Высшая школа экономики. Факультет математики
Итоговая государственная аттестация

Образцы задач

1. Известно, что $\lim_{n\to\infty} a_n = A$. Найдите предел
$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 a_k$$

2. Исследовать на сходимость и равномерную сходимость ряд
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-(nx)^2} \sin nx, \qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

3. Найдите все функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такие, что
$$|f(x) - f(y)| \le (x-y)^2$$
при всех $x,\ y \in \mathbb{R}$.

4. Найдите восьмую производную функции $f(x) = \sin(\sin(x))$ в точке $x = 0$.

5. Докажите, что
$$\sin x > x - \frac{x^3}{6}$$
при всех $x > 0$.

6. Рассмотрим отображение $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, заданное формулой $\phi(x,y) = (x, y + x^2)$. Найдите образ вектора $(1,2)$ при отображении первого дифференциала $d_{(1,1)}\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ отображения ϕ в точке $(1,1)$.

7. Сходится ли ряд $-1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} + \frac{3}{4} - \frac{1}{5} + \frac{3}{6} - \cdots - \frac{1}{2n-1} + \frac{3}{2n} - \cdots$?

8. Равномерно ли сходится ряд $\sum_{n\ge 0} \frac{x^n}{n}$ на отрезке $[-1, 0]$?

9. Найдите радиус сходимости степенного ряда $\sum_{n\ge 0} \frac{x^{n^2}}{2^n}$.

10. Постройте график кривой, заданне. в полярных координатах уравнением $r = 2\cos\phi + 1$. Вычислите угол наклона касательных к оси абсцисс в точках пересечения с осью ординат и в особой точке кривой.

11. Найдите $\frac{\partial^{50} f}{\partial x^{24} \partial y^{26}}(0,0)$ для $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$.

12. Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^2$ — открытое множество, $(x_0, y_0) \in U$, и пусть функция $F \in C^2(U)$ такова, что $F(x_0, y_0) = 0$ и $F'_y(x_0, y_0) \ne 0$. Пусть $y = f(x)$ — функция, неявно заданная уравнением $F(x,y) = 0$ в окрестности (x_0, y_0). Выразите $f'(x_0)$ и $f''(x_0)$ через частные производные функции F.

13. Около прямоугольного параллелепипеда со сторонами $2a$, $2b$ и $2c$ опишите эллипсоид $x^2/\alpha^2 + y^2/\beta^2 + z^2/\gamma^2 = 1$ наименьшего объема.

14. Найти радиус R сходимости степенного ряда $\sum(n2^n)^{-1}x^n$. Сходится ли этот ряд на промежутках $(-R,0]$ и $[0,R)$ равномерно?

15. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_a^b \sqrt[3]{(b-x)(x-a)^2}dx$ при $b>a$.

16. Вычислить интеграл $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{\sqrt[3]{(b-x)(x-a)^2}}dx$ при $b>a$.

17. Доказать, что ряд $\sum(p_n)^{-1}$ расходится (p_n — это n-е простое число).

18. Пусть функция $f\colon [0,+\infty)\to[0,+\infty)$ — монотонная функция, и пусть интеграл $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx$ сходится. Докажите, что $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(xf(x)\big)=0$.

19. Найти площадь петли кривой $(x^2+y^2)^2=2xy$, $x>0, y>0$.

20. Найти площадь петли кривой $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2})^2=x^2y$.

21. Вычислите интеграл. Контур обходится один раз в положительном направлении (против часовой стрелки).

    (a) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{e^z\cos\pi z}{z^2+2z}dz$;

    (b) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\operatorname{tg} z}{ze^{1/(z+2)}}dz$;

    (c) $\displaystyle\int_{|z|=1}\frac{\cos z}{z^3}dz$;

    (d) $\displaystyle\int_{|z|=2}\frac{e^{-1/z}}{z^2+1}dz$.

22. Вычислите несобственный интеграл.

