Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Международная лаборатория динамических систем и приложений

На правах рукописи

Ноздринова Елена Вячеславовна

О КЛАССАХ УСТОЙЧИВОЙ ИЗОТОПИЧЕСКОЙ СВЯЗНОСТИ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ДИФФЕОМОРФИЗМОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Починка Ольга Витальевна

Нижний Новгород – 2021

Проблема существования дуги с не более, чем счетным (конечным) числом бифуркаций, соединяющей структурно устойчивые системы (системы Морса-Смейла) на многообразиях, вошла в список пятидесяти проблем Палиса-Пью [26] под номером 33.

В 1976 году Ш. Ньюхаусом, Дж. Палисом, Ф. Такенсом [16] было введено понятие устойчивой дуги, соединяющей две структурно устойчивые системы на многообразии. Согласно [16], гладкая дуга φ_t называется *устойчивой*, если она является внутренней точкой класса эквивалентности относительно следующего отношения: дуги φ_t, φ'_t называются *сопряженными*, если существуют гомеоморфизмы $h : [0,1] \to [0,1]$, $H_t : M \to M$ такие, что $H_t\varphi_t = \varphi'_{h(t)}H_t, t \in [0,1]$ и H_t непрерывно зависит от t.

Обозначим через $\mathcal{Q}$ множество гладких дуг $\{\varphi_t\}$, которые начинаются и заканчиваются в диффеоморфизмах Морса-Смейла и любой диффеоморфизм φ_t имеет конечное предельное множество. В работе [15] также установлено, что дуга $\{\varphi_t\} \in \mathcal{Q}$ является устойчивой тогда и только тогда, когда все ее точки являются структурно устойчивыми диффеоморфизмами за исключением конечного числа бифуркационных точек, $\varphi_{b_i}, i = 1, \dots, q$ таких, что:

1) предельное множество диффеоморфизма φ_{b_i} содержит единственную негиперболическую периодическую орбиту, которая является седло-узлом или флипом;

2) диффеоморфизм φ_{b_i} не имеет циклов;

3) инвариантные многообразия всех периодических точек диффеоморфизма φ_{b_i} пересекатся трансверсально;

4) переход через φ_{b_i} является типично проходящей бифуркацией седло-узел или удвоения периода, при этом седло-узловая точка является некритической.

В 1976 году Ш. Ньюхаус и М. Пейшото [17] доказали существование простой дуги между любыми двумя потоками Морса-Смейла. Простота означает, что вся дуга состоит из систем Морса-Смейла за исключением конечного множества точек, в которых векторное поле в определённом смысле наименьшим образом отклоняется от системы Морса-Смейла, а именно, либо содержит единственную негиперболическую точку типа седло-узел, либо единственную траекторию нетрансверсального пересечения инвариантных седловых многообразий (гетероклиническое касание).

Однако результаты Ш. Ньюхауса и М. Пейшото не могут быть напрямую использованы для построения устойчивых дуг между диффеоморфизмами Морса-Смейла. Для этого есть несколько причин. Во-первых, типично диффеоморфизмы Морса-Смейла не включаются в потоки Морса-Смейла (см., например, [3], [5] и обзор [4]). Во-вторых, дискретизация дуги с гетероклиническим касанием не является устойчивой дугой. Второй проблемы удается избежать в силу результата, полученного Ж. Флейтас, а именно она показала, что простую дугу, построенную Ньюхаусом и Пейшото всегда можно заменить на устойчивую. При этом дискретизация такой дуги является устойчивой дугой, соединяющей сдвиги на единицу времени исходных градиентно-подобных потоков.

Для диффеоморфизмов Морса-Смейла, заданных на многообразиях любой размерности известны примеры систем, которые не могут быть соединены устойчивой дугой.

