[-4-\sqrt{17}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	3	6
$[-4-\sqrt{17}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	4	20

Таблица 3: Некоторые решётки над $\mathbb{Q}[\sqrt{5}]$.

L	n	# граней
$[-1-\sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	2	4
$[-1-\sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	3	5
$[-1-\sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	4	7
$[-1-\sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	5	13
$[-1-\sqrt{5}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	6	18

L	n	# граней
$[-1-\sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \ldots \oplus [2] \oplus [1]$	2	4
$[-1-\sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \ldots \oplus [2] \oplus [1]$	3	5
$[-1-\sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \ldots \oplus [2] \oplus [1]$	4	7
$[-1-\sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \ldots \oplus [2] \oplus [1]$	5	13
$[-1-\sqrt{5}] \oplus [2] \oplus \ldots \oplus [2] \oplus [1]$	6	18

Полученные результаты приведены в таблицах 2–5. В этих таблицах указывается сначала вид решетки сигнатуры $(n, 1)$, затем указываю размерность n соответствующего пространства Лобачевского, а затем количество граней для фундаментального многогранника Кокстера соответствующей группы отражений.

Глава 4. Устойчиво рефлективные гиперболические $\mathbb{Z}$-решётки ранга 4

***Определение* 5.** *Число $k \in A$, $k > 0$, называется устойчивым, если $k \mid 2$ в кольце A.*

Например, при $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$, $A = \mathbb{Z}$, это определение выполняется при $k \leqslant 2$. А при $\mathbb{F} = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ и $A = \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ устойчивыми будут числа 1, 2 и $2 + \sqrt{2}$ (с точностью до умножения на обратимый элемент кольца).

***Определение* 6.** *Отражение R_e называется устойчивым, если число (e, e) устойчиво.*

Таблица 4: Некоторые решётки над $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

L	n	# граней
$[-\sqrt{2}] \oplus [2+\sqrt{2}] \oplus [1]$	2	4
$[-\sqrt{2}] \oplus [2+\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	3	6
$[-\sqrt{2}] \oplus [2+\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	4	10
$[-\sqrt{2}] \oplus [2+\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	5	31

L	n	# граней
$[-7-5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	2	3
$[-7-5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	3	5
$[-7-5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	4	7
$[-7-5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	5	11
$[-7-5\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	6	45

Таблица 5: Некоторые решётки над $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$.

L	n	# граней	L	n	# граней
$[-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus [1]$	2	4	$[-1-\sqrt{2}] \oplus [2+\sqrt{2}] \oplus [1]$	2	4
$[-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	3	6	$[-1-\sqrt{2}] \oplus [2+\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	3	6
$[-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	4	8	$[-1-\sqrt{2}] \oplus [2+\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	4	8
$[-\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	5	27	$[-1-\sqrt{2}] \oplus [2+\sqrt{2}] \oplus [1] \oplus \ldots \oplus [1]$	5	27

Пусть L — гиперболическая решётка над кольцом целых A. Обозначим через $S(L)$ подгруппу группы $\mathcal{O}'(L)$, порождённую устойчивыми отражениями.

***Определение* 7.** *Гиперболическая решётка L называется устойчиво рефлективной, если индекс $[\mathcal{O}'(L) : S(L)]$ конечен.*

***Замечание* 2.** *В статьях [8], [44] и [10] устойчиво рефлективные решетки над $\mathbb{Z}$ называются (1,2)-рефлективными, поскольку для $A = \mathbb{Z}$ только числа 1 и 2 являются устойчивыми.*

***Определение* 8.** *Гиперболическая $\mathbb{Z}$-решётка L называется 2-рефлективной, если группа $\mathcal{O}'(L)$ с точностью до конечного индекса порождена 2-отражениями.*

***Замечание* 3.** *Все 2-рефлективные гиперболические $\mathbb{Z}$-решетки уже классифицированы: для ранга $\neq 4$ это было сделано В. В. Никулиным в 1979, 1981 и 1984 годах, см. [30, 32, 34], а для ранга 4 это было сделано Э. Б. Винбергом в 1981–2007 годах (см. [22]). Предположительно, устойчиво рефлективные решетки должны образовывать более широкий класс рефлективных решеток.*

