Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Факультет математики

На правах рукописи

Ильин Алексей Игоревич

Вырождение подалгебр Бете в янгианах

Резюме диссертации на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
к.ф.-м.н., доцент
Леонид Григорьевич Рыбников

Москва-2020

Введение

Краткое содержание работы. Пусть $\mathfrak{g}$ – произвольная простая комплексная алгебра Ли, G – соответствующая присоединённая группа. Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ для простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ – это алгебра Хопфа, деформация универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{g}[t])$.

В настоящей работе определяется семейство коммутативных подалгебр Бете $B(C) \subset Y(\mathfrak{g}), C \in G$. Доказывается, что если элемент $C \in G$ – регулярный, то подалгебры являются свободными, а если элемент $C \in G$ – регулярный полупростой, то максимальными коммутативными подалгебрами янгиана.

Исследуются два способа компактифицировать пространство параметров G^{reg} подалгебр Бете – конструкция предельных подалгебр, дающая плоское семейство подалгебр и чудесная компактификация группы G, которая даёт неплоское семейство подалгебр. Описываются подалгебры, соответствующие общим точкам в каждом страте чудесной компактификации группы G.

В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ описано пространство параметров замыкания семейства подалгебр, параметризованных регулярными полупростыми элементами. Также описано устройство предельных подалгебр в терминах подалгебр Бете меньшего янгиана и алгебр сдвига аргумента универсальной обёртывающей алгебры.

В процессе доказательства также исследуются некоторые вопросы теории янгианов, недостаточно освещённые в литературе: связь различных фильтраций, вложение янгиана для подалгебры Леви в RTT-реализации, связь образующих в RTT реализации с ABC-образующими янгиана.

Историческая справка. Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ для произвольной простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ был определён В. Дринфельдом в его работе [D1], в то время как янгиан для алгебры $\mathfrak{sl}_n$ (точнее, $\mathfrak{gl}_n$) появился несколько ранее в работах Л.Д. Фаддеева и ленинградской школы, см., например, [TF]. Отметим, что исторически открытие янгианов связано с построением рациональных решений уравнения Янга-Бакстера, см. параграф 1.8.

Подалгебры Бете в янгиане $\mathfrak{sl}_n$ определены в работе [NO], см. также более ранние работы ленинградской школы, например, [KR]. В янгианах ортогональной и симплектической алгебр Ли эти подалгебры рассматривались в работе [M1]. См., также, [D2], [MO].

Постановка задачи описания предельных подалгебр восходит к работе Э. Б. Винберга [Vi].

Приложения теории янгианов. Теория янгианов имеет множество различных приложений в математике. Отметим лишь некоторые из них:

- Квантовые интегрируемые системы, см. например [L];
- Геометрическая теория представлений, в частности, колчанные многообразия, алгебры Холла, квантование срезов в аффинном грассманиане, см. [MO], [SV], [KWWY];
- Представления классических алгебр Ли, см., например, [M2].

Эта работа устроена следующим образом:

- Раздел 1 посвящен определению янгиана и не содержит результатов диссертации, кроме параграфа 1.27;
- Раздел 2 основан на работах [IR2], [I] и посвящён определению подалгебр Бете в янгиане $Y(\mathfrak{g})$, а также описанию некоторых свойств этих подалгебр;
- Разделы 3 и 4 основаны на работе [IR2] и посвящены двум естественным способам расширить пространство параметров подалгебр Бете;
- Раздел 5 основан на работе [IR] и содержит в себе описание некоторого класса предельных подалгебр в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n(\mathfrak{gl}_n)$.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, Л.Г. Рыбникову, за постановку задачи и постоянную совместную работу. Автор благодарит НИУ ВШЭ и Международную лабораторию математической физики и теории представлений за создание условий для работы над диссертацией и поддержку поездок на научные конференции и стажировку. Автор также благодарен Р. Безрукавникову и П. Этингофу за предоставленную возможность весной 2017 года пройти стажировку на факультете математики MIT.

1. Янгиан для простой алгебры Ли.

В этом разделе мы следуем работам [D1], [D3], [W], [CP], [ES].

1.1. **Обозначения.** Пусть $\mathfrak{g}$ – простая комплексная алгебра Ли, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ – картановская подалгебра, $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}$ – борелевская подалгебра, $\mathfrak{g}[t]$ – соответствующая алгебра Ли токов, то есть алгебра Ли полиномиальных отображений $\mathbb{C} \to \mathfrak{g}$.

Пусть Φ обозначает соответствующую алгебре Ли $\mathfrak{g}$ систему корней, Φ^+ – положительные корни, $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – простые корни, $\{\omega_1, \dots, \omega_n\}$ – фундаментальные веса, $(\cdot, \cdot)$ — инвариантное скалярное произведение такое, что $(\alpha, \alpha) = 2$ для коротких простых корней, $\mathfrak{g}_\alpha$ – соответствующие корневые подпространства алгебры Ли $\mathfrak{g}$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, x_\alpha^- \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ такие, что $(x_\alpha, x_\alpha^-) = 1$, $t_{\omega_i} \in \mathfrak{h}$ – элемент, соответствующий ω_i при помощи инвариантного скалярного произведения. Аналогично h_i — это элемент соответствующий α_i. Положим $d_i = \frac{(\alpha_i, \alpha_i)}{2}$. Наконец, пусть $e^\alpha \in \mathbb{C}[T]$ – мономиальная функция, заданная корнем α.

1.2. **Определение янгиана.** Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ – это исторически один из первых примеров *квантовых групп*, то есть некоммутативных и некокоммутативных алгебр Хопфа, см. [D2]. Точнее, янгиан – это единственная однородная деформация универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{g}[t])$ в классе алгебр Хопфа. Перейдем к точным формулировкам.

Пусть V – векторное пространство над $\mathbb{C}$. Положим $V[[h]] = \{\sum_{n \geq 0} v_n h^n\}$. Ясно, что $V[[h]]$ естественным образом является $\mathbb{C}[[h]]$-модулем.

Определение 1.3. *Модуль M над $\mathbb{C}[[h]]$ называется топологически свободным, если $M \simeq V[[h]]$ для некоторого векторного пространства V.*

Определение 1.4. *Пусть A – алгебра Хопфа над полем комплексных чисел. Деформацией A в классе алгебр Хопфа называется алгебра Хопфа A_0 над кольцом формальных степенных рядов $\mathbb{C}[[h]]$, такая что*
1) A_0 – топологически свободный $\mathbb{C}[[h]]$-модуль;
2) $A_0/hA_0 \simeq A$ как алгебра Хопфа.

Пусть (A, Δ) – деформация алгебры Хопфа $U(\mathfrak{g}_1)$, где $\mathfrak{g}_1$ – произвольная алгебра Ли.

Предложение 1.5. *Алгебра Ли g_1 обладает естественной структурой биалгебры Ли*

$$\delta(x) = \frac{\Delta(\tilde{x}) - \Delta^{op}(\tilde{x})}{h} \pmod{h},$$

где $\tilde{x}$ – произвольное поднятие x в A.

Пусть теперь $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{g}[t]$. Известно, что на алгебре Ли $\mathfrak{g}[t]$ имеется естественная структура биалгебры Ли, которую в дальнейшем будем обозначать δ. А именно, пусть $x \in \mathfrak{g}[t]$. Тогда

$$\delta(x)(u, v) = \left(\mathrm{ad}_{x(u)} \otimes 1 + 1 \otimes \mathrm{ad}_{x(v)}\right) \left(\frac{\Omega}{u - v}\right).$$

Здесь Ω – элемент Казимира $U(\mathfrak{g})^{\otimes 2}$, т.е. $\Omega = \sum_\lambda x_\lambda \otimes x_\lambda$, где $\{x_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ – произвольный ортонормированный базис $\mathfrak{g}$.

Будем называть деформацию универсальной обёртывающей алгебры $U(\mathfrak{g}[t])$ деформацией биалгебры Ли $(\mathfrak{g}[t], \delta)$, если индуцированная структура биалгебры Ли на $\mathfrak{g}[t]$ совпадает с δ.

Заметим, что $\mathfrak{g}[t]$ – градуирована степенями t и δ является однородным отображением степени -1.

Определение 1.6. *Деформация $U_h(\mathfrak{g}[t])$ биалгебры Ли $(\mathfrak{g}[t], \delta)$ называется однородной, если она*
1) Градуирована над кольцом $\mathbb{C}[[h]](\deg h = 1)$;
2) $U_h(\mathfrak{g}[t])/hU_h(\mathfrak{g}[t]) \simeq U(\mathfrak{g}[t])$ как градуированная алгебра.

Теперь мы можем сформулировать утверждение об единственности.