    (a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cos x}{x^2-2x+10}dx$;

    (b) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^2\cos x}{(x^2+1)^2}dx$;

    (c) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2+x^4}dx$;

    (d) $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-x^2/2}\cos\alpha x dx$

23. Приведите пример последовательности неотрицательных ограниченных борелевских функций на $[0,1]$, поточечно сходящейся к нулю, но не имеющей предела по норме пространства $L^1[0,1]$.

24. Приведите пример последовательности неотрицательных ограниченных борелевских функций на $[0,1]$, сходящейся к нулю по норме пространства $L^1[0,1]$, но не имеющей поточечного предела ни в одной точке.

25. Вычислите интеграл $\displaystyle\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\cos(x^2+y^2)dxdy$, где $a>0$.

26. Решите дифференциальное уравнение

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$$

27. Решите дифференциальное уравнение

$$y' = \frac{y - 3x}{x + 3y}\ .$$

28. Найдите общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + y = x \sin x\ .$$

29. Найдите общее решение системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 5x + 3y, \\ \dot{y} = -3x - y, \end{cases}$$

и нарисуйте фазовый портрет.

30. Линейный оператор A в пространстве вещественных 2×2 матриц переводит произвольную матрицу B в ее коммутатор $\Lambda B - B\Lambda$ с фиксированной диагональной матрицей $\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$. Вычислите экспоненту e^{tA}. Какому дифференциальному уравнению она удовлетворяет?

31. Колебания пружинного маятника единичной массы с коэффициентом жесткости пружины k^2 затухают благодаря трению, пропорциональному скорости маятника с коэффициентом пропорциональности μ. Маятник начинает движение с нулевой скоростью, отклонившись от положения равновесия на некоторое расстояние. При каких k и μ маятник не дойдет до положения равновесия ни разу за конечное время?

32. Вычислите амплитуду вынужденных колебаний (эквивалентно, колебаний в установившемся режиме) пружинного маятника массы m под действием внешней силы $F = \sin \omega t$, если коэффициент жесткости равен k^2, а коэффициент трения равен a. Для какой частоты ω колебаний внешней силы амплитуда вынужденных колебаний максимальна?

33. Является ли подмножество в $\mathbb{R}^2$, состоящее из точек с иррациональными координатами (a) открытым, (b) замкнутым, (c) связным, (d) линейно связным, (e) всюду плотным?

34. Докажите, что всякое открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$ можно представить в виде объединения счетного числа замкнутых множеств.

35. Какие из букв `A, O, T, K, B` гомеоморфны? Гомотопически эквивалентны?

36. Пусть X – хаусдорфово пространство, и пусть $K_1, K_2 \subset X$ – его компактные подмножества. Докажите, что если $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, то существуют такие открытые подмножества $U_1, U_2 \subset X$, что $U_1 \supset K_1$, $U_2 \supset K_2$ и $U_1 \cap U_2 = \varnothing$.

37. На каждой прямой $\ell \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 2)$, проходящей через начало координат, выбрана точка $a(\ell)$ таким образом, что $a(\ell)$ непрерывно зависит от ℓ. Докажите, что хотя бы на одной прямой выбрано начало координат.

38. Покажите, что грассманиан двумерных подпространств в четырехмерном вещественном пространстве является гладким компактным четырехмерным многообразием. Сколько карт требуется для его описания?

39. Опишите касательное пространство к $SO(3)$ в единичной матрице как подмножество пространства всех матриц 3×3.

40. При каких c множество $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + x^3 - y^2 = c\}$ является гладким подмногообразием в $\mathbb{R}^3$?

41. Постройте бесконечно гладкую функцию на плоскости, обращающуся в ноль во всех точках луча $(0, y), y \le 0$ и ненулевую во всех других точках плоскости.

42. На многообразии $M = \mathbb{R}^3$ задана дифференциальная форма $\omega = 2xdz \wedge dy + z^2 dx \wedge dy$ (здесь (x, y, z) — обычные евклидовы координаты в $\mathbb{R}^3$). Найдите ядро формы ω в каждой точке M. Напомним, что ядро состоит из тех касательных векторов v, для которых $\imath_v \omega = 0$.