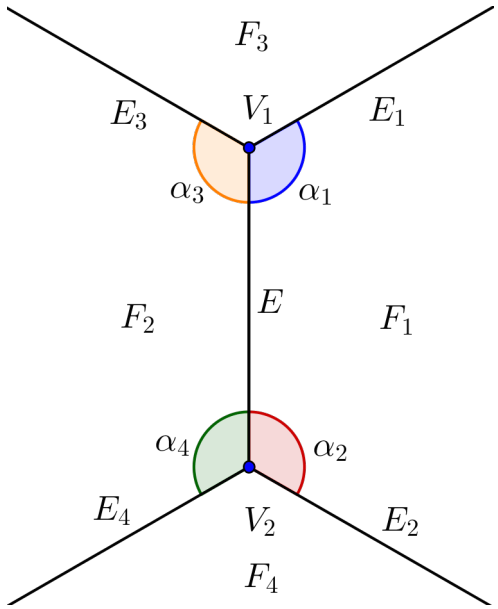
Основной задачей в данной главе является классификация устойчиво рефлективных анизотропных гиперболических $\mathbb{Z}$-решёток ранга 4. Можно надеяться, что применённый в этой работе *метод наиболее удалённого ребра* (являющийся модификацией *метода узких частей многогранников*, применявшегося В.В. Никулиным) применим для классификации вообще всех рефлективных анизотропных гиперболических $\mathbb{Z}$-решёток ранга 4.

Пусть P — остроугольный компактный многогранник в $\mathbb{H}^3$ и пусть E — некоторое его ребро. Обозначим через F_1 и F_2 грани многогранника P, содержащие ребро E, а через u_3 и u_4 — единичные внешние нормали к граням F_3 и F_4, содержащим вершины ребра E, но не само ребро.

***Определение* 9.** *Грани F_3 и F_4 будем называть обрамляющими гранями ребра E, а число $|(u_3, u_4)|$ — его шириной.*

Поставим в соответствие ребру E набор $\bar{\alpha} = (\alpha_{12}, \alpha_{13}, \alpha_{23}, \alpha_{14}, \alpha_{24})$, где α_{ij} — угол между гранями F_i и F_j.

Рис. 1. *Наиболее удалённое ребро*



***Теорема* 4.** *Фундаментальный многогранник всякой $\mathbb{Q}$-арифметической кокомпактной группы отражений в $\mathbb{H}^3$ имеет ребро ширины меньше, чем* 4,14.

На самом деле получен более сильный результат. А именно, доказано, что существует ребро ширины $t_{\bar{\alpha}}$, где $t_{\bar{\alpha}} \leq 4{,}14$ — число, зависящее от набора $\bar{\alpha}$ двугранных углов вокруг этого ребра.

Для получения этого результата мы использовали следующий прием. Пусть P — фундаментальный многогранник $\mathbb{Q}$-арифметической кокомпактной группы отражений в $\mathbb{H}^3$. Следуя Никулину, рассмотрим точку O внутри многогранника P. Пусть E — *наиболее удалённое*[2] *от неё ребро*. Обозначим вершины ребра E через V_1 и V_2, а двугранные углы между гранями F_i и F_j обозначим через α_{ij}.

Пусть E_1 и E_3 — ребра многогранника P, выходящие из вершины V_1, а ребра E_2 и E_4 — из V_2, причем ребра E_1 и E_2 лежат в грани F_1. Длину ребра E обозначим через a, а плоские углы между ребрами E_j и E — через α_j (см. рис. 1).

Следующий результат верен для произвольного компактного остроугольного многогранника в $\mathbb{H}^3$.

***Теорема* 5.** *Длина наиболее удалённого ребра удовлетворяет неравенству:*

$$a < \operatorname{arsh}\left(\frac{\operatorname{th}(\ln(\operatorname{ctg}(\frac{\alpha_{12}}{4})))}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_3}{2}\right)}\right) + \operatorname{arsh}\left(\frac{\operatorname{th}(\ln(\operatorname{ctg}(\frac{\alpha_{12}}{4})))}{\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha_4}{2}\right)}\right).$$

[2] *В остроугольном многограннике расстояние от внутренней точки до грани (любой размерности) равно расстоянию до плоскости этой грани.*

Затем остается оценить с помощью линейного неравенства ширину ребра через его длину. Для этого уже используется тот факт, что изначально мы рассматривали именно фундаментальный многогранник $\mathbb{Q}$-арифметической кокомпактной группы отражений в $\mathbb{H}^3$. Как мы видим, оценки в теореме 5 зависят от набора углов при этом ребре, следовательно, и оценки на ширину ребра тоже будут от него зависеть.

