Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Стукен Екатерина Сергеевна

Объемы арифметических локально-симметрических пространств и их применения в теории автоморфных форм

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук
НИУ ВШЭ

Научный руководитель:
профессор, доктор физико-математических наук
Осип Владимирович Шварцман

Москва – 2019

1 Введение

Рассмотрим X – комплексно-аналитическое многообразие, и Γ – дискретную группу, действующую на пространстве X. Пусть при этом факторпространство X/Γ имеет конечный объем. Действие группы Γ на пространстве X индуцирует действие группы Γ на пространстве голоморфных на X функций.

Определение 1. *Голоморфная на X функция f называется автоморфной формой, если для любых $x \in X$, $\gamma \in \Gamma$ $f(\gamma x) = j^{-r}(\gamma, x) f(x)$. Через $j^{-1}(\gamma, x)$ обозначен фактор автоморфности, то есть ненулевая голоморфная функция, число r называется весом автоморфной формы.*

Автоморфные формы образуют градуированную алгебру, которую мы обозначим через $A(\Gamma)$. Особенный интерес вызывает изучение структуры алгебры $A(\Gamma)$, в частности, важно установить, для каких групп Γ алгебра $A(\Gamma)$ является свободной.

Работы в этом направлении начались в конце 19 века. Первый пример свободной алгебры принадлежит Клейну и Фрикке [7]. Они доказали, что алгебра автоморфных форм для группы $\Gamma = PSL_2(\mathbb{Z})$ является алгеброй многочленов от двух образующих весов 4 и 6. В этом случае пространство X есть верхняя полуплоскость, то есть область Картана типа IV размерности 1.

Следующие примеры свободных алгебр автоморфных форм появились в 1960-х годах. Пространством X в данных примерах является произведение двух верхних полуплоскостей, то есть область Картана типа IV размерности 2. Группа Γ есть расширенная модулярная группа Гильберта $P\tilde{S}L_2(\mathcal{O})$, где $\mathcal{O}$ – кольцо целых вещественного квадратичного поля $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, а $P\tilde{S}L_2(\mathcal{O})$ – группа $PSL_2(\mathcal{O})$, расширенная автоморфизмом, меняющим местами верхние полуплоскости. Гундлах в 1963 и 1965 годах соответственно доказал свободность алгебры автоморфных форм $A(\Gamma)$ для полей $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$. Более точно, в этих статьях доказывается, что при $d = 5$ $A(\Gamma) \cong \mathbb{C}[G_2, G_6, G_{10}]$, а при $d = 2$ $A(\Gamma) \cong \mathbb{C}[G_2, G_4, G_6]$, где G_i – образующая веса i. Кроме того, во многих работах предпринимались попытки явно описать алгебры $A(\Gamma)$ для маленьких дискриминантов d и явно выписать образующие и соотношения. Например, в работе [8] описаны кольца модулярных форм Гильберта для поля $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$, в работе [10] для поля $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$, в работах [14] и [15] для полей $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{65})$ соответственно, в [17] для полей $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$.

В 1962 году Игуза в работе [16] доказал, что для модулярной группы Зигеля рода 2 $\Gamma = PSp_4(\mathbb{Z})$ алгебра $A(\Gamma)$ является свободной алгеброй с образующими весов 4, 6, 10 и 12. В этом случае группа Γ естественно действует на верхней полуплоскости Зигеля, представляющей собой область Картана типа IV размерности 3.

Долгое время примеры свободных алгебр автоморфных форм для размерностей $n > 3$ не были известны. В 2010 году Э. Б. Винберг в статье [18] привел серию примеров свободных алгебр $A(\Gamma)$ в областях Картана размерностей 4, 5, 6, 7. В 2018 году в статье [3] Э. Б. Винберг продолжил эту серию примеров, построив примеры свободных алгебр в размерностях 8, 9 и 10. Более точно, он доказал, что алгебры автоморфных форм $A(\Gamma)$ для группы $\Gamma = O^+_{2,n}(\mathbb{Z})$, естественно действующей в областях Картана IV размерности n, свободны при $4 \leq n \leq 10$, и выписал веса образующих в каждом из этих случаев:

n	Веса
4	4, 6, 8, 10, 12
5	4, 6, 8, 10, 12, 18
6	4, 6, 8, 10, 12, 16, 18
7	4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18
8	4, 6, 8, 10, 12, 12, 14, 16, 18
9	4, 6, 8, 10, 10, 12, 12, 14, 16, 18
10	4, 6, 8, 8, 10, 10, 12, 12, 14, 16, 18