Теорема 1.7. *Существует единственная однородная деформация $U_h(\mathfrak{g}[t])$ биалгебры Ли $(\mathfrak{g}[t], \delta)$. Как ассоциативная алгебра с единицей эта алгебра топологически порождена $\{x, J(x) \,|\, x \in \mathfrak{g}\}$ со следующими соотношениями*

$$xy - yx = [x, y], \qquad J([x, y]) = [J(x), y],$$

$$J(cx + dy) = cJ(x) + dJ(y),$$

$$[J(x), [J(y), z]] - [x, [J(y), J(z)]] = h^2 \sum_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} ([x, x_\lambda], [[y, x_\mu], [z, x_\nu]])\{x_\lambda, x_\mu, x_\nu\},$$

$$[[J(x), J(y)], [z, J(w)]] + [[J(z), J(w)], [x, J(y)]] =$$
$$= h^2 \sum_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda} \left(([x, x_\lambda], [[y, x_\mu], [[z, w], x_\nu]]) + ([z, x_\lambda], [[w, x_\mu], [[x, y], x_\nu]])\right)\{x_\lambda, x_\mu, J(x_\nu)\}$$

для всех $x, y, z, w \in \mathfrak{g}$ и $c, d \in \mathbb{C}$, где $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ некоторый ортонормированный базис $\mathfrak{g}$, $\{x_1, x_2, x_3\} = \frac{1}{24}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_3} x_{\pi(1)}x_{\pi(2)}x_{\pi(3)}$ для всех $x_1, x_2, x_3 \in U_h(\mathfrak{g}[t])$.

Пусть $\Omega = \sum_\lambda x_\lambda \otimes x_\lambda \in U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g}), \omega = \sum_\lambda x_\lambda^2 \in U(\mathfrak{g})$ – элементы Казимира, $c_\mathfrak{g}$ – значение элемента Казимира ω на присоединённом представлении.

Структура алгебры Хопфа на $U_h(\mathfrak{g}[t])$ задаётся следующими формулами

$$\Delta_h(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x,$$

$$\Delta_h(J(x)) = J(x) \otimes 1 + 1 \otimes J(x) + \frac{1}{2}h[x \otimes 1, \Omega],$$

$$S_h(x) = -x, S_h(J(x)) = -J(x) + \frac{1}{4}c_\mathfrak{g}x,$$

$$\varepsilon_h(x) = \varepsilon_h(J(x)) = 0.$$

Градуировка на $U_h(\mathfrak{g}[t])$:

$$\deg(x) = 0,\ \deg(J(x)) = 1.$$

Заметим, что определяющие соотношения и отображения $\Delta_h, S_h, \varepsilon_h$ не содержат степенных рядов, поэтому мы можем положить h равным любому комплексному числу. Если $h = 0$, то $U_0(\mathfrak{g}[t]) \simeq U(\mathfrak{g}[t])$. Если $h \neq 0$, то очевидно, что для любых $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ имеет место изоморфизм $U_{c_1}(\mathfrak{g}[t]) \simeq U_{c_2}(\mathfrak{g}[t])$. Положим $h = 1$ и обозначим через $Y(\mathfrak{g})$ алгебру $U_1(\mathfrak{g}[t])$.

1.8. **J-реализация и универсальная R-матрица.** Алгебра $Y(\mathfrak{g})$ – это J-реализация янгиана. Выбирая произвольный базис алгебры Ли $\mathfrak{g}$ мы видим, что янгиан $Y(\mathfrak{g})$ – конечнопорождённая алгебра.

Для любого $c \in \mathbb{C}$ определим автоморфизм τ_c алгебры $Y(\mathfrak{g})$ следующим образом:

$$x \mapsto x, J(x) \mapsto J(x) + cx \quad \forall x \in \mathfrak{g}.$$

Для любых $a, b \in \mathbb{C}$ положим $\tau_{a,b} := \tau_a \otimes \tau_b$.

Одной из ключевых в теории янгианов и для наших целей является следующая

Теорема 1.9. *Существует единственный ряд*

$$\hat{R}(u) = Id + \sum_{k \geqslant 1} R^{(k)} u^{-k} \in (Y(\mathfrak{g}) \otimes Y(\mathfrak{g}))[[u^{-1}]],$$

удовлетворяющий следующим свойствам
1) $(\mathrm{id} \otimes \Delta)\hat{R}(u) = \hat{R}_{12}(u)\hat{R}_{13}(u)$*;*
2) $\tau_{0,u}\Delta^{op}(x) = \hat{R}(u)^{-1}(\tau_{0,u}\Delta(x))\hat{R}(u)$ *для любого* $x \in Y(\mathfrak{g})$*, где* $\Delta^{op} = \Delta \circ P$*,* $P(a \otimes b) = b \otimes a$ *для всех* $a, b \in Y(\mathfrak{g})$*.*

Этот ряд называется универсальной R-матрицей и удовлетворяет квантовому уравнению Янга-Бакстера

$$\hat{R}_{12}(u-v)\hat{R}_{13}(u)\hat{R}_{23}(v) = \hat{R}_{23}(v)\hat{R}_{13}(u)\hat{R}_{12}(u-v),$$

а также

$$\hat{R}_{12}(u)\hat{R}_{21}(-u) = 1, \quad \tau_{a,b}\hat{R}(u) = \hat{R}(u+b-a),$$

$$\hat{R}(u) = 1 + \Omega u^{-1} + \sum_{\lambda} \left(J(x_\lambda) \otimes x_\lambda - x_\lambda \otimes J(x_\lambda)\right) u^{-2} + \frac{1}{2}\Omega^2 u^{-2} + O(u^{-3}).$$

Замечание. *Пусть (ρ, V) – некоторое представления янгиана. Заметим, что вычисление универсальной R-матрицы в любом представлении янгиана даёт решение уравнения Янга-Бакстера с коэффициентами в* $\mathrm{End}\,(V) \otimes \mathrm{End}\,(V)[[h^{-1}]]$*. Известно, что с точностью до умножения на элемент кольца* $\mathbb{C}[[u]]$ *ряд* $(\rho \otimes \rho)\hat{R}(u)$ *– рациональная функция, см.* [D1]*. Описание того, какие рациональные решения уравнения Янга-Бакстера получаются таким образом, см.* [D1] *или* [CP]*.*

1.10. **Новая или токовая реализация янгиана.** J-реализация янгиана позволяет задать янгиан конечным числом образующих и определить коумножение, но плохо подходит для изучения представлений. В связи с этим В. Дринфельд в своей работе [D3] вводит новую или токовую реализацию янгиана.

Определение 1.11. *Янгиан $Y_{new}(\mathfrak{g})$ – это алгебра Хопфа с единицей над полем $\mathbb{C}$ порождённая элементами $\{e_i^{(r)}, f_i^{(r)}, h_i^{(r)} \,|\, i = 1, \ldots, n; r \geqslant 1\}$ и следующими определяющими соотношениями:*

$$[h_i^{(s)}, h_j^{(s)}] = 0,$$

$$[e_i^{(r)}, f_j^{(s)}] = \delta_{ij} h_i^{(r+s-1)},$$

$$[h_i^{(1)}, e_j^{(s)}] = (\alpha_i, \alpha_j) e_j^{(s)},$$

$$[h_i^{(r+1)}, e_j^{(s)}] - [h_i^{(r)}, e_j^{(s+1)}] = \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2}(h_i^{(r)} e_j^{(s)} + e_j^{(s)} h_i^{(r)}),$$

$$[h_i^{(1)}, f_j^{(s)}] = -(\alpha_i, \alpha_j) f_j^{(s)},$$

$$[h_i^{(r+1)}, f_j^{(s)}] - [h_i^{(r)}, f_j^{(s+1)}] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2}(h_i^{(r)} f_j^{(s)} + f_j^{(s)} h_i^{(r)}),$$

$$[e_i^{(r+1)}, e_j^{(s)}] - [e_i^{(r)}, e_j^{(s+1)}] = \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2}(e_i^{(r)} e_j^{(s)} + e_j^{(s)} e_i^{(r)}),$$

$$[f_i^{(r+1)}, f_j^{(s)}] - [f_i^{(r)}, f_j^{(s+1)}] = -\frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{2}(f_i^{(r)} f_j^{(s)} + f_j^{(s)} f_i^{(r)}),$$

$$i \neq j, N = 1 - a_{ij} \Rightarrow \mathrm{sym}[e_i^{(r_1)}, [e_i^{(r_2)}, \cdots [e_i^{(r_N)}, e_j^{(s)}] \cdots]] = 0,$$

$$i \neq j, N = 1 - a_{ij} \Rightarrow \mathrm{sym}[f_i^{(r_1)}, [f_i^{(r_2)}, \cdots [f_i^{(r_N)}, f_j^{(s)}] \cdots]] = 0.$$

Недостатком этой реализации служит тот факт, что в этих образующих не известны явные формулы для коумножения. Тем не менее, эти образующие хорошо подходят для изучения представлений янгиана, см. 1.15.

Определение 1.12. *Пусть $H \subset Y(\mathfrak{g})$ – подалгебра, порождённая всеми $h_i^{(r)}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq r$. Следуя [D2], будем называть H картановской подалгеброй янгиана.*

Упорядочим произвольным образом простые корни и рассмотрим следующие элементы алгебры $Y_{new}(\mathfrak{g})$:

$$e_{\alpha_i}^{(r)} = e_i^{(r)},$$

$$[e_{\hat{\alpha}}^{(r)}, e_{\check{\alpha}}^{(1)}] = e_{\alpha}^{(r)},$$

$$f_{\alpha_i}^{(r)} = f_i^{(r)},$$

$$[f_{\hat{\alpha}}^{(r)}, f_{\check{\alpha}}^{(1)}] = f_{\alpha}^{(r)}.$$

Здесь $\check{\alpha}$ – это минимальный положительный корень такой, что $\hat{\alpha} = \alpha - \check{\alpha}$ снова положительный корень.

