Высшая школа экономики. Факультет математики
Теоретические вопросы к экзамену по курсу «Лицензиат. Математика»

Вопросы 2021

1. Сравнение множеств по мощности. Теорема Кантора-Бернштейна. Счётные множества. Теорема Кантора: множество всех подмножеств множества X неравномощно X. Несчётность множества вещественных чисел. Аксиома выбора, лемма Цорна, их эквивалентность (без доказательства) [6, §§1.3-1.7, 2.8].

2. Производящие функции. Линейные рекуррентные соотношения и рациональные производящие функции. Формула Бине для чисел Фибоначчи. [8, §2.1–2.3].

3. Логика высказываний. Таблицы истинности, булевы функции. Эквивалентность формул, тавтологии, выполнимые формулы. Определимость всякой булевой функции формулой логики высказываний. Теорема о дизъюнктивной нормальной форме. Алгоритм проверки данной формулы на выполнимость. [7, стр. 1-17].

4. Определитель матрицы и его свойства. Разложение по строке и столбцу. Определитель произведения матриц. Формулы Крамера для решения системы линейных уравнений. [10, 2.4, 2.5], [11, §10], [12, т.1 гл. 3].

5. Векторные пространства и линейные отображения, базисы, размерность, теорема о ранге матрицы. Решение системы линейных уравнений методом Гаусса. [10, 2.1 – 2.3], [11, §§7-8], [12, т.2 гл. 1 §2, гл. 2 §1].

6. Характеристический и минимальный многочлены линейного оператора, теорема Гамильтона–Кэли. [10, 6.2, 6.5], [11, §13], [12, т.2 гл. 2 §3-4].

7. Корневые подпространства линейного оператора, жорданова нормальная форма. [10, 6.4], [11, §13], [12, т.2 гл. 2 §4].

8. Квадратичные и билинейные формы, положительная определенность, закон инерции. [10, 5.3], [11, §17], [12, т.2 гл. 1 §4].

9. Евклидовы пространства. Неравенства Коши–Буняковского и треугольника. Разложение конечномерного евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогонализация Грама-Шмидта. [10, 5.4], [11, §14], [12, т.2 гл. 3 §1].

10. Вещественные самосопряженные операторы в конечномерном евклидовом пространстве, их диагонализуемость. Ортогональные операторы. Приведение квадратичной формы к главным осям ортогональными преобразованиями. [10, 6.3], [11, §17], [12, т.2 гл. 3 §3].

11. Комплексные конечномерные пространства с положительно определенным эрмитовым скалярным произведением (эрмитовы пространства). Самосопряженные и унитарные операторы. Свойства их собственных значений и векторов. [10, 5.5], [11, §20], [12, т.2 гл. 3 §2,3].

12. Аффинные пространства, аффинные отображения. Задание аффинного отображения n-мерного аффинного пространства образами $n+1$ точки. [10, 7.1, 7.3], [12, т.2 гл. 4 §1].

13. Проективные пространства, проективные отображения. Задание проективного отображения n-мерного проективного пространства образами $n+2$ точек. [10, 7.5], [11, §18], [12, т.2 гл. 5 §3].

14. Кривые второго порядка в $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{C}^2$, их аффинная и проективная классификации. [10, 7.4, 7.5], [11, §19], [12, т.2 гл. 5].

15. Группы, подгруппы, смежные классы, формула Лагранжа для числа смежных классов.[10, 4.1, 4.5] [11, §§15, 16], [12, т.3 гл. 1 §2].

16. Гомоморфизмы групп, нормальные подгруппы, факторгруппы. Теорема о строении гомоморфизма. Классификация конечнопорожденных абелевых групп (без доказательства). [10, 4.6], [11, §§12.4, 15, 16], [12, т.3 гл. 1 §2, 4], [12, т.3 гл. 2 §3].

17. Евклидовы кольца. Примеры. Неприводимые элементы, делимость. Наибольший общий делитель. Факториальность евклидовых колец. [10, 9.2], [11, §6], [12, т.1 гл. 5 §3].

