Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Адлер Дмитрий Всеволодович

Формы Якоби многих переменных и их приложения

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
Гриценко Валерий Алексеевич

Москва - 2021

Особую роль в теории дискретных групп играют группы отражений. Наиболее простыми примерами этих групп являются конечные группы отражений или, как их ещё называют, группы Кокстера. Эти группы включают в себя как группы Вейля всех простых алгебр Ли, так и некоторые исключительные примеры. Но каждая из них может быть представлена как группа линейных отражений конечномерного вещественного аффинного пространства, фундаментальной областью в данном случае будет конус. Зачастую изучение дискретных групп неразрывно связано с теорией инвариантов – области математики, посвящённой функциям, инвариантным или почти инвариантным относительно действия соответствующих дискретных групп. В случае конечных групп отражений имеется классическая теорема Шевалле, которая показывает, что для таких групп инвариантные многочлены образуют свободную градуированную алгебру, порождённую n образующими, где n – размерность вещественного пространства, на котором действует группа.

Если мы добавим отражение относительно дополнительной гиперплоскости, то мы получим аффинные группы Вейля, а фундаментальной областью уже будет являться симплекс. В случае аффинных групп Вейля имеется аналогичный теореме Шевалле результат: алгебры инвариантов свободно порождены n образующими, но они уже являются тригонометрическими многочленами, так как дополнительно требуется инвариантность относительно сдвигов. Здесь снова n – размерность вещественного пространства, на котором действует группа.

Действие как групп Кокстера, так и аффинных групп Вейля переносится на комплексификацию вещественных пространств, на которых действовали группы. При этом фундаментальные области аффинных групп Вейля перестают быть компактными, и если мы хотим оставить условие компактности, то необходимо рассматривать уже комплексные кристаллографические группы Кокстера, а именно группы отражений комплексного пространства с компактной фундаментальной областью, такие что в некотором базисе матрицы, соответствующие элементам групп, вещественны. Эти группы были исследованы и описаны И.Н. Бернштейном и О.В. Шварцманом в [5], где было показано, что комплексные кристаллографические группы Кокстера классифицируются диаграммами Дынкина и параметром τ, принадлежащим верхней комплексной полуплоскости. Э. Лойенга заметил, что такие группы отражений согласованы с действием группы $SL_2(\mathbb{Z})$, а потому можно рассмотреть их полупрямое произведение и получить группу, называемую группой Якоби.

При переходе к комплексным кристаллографическим группам Кокстера, что было изучено в [5], [16], [17] и [15], теряет смысл поиск полностью инвариантных функций, так как факторпространство в таком случае – комплексный тор, на котором каждая голоморфная функция постоянна. Вместо этого нужно изучать действие комплексной кристаллографической группы на некотором подходящем расслоении и искать инвариантные сечения. В таком случае мы получим свободную алгебру, порождённую $n+1$ тета-функцией.

Теория инвариантнов для форм Якоби впервые была затронута в книге М. Айхлера и Д. Загье [9], где был изучен случай решётки A_1. Полный аналог теоремы Шевалле для форм Якоби был получен К. Виртмюллером в [23]. В его работе рассмотрены структуры алгебр слабых форм Якоби, связанных со всеми системами корней, кроме E_8. Система корней E_8 в данном контексте возникла в недавней статье Х. Ванга [22] и, как оказалось, в этом случае алгебра форм Якоби не является полиномиальной. Доказательство К. Виртмюллера не содержит прямого построения всех образующих соответствующих алгебр, однако их явный вид может быть крайне полезен в приложениях. Одним из таких приложений является построение плоских координат на подходящих фробениусовых многообразиях (см. [18], [19], [8] §4, [21], [3] и [4]). Так, например, в статьях М. Бертолы [3] и [4] были независимо разобраны случаи систем корней A_n, B_n и G_2, а И. Сатаке в [21] был рассмотрен случай системы корней E_6.

На данный момент открытыми случаями оставались системы корней C_n, D_n и F_4, которым и посвящена эта диссертация. А именно, мы доказываем теорему Виртмюллера для этих систем корней и приводим явную конструкцию образующих соответствующих алгебр слабых форм Якоби. Оказывается, что все эти три типа систем корней тесно связаны между собой, и основной сложностью является конструкция трёх главных образующих индекса 1 и весов -4, -2 и 0 для систем корней типа D_n, а также построение образующих для F_4. Помимо нового доказательства теоремы Виртмюллера, мы приводим примеры интересных дифференциальных уравнений, связывающих упомянутые образующие для систем корней D_n.