В работе [5] показано, что для того, чтобы алгебра $A(\Gamma)$ была свободна, необходимо, чтобы группа Γ порождалась комплексными отражениями. Это возможно только в случае, если пространство X есть комплексный шар или область Картана типа IV.

Нас будет интересовать область Картана типа IV в размерности $n = 2$. Отличительная черта дискретных групп отражений в области Картана типа IV – их арифметичность. Это позволяет использовать современную технику исследования квадратичных решеток над полями алгебраических чисел. Нам потребуется вычислять кообъемы некоторых дискретных групп. Примеры вычисления таких кообъемов можно найти, например, в статьях [6], [11].

2 Основные определения

Пусть A – кольцо главных идеалов. Квадратичным A-модулем называется свободный A-модуль конечного ранга, снабженный невырожденной симметрической билинейной формой $(\cdot,\cdot)$ со значениями в кольце A. Модуль A^n, в котором скалярное произведение задается матрицей Грама S, обозначается через (S). Квадратичный модуль над полем называется квадратичным (векторным) пространством, а над кольцом $\mathbb{Z}$ – решеткой.

Пусть V – квадратичное пространство над полем рациональных чисел. Тогда $V_{\mathbb{R}} = V \underset{\mathbb{Q}}{\otimes} \mathbb{R}$ и $V_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{R}} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \mathbb{C}$ – квадратичные пространства над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ соответственно. Пусть сигнатура квадратичного пространства $V_{\mathbb{R}}$ равна $(2, n)$, $n \geq 2$.

В проективном пространстве $PV_{\mathbb{C}}$ рассмотрим область

$$\tilde{D}_n = \{[z] \in PV_{\mathbb{C}} : (z, z) = 0, (z, \bar{z}) > 0\},$$

состоящую из двух связных компонент. Любую из них обозначим через D_n. Ее комплексная размерность равна n. Область D_n является эрмитовым симметрическим пространством типа IV (по классификации Э. Картана). Область D_1 биголоморфна верхней полуплоскости H_+, D_2 – произведению двух таких полуплоскостей.

Через $G = O(V_{\mathbb{R}})$ обозначим ортогональную группу квадратичного пространства $V_{\mathbb{R}}$, и пусть G^+ – ее подгруппа индекса 2, сохраняющая область D_n. Группа G^+ действует в области D_n неэффективно с ядром неэффективности ± 1. Известно ([4]), что группа G^+ является полной группой голоморфных автоморфизмов области D_n, действующей в D_n транзитивно.

2.1 Арифметическая группа $\Gamma \subset G^+$, дискретно действующая в D_n

Выберем в пространстве V решетку L, $\mathrm{rk}_{\mathbb{Z}}(L) = \dim_{\mathbb{Q}} V$. Обозначим через $O(L)$ ортогональную группу решетки $L \subset V$, и пусть $\Gamma = O(L) \cap G^+$. Такая группа Γ называется арифметической группой. Группа Γ дискретно действует в области D_n (возможно неэффективно). В группе Γ всегда существует нормальная подгруппа конечного индекса Γ_1, действующая эффективно. Известно, что объем факторпространства D_n/Γ_1 (относительно любой G^+-инвариантной формы объема на D_n) конечен. Этот объем называется кообъемом группы Γ_1 (относительно выбранной формы объема на D_n) и обозначается через $\mathrm{Covol}(\Gamma_1)$. Кообъемом группы Γ называется число $\frac{\mathrm{Covol}(\Gamma_1)}{[\Gamma:\Gamma_1]}$ (мы будем обозначать его через $\mathrm{Covol}(\Gamma)$).