Теорема 1.13. *([KWWY, Предложение 3.2]) Упорядоченные мономы (порядок произвольный) от переменных*
$e_{\alpha}^{(r)}, h_i^{(r)}, f_{\alpha}^{(r)}$, где $\alpha \in \Phi^+,\ i \in \Delta,\ r \in \mathbb{Z}_{>0}$, образуют базис янгиана $Y_{new}(\mathfrak{g})$.

Отметим, что теорема 1.13 определяет вложение $U(\mathfrak{g}) \to Y_{new}(\mathfrak{g})$. Иными словами, элементы $e_{\alpha}^{(1)}, h_i^{(1)}, f_{\alpha}^{(1)}$, где $\alpha \in \Phi^+,\ i \in \Delta,\ r \in \mathbb{Z}_{>0}$ порождают подалгебру, изоморфную $U(\mathfrak{g})$.

Теорема 1.13 также позволяет задать фильтрацию на алгебре $Y_{new}(\mathfrak{g})$ следующей формулой

$$\deg e_{\alpha}^{(r)} = \deg f_{\alpha}^{(r)} = \deg h_i^{(r)} = r.$$

Предложение 1.14. *Подалгебра H является максимальной коммутативной подалгеброй янгиана. Ряд Пуанкаре подалгебры H имеет вид*

$$\prod_{r \geq 1} \frac{1}{(1 - t^r)^n}.$$

1.15. **Теория конечномерных представлений $Y_{new}(\mathfrak{g})$.** Следуя [CP], кратко напомним теорию конечномерных представлений янгианов.

Пусть $\underline{\lambda} = \{\lambda_{i,r} \,|\, i = 1, \ldots, n, r \geqslant 0, \lambda_{i,r} \in \mathbb{C}\}$ – это множество комплексных чисел, V – представление янгиана $Y(\mathfrak{g})$. $\underline{\lambda}$-весовое пространство – это по определению подпространство $V_{\underline{\lambda}}$ модуля V

$$V_{\underline{\lambda}} = \{v \in V \,|\, h_i^{(r)} v = \lambda_{i,r} v \text{ для всех } i, r\}.$$

Определение 1.16. *$Y(\mathfrak{g})$-модуль называется модулем старшего веса $\underline{\lambda}$, если существует вектор $w \in V_{\underline{\lambda}} \subset V$ такой, что $e_i^{(r)} \cdot w = 0$ для всех i, r и $V = Y(\mathfrak{g}) \cdot w$.*

Предложение 1.17. *Любой конечномерный неприводимый $Y(\mathfrak{g})$-модуль — это модуль старшего веса.*

Используя технику модулей Верма, несложно построить неприводимый модуль $V(\underline{\lambda})$ старшего веса $\underline{\lambda}$.

Теорема 1.18. *Неприводимый $Y(\mathfrak{g})$-модуль $V(\underline{\lambda})$ конечномерный тогда и только тогда, когда существуют многочлены $P_i(u) \in \mathbb{C}[u]$ такие, что*

$$\frac{P_i(u + d_i)}{P_i(u)} = 1 + \sum_{r=0}^{\infty} \lambda_{i,r} u^{-r-1},$$

где равенство понимается в том смысле, что разложение Лорана левой части в точке $u = \infty$ равно правой части. Многочлены $P_i(u)$ называются многочленами Дринфельда.

Определение 1.19. *Конечномерный неприводимый $Y(\mathfrak{g})$-модуль называется фундаментальным, если соответствующие многочлены Дринфельда имеют вид*

$$P_j(u) = \begin{cases} 1, & j \neq i, \\ u - a, & j = i, \end{cases}$$

для некоторых $i = 1, \ldots n$. Обозначим этот модуль через $V(\omega_i, a)$.

Замечание. *Название фундаментальный можно мотивировать следующим наблюдением: любой неприводимый конечномерный модуль есть фактор некоторого подмодуля тензорного произведения фундаментальных модулей.*

В дальнейшем, мы будем рассматривать модули $V(\omega_i, 0)$. Известно, что при ограничении на $U(\mathfrak{g})$ эти модули имеют вид

$$V(\omega_i, 0) = V_{\omega_i} \oplus \bigoplus_{\mu < \omega_i} V_\mu^{\oplus k_\mu},$$

где модуль V_μ — это неприводимый $U(\mathfrak{g})$-модуль старшего веса μ, а $\mu < \omega_i$ означает, что $\omega_i - \mu$ — это сумма положительных корней.

1.20. ***RTT*-реализация.** Третья реализация янгиана также была представлена в работе В. Дринфельда [D1]. Тем не менее доказательство того, что заданная таким образом алгебра изоморфна $Y(\mathfrak{g})$ стало доступно лишь недавно в работе C. Wendlandt [W].

Пусть V – произвольное нетривиальное конечномерное представление янгиана, т.е. не сумма одномерных, ρ – соответствующий гомоморфизм $Y(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}\,(V)$. Положим $R(u) = (\rho \otimes \rho)\hat{R}(-u) \in \mathrm{End}\,(V) \otimes \mathrm{End}\,(V)[[u^{-1}]]$.

Определение 1.21. *$Y_V(\mathfrak{g})$ – это ассоциативная алгебра с единицей над полем $\mathbb{C}$ с образующими $t_{ij}^{(r)}, 1 \leq i, j \leq \dim V; r \geq 1$ и определяющими соотношениями*

$$R(u-v)T_1(u)T_2(v) = T_2(v)T_1(u)R(u-v) \quad \text{в } \mathrm{End}\,(V)^{\otimes 2} \otimes Y_V(\mathfrak{g})[[u^{-1}, v^{-1}]],$$

$$S^2(T(u)) = T\left(u + \frac{1}{2}c_{\mathfrak{g}}\right),$$

где $T(u) = (t_{ij}(u))_{i.j=1,\ldots \dim V}, t_{ij}(u) = \delta_{ij} + \sum_{r\geq 1} t_{ij}^{(r)}$, $c_{\mathfrak{g}}$ — значение элемента Казимира алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на присоединённом представлении.

Структура алгебры Хопфа задаётся следующим образом:

$$\Delta(T(u)) = T_{[1]}(u)T_{[2]}(u),$$
$$\varepsilon(T(u)) = \mathrm{Id}\,,$$
$$S(T(u)) = T(u)^{-1}.$$

Определение 1.22. *Если в определении 1.21 опустить соотношение $S^2(T(u)) = T\left(u + \frac{1}{2}c_{\mathfrak{g}}\right)$, то полученная алгебра Хопфа называется расширенным янгианом и обозначается через $X_V(\mathfrak{g})$.*

Теорема 1.23. [W] *Расширенный янгиан $X_V(\mathfrak{g})$ изоморфен алгебре $Y_V(\mathfrak{g})\otimes\mathbb{C}[x_1^{(r)}, \ldots, x_k^{(r)}]$, где $r \in \mathbb{Z}_{>0}$, $k = \dim \mathrm{End}\,_{Y(\mathfrak{g})}V$.*

1.24. **Теоремы об изоморфизме.**

Теорема 1.25. *([D3], [GRW]) Отображение $\phi : Y_{new}(\mathfrak{g}) \to Y(\mathfrak{g})$ такое, что*

$$\begin{aligned} \phi(h_i^{(1)}) &= h_i, & \phi(h_i^{(2)}) &= J(h_i) - v_i, \\ \phi(e_i^{(1)}) &= x_{\alpha_i^+}, & \phi(e_i^{(2)}) &= J(x_{\alpha_i}^+) - w_i^+, \\ \phi(f_i^{(1)}) &= x_{\alpha_i^-}, & \phi(f_i^{(2)}) &= J(x_{\alpha_i}^-) - w_i^-. \end{aligned}$$

задаёт изоморфизм между $Y(\mathfrak{g})$ и $Y_{new}(\mathfrak{g})$. Здесь

$$v_i = \frac{1}{4}\sum_{\alpha\in\Phi^+}(\alpha, \alpha_i)\{x_\alpha^+, x_\alpha^-\} - \frac{1}{2}h_i^2,$$

$$w_i^{\pm} = \pm\frac{1}{4}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\{[x_i^{\pm}, x_\alpha^{\pm}], x_\alpha^{\mp}\} - \frac{1}{4}\{x_i^{\pm}, h_i\},$$

$$\{x_\alpha, x_{-\alpha}\} = x_\alpha x_{-\alpha} + x_{-\alpha}x_\alpha.$$

Пусть как и в параграфе 1.21 пространство V – произвольное нетривиальное конечномерное представление янгиана, т.е. не сумма одномерных, ρ – соответствующий гомоморфизм $Y(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}\,(V)$, а $R(u) = (\rho\otimes\rho)\hat{R}(u) \in \mathrm{End}\,(V)\otimes\mathrm{End}\,(V)[[u^{-1}]]$.

Теорема 1.26. *([D1], [W]) Отображение $\psi : Y_V(\mathfrak{g}) \to Y(\mathfrak{g})$ такое, что*

$$\psi : T(u) \mapsto (\rho\otimes 1)\hat{R}(-u)$$

задаёт изоморфизм между $Y_V(\mathfrak{g})$ и $Y(\mathfrak{g})$.

В дальнейшем мы будем отождествлять янгианы $Y(\mathfrak{g}), Y_{new}(\mathfrak{g}), Y_V(\mathfrak{g})$ посредством изоморфизмов теорем 1.25, 1.26.