Отметим также, что слабые формы Якоби, инвариантные относительно полной ортогональной группы для D_n с $2 \leqslant n \leqslant 8$, соответствуют D_8-башне строго рефлективных модулярных форм на ортогональных группах $O^+(2U \oplus D_n(-1))$ (см. [11]). Строго рефлективные модулярные формы этой башни для ортогональных групп $\widetilde{O}^+(2U \oplus D_n(-1))$ $(3 \leq n \leq 8)$ определяют лоронцевы алгебры Каца-Муди, соответствующие BCOV (Bershadsky-Cecotti-Ooguri-Vafa)-аналитическому кручению (см. [11, 24]).

Также существует D_8-башня рефлективных автоморфных дискриминантов, начинающаяся с модулярной формы Борчердса-Энриквеса

$$\Phi_4 \in M_4(O^+(U \oplus U(2) \oplus E_8(-2)), \chi_2) = M_4(O^+(U \oplus U \oplus D_8(-1)), \chi_2),$$

которая является дискриминантом пространства модулей поверхностей Энриквеса (см. [6, 14] и [11, §5] или [12]).

Основные методы в нашей работе – построение образующих с использованием тета-функций Якоби, модулярных форм, а также модулярного дифференциального оператора. От образующих, которые мы строим, мы требуем более сильное условие, чем предполагает теорема Виртмюллера. А именно, мы строим их таким образом, чтобы они удовлетворяли так называемому "условию башни", то есть при ограничении всех образующих на решётку меньшего ранга мы должны получать также все образующие для соответствующей подрешётки (при этом некоторые исходные образующие обращаются в ноль). Построив образующие, обладающие таким условием, мы можем индуктивным образом доказать алгебраическую независимость и полноту набора полученных слабых форм Якоби, основываясь на базисном случае решётки A_1, который был разобран ещё в [9]. Но мы также приводим своё короткое доказательство этого факта, основанное на изучении дивизоров предполагаемых образующих.

Что касается дальнейших результатов, помимо приложений в теории фробениусовых многообразий, одним из направлений видится изучение t-деформаций автоморфных дискриминантов и их применение в геометрии и физике. Как известно, одна из чётных тета-функций Зигеля рода 2 является дискриминантом пространства модулей абелевых поверхностей и может быть представлена в виде произведения Борчердса [13]. Его t-деформация может быть построена по некоторой определённой процедуре, двойственной процедуре, описанной в [10], что само по себе является новым результатом. Далее это можно обобщить на сингулярные формы на решётке $U \oplus U \oplus D_8$ (здесь U – стандартная гиперболическая решётка сигнатуры $(1,1)$). После этого было бы интересно исследовать аналогичные конструкции для специальных произведений Борчердса, автоморфных дискриминантов пространства версальных деформаций исключительных особенностей Арнольда.

Другим направлением являются модулярные дифференциальные операторы на ортогональной группе $O(2,n)$. Основными целями здесь являются построение параболических форм малых весов для изучения геометрического типа пространств модулей, в частности пространства модулей гиперкэлеровых многообразий, и поиск дифференциальных уравнений, которым удовлетворяют образующие полиномиальных колец модулярных форм. Например, модулярных форм для группы $U \oplus U \oplus D_8$.

1 Основные результаты

К. Виртмюллер в [23] доказал следующий результат.

Теорема 1.1. *В случае каждой системы корней ранга n, кроме E_8, соответствующие формы Якоби образуют свободную алгебру над кольцом модулярных форм с $n+1$ образующей φ_j веса $-k(j)$ и индекса $m(j)$, причём $m(0)=1$, а остальные $m(j)$ – коэффициенты в разложении вектора, дуального к максимальному корню дуальной системы корней по базису исходной системы корней. Что же касается весов данных форм, $k(0)=0$, а остальные $k(j)$ соответствуют степеням инвариантных относительно действия группы Вейля полиномов. Иначе говоря, показателям для системы корней, увеличенным на 1.*

Для каждой системы корней таким образом мы имеем следующие решётки, группы Вейля и веса и индексы образующих.