18. Коммутативные кольца и поля. Кольца и поля вычетов. Конечные поля. Примеры. Цикличность конечной мультипликативной подгруппы произвольного поля. [10, 1.6], [11, §§2,3], [12, т.3 гл. 2 §3, гл. 5 §2]

19. Топологические пространства. Внутренние и граничные точки, замыкание. Непрерывные отображения топологических пространств. Метрические пространства, метрическая топология. Описание открытых подмножеств в $\mathbb{R}$. [4, §§1.2, 1.3, 1.6], [1, т.2 §§IX.1, IX.2, IX.6], [3, §§II.1, II.2, II.5].

20. Компактные топологические пространства. Свойства компактных пространств и отображений между ними. Критерий компактности подмножества $\mathbb{R}^n$. [4, §§1.7, 1.8], [1, т.2, §§IX.3], [3, §§II.6, II.7], [16, гл.4].

21. Связность и линейная связность топологического пространства. Связность отрезка. Пример связного не линейно связного множества. [13, Лекции 2, 3].

22. Полные метрические пространства. Примеры. Полнота пространства $C[a, b]$ непрерывных функций на отрезке. Существование неподвижной точки у сжимающего отображения полного метрического пространства в себя. [4, §§1.2, 1.4], [1, т.2,§§IX.5, IX.7], [3, §§II.3, II.4].

23. Фундаментальная группа топологического пространства. Ее вычисление для окружности S^1 и сферы S^2. [14, §§II.1-II.5], [15, §1.1], [16, гл. 7,8], [13, Лекции 4, 5, 6].

24. Предел функции, непрерывность, теорема о промежуточном значении непрерывной функции, равномерная непрерывность непрерывной функции на отрезке. [1, т. I, III.2], [2, т. I, II.2, II.5].

25. Сходящиеся последовательности и ряды. Критерий Коши сходимости последовательности. Свойства абсолютно сходящихся рядов, признаки сходимости Д'Аламбера и Коши. Условно сходящиеся ряды. Перестановка членов условно и абсолютно сходящегося ряда. [1, т.1, гл. 3 §1], [2, т.1, I.4, т. II, XI.1–XI.3].

26. Дифференцируемые функции одного переменного. Необходимое условие экстремума дифференцируемой функции. Теорема Ролля. Теорема Лагранжа о конечном приращении. [1, т. I, V.1, V.3], [2, т. I, III.1–III.3].

27. Частные производные функции нескольких переменных. Производная по направлению. Градиент. Производная (дифференциал) отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$. Теорема о производной сложной функции. [1, т. I, VIII.2, VIII.3], [2, т. I, V.3].

28. Теорема о неявной функции для отображения из $\mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^n$ (без доказательства). Теорема об обратной функции. Производная неявной и обратной функции. [1, т. I, VIII.5, VIII.6], [2, т. I, VI.2].

29. Интеграл кусочно - непрерывной функции по отрезку и его основные свойства. Формула Ньютона-Лейбница и существование первообразной для непрерывной функции. [1, т. I, VI.1–VI.3], [2, т. II, IX.1–IX.3].

30. Формула Тейлора для функции одного переменного. Формы остаточного члена. [1, т. I, V.3, VI.3], [2, т. I, III.5, т. II, IX.4].

31. Выпуклые функции одного переменного. Достаточное условие выпуклости. Исследование функции на экстремумы и выпуклость с помощью производных. [1, т. I, V.4], [2, т. I, IV.1–IV.2].

32. Экстремумы функций нескольких переменных. Необходимые условия. Достаточные условия. Условные экстремумы, множители Лагранжа. [1, т. I, VIII.4, VIII.7], [2, т. I, V.5, VI.3].

33. Интеграл непрерыной функции по n-мерному промежутку. Сведение кратного интеграла к повторному. [1, т. II, XI.1, XI.2, XI.4], [2, т. III, XVI.1, XVI.2].

34. Криволинейные интегралы. Вычисление длин кривых и работы силы по криволинейному пути. Формула Грина. [1, т. II, XIII.1, XIII.3], [2, т. III, XV.1, XV.2, XVI.3].

35. Алгебры и σ-алгебры множеств, меры на σ-алгебрах. Мера Лебега на отрезке и ее счетная аддитивность (все без доказательств). Пример неизмеримого множества. [4, §§2.1-2.5], [3, §§I.5,V.1-V.3], [5, гл.1].