43. Проинтегрируйте форму $ydy \wedge dz$ по сфере $(x-1)^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

44. Определим на $\mathbb{R}^3$ дифференциальную форму $\omega = 2xy^3 zdx + 3x^2 x^2 zdy + xydz$. Вычислите значение ω на векторном поле $v = y\partial/\partial x + z\partial/\partial y$, а также найдите выражение для формы $\omega \wedge d\omega$.

45. Найдите жорданову нормальную форму оператора третьей производной на пространстве многочленов от одной переменной степени не выше n.

46. Докажите. что у любого набора попарно коммутирующих операторов в конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем есть общий собственный вектор.

47. Пусть $v_1, \ldots, v_n$ - набор элементов векторного пространства V, $w_1, \ldots, w_n$ - набор элементов двойственного пространства V^*. Известно, что определитель матрицы $A_{ij} = w_i(v_j)$ отличен от нуля. Покажите, что оба набора состоят из линейно независимых векторов.

48. Существует ли матрица, характеристический многочлен которой равен χ, а минимальный μ, где

    (a) $\chi(\lambda) = (\lambda^6 - 1)$, $\mu(\lambda) = (\lambda^3 - 1)$;
    (b) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$, $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$;
    (c) $\chi(\lambda) = (\lambda - 1)^5(\lambda - 2)^5$, $\mu(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 2)^3$?

    Если да, приведите пример такой матрицы. Если нет, докажите.

49. Докажите, что в евклидовом пространстве равенство $\|x + y\| = \|x\| + \|y\|$ возможно лишь в случае, когда векторы x и y отличаются неотрицательным скалярным множителем.

50. Билинейная форма K на пространстве вещественных 2×2 матриц со следом 0 определяется формулой $K(A, B) = Tr\, ad_A ad_B$. Здесь ad_A - оператор в пространстве матриц, переводящий матрицу B в $AB - BA$, TrC - след матрицы C. Вычислите ранг и сигнатуру формы K.

51. Пусть S — линейный оператор в векторном пространстве V. Зададим на факторпространстве $V/\operatorname{Ker} S$ линейный оператор T правилом $T([v]) = [S(v)]$, где $[v]$ обозначает класс вектора по модулю $\operatorname{Ker} S$. Докажите, что это правило корректно и что равенство $S^n = 0$ равносильно равенству $T^{n-1} = 0$

52. Матрица линейного оператора F в некотором базисе $e_1, \ldots, e_n$ представляет собою жорданову клетку. Докажите, что ненулевые F-инвариантные подпространства исчерпываются линейными оболочками первых k базисных векторов $e_1, \ldots, e_k$, где $1 \le k \le n$.

53. Докажите, что линейный оператор T в конечномерном векторном пространстве над алгебраически замкнутым полем K диагонализуем тогда и только тогда, когда для любого $\lambda \in K$ выполнено равенство $\operatorname{rk}(T - \lambda 1) = \operatorname{rk}(T - \lambda 1)^2$.

54. В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ найдите расстояние от начала координат до аффинной гиперплоскости, заданной уравнением $x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n = 1$.

55. Пусть V — n-мерное векторное пространство над $\mathbb{R}$, F — квадратичная форма с положительным индексом инерции p и отрицательным индексом инерции q. Чему равна максимальная размерность такого подпространства $W \subseteq V$, что $F|_W = 0$?

56. Пусть в евклидовом пространстве V задан самосопряженный оператор A, у которого все корни характеристического многочлена меньше единицы. Докажите, что A переводит единичный шар с центром в нуле в себя.

57. Известно, что минимальный многочлен оператора A в конечномерном комплексном векторном пространстве V не имеет кратных корней. Докажите, что число инвариантных подпространств в V конечно тогда и только тогда, когда все собственные значения A различны.

58. Существует ли поле из 6 элементов?

59. Что можно сказать про группу, у которой нет нетривиальных собственных подгрупп?

60. Изоморфны ли группы $Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} \subset \mathbb{H}$ (где $\mathbb{H}$ — тело кватернионов) и группа диэдра D_4 (т.е. группа симметрий квадрата)?