Для формулировки результатов классификации устойчиво рефлективных гиперболических решёток введём некоторые обозначения:

- $[C]$ — квадратичная решётка, скалярное умножение в которой в некотором базисе задается симметричной матрицей C,
- $d(L) := \det C$ — дискриминант решётки $L = [C]$,
- $L \oplus M$ — ортогональная сумма решёток L и M,
- $[k]L$ — квадратичная решётка, полученная из L умножением всех скалярных произведений на $k \in \mathbb{Z}$.

***Теорема* 6.** *Всякая устойчиво рефлективная анизотропная гиперболическая $\mathbb{Z}$-решётка ранга* 4 *изоморфна либо одной из двух решёток* $[-7] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$ *и* $[-15] \oplus [1] \oplus [1] \oplus [1]$*, либо чётной подрешётке индекса* 2 *одной из них.*

Указанные решётки на самом деле являются даже 2-рефлективными (см. [22]).

Глава 5. Устойчиво рефлективные $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$-решетки ранга 4

***Теорема* 7.** *Фундаментальный многогранник всякой $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$-арифметической группы отражений в $\mathbb{H}^3$ имеет ребро ширины меньше, чем* 4,14.

Как и ранее, на самом деле получен более сильный результат. А именно, доказано, что существует ребро ширины $t_{\bar{\alpha}}$, где $t_{\bar{\alpha}} \leq 4{,}14$ — число, зависящее от набора $\bar{\alpha}$ двугранных углов вокруг этого ребра.

***Теорема* 8.** *Всякая максимальная устойчиво рефлективная гиперболическая решетка ранга 4 над $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ изоморфна одной из следующих семи решёток:*

№	L	# граней	$d(L)$
1	$[-1-\sqrt{2}]\oplus[1]\oplus[1]\oplus[1]$	5	$-1-\sqrt{2}$
2	$[-1-2\sqrt{2}]\oplus[1]\oplus[1]\oplus[1]$	6	$-1-2\sqrt{2}$
3	$[-5-4\sqrt{2}]\oplus[1]\oplus[1]\oplus[1]$	5	$-5-4\sqrt{2}$
4	$[-11-8\sqrt{2}]\oplus[1]\oplus[1]\oplus[1]$	17	$-11-8\sqrt{2}$
5	$[-\sqrt{2}]\oplus[1]\oplus[1]\oplus[1]$	6	$-\sqrt{2}$
6	$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 2 & \sqrt{2}-1 \\ -\sqrt{2} & \sqrt{2}-1 & 2-\sqrt{2} \end{bmatrix}\oplus[1]$	6	$-\sqrt{2}$
7	$[-7-5\sqrt{2}]\oplus[1]\oplus[1]\oplus[1]$	5	$-7-5\sqrt{2}$

Апробация работы

Результаты диссертации докладывались:

- на семинаре „Группы Ли и теория инвариантов“ под руководством Э.Б. Винберга, Д.А. Тимашёва и И.В. Аржанцева, Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, май 2016 г. и октябрь 2017 г.;
- на шестой школе-конференции „Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов“ (МГУ&НМУ, Москва, Россия), январь-февраль 2017 г.;
- на семинаре С.П. Новикова „Геометрия, топология и математическая физика“, Кафедра ВГТ, Механико-математический факультет МГУ им. М.В. Ломоносова, март 2017 г.;
- на международной конференции „Геометрия и топология“ в честь К. Бавара, Институт математики, Бордо, Франция, ноябрь 2017 г.;
- на семинаре „Гиперболическая геометрия и комбинаторные структуры“, Институт математики, Невшатель, Швейцария, ноябрь 2017 г.;
- на семинаре „Автоморфные формы и их приложения“ под руководством В.А. Гриценко, Математический факультет НИУ ВШЭ, Москва, Россия, февраль 2018 г;
- на международной конференции „Автоморфные формы и алгебраическая геометрия“, ПОМИ им. Стеклова РАН, г. Санкт-Петербург, Россия, май 2018 г.