1.27. **Янгиан для подалгебры Леви $\mathfrak{l} \subset \mathfrak{g}$.** Пусть Q — диаграмма Дынкина алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Любой поддиаграмме $I \subset Q$ сопоставим алгебру Ли $\mathfrak{l}$ порождённую картановской подалгеброй и элементами, соответствующими простым корням подмножества I. Легко видеть, что $\mathfrak{l}$ – редуктивная алгебра Ли. Обозначим через $\mathfrak{g}_I$ полупростую часть $\mathfrak{l}$, то есть $\mathfrak{g}_I = [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}]$.

Определим янгиан $Y_{new}(\mathfrak{l})$ как подалгебру $Y_{new}(\mathfrak{g})$ порожденную элементами $e_i^{(r)}, f_i^{(r)}$ для всех $i \in I, r \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $h_i^{(r)}, r \geq 1, i = 1, \ldots, n$.

Предложение 1.28. *([IR2, Предложение 3.1]) Алгебра $Y_{new}(\mathfrak{l})$ изоморфна $Y_{new}(\mathfrak{g}_I) \otimes \mathbb{C}[a_j^{(r)}]_{j \in \Delta \setminus I, r \in \mathbb{Z}_{>0}}$.*

Здесь $a_j^{(r)}$ это другие образующие картановской подалгебры H (ABC образующие, см. [GKLO]).

Заметим, что алгебра Ли $\mathfrak{l}$ является централизатором элемента $x = \sum_{j \in \Delta \setminus I} a_j^{(1)}$ и x – центральный элемент алгебры $Y_{new}(\mathfrak{l})$. Используя элемент x можно разложить V в сумму $Y_{new}(\mathfrak{l})$-подмодулей $V = V_I \oplus W$, см. [IR2, Раздел 3].

Теорема 1.29. *([IR2, Предложение 3.3]) Пусть $Y_V(\mathfrak{l})$ — подалгебра янгиана $Y_V(\mathfrak{g})$, порожденная всеми коэффициентами Фурье элементов $t_{\beta,v}(u)$, где $v \in V_I, \beta \in V_I^*$. Тогда образ алгебры $Y_V(\mathfrak{l})$ в янгиане $Y_{new}(\mathfrak{g})$ – это $Y_{new}(\mathfrak{l})$.*

Таким образом, теорема 1.29 реализует вложение $Y_{new}(\mathfrak{l}) \subset Y_{new}(\mathfrak{g})$ в RTT-реализации.

2. Подалгебры Бете.

Во введении обсуждалось, что подалгебры Бете для янгианов классических алгебр Ли рассматривались и ранее, но в полной общности (для любой простой алгебры Ли), насколько известно автору, подалгебры Бете определены в работе [IR2]. Работа [I] посвящена исследованию общих свойств подалгебр Бете в янгианах.

2.1. **Определение подалгебр Бете.** Пусть G (соотв. $\tilde{G}$) – соответствующая алгебре Ли $\mathfrak{g}$ присоединённая (соотв. односвязная) группа, т.е. группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{g}$ такая, что $Z(G) = \{e\}$, где $Z(G)$ – центр группы G (соотв. фундаментальная группа тривиальна). Определим $T \subset G$ – максимальный тор, а также множества $T^{reg} \subset T$ и $G^{reg} \subset G$ регулярных элементов, то есть таких элементов, что размерность их централизатора в группе G минимальна.

Подалгебры Бете в янгиане представляют собой семейство коммутативных подалгебр, параметризованных группой G. Подалгебры Бете в янгиане для $\mathfrak{gl}_n$ и скрученных янгианах исследовались в работе М. Назарова и Г. Ольшанского [NO].

Положим $V = \bigoplus_i V(\omega_i, 0)$ – сумма фундаментальных представлений янгиана, см. параграф 1.15. Пусть $\rho_i : Y(\mathfrak{g}) \to \operatorname{End} V(\omega_i, 0)$ – i-ое фундаментальное представление янгиана $Y(\mathfrak{g})$. Пусть

$$\pi_i : V \to V(\omega_i, 0)$$

– проекция на i-ое фундаментальное представление.

Пусть $T^i(u) = \pi_i T(u) \pi_i$ – подматрица $T(u)$, соответствующая i-му фундаментальному представлению янгиана.

Определение 2.2. *([IR2, Определение 4.2]) Пусть $C \in \tilde{G}$. Подалгебра $B(C) \subset Y_V(\mathfrak{g})$ это подалгебра, порождённая всеми коэффициентами Фурье следующих рядов с коэффициентами в $Y_V(\mathfrak{g})$*

$$\tau_i(u, C) = \operatorname{tr}_{V(\omega_i,0)} \rho_i(C) T^i(u), \quad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Замечание. *Заметим, что* $B(C)$ *зависит только от класса элемента* C *в факторе* $\tilde{G}/Z(\tilde{G})$. *Таким образом, подалгебры Бете параметризованы элементами присоединённой группы* G.

2.3. **Результаты о подалгебрах Бете.**

Предложение 2.4. *Коэффициенты рядов* $\tau_i(u, C)$ *попарно коммутируют.*

Зададим фильтрацию на алгебре $Y_V(\mathfrak{g})$ формулой

$$\deg t_{ij}^{(r)} = r.$$

Фильтрация на $Y_V(\mathfrak{g})$, заданная таким образом, совпадает с фильтрацией на $Y_{new}(\mathfrak{g})$ из параграфа 1.10, см. [IR2, Предложение 2.24]. Отсюда следует, что

Теорема 2.5. *(*[KWWY, Теорема 3.9]*) Присоединённая градуированная алгебра* $\mathrm{gr}\, Y_V(\mathfrak{g})$ *изоморфна* $\mathcal{O}(G_1[[t^{-1}]])$ *как алгебра Пуассона.*

Теорема 2.6. *(*[IR2, Теорема 4.9]*) Для любого элемента* $C \in G^{reg}$, *подалгебра* $B(C) \subset Y_V(\mathfrak{g})$ *является свободной полиномиальной алгеброй. Кроме того, ряд Пуанкаре алгебры* $B(C)$ *совпадает с рядом Пуанкаре подалгебры* H.

Теорема 2.7. *(*[I, Теорема 1]*) Для любого* $C \in T^{reg}$ *подалгебра* $B(C)$ *— максимальная коммутативная подалгебра* $Y_V(\mathfrak{g})$.

Отсюда получаем следующее описание подалгебр Бете для $C \in T^{reg}$.

Следствие. *(*[I, Следствие 2]*) Для любого* $C \in T^{reg}$ *подалгебра* $B(C)$ *янгиана* $Y(\mathfrak{g})$ *порождена*

$$\mathrm{tr}_{\,V}\, \rho(C)(\rho \otimes 1)\hat{R}(u),$$

где (ρ, V) *пробегает все конечномерные представления* $Y(\mathfrak{g})$.

По аналогии с работой [R] теорему 2.7 можно уточнить. Через $Q(C)$ обозначим квадратичную часть подалгебры $B(C)$, то есть $B(C) \cap F^2Y_V(\mathfrak{g})$, где $F^2Y_V(\mathfrak{g})$ – подпространство элементов степени не выше 2 алгебры $Y_V(\mathfrak{g})$.

Теорема 2.8. *(*[I, Теорема 3]*) Пусть* $C \in T^{reg}$. *Подалгебра* $B(C)$ *совпадает с централизатором подпространства* $Q(C)$.

Пространство $Q(C)$ может быть явно описано.

Предложение 2.9. *(*[I, Предложение 4]*) Рассмотрим элементы*

$$\sigma_i(C) = 2J(t_{\omega_i}) - \sum_{\alpha \in \Phi^+} \frac{e^{\alpha}(C) + 1}{e^{\alpha}(C) - 1}(\alpha, \alpha_i)x_\alpha x_\alpha^- \in Y(\mathfrak{g}),$$

$i = 1, \ldots, n$. *Тогда* $Q(C)$ *– линейная оболочка элементов* $\sigma_i(C)$ *и подпространства* $\mathfrak{h} \cdot \mathfrak{h} + \mathfrak{h}$.

2.10. **Основные методы.** В основе доказательства теорем предыдущего раздела лежат теоремы Пуанкаре-Биркгофа-Витта для янгианов. Определим другую фильтрацию на янгиане $Y_V(\mathfrak{g})$ формулой:

$$\deg t_{ij}^{(r)} = r - 1.$$

Теорема 2.11. *(*[W]*) Присоединённая градуированная алгебра* $\mathrm{gr}\, Y_V(\mathfrak{g})$ *изоморфна* $U(\mathfrak{g}[t])$.

Эта фильтрация используется в работе [I]. В частности,

Предложение 2.12. *(*[I, Доказательство теоремы 1]*) Пусть* $C \in T^{reg}$. *Тогда* $\mathrm{gr}\, B(C) = U(\mathfrak{h}[t])$.

Вернёмся к первой фильтрации на янгиане $Y_V(\mathfrak{g})$, которая заданна формулой

$$\deg t_{ij}^{(r)} = r.$$

Обозначим через gr' присоединённую градуированную по этой фильтрации. Пусть $G[[t^{-1}]]$ – группа $\mathbb{C}[[t^{-1}]]$-точек группы G. Определим $G_1[[t^{-1}]]$ как ядро гомоморфизма $G[[t^{-1}]] \to G$. Алгебра $\mathcal{O}(G_1[[t^{-1}]])$ – это алгебра полиномиальных функций на группе $G_1[[t^{-1}]]$.