61. Изоморфны ли группы S_3 и $SL_2(\mathbb{Z}_2)$?

62. Положим $U_n = \{z \in \mathbb{C} : z^n = 1\}$ и $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \backslash \{0\}$. Докажите, что группы $\mathbb{C}^\times / U_n$ и $\mathbb{C}^\times$ изоморфны.

63. Докажите, что симметрическая группа S_n порождается двумя элементами.

64. Разлагается ли группа $GL(2, \mathbb{R})$ в прямое произведение подгрупп $SL(2, \mathbb{R})$ и $D = \{\lambda E : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$? Аналогичный вопрос про группу $GL(3, \mathbb{R})$.

65. Докажите, что любая подгруппа конечно порожденной абелевой группы конечно порождена.

66. Докажите, что конечная абелева группа G порядка n является циклической тогда и только тогда, когда для любого d, делящего n, в G существует единственная подгруппа порядка d.

67. Пусть R — евклидово кольцо, $u \in R \setminus \{0\}$ — элемент наименьшей нормы. Докажите, что u обратим.

68. Пусть p – простое число. Является ли подгруппа верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали силовской в группе $GL(n, F_p)$?

69. Пусть конечная группа G имеет две факторгруппы F_1 и F_2, порядки которых взаимно просты, причем $|G| = |F_1| \cdot |F_2|$. Докажите, что $G \cong F_1 \times F_2$.

70. Приведите пример двух изоморфных, но не совпадающих подполей в $\mathbb{C}$.

71. Является ли кольцо $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$ факториальным?

72. Некоторый оператор T на векторном пространстве удовлетворяет уравнению

$$T^2 - 5T + 6I = 0.$$

где I — тождественный оператор. Чему могут быть равны собственные значения оператора T?

73. Существует ли вещественная 3×3 матрица A, удовлетворяющая уравнению

$$A^2 + A + 7I = 0?$$

Через I обозначена единичная 3×3 матрица.

74. Для вещественной 2×2-матрицы $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ найдите собственные числа и собственные значения оператора M_A на пространстве 2×2-матриц, действующего по формуле

$$M_A : X \mapsto AX.$$

75. Докажите, что в n-мерном комплексном векторном пространстве всякий линейный оператор имеет инвариантное подпространство размерности $n-1$.

76. Группа действует с двумя орбитами на множестве из пяти элементов. При этом действие точное (то есть только единичный элемент группы действует как тождественное преобразование). Одна орбита состоит из двух элементов, а вторая — из трёх. Найдите все такие группы с точностью до изоморфизма.

77. Изоморфны ли группы D_{mn} и $D_m \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$? (Здесь D_k — группа симметрий правильного k-угольника.)

78. Может ли поле из 9 элементов быть подполем поля из 27 элементов?

79. Сколько существует k-мерных подпространств в n-мерном пространстве над полем F_q, содержащих заданную прямую?

80. Вычислите порядки групп $SL(n, F_q)$ и $PGL(n, F_q)$.

81. Матрица M размера $n \times n$ имеет ранг $n-1$. Найдите ранг матрицы алгебраических дополнений к элементам матрицы M.

82. Докажите равенства $\operatorname{Im} F^* = \operatorname{Ann} \operatorname{Ker} F$ и $\operatorname{Ker} F^* = \operatorname{Ann} \operatorname{Im} F$ для пары двойственных линейных отображений $F \colon V \to W$ и $F^* \colon W^* \to V^*$ между конечномерными векторными пространствами.

83. Докажите соотношения для обобщенных чисел сочетаний

$$\text{а)}\quad \binom{-a}{k} = (-1)^k \binom{a+k-1}{k}, \qquad \text{б)}\quad \binom{a}{k} + \binom{a}{k-1} = \binom{a+1}{k}.$$

84. Вычислите производящие функции для последовательностей

$$\text{а)}\quad 1^2, 2^2, 3^2, \ldots, k^2, \ldots \qquad \text{б)}\quad n^2, (n+1)^2, (n+2)^2, \ldots, (n+k)^2, \ldots$$

85. Докажите соотношения

$$\text{а)}\quad \sum_{k=0}^{n} \binom{a}{k}\binom{n}{k} = \binom{a+n}{n}, \qquad \text{б)}\quad \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} s^k = \frac{(1+\sqrt{s})^n + (1-\sqrt{s})^n}{2}.$$

86. Найдите производящую функцию чисел Фибоначчи. Выведите явную формулу для n-ого числа Фибоначчи.