Литература

[1] Ian Agol, Finiteness of arithmetic Kleinian reflection groups. In Proceedings of the International Congress of Mathematicians: Madrid, August 22–30, 2006: invited lectures, pages 951–960, 2006.

[2] Ian Agol, Mikhail Belolipetsky, Peter Storm, and Kevin Whyte. Finiteness of arithmetic hyperbolic reflection groups. — Groups Geom. Dyn., 2008, Vol. 2(4), p. 481 — 498.

[3] D. Allcock. “Infinitely many hyperbolic Coxeter groups through dimension 19”, Geom. Topol. 10 (2006), 737–758.

[4] D. Allcock. The reflective Lorentzian lattices of rank 3. — Mem. Amer. Math. Soc. 220, no 1033., American Mathematical Society, 2012, p. 1 — 125.

[5] Е. М. Андреев. О выпуклых многогранниках в пространствах Лобачевского. — Мат. сб., 1970, 81, с. 445–478.

[6] Е. М. Андреев. О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского.— Мат. сб., 1970, 83, с. 256–260.

[7] M. Belolipetsky. Arithmetic hyperbolic reflection groups. — Bulletin (New Series) of the Amer. Math. Soc., 2016, Vol. 53 (3), p. 437 — 475.

[8] N. V. Bogachev. Reflective anisotropic hyperbolic lattices of rank 4. ArXiv: https://arxiv.org/abs/1610.06148v1

[9] N. Bogachev, A. Perepechko, *Vinberg’s algorithm*, DOI:10.5281/zenodo.1098448, https://github.com/aperep/vinberg-algorithm, 2017.

[10] Н. В. Богачев. Классификация (1,2)-рефлективных анизотропных гиперболических решёток ранга 4. — Известия РАН, Серия математическая, 2019, том 81, выпуск 1, стр. 3–24.

[11] Armand Borel and Harish-Chandra. Arithmetic subgroups of algebraic groups. Ann. of Math. (2), 75:485–535, 1962.

[12] R. Borcherds, Automorphism groups of Lorentzian lattices, J. Algebra 111 (1987), 133–153.

[13] V. O. Bugaenko. Groups of automorphisms of unimodular hyperbolic quadratic forms over the ring $\mathbb{Z}[(\sqrt{5}+1)/2]$. Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., (5):6–12, 1984.

[14] V. O. Bugaenko. On reflective unimodular hyperbolic quadratic forms. Selecta Math. Soviet., 9(3):263–271, 1990. Selected translations.

[15] V. O. Bugaenko. Arithmetic crystallographic groups generated by reflections, and reflective hyperbolic lattices. — Advances in Soviet Mathematics, 1992, Volume 8, p. 33 — 55.

[16] Б. А. Венков. Об арифметической группе автоморфизмов неопределенной квадратичной формы. — Изв. АН СССР, 1937, том 1, выпуск 2, стр. 139–170

[17] Э. Б. Винберг. Дискретные группы, порожденные отражениями, в пространствах Лобачевского. — Матем. сб., 1967, том 72(114), номер 3, с. 471 — 488.

[18] Э. Б. Винберг. О группах единиц некоторых квадратичных форм. — Мат. сб., 1972, 87, с. 18 — 36

[19] Э. Б. Винберг. Об унимодулярных целочисленных квадратичных формах // Функц. анализ и его прил. Т. 6, вып. 2. С. 24–31

[20] E. B. Vinberg. Some arithmetical descrete groups in Lobachevskii spaces. — In: Proc. Int. Coll. on Discrete Subgroups of Lie Groups and Appl. to Moduli (Bombay, January 1973). — Oxford: University Press, 1975, p. 323 — 348.

[21] Э. Б. Винберг. Отсутствие кристаллографических групп отражений в пространствах Лобачевского большой размерности. — Труды ММО, 1984, Т. 47, с. 68 — 102.

[22] Э. Б. Винберг. Классификация 2-рефлективных гиперболических решеток ранга 4. — Труды ММО, 2007, т.68, с. 44 – 76.

[23] R. Guglielmetti. Hyperbolic isometries in (in-)finite dimensions and discrete reflection groups: theory and computations. — Switzerland, PhD Thesis, University of Fribourg, 2017.