Препятствия к существованию устойчивой дуги появляются уже для сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности S^1. Диффеоморфизмы Морса-Смейла на окружности были подробно изучены А.Г. Майером [13]. Он показал, что эти диффеоморфизмы исчерпывают класс грубых преобразований окружности и характеризуются конечным множеством периодических точек и рациональным числом вращения. При этом существуют диффеоморфизмы Морса-Смейла с любым рациональным числом вращения. Поскольку число вращения непрерывно меняется при непрерывном изменении гомеоморфизма (см., например, [11]), то любая дуга, связывающая диффеоморфизмы Морса-Смейла с различными числами вращения на окружности содержит континуум бифуркаций и, следовательно, не является устойчивой.

В размерности два появляются дополнительные препятствия к существованию устойчивых дуг между изотопными диффеоморфизмами.

Д. Пикстон [27] установил факт существования энергетической функции Морса $\Phi_f : M^2 \to \mathbb{R}$ у любого диффеоморфизма Морса-Смейла f на поверхности M^2. Используя множества уровня этой функции П. Бланшар [1] построил специальное разбиение несущей поверхности линиями уровня функции Φ_f, связанное с понятием нечетности периодической орбиты и доказал, что согласованность таких разбиений для разных диффеоморфизмов является необходимым условием существования устойчивой дуги между ними. Достаточные условия существования такой дуги в работе [1] не рассматривались.

Также припятствием может служить наличие гетероклинических пересечений. В работе [14] Ш. Матсумото показал, что двумерный тор $\mathbb{T}^2$ допускает изотопные диффеоморфизмы Морса-Смейла, которые не могут быть соединены устойчивой дугой. Даннный результат основан на следующем понятии.

Периодические точки p, q диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ называются *тривиально связанными*, если существует кривая $c \subset M^n$ такая, что $\partial c = \{q\} - \{p\}$ и для некоторого целого N такого, что $f^N(p) = p$ и $f^N(q) = q$, замкнутая кривая $f^N(c) - c$ гомотопна нулю. В противном случае точки p, q называются *нетривиально связанными.* Если все периодические точки диффеоморфизма f тривиально связаны, то f называется *тривиальным*, в противном случае *нетривиальным.*

Ш. Матсумото построил два изотопных тождественному диффеоморфизма Морса-Смейла $f_0, f_1 : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$. Один из них f_0 является сдвигом на единицу времени градиентного потока типичной функции Морса. Другой f_1 является композицией f_0 с двумя противоположно направленными вращениями Дэна. Нетрудно убедиться, что диффеоморфизм f_0 является тривиальным, а f_1 – нетривиальным. Результат Матсумото заключается в том, что диффеоморфизмы f_0, f_1 двумерного тора $\mathbb{T}^2$ не соединяются устойчивой дугой.

Обобщая результат Матсумото, в работе [9] построены тривиальный f_0 и нетривиальный f_1 изотопные тождественному диффеоморфизмы Морса-Смейла на многообразии $S^{n-1}\times S^1, n\geq 3$. Как и в примере Матсумото, диффеоморфизм f_0 является декартовым произведением диффеоморфизмов источник-сток на сфере S^{n-1} и на окружности S^1. Диффеоморфизм f_1 получается из f_0 взятием его композиции с многомерным вращением Дэна вокруг $cl(W^u_{\sigma_1})$, которое диффеотопно тождественному отображению. Полученные диффеоморфизмы f_0, f_1 многообразия $S^{n-1}\times\mathbb{S}^1, n\geq 3$ не соединяются устойчивой дугой.

В размерности $n\geq 3$ известны и другие препятствия к существованию устойчивой дуги между изотопными диффеоморфизмами Морса-Смейла, связанные с такими эффектами многомерной динамики, как дикое вложение седловых сепаратрис (см. работы [7], [2]), существование нескольких гладких структур на многообразии (см. работу [2]).

В связи с наличием препятствий к существованию устойчивых дуг между изотопными диффеоморфизмами Морса-Смейла возникает естественный вопрос описания компонент устойчивой изотопической связности. Настоящая работа появящена классификации содержательных классов диффеоморфизмов на поверхностях с точностью до устойчивой изотопической связности.

Изложение материала разбито на семь глав. **В главе 1** вводятся необходимые понятия и факты, **во 2 главе** изложен обзор имеющихся по данной тематике результатов. Остальные главы содержат подробное изложение результатов по классификации градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей с точностью до устойчивой изотопической связности.