Теорема 2.13. *([KWWY]) Присоединённая градуированная алгебра* $\mathrm{gr}'Y_V(\mathfrak{g})$ *изоморфна* $\mathcal{O}(G_1[[t^{-1}]])$.

Для доказательства теоремы 2.6 изучаются образы подалгебр $B(C), C \in G^{reg}$ в алгебре $\mathcal{O}(G_1[[t^{-1}]])$. В итоге, доказательство теоремы сводится к следующему утверждению.

Предложение 2.14. *([S]) Дифференциалы характеров фундаментальных представлений группы* $\tilde{G}$ *в регулярной точке линейно независимы.*

2.15. **Приложения и возможные направления исследований.** Подалгебры Бете интересны по следующим причинам:

- Подалгебры Бете янгиана $Y(\mathfrak{sl}_n)$ связаны с КМОЗ (квантовый метод обратной задачи) и алгебраическим анзацем Бете, см., например, [TF], [KR];
- Образ подалгебр Бете для элемента $C \in T^{reg}$ при действии янгиана на когомологиях колчанных многообразий есть подалгебра порожденная операторами квантового умножения на классы, при этом элемент C – это квантовый параметр, см. [MO];
- Ожидается, что подалгебры Бете для вещественного значения аргумента имеют простой спектр в некоторых неприводимых представлениях, см. [M]. Следуя работам [R2] и [HKRW], естественно ожидать возможность получить кристаллы Кириллова-Решетихина с помощью предельных подалгебр Бете, см. раздел 4.1.

3. Подалгебры Бете и чудесная компактификация.

Работа [IR2] посвящена определению подалгебр Бете в янгианах, а также связи подалгебр Бете с чудесной компактификацией присоединённой группы.

Есть по крайней мере два естественных способа расширить пространство параметров для подалгебр Бете. Опишем один из них – чудесную компактификацию группы.

3.1. **Чудесная компактификация присоединённой группы.** Следуя [EJ] напомним конструкцию $\overline{G}$, чудесной компактификации Де Кончини-Прочези присоединённой группы Ли G. Пусть V – представление группы $\tilde{G}$. Отсюда получаем отображение

$$G \to \mathbb{P}(\operatorname{End} V).$$

Известно (см., например, [CS]), что если $V = V_\lambda$, где V_λ – неприводимое представление с регулярным старшим весом λ, то замыкание образа G в пространстве $\mathbb{P}(\operatorname{End} V)$ не зависит от λ и является гладким проективным многообразием, которое называется чудесной компактификацией Де Кончини-Прочези $\overline{G}$.

Несложно видеть, что замыкание G в $\prod_i \mathbb{P}(\operatorname{End}(V(\omega_i, 0)))$ изоморфно $\overline{G}$, см. обсуждение в [IR2, 5.4]. Пусть $X = (X_1, \ldots, X_n) \in \overline{G} \subset \prod_i \mathbb{P}(\operatorname{End}(V(\omega_i, 0)))$.

Определение 3.2. *Подалгебра Бете* $B(X)$ *порождена коэффициентами Фурье рядов*

$$\tau_i(u, X) = \operatorname{tr}_{V(\omega_i,0)} \hat{X}_i T^i(u), \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

где $\hat{X}_i$ *– произвольный представитель* X_i *в пространстве* $\operatorname{End}(V(\omega_i, 0))$.

Легко видеть, что все подалгебры вида $B(X), X \in \overline{G}$ – коммутативны, см. [IR2].

3.3. **Описание общих подалгебр Бете, параметризованных $\overline{G}$.** Чтобы сформулировать утверждение, необходимо обсудить стратификацию пространства $\overline{G}$. Пусть $I \subset \Delta$. Обозначим через $P_I, P_I^- \subset G$ соответствующие противоположные параболические подгруппы, через $\mathfrak{p}_I, \mathfrak{p}_I^-$ – их алгебры Ли, $L_I = P_I \cap P_I^-$– соответствующая подгруппа Леви, $G_I = L_I/Z(L_I)$.

Имеется естественное действие $G \times G$ на $\overline{G}$:

$$(g_1, g_2) \cdot x = g_1 x g_2^{-1}.$$

Орбиты этого действия описываются следующим образом: имеется ровно 2^l орбит, каждая орбита S_I^0 соответствует подмножеству I, при этом $S_I^0 \simeq (G \times G) \times_{P_I \times P_I^-} G_I \to S_I^0, (g_1, g_2, x) \mapsto g_1 x g_2^{-1}$, т.е. S_I^0 — это однородное расслоение над $G/P_I \times G/P_I$ со слоем G_I. Обозначим через $\varphi : S_I^0 \to G/P_I \times G/P_I^-$ проекцию, а также отождествим G/P_I (соотв. G/P_I^-) с множеством параболических подалгебр, сопряженных $\mathfrak{p}_I$ (соотв. $\mathfrak{p}_I^-$). Определим

$$S_I^{00} = \bigcup_{\exists g \in G : \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_I, \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p}^- = \mathfrak{p}_I^-} \varphi^{-1}(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}^-).$$

В последней формуле Ad – это присоединённое действие группы на своей алгебре Ли.

В работе [IR2] показано, что замыкание тора $\overline{T} \subset \overline{G}$ принадлежит $\bigcup_I S_I^{00}$. Более того, дано описание подалгебр Бете, соответствующих точкам $\bigcup_I S_I^{00}$, в частности, $\overline{T}$.

Пусть $X = (g, g, x) \in S_I^{00}$, где $g \in G$, $x = \tilde{x} \circ \mathrm{pr}_I \in \mathbb{P}(\mathrm{End}\,(V_I)), \tilde{x} \in G_I$. Здесь V_I это L_I-подпредставление в V, порождённое старшим вектором. Отображение $\mathrm{pr}_I : V \to V_I$ – это $\tilde{G}$-инвариантное вложение. Пусть $\mathfrak{l} = \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p}_I \cap \mathrm{Ad}(g)\mathfrak{p}_I^-$ – соответствующая подалгебра Леви.

Теорема 3.4. *([IR2, Теорема 5.7]) Для любого $X = (g, g, x) \in S_I^{00}$, соответствующая подалгебра $B(X)$ совпадает с подалгеброй $B(g\hat{x}g^{-1}) \subset Y_V(\mathfrak{l}) \subset Y_V(\mathfrak{g})$, где $\hat{x} \in L_I$ такое, что класс $[\hat{x}]$ в $L_I/Z(L_I)$ совпадает с $\tilde{x}$.*

Определение алгебры $Y_V(\mathfrak{l})$ и вложение $Y_V(\mathfrak{l}) \subset Y_V(\mathfrak{g})$, см. параграф 1.27.

4. Предельные подалгебры.

Второй способ естественно расширить пространство параметров – это рассматривать предельные подалгебры. Здесь мы следуем работам [Vi], [Sh].

4.1. **Определение предельных подалгебр.** Пусть C – элемент множества G^{reg}. Напомним, что формула $\deg t_{ij}^{(r)} = r$ задаёт фильтрацию на $Y_V(\mathfrak{g})$. Пусть $FY_V^{(r)}$ – r-ая фильтрованная компонента. Рассмотрим $B^{(r)}(C) := FY_V^{(r)} \cap B(C)$. В работе [IR2] (в доказательстве теоремы 2.6) показано, что образы $\tau_1(u, C), \ldots, \tau_n(u, C)$ свободно порождают подалгебру $\mathrm{gr}\, B(C) \subset \mathrm{gr}\, Y_V(\mathfrak{g})$. Поэтому размерность $d(r)$ пространства $B^{(r)}(C)$ не зависит от C. Таким образом, для каждого $r \geqslant 1$ получаем отображение θ_r из G^{reg} в $\prod_{i=1}^r \mathrm{Gr}(d(i), \dim Y_V^{(i)})$ такое, что $C \mapsto (B^{(1)}(C), \ldots, B^{(r)}(C))$. Здесь $\mathrm{Gr}(d(i), \dim Y_V^{(i)})$ – грассманиан подпространств размерности $d(i)$ векторного пространства размерности $\dim FY_V^{(i)}$. Обозначим замыкание $\theta_r(G^{reg})$ (в топологии Зарисского) через Z_r. Рассмотрим проекции $\zeta_r : Z_r \to Z_{r-1}$ для всех $r \geqslant 1$. Обратный предел $Z = \varprojlim Z_r$ – это проалгебраическая схема, которая естественно расширяет пространство параметров для подалгебр Бете.

Действительно, каждая точка $z \in Z$ – это последовательность $\{z_r\}_{r \in \mathbb{N}}$, где $z_r \in Z_r$ такая что $\zeta_r(z_r) = z_{r-1}$. Здесь z_r – это точка в $\prod_{i=1}^r \mathrm{Gr}(d(i), \dim Y_V^{(i)})$, т.е. набор подпространств

$B_r^{(i)}(z) \subset Y_V^{(i)}$ такой что $B_r^{(i)}(z) \subset B_r^{(i+1)}(z)$ для всех $i < r$. Так как $\zeta_r(z_r) = z_{r-1}$, то $B_r^{(i)}(z) = B_{r-1}^{(i-1)}(z)$ для всех $i < r$. Определим подалгебру, отвечающую $z \in Z$ через $B(z) := \bigcup_{r=1}^{\infty} B_r^{(r)}(z)$.

