Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Томберг Артур Юрьевич

Геометрия твисторных пространств гиперкомплексных многообразий

Резюме диссертации на соискание ученой степени
кандидата математических наук НИУ ВШЭ

Научный руководитель:
PhD, профессор
Вербицкий Михаил Сергеевич

Москва — 2019

Описание области исследований

Гиперкомплексное многообразие есть гладкое многообразие M с тремя интегрируемыми почти комплексными структурами $I, J, K : TM \to TM$, удовлетворяющими кватернионным соотношениям

$$I^2 = J^2 = K^2 = -1, \ IJ = -JI = K.$$

Риманова метрика g на M, являющаяся одновременно эрмитовой по отношению к I, J и K, называется гиперэрмитовой. Гиперэрмитова метрика на M, чьи эрмитовы формы $\omega_I, \omega_J, \omega_K$ по отношению к структурам I, J, K замкнуты, называется гиперкэлеровой. Если к тому же M компактно, односвязно и удовлетворяет $H^{2,0}(M) = \mathbb{C}$, M называется простым гиперкэлеровым многообразием. Простейшими примерами компактных гиперкомплексных многообразий являются двумерные комплексные торы, поверхности K3 и поверхности Хопфа. Согласно результатам Ч. Бойера [3], компактные гиперкомплексные многообразия кватернионной размерности 1 исчерпываются вышеуказанными тремя примерами, причем лишь первые два из них допускают гиперкэлерову метрику. В высших размерностях имеется много гиперкомплексных многообразий: согласно работе Д. Джойса [8], любое компактное однородное пространство совместимой размерности допускает левоинвариантные гиперкомплексные структуры. С другой стороны, примеров компактных гиперкэлеровых структур известно немного: два семейства (схемы Гильберта точек на K3 и обобщенные многообразия Куммера) были найдены А. Бовиллем [2], и два дополнительных примера в кватернионных размерностях 3 и 5 были открыты К. О'Грэди [14, 13]. Большой открытой проблемой в гиперкэлеровой геометрии в данный момент является существование других компактных примеров, не сводимых тем или иным образом к вышеуказанным.

Как на гиперкомплексном, так и на гиперкэлеровом многообразии M, помимо I, J и K существует много других индуцированных комплексных структур, вместе образующих двумерную сферу:

$$S^2 = \left\{x_1 I + x_2 J + x_3 K : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\right\}.$$

Топологическое произведение $M \times S^2 \cong M \times \mathbb{CP}^1$ параметризует индуцированные комплексные структуры в точках M; мы будем называть его твисторным пространством гиперкомплексного многообразия M и обозначать через $\mathrm{Tw}(M)$. На $\mathrm{Tw}(M)$ есть структура комплексного многообразия, по отношению к которой проекция $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$ на вторую координату голоморфна. Если на M также задана гиперкэлерова метрика, она порождает естественную эрмитову метрику на $\mathrm{Tw}(M)$. Комплексная структура на $\mathrm{Tw}(M)$ тесно связана с кватернионной структурой M посредством твисторного преобразования. Это преобразование принимает много разных форм и ассоциирует с каждым объектом на M, каким-либо образом совместимым с кватернионной структурой, голоморфный объект на $\mathrm{Tw}(M)$, и наоборот. Таким образом, одним из подходов к изучению геометрии исходного многообразия M является изучение его твисторного пространства $\mathrm{Tw}(M)$. В дальнейшем мы будем обозначать через $I \in \mathbb{CP}^1$ произвольную индуцированную комплексную структуру на M.