Динамика таких диффеоморфизмов тесно связана с периодическими преобразованиями поверхностей, классифицированных Я. Нильсеном [18] для поверхностей рода большего нуля и Б. Керекьярто [12] для сферы. Из результатов Б. Керекьярто следует, что классификация периодических преобразований двумерной сферы базируется на свойствах гомеоморфизмов окружности с рациональным числом вращения, к которым относятся диффеоморфизмы Морса-Смейла на окружности.

В главе 3 получена классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла на окружности относительно отношения устойчивой изотопической связности. Из результатов А.Г. Майера [13] следует, что эти диффеоморфизмы (обозначим их множество через G^1) исчерпывают класс грубых преобразований окружности и имеют простую динамику, классификация которой с точностью до топологической сопряженности описывается следующими образом.

Разобьем множество G^1 на два подкласса G^1_+ и G^1_-, состоящих из сохраняющих ориентацию и меняющих ориентацию диффеоморфизмов, соответственно. Тогда:

1. Для каждого диффеоморфизма $f\in G^1_+$ множество периодических точек $Per(f)$ состоит из $2n, n\in\mathbb{N}$ периодических орбит, каждая из которых имеет период m и число вращения $\frac{k}{m}$, где $k=0$ для $m=1$, либо $k\in\{1,\dots,m-1\}$ для

$m > 1$ и числа (m, k) взаимно просты. Диффеоморфизмы $f; f' \in G^1_+$ с параметрами $n, m, k; n', m', k'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $n = n', m = m'$ и верно одно из следующих утверждений:

- $k = k'$,
- $k = m' - k'$.

2. Для каждого диффеоморфизма $f \in G^1_-$ множество периодических точек $Per(f)$ состоит из $2q, q \in \mathbb{N}$ периодических точек, две из которых являются неподвижными, а другие имеют период 2. Положим $\nu = -1;\ \nu = 0; \nu = +1$, если его неподвижные точки являются источниками; стоком и источником; стоками, соответственно. Диффеоморфизмы $f; f' \in G^1_-$ с параметрами $q, \nu; q', \nu'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $q = q'$ и $\nu = \nu'$.

Основным результатом главы 3 является следующая теорема.

Теорема 1. *Все грубые меняющие ориентацию диффеоморфизмы окружности, лежат в одной компоненте устойчивой изотопической связности, тогда как устойчивый изотопический класс грубого преобразования окружности, сохраняющего ориентацию, полностью определяется числом вращения Пуанкаре.*

Идея доказательства теоремы состоит в построении модельных диффеоморфизмов $\Phi_{n,m,k}$, $\Psi_{q,\nu}$ в каждом классе топологической сопряженности систем из G^1_+, G^1_-, соответственно. Далее строится дуга без бифуркаций, соединяющая произвольный диффеоморфизм в данном классе топологической сопряженности с соответствующим модельным. Таким образом, задача сводится к нахождению классов устойчивой изотопической связности модельных диффеоморфизмов.

Для сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $\Phi_{n,m,k}$, $n > 1$ число периодических орбит может быть уменьшено на одну пару путем построения дуги, типично проходящей через некритическую седло-узловую бифуркацию. Откуда следует, что диффеоморфизм $\Phi_{n,m,k}$ соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом $\Phi_{1,m,k}$, имеющим такое же число вращения. Поскольку число вращения является топологическим инвариантом диффеоморфизма окружности, непрерывно зависящим от параметра дуги, то любая дуга, связывающая сохраняющие ориентацию диффеоморфизмы f, f' с различными числами вращения, не является устойчивой, поскольку содержит континуум бифуркаций, что противоречит определению устойчивой дуги.