2.2 Алгебра Γ-автоморфных форм $A(\Gamma)$

Обозначим через $D_n^\bullet$ конус над областью D_n в пространстве $V_{\mathbb{C}}$. В дальнейшем предполагается, что в случае $n = 2$ индекс Витта пространства V меньше 2.

Определение 2. *Автоморфной формой веса k относительно группы Γ с характером $\chi : \Gamma \to \mathbb{C}^*$ называется голоморфная на $D_n^\bullet$ функция f, удовлетворяющая условиям:*
1) $f(tz) = t^{-k} f(z)$, $t \in \mathbb{C}^*$
2) $f(g(z)) = \chi(g) f(z)$, $g \in \Gamma$.

Замечание 2.1. *Выбор подходящего ненулевого сечения тавтологического расслоения над областью D_n позволяет установить биективное соответствие между однородными Γ-инвариантными голоморфными функциями в конусе $D_n^\bullet$ и голоморфными на D_n функциями f, такими, что $f(g(z)) = a(g,z)\chi(g)f(z)$, где $g \in \Gamma$, $a(g,z)$ – фактор автоморфности для Γ.*

Для арифметической группы Γ известно, что Γ-автоморфные формы всех неотрицательных весов с тривиальным характером образуют конечно-порожденную градуированную алгебру, которую мы обозначим через $A(\Gamma)$.

Всюду в дальнейшем (если это специально не оговаривается) мы используем введенные выше обозначения.

3 Результаты

Предположим, что $\dim_{\mathbb{Q}} V = 4$ (то есть $n = 2$), пространство V изотропно, но в нем отсутствуют двумерные изотропные подпространства, то есть индекс Витта пространства V равен 1.

Выберем натуральное число $d > 1$, свободное от квадратов, и в качестве L рассмотрим решетку $L_d = U \oplus B_d$, где

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B_d = \begin{cases} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & \frac{1-d}{2} \end{pmatrix}, \textit{при } d \equiv 1 \pmod 4; \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2d \end{pmatrix}, \textit{при } d \equiv 2, 3 \pmod 4). \end{cases}$$

Группа Γ, построенная по решетке L_d, будет обозначаться Γ_d. Выбор этой серии арифметических подгрупп не случаен. Напомним, что с вещественным квадратичным расширением $\mathcal{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ с кольцом целых $\mathcal{O}_d$ связана расширенная модулярная группа Гильберта $P\tilde{S}L(2, \mathcal{O}_d) = Gal(\mathcal{K}/\mathbb{Q}) \ltimes PSL(2, \mathcal{O}_d)$, естественно действующая в D_2 как дискретная арифметическая группа. Группа $P\tilde{S}L(2, \mathcal{O}_d)$ вкладывается в группу Γ_d ([1]). Известно, что группа Γ_d является максимальной дискретной подгруппой в группе G^+, содержащей группу $P\tilde{S}L(2, \mathcal{O}_d)$ ([9]).

Основным результатом работы является следующая теорема ([19], [20]).

Теорема 1. *Пусть $\Gamma' \subset \Gamma_d$ – подгруппа конечного индекса в группе Γ_d, содержащая элемент $-\mathrm{Id}$. Если алгебра $A(\Gamma')$ свободна, то $d \in \{2, 3, 5, 6, 13, 21\}$.*

Следствие 1. *Алгебра $A(\Gamma_d)$ свободна тогда и только тогда, когда $d = 2$, 3 или 5.*

Доказательство следствия 1. В работе [2] показано, в частности, что для того, чтобы алгебра $A(\Gamma)$ была свободна, необходимо, чтобы стабилизатор Γ_v в группе Γ любого изотропного вектора $v \in V$ порождался отражениями, зеркала которых содержат этот вектор. Но для группы Γ_d это не так, если $d \in \{6,\ 13,\ 21\}$.