Одной из центральных тем данной диссертации является стабильность векторных расслоений. Понятие стабильности было впервые введено Д. Мамфордом для алгебраических векторных расслоений на проективных многообразиях [12], затем обобщено на кэлеровы многообразия, и далее на общие эрмитовы многообразия. Стабильные расслоения используются для построения пространств модулей: при изучении голоморфных векторных расслоений, для получения пространств модулей с хорошей структурой, нужно ограничиться рассмотрением стабильных расслоений. Стабильные расслоения хорошо изучены в контексте алгебраической геометрии (см., например, [7]). В то время как для кэлеровых многообразий теория остается достаточно изящной, некэлеров случай представляется более сложным, и несмотря на некоторый прогресс в этой области (см. [4, 6, 5]), многое остается неизвестным. Среди разных видов некэлеровых эрмитовых метрик, одной стоит уделить внимание, так как ее присутствие на многообразии может потенциально упростить изучение пространств модулей стабильных расслоений. Эрмитова метрика на многообразии комплексной размерности n называется сбалансированной если ее эрмитова форма удовлетворяет условию $d\left(\omega^{n-1}\right) = 0$. Эрмитовы метрики были впервые введены М.-Л. Михельсон [10], и для многообразий размерности ≥ 3, они образуют класс, строго содержащий кэлеровы метрики. Будучи более общими, сбалансированные метрики наследуют от кэлеровых метрик много хороших свойств. В частности, оказывается, что теория стабильных расслоений для сбалансированных многообразий во многом аналогична кэлеровому случаю. В некотором смысле, присутствие сбалансированной метрики на комплексном многообразии является следующим лучшим вариантом после кэлеровости, по крайней мере, в том, что касается изучения пространства модулей стабильных расслоений.

Обзор результатов

В статье [9] Д. Каледина и М. Вербицкого рассматриваются векторные расслоения и связности на гиперкэлеровом многообразии M и его твисторном пространстве $\mathrm{Tw}(M) = M \times \mathbb{CP}^1$. В частности, показывается, что естественная эрмитова метрика на $\mathrm{Tw}(M)$, индуцированная гиперкэлеровой метрикой с M, сбалансирована. Так как для компактного M эта метрика на $\mathrm{Tw}(M)$ не может быть кэлеровой, ввиду того что было сказано в предыдущем абзаце, сбалансированность является лучшим вариантом, и можно осмысленно изучать стабильные расслоения и различные пространства модулей на $\mathrm{Tw}(M)$. Далее, в статье изучаются автодуальные связности на комплексных векторных расслоения над M. Таковыми являются связности, чья кривизна инвариантна по отношению к естественному действию группы $SU(2)$ на расслоении внешних форм на M; такие связности индуцируют голоморфные структуры на векторном расслоении во всех индуцированных комплексных структурах на M. В статье [9] доказывается версия твисторного преобразования, переводящая автодуальную связность на M в полупростое голоморфное векторное расслоение на твисторном пространстве $\mathrm{Tw}(M)$, и дается описание этого преобразования как включения пространств модулей. В статье также изучаются расслоения E на твисторном пространстве $\mathrm{Tw}(M)$, чьи ограничения E_I на слои $\pi^{-1}(I)$ голоморфной твисторной проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$ стабильны для всех $I \in \mathbb{CP}^1$. В [9] такие расслоения называются послойно стабильными. Показывается, что такие расслоения являются стабильными и в обычном смысле расслоений на $\mathrm{Tw}(M)$. Описывается пространство модулей послойно стабильных расслоений, а также понятие двойственности, аналогичное случаю поверхностей К3, изученному Ш. Мукаи [11]. Предметом данной диссертации является расширение двух результатов из статьи [9].

Первый результат касается метрических свойств твисторного пространства. Как было сказано выше, в статье [9] доказывается, что твисторное пространство гиперкэлерова многообразия сбалансировано. В данной диссертации мы обобщаем этот результат следующим образом.

Теорема 3.2.3. *Пусть (M, I, J, K, g_M) — компактное гиперэрмитово многообразие комплексной размерности n. Его твисторное пространство $\mathrm{Tw}(M)$ сбалансировано.*

Так как произвольное гиперкомплексное многообразие всегда допускает гиперэрмитовы метрики, из теоремы сразу следует, что твисторное пространство $\mathrm{Tw}(M)$ общего компактного гиперкомплексного многообразия M сбалансировано. Таким образом, сбалансированная метрика на $\mathrm{Tw}(M)$ (которая строится неявно) существует без каких-либо предположений о метрической структуре изначального многообразия M. Ключевым моментом доказательства теоремы является тот факт, что на эрмитовом многообразии комплексной размерности n, из любой строго положительной $(n-1, n-1)$-формы η можно извлечь «$(n-1)$-ый корень». Иными словами, всегда найдется строго положительная $(1,1)$-форма ω, такая что $\omega^{n-1} = \eta$, и более того, такая форма ω единственна. Таким образом, задача сводится к нахождению замкнутой строго положительной $(n-1, n-1)$-формы на твисторном пространстве $\mathrm{Tw}(M)$ компактного гиперкомплексного многообразия, которая строится как линейная комбинация форм, полученных из гиперэрмитовой метрики на M. Этот результат был опубликован в статье [16].