Предложение 4.2. *(*[IR2, Предложение 4.11]*) Для любого $z \in Z$ $B(z)$ является коммутативной подалгеброй янгиана $Y_V(\mathfrak{g})$. Ряд Пуанкаре $B(z)$ не меньше (лексикографически), чем ряд Пуанкаре подалгебры $B(C)$ при $C \in G^{reg}$. Мы называем подалгебры вида $B(z)$ предельными подалгебрами.*

Замечание. *В работе* [Sh] *пределы подалгебр определяются в аналитической топологии, как пределы однопараметрических семейств подалгебр. Тем не менее, хорошо известно (см.* [Se]*), что замыкания образа алгебраического многообразия при регулярном отображении в топологии Зарисского и в аналитической топологии совпадают. В нашей работе мы используем оба подхода.*

4.3. **Связь с чудесной компактификацией.** Обозначим через $\tilde{Z}$ замыкание G^{reg} в $Z \times \overline{G}$.

Предложение 4.4. *(*[IR2, Предложение 5.6]*) Для любой точки $(z, X) \in \tilde{Z} \subset Z \times \overline{G}$ верно, что $B(X) \subseteq B(z)$.*

Гипотеза состоит в том, что схема Z является разрешением чудесной компактификации $\overline{G}$. Точная формулировка следующая

Гипотеза 4.5. *(*[IR2, Гипотеза 5.9]*) Проекция $\tilde{Z}$ на первую компоненту схемы $Z \times \overline{G}$ задаёт изоморфизм $\tilde{Z} \tilde{\to} Z$. Проекция на вторую компоненту задаёт бирациональное собственное отображение $\tilde{Z} \to \overline{G}$.*

Мы обсудим факты, позволяющие выдвинуть эту гипотезу, в параграфе 5.19.

5. Предельные подалгебры в случае $\mathfrak{gl}_n$.

Работа [IR] посвящена изучению предельных подалгебр в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$.

5.1. **Янгиан для** gl_n**.** Янгиан $Y(\mathfrak{gl}_n)$ для алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ получается как расширенный янгиан $X_V(\mathfrak{sl}_n)$, если в определении 1.22 в качестве положить $V = \mathbb{C}^n$ – тавтологическое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_n$. Тогда, с точностью до умножения на ряд $f(u) \in \mathbb{C}[[u]]$, верно, что $\hat{R}(u) = 1 - Pu^{-1}$, где P – оператор перестановки, т.е. $P(u \otimes v) = v \otimes u$ для любых $u, v \in V$.

Принимая во внимание Теорему 1.23, определим подалгебру Бете для расширенного янгиана как произведение подалгебры Бете в $Y_V(\mathfrak{g})$ и центра алгебры $X_V(\mathfrak{g})$. Из определения также следует, что задачи описания предельных подалгебр Бете в случае $Y(\mathfrak{gl}_n)$ и $Y(\mathfrak{sl}_n)$ эквивалентны.

Подробное обсуждение подалгебр Бете в $Y(\mathfrak{gl}_n)$ содержится в разделе 2 работы [IR], а связь между общим определением подалгебр Бете и определением подалгебр Бете янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$ в разделе 6 работы [IR2].

5.2. **Некоторые гомоморфизмы янгиана** $Y(\mathfrak{gl}_n)$**.** Определим два различных вложения $Y(\mathfrak{gl}_n)$ в янгиан $Y(\mathfrak{gl}_{n+k})$:

$$i_k : Y(\mathfrak{gl}_n) \to Y(\mathfrak{gl}_{n+k}) \; t_{ij}^{(r)} \mapsto t_{ij}^{(r)},$$

$$\varphi_k : Y(\mathfrak{gl}_n) \to Y(\mathfrak{gl}_{n+k}) \; t_{ij}^{(r)} \mapsto t_{k+i,k+j}^{(r)}.$$

Из ПБВ теоремы следует, что эти отображения инъективны.

Определим гомоморфизм

$$\pi_n : Y(\mathfrak{gl}_n) \to U(\mathfrak{gl}_n);\ t_{ij}(u) \mapsto \delta_{ij} + E_{ij}u^{-1}.$$

Здесь E_{ij} стандартные образующие $\mathfrak{gl_n}$. Отображение π_n – это сюръективный гомоморфизм $Y(\mathfrak{gl}_n) \to U(\mathfrak{gl}_n)$, называемый гомоморфизмом вычисления.

Положим

$$\omega_n : Y(\mathfrak{gl}_n) \to Y(\mathfrak{gl}_n);\ T(u) \mapsto (T(-u-n))^{-1}.$$

Легко видеть, что отображение ω_n – инволютивный автоморфизм янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Наконец, определим гомоморфизм

$$\psi_k = \omega_{n+k} \circ \varphi_k \circ \omega_n : Y(\mathfrak{gl}_n) \to Y(\mathfrak{gl}_{n+k}).$$

Отметим, что гомоморфизм ψ_k инъективен.

5.3. **Алгебры сдвига аргумента в $S(\mathfrak{g})$ и $U(\mathfrak{g})$.** Для того, чтобы сформулировать результаты о предельных подалгебрах нам потребуется определить семейство подалгебр в алгебрах $S(\mathfrak{g})$ и $U(\mathfrak{g})$.

Введём фильтрацию на алгебре $U(\mathfrak{g})$: $\deg x = 1,\ \forall\, x \in \mathfrak{g}$. По теореме Пуанкаре-Биркгофа-Витта $\operatorname{gr} U(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g})$. Более того, алгебра $S(\mathfrak{g})$ превращается в алгебру Пуассона. Скобка Пуассона задаётся на образующих следующим образом

$$\{x, y\} = [x, y]\ \forall\ x, y \in \mathfrak{g}.$$

Известно, что пуассонов центр алгебры $S(\mathfrak{g})$ свободно порождён $\operatorname{rk}\mathfrak{g}$ однородными образующими $P_1, \ldots, P_n$ некоторых степеней $s_1, \ldots, s_n$. Пусть $\chi \in \mathfrak{g}$ – произвольный элемент.

Определение 5.4. *Подалгебра $S(\mathfrak{g})$, порождённая элементами*

$$\partial_\chi^{c_i} P_i, 1 \le c_i \le s_i - 1,$$

называется алгеброй сдвига аргумента и обозначается через $F(\chi)$.

Элемент алгебры Ли называется регулярным, если размерность его централизатора в алгебре Ли минимальна. Обозначим через $\mathfrak{g}^{reg} \subset \mathfrak{g}$ и $\mathfrak{h}^{reg} \subset \mathfrak{h}$ множества регулярных и регулярных полупростых элементов соответственно.

Теорема 5.5. *([FFTL]) Если $\chi \in \mathfrak{g}^{reg}$, то алгебра $F(\chi)$ свободно порождается своими образующими, имеет максимальную возможную степень трансцендентности* $\dim \mathfrak{b}$ *среди коммутативных подалгебр $S(\mathfrak{g})$.*

Теорема 5.6. *([T], [PY]) Если $\chi \in \mathfrak{g}^{reg}$, то алгебра $F(\chi)$ максимальная пуассоново-коммутативная подалгебра $S(\mathfrak{g})$.*

Будем называть поднятием алгебры $F(\chi)$ такую алгебру $\hat{F}(\chi) \subset U(\mathfrak{g})$, что $\operatorname{gr} \hat{F}(\chi) = F(\chi)$.

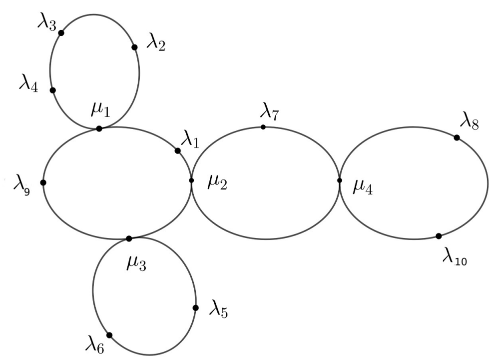
Теорема 5.7. *([FFTL], [T2]) Для любого элемента $\chi \in \mathfrak{g}^{reg}$ существует поднятие $\hat{F}(\chi)$. Алгебра $F(\chi)$ является максимальной коммутативной подалгеброй $U(\mathfrak{g})$. Более того, в типе A такое поднятие – единственно.*

На самом деле известно, что в типе A поднятие существует и единственно для любого $\chi \in \mathfrak{g}$, см. [FM].

Наконец, отметим, что в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ алгебра сдвига аргумента $\hat{F}(\chi)$ для $\chi \in \mathfrak{h}^{reg}$ может быть получена из подалгебры Бете как образ гомоморфизма вычисления, т.е. $\pi_n(B(\chi)) = \hat{F}(\chi)$, см. [NO].

5.8. **Компактификация Делиня-Мамфорда.** Подробно конструкция замыкания Делиня-Мамфорда $\overline{M_{0,n}}$ описана в работе [DM], см. также [HL]. В этом разделе мы дадим комбинаторное описание точек замыкания Делиня-Мамфорда. Пусть $n \geq 3$ – целое число. Определим пространство $M_{0,n}$ рациональных кривых рода 0 с n отмеченными точками, т.е. $\mathbb{CP}^1$ с n отмеченными точками. $\overline{M_{0,n}}$ – пространство Делиня-Мамфорда стабильных рациональных кривых с n отмеченными точками – это гладкое многообразие, компактификация пространства $M_{0,n}$.