36. Измеримые функции. Интеграл Лебега и его свойства. Предельный переход под знаком интеграла (все без доказательств). Неравенство Чебышева. [4, §§3.1-3.5], [3, §§V.4-V.5], [5, §§2.1-2.3].

37. Функциональные последовательности и ряды, равномерная сходимость, непрерывность предела равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. [1, т. II, XVI.1–XVI.3], [2, т. II, XII.1, XII.2].

38. Несобственные интегралы, признаки сходимости несобственных интегралов. Сходимость интегралов $\int_0^1 x^\alpha dx$ и $\int_1^\infty x^\alpha dx$. [1, т. I, VI.5], [2, т. II, XIII.1, XIII.2].

39. Гамма - функция Эйлера. Определение, конструкция, свойства (без доказательств). Эйлеровы интегралы. [1, т. II, XVII.3], [2, т. II, XIV.5]

40. Гильбертовы пространства. Замкнутые подпространства и ортогональные дополнения. Ортогональные системы векторов и базисы. Примеры гильбертовых пространств и ортогональных базисов в них. Неравенство Бесселя и равенство Парсеваля. Теорема Рисса - Фишера. Изоморфизм гильбертовых пространств. [1, т. II, XVIII.1, XVIII.2], [3, III.4, VII.3.1, VIII.1].

41. Тригонометрические ряды Фурье. Полнота тригонометрической системы. Сходимость тригонометрических рядов в среднеквадратичном. Достаточные условия поточечной и равномерной сходимости тригонометрическких рядов Фурье. Теорема Вейерштрасса о приближении непрерывной функции на отрезке многочленами. [1, т. II, XVI.4, XVIII.1, XVIII.2], [3, III.4, VII.3.1, VIII.1,2].

42. Понятие обыкновенного дифференциального уравнения и его решения. Задача Коши и теорема о существовании и единственности ее решения (без доказательства). Приближение решения задачи Коши итерациями Пикара. [20, гл.7], [21, гл. I, §1, гл. II, §1], [22, §7].

43. Линейные дифференциальные уравнения. Фундаментальная система решений однородного уравнения. Определитель Вронского и его свойства. Метод вариации постоянных решения неоднородного линейного уравнения. [20, гл. 5 §§1,2], [21, гл. V, §§2, 3], [22, §12].

44. Однородные системы дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами. Матричная экспонента, ее свойства и применения. Качественное поведение траекторий для линейных систем с постоянными коэффициентами в размерности два. [20, гл.5, §§5.3, 5.4,], [21, гл. VII, §2], [22, §§14, 16].

45. Определение гладкого многообразия; карты, атласы. Задание ориентации на многообразии. [1, т.2, гл 15 §2], [17, гл. 1]. Пример атласа на двумерной сфере [17, пункт 1.3], [1, т.2, гл. 15, §2], [18, гл. 1].

46. Касательные векторы к гладким многообразиям. Векторные поля и дифференцирования кольца функций. Дифференциал гладкого отображения многообразий. [17, гл.2], [1, т.2, гл. 15, §3], [18, гл. 1].

47. Дифференциальные формы на гладких многообразиях. Отображение дифференциальных форм, индуцированное отображением многообразий. Внешний дифференциал и внешнее умножение. [17, гл. 5,6], [1, т.2; гл. 15, §§3,4], [18, гл. 2,4].

48. Точные и замкнутые формы, лемма Пуанкаре. Определение когомологий де Рама гладкого многообразия. Вычисление когомологий де Рама прямой и окружности. [17, гл. 5,6], [1, т.2; гл. 15, §§3,4], [18, гл. 2,4].

49. Интегрирование дифференциальных форм. Общая теорема Стокса и вывод из нее формул Грина, Кельвина-Стокса и Остроградского-Гаусса для компактных областей, ограниченных регулярной гиперповерхностью. [17, гл. 5,6], [1, т.2; гл. 15, §3, гл. 14 §2], [18, гл. 4].

50. Комплексная производная, голоморфные функции, условия Коши–Римана. Голоморфность элементарных функций. [19, 2.2-2.6, стр. 13-19].