87. Найдите производящую функцию последовательности, заданной начальными условиями $a_0 = 1$, $a_1 = 1$ и рекуррентным соотношением $a_n = 3a_{n-1} + 4a_{n-2}$ $(n > 1)$.

88. Производящая функция последовательности (a_n) имеет вид $A(s) = \frac{1+4s-3s^2}{1-4s+3s^2}$. Начиная с какого номера n члены последовательности представляются как значения квазимногочлена? Укажите этот квазимногочлен.

89. Последовательности (a_n) и (b_n) заданы начальными условиями $a_0 = 5, \quad a_1 = 3$, $b_0 = 1, \quad b_1 = 4$ и рекуррентными соотношениями

$$a_n = 2a_{n-1} + 3a_{n-2}; \qquad b_n = 5b_{n-1} - 6b_{n-2} \qquad (n > 1).$$

Сравните числа a_n и b_n при достаточно больших n.

90. Случайные величины ξ и η таковы, что $\xi^2 + \eta^2 = 1$ и $D\xi > 0$, $D\eta > 0$. Могут ли величины ξ и η быть независимыми?

91. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ – независимые и одинаково распределенные (с функцией распределения F) случайные величины. Через $\xi_{(k)}$ обозначаем k-е по порядку значение величин ξ_i, расположенных в порядке возрастания. Найдите распределения $\xi_{(1)}$ и $\xi_{(2)}$.

92. Из отрезка $[-1, 1]$ выбирается точка ξ следующим образом. Бросается монета, которая равновероятно падает «орлом» вверх, «решеткой» вверх, или становится на ребро. Если монета встала на ребро, то $\xi = 0$. Если упала вверх «орлом», то ξ случайно выбирается из отрезка $[-1, 0]$. Если упала вверх «решеткой», то ξ случайно выбирается из $[0, 1]$. Найдите распределение ξ. Вычислите $E\xi$ и $D\xi$.

93. Величины ξ, η независимы и имеют нормальное распределение с параметрами 0 и 1. Найдите распределение случайного вектора $(3\xi+\eta, \xi-3\eta)$. Вычислите вероятность $P(|3\xi+\eta| > |\xi-3\eta|)$.

94. Последовательности случайных величин ξ_n и η_n сходятся по распределению к случайным величинам ξ и η соответственно. Покажите, что в общем случае нельзя утверждать, что $\xi_n + \eta_n$ сходится по распределению к $\xi + \eta$. Докажите, что $\xi_n + \eta_n$ сходится по распределению к $\xi + \eta$, если дополнительно известно, что величина η является константой.

95. Случайная величина ξ имеет распределение Коши, заданное плотностью

$$\varrho(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Найдите ее характеристическую функцию. Найдите характеристическую функцию и плотность величины $\dfrac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n}$, где ξ_i – последовательность независимых случайных величин, имеющих распределение Коши,

96. Рассмотрим множество всех нестрого убывающих последовательностей натуральных чисел. Является ли данное множество счетным, континуальным или оно имеет иную мощность?

97. Рассмотрим множество всех биекций из $\mathbb{N}$ в $\mathbb{N}$. Является ли данное множество счетным, континуальным или оно имеет иную мощность?

98. Рассмотрим множество непрерывных функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Является ли данное множество счетным, континуальным или оно имеет иную мощность?

99. Приведите к дизъюнктивной нормальной форме следующую формулу:

$$((p \leftrightarrow (p \wedge q)) \to ((r \wedge (p \wedge (r \to q))) \to q)).$$

100. Приведите к дизъюнктивной нормальной форме следующую формулу:

$$(((\neg p \to q) \to (\neg q \to p)) \vee ((r \to p) \to (p \vee q))).$$