Второй результат относится к стабильности векторных расслоений на твисторном пространстве $\mathrm{Tw}(M)$ гиперкэлерова многообразия M. Как было сказано в предыдущем абзаце, в статье [9], Каледин и Вербицкий показывают, что послойно стабильное расслоение на $\mathrm{Tw}(M)$ стабильно также и в обычном смысле. На самом деле, из их доказательства следует более сильный результат. Мы будем называть голоморфное векторное расслоение E на $\mathrm{Tw}(M)$ послойно стабильным в общей точке если его ограничения E_I на все слои $\pi^{-1}(I)$ проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$, кроме, возможно, конечного числа, стабильны. Как следует из доказательства в статье Каледина и Вербицкого, послойно стабильное в общей точке расслоение E на $\mathrm{Tw}(M)$ не имеет ненулевых подпучков строго меньшего ранга; такое расслоение E называется неприводимым. Мы доказываем следующее частичное обращение к этому результату.

Теорема 4.2.1. *Пусть M — компактное простое гиперкэлерово многообразие, а E — голоморфное векторное расслоение на твисторном пространстве $\mathrm{Tw}(M)$. Если E послойно стабильно в общей точке, оно неприводимо. Обратное утверждение верно для векторных расслоений ранга 2 и 3, а также для расслоений E произвольного ранга, которые послойно простые в общей точке.*

Здесь E называется послойно простым в общей точке, если его ограничения E_I на все слои $\pi^{-1}(I)$ проекции $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$, кроме, возможно, конечного числа, удовлетворяют $\mathrm{Hom}(E_I, E_I) = \mathbb{C}$. Первым шагом к доказательству теоремы является следующий результат.

Теорема 4.1.2. *Пусть M — компактное простое гиперкэлерово многообразие с гиперкэлеровой метрикой g и твисторным пространством $\mathrm{Tw}(M)$, а E — голоморфное векторное расслоение на $\mathrm{Tw}(M)$ ранга r. Тогда множества*

$$\left(\mathbb{CP}^1\right)^{\mathrm{st}} = \left\{I \in \mathbb{CP}^1 : E_I \text{ стабильно}\right\}, \left(\mathbb{CP}^1\right)^{\mathrm{sst}} = \left\{I \in \mathbb{CP}^1 : E_I \text{ полустабильно}\right\}$$

открыты по Зарисскому в $\mathbb{CP}^1$.

Этот факт является обобщением результата А. Телемана из статьи [15], где показывается, что для голоморфного векторного расслоения E на произведении комплексных многообразий $X \times Y$, множество слоев проекции $X \times Y \to Y$, на которые E ограничивается стабильно, является открытым по Зарисскому в Y, при некоторых условиях на X и Y. Заметим, что твисторная проекция $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$ не является особым случаем этого утверждения, так как комплексная структура на $\mathrm{Tw}(M)$ не является произведением комплексных структур M и $\mathbb{CP}^1$; тем не менее, аргумент из статьи [15] можно адаптировать для доказательства теоремы 4.1.2. Что касается теоремы 4.2.1, она доказывается от противного. Взяв неприводимое расслоение E на $\mathrm{Tw}(M)$ и предположив, что оно не послойно стабильно в общей точке, из теоремы 4.1.2 следует, что для каждого $I \in \mathbb{CP}^1$ существуют дестабилизирующие подпучки $\mathcal{F}_I \subseteq E_I$, и, более того, их можно выбрать таким образом, что все они имеют одинаковый ранг s. Стратегия состоит в том, чтобы попытаться построить из них глобальный подпучок $\mathcal{F} \subseteq E$ на $\mathrm{Tw}(M)$, чтобы получить противоречие к неприводимости E. По версии вложения Плюккера для векторных расслоений, из подпучков $\mathcal{F}_I \subseteq E_I$ можно получить линейные подпучки $L_I \subseteq \Lambda^s(E_I)$, чьи образы лежат в конусе внешних мономов $C^s(E_I) \subseteq \Lambda^s(E_I)$, и более того, L_I можно выбрать таким образом, чтобы они все были ограничениями единственного линейного расслоения L на $\mathrm{Tw}(M)$. Задача сводится к нахождению сечения морфизма