R	L	W	$(k(j), m(j))$
A_n	A_n	$W(A_n)$	$(0,1),(j,1): 2\leqslant j\leqslant n+1$
B_n	nA_1	$W(nA_1)$	$(2j,1): 0\leqslant j\leqslant n$
C_n	D_n	$W(C_n)$	$(0,1),(2,1),(4,1),(2j,2): 3\leqslant j\leqslant n$
D_n	D_n	$W(D_n)$	$(0,1),(2,1),(4,1),(n,1),(2j,2): 3\leqslant j\leqslant n-1$
E_6	E_6	$W(E_6)$	$(0,1),(2,1),(5,1),(6,2),(8,2),(9,2),(12,3)$
E_7	E_7	$W(E_7)$	$(0,1),(2,1),(6,2),(8,2),(10,2),(12,3),(14,3),(18,4)$
G_2	A_2	$O(A_2)$	$(0,1),(2,1),(6,2)$
F_4	D_4	$O(D_4)$	$(0,1),(2,1),(6,2),(8,2),(12,3)$

Замечание 1.2. *Группа Вейля для системы корней C_n является полной ортогональной группой для системы корней D_n, если $n\neq 4$. Поэтому, чтобы не перегружать таблицу рассмотрением отдельных случаев, мы пишем в ней $W(C_n)$.*

Диссертация посвящена в основном системам корней типа C_n, D_n и F_4. Сформулируем основные результаты данной работы, которые будут доказаны для этих решёток.

Теорема 1.3. *Множество всех W-инвариантных слабых форм Якоби, связанных с системой корней D_n, имеет структуру свободной алгебры над кольцом модулярных форм со следующими образующими:*

$$J^W_{*,*}(D_2) = M_*[\varphi^{D_2}_{0,1}, \varphi^{D_2}_{-2,1}, \varphi^{D_2}_{-4,1}],$$

$$J^W_{*,*}(D_3) = M_*[\varphi^{D_3}_{0,1}, \varphi^{D_3}_{-2,1}, \varphi^{D_3}_{-4,1}, \omega^{D_3}_{-3,1}],$$

$$J^W_{*,*}(D_4) = M_*[\varphi^{D_4}_{0,1}, \varphi^{D_4}_{-2,1}, \varphi^{D_4}_{-4,1}, \varphi^{D_4}_{-6,2}, \omega^{D_4}_{-4,1}],$$

и

$$J^W_{*,*}(D_n) = M_*[\varphi^{D_n}_{0,1}, \varphi^{D_n}_{-2,1}, \varphi^{D_n}_{-4,1}, \varphi^{D_n}_{-6,2}, \ldots, \varphi^{D_n}_{-2n+2,2}, \omega^{D_n}_{-n,1}]$$

для $5 \leqslant n$. Более того все формы Якоби образуют следующую башню:

$$\begin{array}{cccccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\varphi^{D_n}_{0,1}, & \varphi^{D_n}_{-2,1}, & \varphi^{D_n}_{-4,1}, & \varphi^{D_n}_{-6,2}, & \cdots & \cdots & \varphi^{D_n}_{-2n+2,2}, & (\omega^{D_n}_{-n,1})^2 \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
\varphi^{D_{n-1}}_{0,1}, & \varphi^{D_{n-1}}_{-2,1}, & \varphi^{D_{n-1}}_{-4,1}, & \varphi^{D_{n-1}}_{-6,2}, & \cdots & \varphi^{D_{n-1}}_{-2n+4,2}, & (\omega^{D_{n-1}}_{-n,1})^2 & 0, \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\
\varphi^{D_4}_{0,1}, & \varphi^{D_4}_{-2,1}, & \varphi^{D_4}_{-4,1}, & \varphi^{D_4}_{-6,2}, & (\omega^{D_4}_{-4,1})^2, & 0, & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & \\
\varphi^{D_3}_{0,1}, & \varphi^{D_3}_{-2,1}, & \varphi^{D_3}_{-4,1}, & (\omega^{D_4}_{-3,1})^2, & 0, & & & \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & & & \\
\varphi^{D_2}_{0,1}, & \varphi^{D_2}_{-2,1}, & \varphi^{D_2}_{-4,1}, & 0, & & & &
\end{array}$$

где стрелки обозначают ограничения с D_n на D_{n-1} посредством зануления последней координаты и умножения на ненулевую константу.