[24] Frank Esselmann. ber die maximale Dimension von Lorentz-Gittern mit coendlicher Spiegelungsgruppe. — Journal of Number Theory, 1996, Vol. 61, p. 103 — 144.

[25] H. S. M. Coxeter. Discrete groups generated by reflections, — Ann. of Math. (2), 35:3 (1934), 588–621.

[26] D.D. Long, C. Maclachlan, and A.W. Reid. Arithmetic fuchsian groups of genus zero. Pure and Applied Mathematics Quarterly, 2(2):569–599, 2006.

[27] A. Mark. The classification of rank 3 reflective hyperbolic lattices over $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ — Mat. Proc. Camb. Phil. Soc. 12, 2016, p. 1–37.

[28] A. Mark. The classification of rank 3 reflective hyperbolic lattices over $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, Ph.D. thesis, University of Texas at Austin, 2015.

[29] G. D. Mostow and T. Tamagawa. On the compactness of arithmetically defined homogeneous spaces. Ann. of Math, 1962, Vol.76, No. 3, pp. 446–463.

[30] В. В. Никулин. О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболических форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями. — Докл. АН СССР, 1979, Т. 248, вып. 6, с. 1307–1309.

[31] В. В. Никулин, Об арифметических группах, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского, Изв. АН СССР, Сер. матем., 1980, том 44, выпуск 3, 637–669.

[32] В. В. Никулин. О факторгруппах групп автоморфизмов гиперболическом форм по подгруппам, порожденным 2-отражениями. Алгебро-геометрические приложения — Итоги науки и техники. Совр. пробл. матем. М.: ВИНИТИ, 1981, Т. 18, с. 3 — 14.

[33] В. В. Никулин. О классификации арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского. — Изв. АН СССР. Сер. матем., 1981, Т. 45, выпуск 1, с. 113 – 142

[34] В. В. Никулин. Поверхности типа $K3$ с конечной группой автоморфизмов и группой Пикара ранга 3. — Тр. МИАН. 1984. Т. 65. с. 119 — 142.

[35] В. В. Никулин. О классификации гиперболических систем корней ранга 3. — Тр. МИАН. 2000. Т. 230, с. 1 — 255.

[36] В. В. Никулин. Конечность числа арифметических групп, порожденных отражениями, в пространствах Лобачевского. — Изв. РАН. Сер. матем., 2007, Т. 71, выпуск 1, с. 55 — 60.

[37] H. Poincare . Theorie des groupes fuchsiennes.— Acta math., 1882, 1, p. 1—62. (Русский пер. в кн. А. Пуанкаре . Избранные труды, т. III. — М.: Наука, 1974, с. 9—62.)

[38] М. Н. Прохоров. Отсутствие дискретных групп отражений с некомпактным фундаментальным многогранником конечного объема в пространствах Лобачевского большой размерности.— Изв. АН СССР, Сер. мат., 1986, том 50, вып. 2, с. 320–332.

[39] Rudolf Scharlau. On the classification of arithmetic reflection groups on hyperbolic 3-space. — Preprint, Bielefeld, 1989.

[40] R. Scharlau, C. Walhorn. Integral lattices and hyperbolic reflection groups. — Asterisque. 1992, V.209, p. 279–291.

[41] Ivica Turkalj. Reflective Lorentzian Lattices of Signature $(5, 1)$. — Dissertation, 2017, Technische Universit t Dortmund.

[42] А. Г. Хованский. Гиперплоские сечения многогранников, торические многообразия и дискретные группы в пространстве Лобачевского — Функц. ан. и его прил., 1986, том 20, вып. 1, стр. 50–61.

[43] Claudia Walhorn. Arithmetische Spiegelungsgruppen auf dem 4-dimensionalen hyperbolischen Raum. — PhD thesis, Univ. Bielefeld, 1993.

Публикации автора по теме диссертации в журналах, рецензируемых Web of Science, Scopus и MathSciNet

[44] Н. В. Богачев. Рефлективные анизотропные гиперболические решетки ранга 4. — Успехи математических наук, 2017, том 72, выпуск 1, стр. 193–194.

[45] Н. В. Богачев, А. Ю. Перепечко. Алгоритм Винберга для гиперболических решёток. — Математические заметки, 2018, том 103, выпуск 5, стр. 769–774.