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, hook] \arrow[d] & \mathbb{P}\left(\pi_*\left[\mathrm{Hom}(L, \Lambda^s E)\right]\right) \arrow[dl] \\ \mathbb{CP}^1 & \end{tikzcd}$$

где Y — замкнутое аналитическое подмножество $\mathbb{P}\left(\pi_*\left[\mathrm{Hom}(L, \Lambda^s E)\right]\right)$, состоящее из морфизмов $L_I \to \Lambda^s(E_I)$ с образом в $C^s(E_I)$. Для расслоений E ранга 2 и 3, такое сечение всегда существует, так как в этом случае $C^s(E_I) = \Lambda^s(E_I)$, но если $\operatorname{rk} E > 3$, существование сечения неочевидно. Тем не менее, в этом случае всегда существует мультисечение, то есть сечение Y над разветвленным накрытием $f : X \to \mathbb{CP}^1$, и переходя к расслоенному произведению

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\rho"'] & \mathrm{Tw}(M) \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"'] & \mathbb{CP}^1 \end{tikzcd}$$

можно построить собственный подпучок расслоения обратного образа $\varphi^*(E)$ на Z, и, после некоторых усилий, получить противоречие к неприводимости E, использую его послойную простоту в общей точке, и таким образом доказать теорему 4.2.1. В дополнение к этому, в диссертации строится явный пример стабильного векторного расслоения на $\mathrm{Tw}(M)$ для M поверхности K3, все ограничения которого на слои $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$ нестабильны; этот результат является содержанием статьи [17] автора диссертации.

Направления дальнейших исследований и применений

Результаты, полученные в этой диссертации, могут быть обобщены и использованы в дальнейших исследованиях разными способами. Во-первых, результат о сбалансированных метриках на твисторных пространствах компактных гиперкомплексных многообразий полезен тем, что он дает много новых примеров сбалансированных многообразий. Действительно, как было упомянуто в предыдущем параграфе, существует много компактных гиперкомплексных многообразий, и таким образом, Теорема 3.2.3 дает много новых примеров сбалансированных многообразий, а именно, их твисторные пространства. Сбалансированные метрики представляют из себя хорошее обобщение кэлеровых метрик, и новые примеры сбалансированных многообразий всегда представляют интерес сами по себе. Во-вторых, так как присутствие сбалансированной метрики упрощает изучение стабильных расслоений, было бы интересно узнать, обобщаются ли какие-либо из результатов Каледина и Вербицкого о стабильных расслоениях и пространствах модулей из статьи [9] на гиперкомплексный случай. По-видимому, не стоит надеяться на полное обобщение, однако, для начала можно рассмотреть некоторые особые типы гиперкомплексных многообразий, такие как HKT-многообразия. Гиперэрмитова метрика на гиперкомплексном многообразии (M, I, J, K) называется HKT-метрикой если она удовлетворяет свойству $\partial_I \Omega_I = 0$, где $\Omega_I = \omega_J + \sqrt{-1}\omega_K$. Будучи обобщением гиперкэлеровых метрик, HKT-метрики наследуют от них много интересных свойств (см. [1] для обзора HKT-многообразий). Возможно, при наличии HKT-структуры на M, доказательство теоремы 3.2.3 можно изменить так, чтобы сбалансированная метрика на $\mathrm{Tw}(M)$ была построена явно, что упростит изучение пространств модулей стабильных расслоений на $\mathrm{Tw}(M)$ и M.