Также все указанные выше формы, кроме $\omega^{D_n}_{-n,1}$, инвариантны относительно полной ортогональной группы решётки D_n при $n \neq 4$, а сама форма $\omega^{D_n}_{-n,1}$ анти-инвариантна. В случае же $n = 4$ инвариантность и анти-инвариантность рассматривается относительно группы $O'(D_4)$, которая действует на координаты перестановками и сменой знака у произвольного числа координат.

Из этой теоремы мы получаем немедленное следствие.

Следствие 1.4. *При $n \geqslant 3$ множество всех W-инвариантных слабых форм Якоби, связанных с системой корней C_n, образует свободную алгебру над кольцом модулярных форм с образующими следующего вида: при $n \geqslant 5$:*

$$J^W_{*,*}(C_n) = M_*[\varphi^{D_n}_{0,1}, \varphi^{D_n}_{-2,1}, \varphi^{D_n}_{-4,1}, \varphi^{D_n}_{-6,2}, \ldots, \varphi^{D_n}_{-2n+2,2}, (\omega^{D_n}_{-n,1})^2;$$

при $n = 4$:

$$J^W_{*,*}(C_4) = M_*[\varphi^{D_4}_{0,1}, \varphi^{D_4}_{-2,1}, \varphi^{D_4}_{-4,1}, \varphi^{D_4}_{-6,2}, (\omega^{D_4}_{-4,1})^2];$$

при $n = 3$:

$$J^W_{*,*}(C_3) = M_*[\varphi^{D_3}_{0,1}, \varphi^{D_3}_{-2,1}, \varphi^{D_3}_{-4,1}, (\omega^{D_3}_{-3,1})^2].$$

Замечание 1.5. *Для системы корней D_4 имеются две образующие веса -4, а именно, $\varphi_{-4,1}$, которая есть для любого n, и $\omega_{-4,1}$. Противоречия в этом нет.*

Замечание 1.6. *Как видно из условия теоремы, мы требуем от образующих согласованности с операцией ограничения на подрешётку. Это требование далее в работе мы будем называть "условием башни", тем самым подчёркивая, что соответствующие формы Якоби образуют башню, как и сами решётки:*

$$\begin{array}{c} \cdots \\ \downarrow \\ D_n \\ \downarrow \\ D_{n-1} \\ \downarrow \\ \cdots \\ \downarrow \\ D_4 \\ \downarrow \\ D_3 \simeq A_3 \\ \downarrow \\ D_2 \simeq A_1 \oplus A_1 \end{array}$$

Наконец, для системы корней F_4 мы доказываем следующую теорему.

Теорема 1.7. *Кольцо слабых форм Якоби чётного индекса, соответствующих решётке F_4 и инвариантных относительно группы Вейля $W(F_4)$, имеет структуру свободной алгебры над кольцом модулярных форм. А именно,*

$$J^{w,W}_{*,2*}(F_4) \simeq J^{w,W}_{*,*}(F_4(2)) = M_*[\varphi^{F_4}_{0,1}, \varphi^{F_4}_{-2,1}, \varphi^{F_4}_{-6,2}, \varphi^{F_4}_{-8,2}, \varphi^{F_4}_{-12,3}] \simeq J^{w,O}_{*,*}(D_4).$$

Замечание 1.8. *Основная сложность в переходе от решётки D_4 к решётке F_4 заключается в том, что форма $\varphi_{-4,1}$, основная в конструкции $W(F_4)$-инвариантных форм индекса 1 (см. [2]) не является $W(F_4)$-инвариантной, и усреднение по $W(F_4)/W(D_4) \simeq S_3$ этой формы, как можно проверить прямым вычислением, тождественно равно нулю.*

2 Дифференциальные уравнения на формы Якоби для системы корней D_n

Для построения образующих в диссертации важную роль сыграл модулярный дифференциальный оператор H_k:

$$H_k := H + \left(\frac{\operatorname{rk} L}{2} - k\right) E_2 \times,$$

где H – оператор теплопроводности

$$H := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l \in L^\vee} \left(12n - \frac{6}{m}(l,l)\right) a(n,l) q^n \zeta^l.$$