Точки $\overline{M_{0,n}}$ – это классы изоморфизма кривых рода 0 с n отмеченными точками и, возможно, с точками простого самопересечения, так, что каждая компонента содержит по крайней мере три различных точки (отмеченных или особых). Точки $\overline{M_{0,n}}$ можно задавать следующими картинками (здесь $n = 10$)



5.9. **Пределы алгебр сдвига аргумента.** По поводу предельных подалгебр сдвига аргумента, см. [Vi], [Sh]. Описание замыкания семейства алгебр сдвига аргумента, параметризованных $\mathfrak{h}^{reg}$ было найдено в работе В. Шувалова [Sh]. В работе [HKRW] было найдено многообразие, параметризующее все предельные подалгебры этого семейства. Мы опишем эти результаты только в типе A.

Обозначим через $\mathcal{T}$ семейство подалгебр сдвига аргумента в алгебре $S(\mathfrak{gl}_n)$, зависящих от параметра $C \in \mathfrak{h}^{reg}$. Легко видеть, что алгебра сдвига аргумента не меняется при замене переменных $C \mapsto aC+bE$, где $a, b \in \mathbb{C}^*$, $a \neq 0$. Поэтому пространство параметров семейства $\mathcal{T}$ можно рассматривать как пространство $M_{0,n+1}$, то есть каждой диагональной матрице с с различными ненулевыми собственными значениями $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ сопоставим кривую с отмеченными точками $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \infty$.

Теорема 5.10. *([Sh],[AFV],[HKRW]) Пространство параметров замыкания семейства $\mathcal{T}$ изоморфно $\overline{M_{0,n+1}}$.*

Теорема 5.11. *([T2]) Пусть $X \in \overline{M_{0,n+1}}$. Существует единственное поднятие $\hat{F}(X)$ алгебры $F(X)$.*

Из теоремы 5.11, вообще говоря, ещё не следует, что пределы семейства подалгебр сдвига аргумента в $U(\mathfrak{gl}_n)$ параметризуются тем же многообразием, что и пределы соответствующего семейства в $S(\mathfrak{gl}_n)$. Это доказывается в работе [HKRW].

5.12. **Основные результаты.** Рассмотрим задачу нахождения пространства, параметризующего все предельные подалгебры, где пределы берутся только по тору T, т.е. в определении предельных подалгебр 4.1 получим про-алгебраическую схему Z как замыкание множества T^{reg} регулярных элементов тора. Подалгебра Бете не меняется при замене $C \to \lambda C, \lambda \in \mathbb{C}^*$. По аналогии с алгебрами сдвига аргумента пространство параметров подалгебр Бете отождествим с $\overline{M_{0,n+2}}$. Матрице C с собственными значениями $z_1, \ldots, z_n$ сопоставим $\mathbb{CP}^1$ с отмеченными точками $0, z_1, \ldots, z_n, \infty$.

Теорема 5.13. *([IR, Теорема 5.1]) Замыкание T^{reg}, параметризующее семейство предельных подалгебр изоморфно компактификации Делиня-Мамфорда $\overline{M_{0,n+2}}$. Все предельные подалгебры являются свободными полиномиальными алгебрами, а также максимальными коммутативными подалгебрами $Y(\mathfrak{gl}_n)$.*

Предельные подалгебры Бете можно описать рекурсивно, аналогично алгебрам сдвига аргумента, см. [Sh], [HKRW]. Пусть X_∞ – это неприводимая компонента $X \in \overline{M_{0,n+2}}$, содержащая точку ∞. Отождествим X_∞ с пространством $\mathbb{CP}^1$ так, что отмеченная точка ∞ отождествляется с ∞, а точка, в которой кривая с отмеченной точкой 0 касается X_∞ — с 0. Каждой точке $\lambda \in X_\infty$ сопоставим число k_λ отмеченных ненулевых точек на максимальной кривой X_λ, касающейся X_∞ в точке λ (положим $k_\lambda = 1$ если X_λ – отмеченная точка).

Пусть C – диагональная $(n-k_0) \times (n-k_0)$-матрица с собственными значениями λ кратности k_λ для всех различных точек $0 \neq \lambda \in X_\infty$. Тогда подалгебра $i_{k_0}(B(C))$ коммутирует с подалгеброй Ли $\bigoplus\limits_{\lambda \neq 0} \mathfrak{gl}_{k_\lambda}$ в $\mathfrak{gl}_{n-k_0} \subset i_{k_0}(Y(\mathfrak{gl}_{n-k_0})) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$, а также с янгианом $\psi_{n-k_0}(Y(\mathfrak{gl}_{k_0}))$.

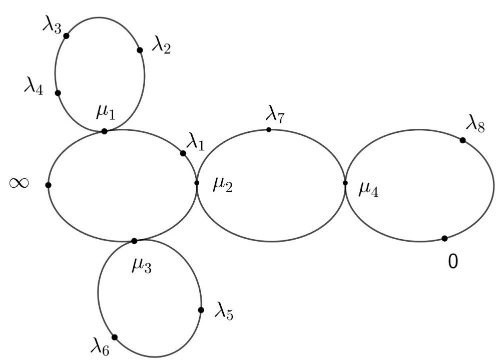
Теорема 5.14. *([IR, Теорема 5.2])*

(1) *Предельная подалгебра Бете, соответствующая $X \in \overline{M_{0,n+2}}$ является произведением следующих коммутирующих подалгебр: $i_{k_0}(B(C)) \subset i_{k_0}(Y(\mathfrak{gl}_{n-k_0})) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$, подалгебры, соответствующей X_0 в янгиане $\psi_{n-k_0}(Y(\mathfrak{gl}_{k_0})) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$ и алгебр сдвига аргумента $\hat{F}(X_\lambda)$ в $U(\mathfrak{gl}_{k_\lambda}) \subset i_{k_0}(Y(\mathfrak{gl}_{n-k_0})) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$ для всех точек $\lambda \neq 0$ (как и прежде, мы определяем точку ∞ на каждой X_λ как пересечение с X_∞).*

(2) *$i_{k_0}(B(C))$ содержит центр каждой $U(\mathfrak{gl}_{k_\lambda}) \subset i_{k_0}(Y(\mathfrak{gl}_{n-k_0}))$. Произведение из пункта 1 теоремы на самом деле является тензорным произведением*

$$\psi_{n-k_0}(B(X_0)) \otimes_{\mathbb{C}} i_{k_0}(B(C)) \otimes_{ZU(\bigoplus_{\lambda\neq 0} \mathfrak{gl}_{k_\lambda})} \bigotimes_{\lambda \neq 0} \hat{F}(X_\lambda).$$

Для иллюстрации теоремы рассмотрим пример элемента $X \in \overline{M_{0,n+2}}$:



Положим $C = \operatorname{diag}(\mu_1, \mu_1, \mu_1, \lambda_1.\mu_3, \mu_3)$. Тогда предельная подалгебра $B(X)$ имеет вид

$$\psi_6(B(X_0)) \otimes i_2(B(C))) \otimes_{ZU(\mathfrak{gl}_3 \oplus \mathfrak{gl}_2)} \left(\hat{F}(\operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)) \otimes \hat{F}(\operatorname{diag}(\lambda_5, \lambda_6)) \right).$$

5.15. **Основные методы.** Основная идея доказательства – это централизаторная конструкция Ольшанского [O], а также результаты [Sh] и [AFV]. А именно, пусть $A_0 = \mathbb{C}[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \ldots]$ – это фильтрованная алгебра многочленов от счётного числа переменных, $\deg \mathcal{E}_i = i$. На янгиане будем рассматривать фильтрацию $\deg t_{ij}^{(r)} = r$. Справедливо следующее предложение

Предложение 5.16. *([O]) Существует последовательность гомоморфизмов алгебр $\eta_k : Y(\mathfrak{gl}_n) \otimes A_0 \to U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}$ являющаяся асимптотическим изоморфизмом. Последнее означает, что для любого N существует K такое, что для любого $k > K$ ограничение η_k на N-ую фильтрованную компоненту $(Y(\mathfrak{gl}_n) \otimes A_0)_N$ – изоморфизм векторных пространств $(Y(\mathfrak{gl}_n) \otimes A_0)_N \simeq U(\mathfrak{gl}_{n+k})_N^{\mathfrak{gl}_k}$.*

Определение семейства гомоморфизмов $\{\eta_k\}$ см., например, [IR].

Предложение 5.17. *([IR, Предложение 6.7]) Для любого $C \in T^{reg}$ ограничение η_k на $B(C)$ задаёт асимптотический изоморфизм между $B(C)$ и $\hat{F}(C^{(k)})$.
Здесь $C^{(k)} := \operatorname{diag}(C, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k})$.*

Предложение 5.18. *([IR, Лемма 4.11]) Пусть $\mathfrak{A}$ – семейство подалгебр вида $\hat{F}(\operatorname{diag}(C, \underbrace{0, \ldots, 0}_{k}))$, $C \in T^{reg} \subset GL_n$. Замыкание пространства параметров семейства $\mathfrak{A}$ есть $\overline{M_{0,n+2}}$. Все предельные подалгебры семейства $\mathfrak{A}$ – максимальные коммутативные подалгебры $U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}$.*

5.19. **Гипотеза о связи с чудесной компактификацией в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$.** Пусть Z – это пространство, параметризующее замыкание семейства подалгебр, параметризованных T^{reg}, то есть $\overline{M_{0,n+2}}$. Рассмотрим замыкание $\tilde{Z}$ множества T^{reg} в $Z \times \overline{T}$ (параграф 4.5). Здесь $\overline{T} = \overline{T}^{reg}$ – замыкание тора в чудесной компактификации группы.