51. Теорема Коши об интеграле голоморфной функции по замкнутому контуру. Интегральная формула Коши. [19, 5.1-5.3, стр. 53-64].

52. Область сходимости степенного ряда с комплексными коэффициентами. Разложение функции, голоморфной в круге, в ряд Тейлора. Интегральная формула для коэффициентов ряда Тейлора. [19, 6.1-6.6, 6.8-6.9. стр. 65-75].

53. Разложение функции, голоморфной в кольце, в ряд Лорана. Область сходимости ряда Лорана. Единственность лорановского разложения. Классификация изолированных особых точек голоморфных функций. [19, 7.1-7.8, стр. 82-94].

54. Вычеты. Теорема Коши о вычетах. Вычеты и коэффициенты ряда Лорана. [19, 8.1-8.2, стр. 97-99].

55. Вероятностное пространство. Случайные величины. Функция распределения, плотность. Дискретные и непрерывные случайные величины. Математическое ожидание. Дисперсия. Независимые случайные величины. Ковариация и ее связь с независимостью случайных величин. [23, т. 1, §§I.(1, 3, 4), II.(1, 4, 6, 8)], [24, §§6,7, 18–19, 23–24].

56. Сходимость почти всюду и по вероятности. Закон больших чисел в случае конечной дисперсии (с доказательством). Усиленный закон больших чисел (формулировка). [23, т. 1, §II.10], [24, §28], [23, т. 2, §IV.3].

57. Сходимость по распределению. Характеристические функции. Центральная предельная теорема (формулировка, сведение к сходимости характеристических функций). [23, т. 1, §§II.12, III.(1–4)], [24, §§32, 35, 39–40].

Список литературы

[1] В. А. Зорич. Математический анализ. Изд. 4. М.: МЦНМО, 2002

[2] Г. М. Фихтенгольц. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Изд. 8. М.: Физматлит, 2003

[3] А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 7. М.: Физматлит, 2004

[4] В. И. Богачёв, О. Г. Смолянов. Действительный и функциональный анализ. М.: РХД, 2009.

[5] G. B. Folland. Real analysis. Wiley, 1999.

[6] Верещагин Н. К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств. М.: МЦНМО, 2012.

[7] Верещагин Н. К., Шень А. Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 2. Языки и исчисления. М.: МЦНМО, 2012.

[8] С. К. Ландо. Введение в дискретную математику. М.: МЦНМО, 2012

[9] Р. Стенли. Перечислительная комбинаторика. М.: Мир, 1990

[10] Э. Б. Винберг. Курс алгебры. 4-е изд. М.: МЦНМО, 2011

[11] А. Л. Городенцев. Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1. М.: МЦНМО, 2013

[12] А. И. Кострикин. Введение в алгебру. М.: МЦНМО, 2011

[13] Ю. Бурман. Лекции “Введение в топологию”

[14] У. Масси, Дж. Столлингс. Алгебраическая топология. Введение. М.: Мир, 1977.

[15] А. Хатчер. Алгебраическая топология. М.: МЦНМО, 2011.

[16] J. M. Lee. Introduction to topological manifolds. Springer, 2011.

[17] С.М. Натанзон. Введение в теорию гладких многообразий, МЦНМО, 2020.

[18] Ф.Уорнер. Основы теории гладких многообразий и групп Ли. М.: Мир, 1987.

[19] А. В. Домрин, А. Г. Сергеев. Лекции по комплексному анализу. МИАН, 2004, том 1.,2

[20] Ильяшенко, Буфетов, Гончарук “Обыкновенные дифференциальные уравнения” `https://math.hse.ru/data/2019/09/23/1540178888/ODE.pdf`

[21] Степанов В.В. “Курс дифференциальных уравнений”, ГИФМЛ, 1959.

[22] Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. М.: Либроком, 2011

[23] А. Н. Ширяев. Вероятность. В 2-х кн. 3-е изд. М.: МЦНМО, 2004. Кн. 1: Вероятность-1. Элементарная теория вероятностей. Математические основания. Предельные теоремы. — 520 с. Кн. 2: Вероятность-2. Суммы и последовательности случайных величин — стационарные, мартингалы, марковские цепи. — 408 с.

[24] Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей. Изд. 8-е. М.: Едиториал УРСС, 2005. — 408 с.