Для меняющего ориентацию диффеоморфизма $\Psi_{q,0}$ число периодических орбит является четным, что как и в ориентируемом случае позволяет соединить его с диффеоморфизмом источник-сток $\Psi_{2,0}$ дугой с $(q-2)$-мя типично проходящими некритическими седло-узловыми бифуркациями. Для диффеоморфизма $\Psi_{q,\pm 1}$ число q является нечетным и $q > 2$. Описанная выше техника позволяет соединить любой такой диффеоморфизм с диффеоморфизмом $\Psi_{3,\pm}$, который в свою очередь соединяется устойчивой дугой с диффеоморфизмом источник-сток $\Psi_{2,0}$ дугой с типично проходящей бифуркацией удвоения периода.

Полное изложение результатов данной главы опубликовано в статье [21].

В главе 4 приводятся общие динамические свойства градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей. Центральное место в этой главе занимает результат о представлении динамики любого такого диффеоморфизма в виде глобальной дуальной пары аттрактор-репеллер, для которой пространство блуждающих орбит является связным.

Именно, рассмотрим сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм f, заданный на гладкой ориентируемой замкнутой поверхности M^2.

Обозначим через Ω^0_f, Ω^1_f, Ω^2_f множество стоков, седел и источников диффеоморфизма f. Для любого (возможно пустого) f-инвариантного множества $\Sigma \subset \Omega^1_f$ положим

$$A_\Sigma = \Omega^0_f \cup W^u_\Sigma,\ R_\Sigma = \Omega^2_f \cup W^s_{\Omega^1_f \setminus \Sigma}.$$

Из работы [6] следует, что это аттрактор и репеллер, которые называются *дуальными*. Положим

$$V_\Sigma = M^2 \setminus (A_\Sigma \cup R_\Sigma),$$

оно называется *характеристическим пространством*. Обозначим через $\hat{V}_\Sigma$ пространство орбит действия диффеоморфизма f на характеристическом пространстве V_Σ. Согласно работе [8], каждая компонента связности многообразия $\hat{V}_\Sigma$ гомеоморфна двумерному тору.

Теорема 2. *Для любого сохраняющего ориентацию градиентно-подобного диффеоморфизма $f : M^2 \to M^2$ существует такое множество Σ, что пространство орбит $\hat{V}_\Sigma$ связно.*

В рамках доказательства рассматривается отдельно случай, когда диффеоморфизм содержит единственную стоковую орбиту, тогда теорема верна для пустого множества Σ. Когда пространство орбит в бассейнах стоков состоит из нескольких компонент связности $\hat{V}_i, i = 1, \dots, l$, а именно из l двумерных торов, то с точностью до их перенумерации можно найти последовательность седловых точек $\sigma_1, \dots, \sigma_{l-1}$ таких , что неустойчивые сепаратрисы седловой точки σ_j принадлежат $\hat{V}_j, \hat{V}_{j+1}$.

Для любого диффеоморфизма f и множества Σ, удовлетворяющего условиям теоремы 2, положим

$$A_f = A_\Sigma,\ R_f = R_\Sigma,\ V_f = V_\Sigma.$$

Для класса G градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерной сфере S^2 аттрактор и репеллер A_f, R_f можно описать более детально. Для этого заметим, что пространство V_f состоит из m_f попарно не пересекающихся цилиндров и набор не стягиваемых замкнутых кривых, взятых по одной на каждой компоненте, разделяет сферу S^2 на две не пересекающиеся части U и V такие, что

$$f(U) \subset U,\ A_f = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} f^j(U);\ f^{-1}(V) \subset V,\ R_f = \bigcap_{j \in \mathbb{N}} f^{-j}(V).$$

Лемма 4.1 *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ (с точностью до рассмотрения диффеоморфизма f^{-1}) верно следующее:*

1) множество U состоит из $m_f \in \mathbb{N}$ попарно не пересекающихся дисков $D_f, f(D_f), \dots, f^{m_f-1}(D_f)$ таких, что $f^{m_f}(cl\, D_f) \subset int\, D_f$;

2) аттрактор A_f состоит из m_f компонент связности $A, f(A), \dots, f^{m_f-1}(A)$ таких, что $A = \bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} f^{jm_f}(D_f)$ и $f^{m_f}(A) = A$;

3) репеллер R_f является связным.