Пусть $(z, X) \in \tilde{Z}$. Нам известно, что $B(X) \subseteq B(z)$. Из обсуждения в [IR2, Разделе 6], следует, что точка $z \in \overline{M_{0,n+2}}$ однозначно определяет точку X. Таким образом проекция на первый фактор – изоморфизм. Из того же обсуждения следует, что проекция на второй фактор – бирациональное собственное отображение. Таким образом, в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ и замыкания семейства, параметризованного T^{reg}, гипотеза 4.5 становится теоремой.

5.20. **Замыкание тора для произвольной алгебры Ли $\mathfrak{g}$.** Естественным обобщением компактификации тора $\overline{M_{0,n+2}}$ для произвольной алгебры Ли является компактификация Де Кончини-Прочези набора подмногообразий в многообразии. А именно, пусть $\overline{T}$ – чудесная компактификация тора $T \subset G$. Тогда $T^{reg} = \overline{T} \setminus C$, где C – это набор гиперповерхностей в $\overline{T}$. Следуя работе [CG] по этим данным можно построить компактификацию $M_{\mathfrak{g}}$ множества T^{reg}.

Гипотеза 5.21. *([IR, Раздел 1.6]) $M_{\mathfrak{g}}$ является пространством параметров замыкания семейства подалгебр Бете $B(C) \subset Y(\mathfrak{g}), C \in T^{reg}$. Все предельные подалгебры – свободные, максимальные коммутативные подалгебры янгиана и имеют тот же ряд Пуанкаре, что и $B(C), C \in G^{reg}$.*

Результаты диссертации опубликованы в трёх статьях:

(1) A. Ilin, L. Rybnikov *Degeneration of Bethe subalgebras in the Yangian of $\mathfrak{gl}_n$*. Letters in Mathematical Physics. 2018. Vol. 108. No. 4. P. 1083-1107
(2) A. Ilin, L. Rybnikov *Bethe Subalgebras in Yangians and the Wonderful Compactification.* Commun. Math. Phys. (2019). https://doi.org/10.1007/s00220-019-03509-1

(3) А. Ильин *О максимальности некоторых коммутативных подалгебр янгианов.* Функциональный анализ и его приложения, 53:4 (2019), 85-88

Список литературы

[AFV] L. Aguirre, G. Felder, A. Veselov *Gaudin subalgebras and stable rational curves.* Compositio Mathematica, 2011, Vol. 147, 1463–1478

[CG] C. De Concini, G. Gaiffi *Projective Wonderful Models for Toric Arrangements.* Advances in Mathematics Vol. 327, 2018, pp. 390-409

[CP] V. Chari, A. Pressley *A Guide to Quantum Groups.* Cambridge University Press, 1995

[CS] C. De Concini, T. A. Springer Compactification of symmetric varieties, Transform. Groups, 4 (2-3):273–300, 1999

[DM] P. Deligne, D. Mumford *The irreducibility of the space of curves of given genus.* Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Études Scientifiques, 1969, vol.36, iss. 1, pp. 75–109

[D1] В. Г. Дринфельд *Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга–Бакстера.*, Докл. АН СССР, 283:5 (1985), 1060–1064

[D2] В. Г. Дринфельд, *Квантовые группы.* Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика. VIII, Зап. научн. сем. ЛОМИ, 155, Изд-во «Наука», Ленинград. отд., Л., 1986, 18–49

[D3] В.Г. Дринфельд *Новая реализация янгианов и квантовых аффинных алгебр.* ДАН СССР. 1988. Т. 36. стр. 212—216

[ES] P. Etingof, O. Schiffman *Lectures on Quantum Groups.* International Press of Boston, 2001

[EJ] S. Evens, B. Jones *On the Wonderful Compactification.* arXiv:0801.0456

[FFTL] B. Feigin, E. Frenkel and V. Toledano Laredo *Gaudin models with irregular singularities.* Advances in Mathematics, 2010, Vol. 223, pp. 873-948

[FM] V. Futorny, A. Molev *Quantization of the shift of argument subalgebras in type A.* Advances in Mathematics, 2015, Vol. 285, pp. 1358-1375

[GKLO] A. Gerasimov, S. Kharchev, D. Lebedev, S. Oblezin *On a class of representations of the Yangian and moduli space of monopoles.* Communications in Mathematical Physics, 2005, 260(3):511-525

[GRW] N. Guay, V. Regelskis, C. Wendlandt *Equivalences between three presentations of orthogonal and symplectic Yangians.* Letters in Mathematical Physics, 2019, Vol. 109, Iss. 2, pp. 327–379

[HKRW] I. Halacheva, J. Kamnitzer, L. Rybnikov, A. Weekes *Crystals and monodromy of Bethe vectors.* arXiv:1708.05105

[HL] W. J. Harvey, A. Lloyd-Philipps *Symmetry and moduli spaces for Riemann surfaces.* Contemporary Mathematics, Vol. 575, 2012

[I] А. Ильин *О максимальности некоторых коммутативных подалгебр янгианов.* Функциональный анализ и его приложения, 53:4 (2019), 85-88

[IR] A. Ilin, L. Rybnikov *Degeneration of Bethe subalgebras in the Yangian of $\mathfrak{gl}_n$.* Letters in Mathematical Physics. 2018. Vol. 108. No. 4. P. 1083-1107

[IR2] A. Ilin, L. Rybnikov *Bethe Subalgebras in Yangians and the Wonderful Compactification.* Commun. Math. Phys., 2019, vol. 372, pp. 343–366

[KR] A. N. Kirillov, N. Yu. Reshetikhin *The Yangians, Bethe Ansatz and combinatorics.* Letters in Mathematical Physics. 1986. Vol. 12, Iss. 3, pp. 199–208

[L] F. Loebbert *Lectures on Yangian symmetry.* Journal of Physics A: Math. and Theoretical, Vol. 49, N. 32

[KWWY] J. Kamnitzer, B. Webster, A. Weekes, O. Yacobi *Yangians and quantizations of slices in the affine Grassmannian.* Algebra Number Theory 8 (2014), no. 4, 857-893

[M] I. Mashanova-Golikova *Simplicity of spectra for Bethe subalgebras in $Y(\mathfrak{gl}_2)$.* arXiv:1906.09049

[MO] D. Maulik, A. Okounkov *Quantum Groups and Quantum Cohomology.* arXiv:1211.1287

[M1] A. Molev *Feigin-Frenkel center in types B, C and D.* Invent. Math. 191 (2013), 1-34

[M2] А. Молев *Янгианы и классические алгебры Ли.* МЦНМО, М., 2009

[NO] M. Nazarov, G. Olshanski *Bethe Subalgebras in Twisted Yangians.* Comm. Math. Phys. 178 (1996), 483–506

[O] Г.И. Ольшанский *Расширение алгебры $U(\mathfrak{g})$ для бесконечномерных классических алгебр Ли $\mathfrak{g}$ и янгианы $Y(\mathfrak{gl}(m))$.* Доклады Академии наук СССР. 297 (1987), 1050-1054

[PY] D. Panyushev, O.Yakimova *The argument shift method and maximal commutative subalgebras of Poisson algebras.* Math. Res. Lett. 15 (2008), 239-249

[R] Л. Г. Рыбников *Централизаторы некоторых квадратичных элементов в алгебрах Пуассона–Ли и метод сдвига инвариантов.* УМН, 60:2(362) (2005), 173–174

[R2] L. Rybnikov *Cactus group and monodromy of Bethe vectors.* IMRN, 2018, Iss. 1, pp. 202–235

[SV] O. Schiffmann and E. Vasserot *On cohomological Hall algebras of quivers : Yangians.*, arXiv:1705.07491

[Se] J.-P. Serre *Géométrie algébrique et géométrie analytique.* Annales de l'Institut Fourier, Volume 6 (1956), p. 1-42

[Sh] В. В. Шувалов *О пределах подалгебр Мищенко–Фоменко в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли.* Функц. анализ и его прил., 36:4 (2002), 55–64

[S] R. Steinberg *Conjugacy Classes in Algebraic Groups.* Lecture Notes in Math, vol. 366, Springer, 1974

[T] А. А. Тарасов *Максимальность некоторых коммутативных подалгебр в алгебрах Пуассона полупростых алгебр Ли.* УМН, 57:5(347) (2002), 165–166

[T2] А. А. Тарасов *О единственности поднятия максимальных коммутативных подалгебр из алгебры Пуассона–Ли в обертывающую алгебру.* Матем. сб., 194:7 (2003), 155–160

[TF] Л. А. Тахтаджян, Л. Д. Фаддеев *Квантовый метод обратной задачи и XYZ модель Гейзенберга.* УМН, 1979, том 34, выпуск 5(209), страницы 13–63

[Vi] Э. Б. Винберг *О некоторых коммутативных подалгебрах универсальной обертывающей алгебры.* Изв. АН СССР. Сер. матем., 54:1 (1990), 3–25

[W] C. Wendlandt *The R-matrix presentation for the Yangian of a simple Lie algebra.* Communications in Mathematical Physics, 2018, Vol. 363, Issue 1, pp. 289-332