В диссертации мы заметили, что для решётки D_4

$$H_{-4}(\varphi_{-4,1}^{D_4}) = 0$$

или же

$$H(\varphi_{-4,1}^{D_4}) = 6E_2 \varphi_{-4,1}^{D_4}.$$

Возникает вопрос, имеются ли подобные интересные дифференциальные уравнения или системы дифференциальных уравнений на образующие индекса 1 для решёток другого ранга как относительно модулярного дифференциального оператора? Например, в духе системы дифференциальных уравнений Рамануджана для дифференциального оператора для модулярных форм.

Легко непосредственно проверить, что

$$H_{-n}(\omega_{-n,1}^{D_n}) = 0,$$

поэтому мы не будем рассматривать эту образующую в наших уравнениях.

Оказывается, что для форм $\varphi_{-4,1}^{D_n}$ и $\varphi_{0,1}^{D_n}$ можно получить следующие дифференциальные уравнения порядка 3 по оператору теплопроводности:

$$\begin{gathered} 4H_0(H_{-2}(H_{-4}(\varphi_{-4,1}))) - (3n^2 - 12n + 32)E_4 H_{-4}(\varphi_{-4,1}) + \\ +(n-4)^2(n+8)E_6 \varphi_{-4,1} = 0, \end{gathered}$$

и

$$4H_4(H_2(H_0(\varphi_{0,1}))) - (3n^2 + 12n + 32)E_4 H_0(\varphi_{0,1}) + n^2(n+12)E_6 \varphi_{0,1} = 0.$$

В случае же формы $\varphi_{-2,1}^{D_n}$ получить дифференциальное уравнение третьего порядка по модулярному дифференциальному оператору нельзя, минимальный возможный порядок равен 4:

$$4H_4(H_2(H_0(H_{-2}(\varphi_{-2,1}^{D_n})))) - (3n^2 - 12n + 224)E_4H_0(H_{-2}(\varphi_{-2,1}^{D_n}))+$$

$$+(n^3+24n^2-144n+384)E_6H_{-2}(\varphi_{-2,1}^{D_n})-12(n-8)(n-2)(n+4)E_4^2\varphi_{-2,1}^{D_n} = 0.$$

Также имеется система дифференциальных уравнений на все три образующие.

$$\begin{cases} 4H_{-2}(\varphi_{-2,1}^{D_n}) - 3n\varphi_{0,1}^{D_n} - (n-8)E_4\varphi_{-4,1}^{D_n} = 0 \\ 3H_0(\varphi_{0,1}^{D_n}) - 2nE_4\varphi_{-2,1}^{D_n} - nE_6\varphi_{-4,1}^{D_n} = 0 \\ H_{-4}(\varphi_{-4,1}^{D_n}) - (n-4)\varphi_{-2,1}^{D_n} = 0 \end{cases}$$

В терминах оператора теплопроводности эта система может быть переписана как

$$\begin{cases} 2H(\varphi_{-4,1}^{D_n}) = 2(n-4)\varphi_{-2,1}^{D_n} - (n+8)E_2\varphi_{-4,1}^{D_n} \\ 4H(\varphi_{-2,1}^{D_n}) = 3n\varphi_{0,1}^{D_n} - 2(n+4)E_2\varphi_{-2,1}^{D_n} + (n-8)E_4\varphi_{-4,1}^{D_n} \\ 6H(\varphi_{0,1}^{D_n}) = -3nE_2\varphi_{0,1}^{D_n} + 4nE_4\varphi_{-2,1}^{D_n} - 2nE_6\varphi_{-4,1}^{D_n} \end{cases}$$

По результатам исследований опубликовано две статьи.

• Д. В. Адлер, *Структура алгебры форм Якоби для системы корней* F_4. Функц. анализ и его прил., **54**:3 (2020), 8–25; Funct. Anal. Appl., **54**:3 (2020), 155–168.

• D. Adler, V. Gritsenko, *The* D_8*-tower of weak Jacobi forms and applications.* (Д.В. Адлер, В.А. Гриценко, D_8*-башня слабых форм Якоби и приложения.*) J. Geom. Phys., 150, Article ID 103616 (2020), 12 p.