Что касается теоремы 4.2.1, по мнению автора, верно ее полное обращение, без каких-либо условий на расслоение E и его ранг. Иными словами, неприводимое расслоение E на твисторном пространстве $\mathrm{Tw}(M)$ простого гиперкэлерова многообразия M должно быть послойно стабильным в общей точке. Ввиду теоремы 4.2.1, которая устанавливает это утверждение для послойно простого в общей точке расслоения E, возможным подходом к доказательству полного утверждения является доказательство того, что любое неприводимое E послойно простое в общей точке. Можно вновь прибегнуть к доказательству от противного и предположить существование морфизма $F : E \to E(D)$ (где D — дивизор на $\mathrm{Tw}(M)$), который не является умножением на мероморфную функцию с $\mathbb{CP}^1$. У этого морфизма нет собственных значений над $\mathbb{CP}^1$, но можно вновь взять разветвленное накрытие $f : X \to \mathbb{CP}^1$ и перейти к расслоенному произведению $f : X \to \mathbb{CP}^1$ и $\pi : \mathrm{Tw}(M) \to \mathbb{CP}^1$, над которым у обратного образа F есть собственные значения, а значит, у обратного образа E есть подпучки, из чего можно попытаться получить противоречие к неприводимости E. Если полное обращение теоремы 4.2.1 будет доказано, это даст очень интересную характеризацию неприводимых расслоений на $\mathrm{Tw}(M)$ как послойно стабильных в общей точке расслоений. Неприводимые расслоения встречаются только на неалгебраических многообразиях и представляют сложность в изучении, поэтому такая характеризация была бы хорошим дополнением к результатам о двойственности из [9].

Список литературы

[1] M. L. Barberis. "A survey on hyper-Kähler with torsion geometry". *Rev. Unión Mat. Argent.* 49.2 (2008), 121–131.

[2] A. Beauville. "Variétés Kählériennes dont la première classe de Chern est nulle". *J. Diff. Geom.* 18 (1983), 755–782.

[3] C. P. Boyer. "A note on hyper-Hermitian four-manifolds". *Proc. Amer. Math. Soc.* 102 (1988), 157–164.

[4] P. J. Braam and J. Hurtubise. "Instantons on Hopf surfaces and monopoles on solid tori". *J. Reine Angew. Math.* 400 (1989), 146–172.

[5] V. Brînzănescu, A. D. Halanay, and G. Trautmann. "Vector bundles on non-Kähler elliptic principal bundles". *Ann. Inst. Fourier Grenoble* 63.3 (2013), 1033–1054.

[6] V. Brînzănescu and R. Moraru. "Stable bundles on non-Kähler elliptic surfaces". *Comm. Math. Phys.* 254.3 (2005), 565–580.

[7] D. Huybrechts and M. Lehn. *The geometry of moduli spaces of sheaves.* 2nd ed. Cambridge University Press, 2010.

[8] D. Joyce. "Compact hypercomplex and quaternionic manifolds". *J. Diff. Geom.* 35.3 (1992), 743–761.

[9] D. Kaledin and M. Verbitsky. "Non-Hermitian Yang-Mills connections". *Selecta Math. New Series* 4 (1998), 279–320.

[10] M. L. Michelsohn. "On the existence of special metrics in complex geometry". *Acta Math.* 149.3-4 (1982), 261–295.

[11] S. Mukai. "Symplectic structure of the moduli space of sheaves on abelian or K3 surfaces". *Invent. Math.* 77 (1984), 101–116.

[12] D. Mumford. "Projective invariants of projective structures and applications". *Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm, 1962).* Djursholm: Inst. Mittag-Leffler, 1963, 526–530.

[13] K. O'Grady. "A new six-dimensional irreducible symplectic variety". *J. Alg. Geom.* 12 (2003), 435–505.

[14] K. O'Grady. "Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3". *J. Reine Angew. Math.* 512 (1999), 49–117.

[15] A. Teleman. “Families of holomorphic bundles”. *Commun. Contemp. Math.* 10.4 (2008), 523–551.

Список публикаций соискателя, содержащих результаты, выносимые на защиту

[16] A. Tomberg. “Twistor spaces of hypercomplex manifolds are balanced”. *Adv. Math.* 280 (2015), 282–300.

[17] А. Ю. Томберг. «Пример стабильного, но послойно нестабильного расслоения на твисторном пространстве гиперкэлерова многообразия». *Матем. Заметки* 105.6 (2019), 949—954.