Рассмотрим случаи $d = 2$ и $d = 5$. Группа $P\tilde{S}L(2, \mathcal{O}_d)$ вкладывается в группу Γ_d, но не содержит $-\mathrm{Id}$. Присоединив $-\mathrm{Id}$ к подгруппе $P\tilde{S}L(2, \mathcal{O}_d)$, мы получим всю группу Γ_d. Это следует из того, что поля $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ и $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ являются одноклассовыми и содержат фундаментальную единицу нормы -1, а потому группа $P\tilde{S}L(2, \mathcal{O}_d)$ является максимальной арифметической группой, действующей в произведении двух верхних плоскостей ([1]). Но в работах [13] и [12] доказано, что алгебра автоморфных форм четного веса для групп $P\tilde{S}L(2, \mathcal{O}_d)$ свободна при $d = 2$ и $d = 5$ соответственно.

Случай $d = 3$ доказан в работе [13]. $\square$

Список литературы

[1] Э. Б. Винберг. *Подгруппы отражений в группах Бьянки* . Вопросы теории групп и гомологической алгебры, Ярославль, 1987, 121-127

[2] Э. Б. Винберг, О. В. Шварцман. *Критерий гладкости в бесконечности арифметического фактора трубы будущего.* Функциональный анализ и его приложения 51:1, 2017, 40–59

[3] Э. Б. Винберг. *О некоторых свободных алгебрах автоморфных форм.* Функциональный анализ и его приложения 52:4, 2018, 38-61

[4] И. И. Пятецкий-Шапиро. *Геометрия классических областей и теория автоморфных функций.* Москва, Государственное издательство физико-математической литературы, 1961, 192 с.

[5] О. В. Шварцман. *Коциклы комплексных групп отражений.* Вопросы теории групп и гомологической алгебры, Ярославль, 1992, 32-40

[6] M. Belolipetsky, W. T. Gan. *The mass of unimodular lattices*, Journal of Number Theory, 114, 2, 2005, 221-237

[7] R. Fricke, F.Klein. *Vorlesungen uber die Theorie der elliptischen Modulfunctionen*, B. G. Teubner, Leipzig, 1890

[8] G. van der Geer. *Hilbert Modular Forms for the Field* $\mathbb{Q}(\sqrt{6})$. Math. Ann. 233, 1978, 163-179

[9] G. van der Geer. *Hilbert Modular Surfaces.* Springer-Verlag

[10] G. van der Geer, D. Zagier. *The Hilbert Modular group for the field* $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$, Invent. Math. 42, 1977, 93-133

[11] V. Gritsenko, K. Hulek, G. K. Sankaran. *The Hirzebruch-Mumford volume for the orthogonal group and applications.* Documenta Mathematica 12, 2007, 215-241

[12] K. B. Gundlach. *Die Bestimmung der Funktionen zur Hilbertschen Modulgruppe des Zahlkorpers* $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, Mathematische Annalen 152, 1963, 226-256

[13] K. B. Gundlach. *Die Bestimmung der Funktionen zu einigen Hilbertschen Modulgruppen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 202, 1965, 109-153

[14] C. F. Hermann. *Symmetrische Hilbertsche Modulformen und Modulfunktionen zu* $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$. Math. Ann. 256, 1981, 191-197

[15] C. F. Hermann. *Thetafunktionen und symmetrische Hilbertsche Modulformen zu* $\mathbb{Q}(\sqrt{65})$. J. Reine Angew. Math. 339, 1983, 147-162

[16] J.-i. Igusa. *On Siegel modular forms of genus two.* American Journal of Mathematics 84, 1962, 175-200.

[17] S. Mayer. *Hilbert Modular Forms for the fields* $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{13})$ *and* $\mathbb{Q}(\sqrt{17})$., Diplom-Mathematiker, Rheinisch-Westfalischen Technischen Hochschule Aachen, 2007, 167

[18] E. B. Vinberg. *Some free algebras of automorphic forms on symmetric domains of type IV*. Transformation Groups, 15:3, 2010, 701–741

Список публикаций соискателя, содержащих результаты, выносимые на защиту

[19] Е. С. Стукен. *Свободные алгебры автоморфных форм Гильберта*, УМН, 74, 1, 2019, 187-188

[20] Е. С. Стукен. *Свободные алгебры автоморфных форм Гильберта*, Функц. анализ и его прил., 53, 1, 2019, 49-66