Список литературы

[1] Д. В. Адлер, *Структура алгебры форм Якоби для системы корней* F_4. Функц. анализ и его прил., **54**:3 (2020), 8–25; Funct. Anal. Appl., **54**:3 (2020), 155–168.

[2] D. Adler, V. Gritsenko, *The* D_8*-tower of weak Jacobi forms and applications.* J. Geom. Phys., 150, Article ID 103616 (2020), 12 p.

[3] M. Bertola, *Frobenius manifold structure on orbit space of Jacobi group; Part I.* Differential Geom. Appl. **13** (2000), 19–41.

[4] M. Bertola, *Frobenius manifold structure on orbit space of Jacobi group; Part II.* Differential Geom. Appl. **13 (3)** (2000), 213–233.

[5] И.Н. Бернштейн, О.В. Шварцман, *Теорема Шевалле для комплексных кристаллографических кокстеровских групп.* Функц. анализ и его прил., **12:4** (1978), 79–80.

[6] R.E. Borcherds, *The moduli space of Enriques surfaces and the fake monster Lie superalgebra.* Topology **35** (1996), 699–710.

[7] C. Chevalley, *Invariants of finite groups generated by reflections.* Amer. J. Math. **77** (1955), 778–782

[8] B.N. Dubrovin, *Geometry of 2D topological field theories in Integrable Systems and Quantum Groups.* Montecatini, Terme 1993, ed. Francaviglia, M. and Greco, S.. Springer lecture notes in mathematics, **1620**, Springer-Verlag 1996, 120–348.

[9] M. Eichler, D. Zagier, *The theory of Jacobi forms.* Progress in Mathematics **55**. Birkhäuser, Boston, Mass. (1985).

[10] V. A. Gritsenko, *Blow up of Cohen-Kuznetzov operator and an automorphic problem of K. Saito*. Proc. of RIMS Symposium Automorphic Representations, Automorphic Forms, L-functions, and Related Topics, Kokyuroki **1617** (2008), pp. 83–97.

[11] V. Gritsenko, *Reflective modular forms and their applications.* Russian Math. Surveys **73:5** (2018), 797–864.

[12] V. Gritsenko, *Reflective modular forms in algebraic geometry.* arXiv: 1005.3753.

[13] V. A. Gritsenko, V. V. Nikulin, *Igusa modular forms and "the simplest" Lorentzian Kac-Moody algebras.* Mat. Sb., **187:11** (1996), 27–66; Sb. Math., **187:11** (1996), 1601–164.

[14] S. Kondo, *The moduli space of Enriques surfaces and Borcherds products.* J. Algebraic Geometry **11** (2002), 601–627.

[15] V. Kac, D. Peterson, *Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms.* Adv. in Math., **53** (1984), 125–264.

[16] E. Looijenga, *Root Systems and Elliptic Curves.* Inv. Mathem. **38** (1976), 17–32.

[17] E. Looijenga, *Invariant Theory for Generalized Root Systems.* Inv. Mathem. **61** (1980), 1–32.

[18] K. Saito, *Extended Affine Root Systems I (Coxeter transformations).* Publ. RIMS, **21** (1985), 75–179.

[19] K. Saito, *Extended Affine Root Systems II (Flat Invariants).* Publ. RIMS, **26** (1990), 15–78.

[20] K. Sakai, *E_n Jacobi forms and Seiberg-Witten curves.* Commun. Number Theory Phys. **13** (2019), no. 1, 53–80.

[21] I. Satake *Flat Structure for the Simple Elliptic Singularity of Type $\widetilde{E}_6$ and Jacobi Form.* Proc. Japan Acad., **69**, Ser. A (1993) No. 7, 247–251.

[22] H. Wang, *Weyl invariant E_8 Jacobi forms.* arXiv:1801.08462

[23] K. Wirthmüller, *Root systems and Jacobi forms.* Comp. Math. **82** (1992), 293–354.

[24] K.-I. Yoshikawa, *Calabi–Yau threefolds of Borcea–Voisin, analytic torsion, and Borcherds products.* “From probability to geometry II Astérisque **328** (2009), 355–393.