Обозначим через G^+ подмножество множества G, состоящее из диффеоморфизмов, все седловые точки которых имеют положительный тип ориентации. Положим $G^- = G \setminus G^+$ и обозначим через G_1 подмножество G, состоящее из диффеоморфизмов f, для которых существует неподвижная пара A_f, R_f ($m_f = 1$). Используя топологию двумерной сферы удается установить следующие факты.

Лемма 4.4 *$G^- \subset G_1$.*

Лемма 4.5 *Для любого диффеоморфизма $f \in G^+$ число m_f определено однозначно, то есть не зависит от выбора пары A_f, R_f.*

Таким образом, множество $G^+ \setminus G_1$ представляется в виде попарно не пересекающихся подмножеств

$$G^+ \setminus G_1 = G_2 \dots \cup G_m \cup \dots \qquad (*)$$

таких, что $m_f = m$ для любого диффеоморфизма $f \in G_m$, $m > 1$. Это представление играет ключевую роль в классификации градиенто-подобных диффеоморфизмов с точностью до устойчивой изотопической связности, полученной в главе 6.

В главе 4 также установлен ряд важных свойств, для так называемых, *диффеоморфизмов Палиса*. Они составляют класс P сохраняющих ориентацию градиентно-подобных диффеоморфизмов, заданных на ориентируемой поверхности M^2, в предположении, что все неблуждающие точки f неподвижны и имеют положительный тип ориентации. Этот класс диффеоморфизмов был выделен в работе Дж. Палиса [25], как класс диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхности, включающихся в топологический поток. Для диффеоморфизмов рассматриваемого класса мы построим специальную энергетическую функцию.

Именно, пусть $f \in P$. Пусть L_p – пучок сепаратрис, идущих в узел p и их число равно k_p.

Обозначим $L_k \subset \mathbb{R}^2$ – пучок лучей $l_1, \dots, l_k$, имеющих в полярных координатах (ρ, θ) вид $l_i = \{(\rho, \theta) \in \mathbb{R}^2 : \theta = \theta_i\}$, $\theta_i \in [0, 2\pi)$.

Диффеоморфизм $f \in P$ назовем *каноническим*, если каждая неподвижная точка p диффеоморфизма f обладает локальной картой (U_p, ψ_p) такой, что $p \in U_p, \psi_p(p) = O$ и

1) $\psi_p f \psi_p^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y\right)$ для $p \in \Omega_f^0$,
$\psi_p f \psi_p^{-1}(x, y) = \left(\frac{1}{2}x, 2y\right)$ для $p \in \Omega_f^1$,
$\psi_p f \psi_p^{-1}(x, y) = (2x, 2y)$ для $p \in \Omega_f^2$;

2) $\psi_p(L_p) \subset L_{k_p}$ для любой узловой точки p.

Обозначим через $P_0 \subset P$ класс канонических диффеоморфизмов.

Лемма 4.7 *Для любого диффеоморфизма $g \in P_0$ существует энергетическая функция Φ, линии уровня которой пересекают седловые сепаратрисы не более чем в одной точке.*

Идея построения такой функции основана на существовании локальных энергетических функций Морса в окрестности неподвижных гиперболических точек и регулярном поведении седловых сепаратрис в бассейнах узловых точек.

Полное изложение результатов данной главы опубликовано в статьях [19], [23], [22], [20], [24].

Глава 5 посвящена построению дуг без бифуркаций внутри одного и того же класса топологической сопряженности диффеоморфизма Морса-Смейла. Сформулируем идейно полученные в ней результаты, которые являются техническим фундаментом устойчивой изотопической классификации.

- **Лемма 5.1** Любой диффеморфизм Морса-Смейла $f : M^n \to M^n$ с глобальными аттрактором и репеллером A и R соединяется дугой с любым диффеоморфизмом f_1, совпадающим с f в некоторых окрестностях $U_A \supset A$, $U_R \supset R$ и имеющим проекцию неустойчивых седловых сепаратрис в пространство орбит $(U_A \setminus f(U_A))/f$ объемлюще изотопную соответствующей проекции для диффеоморфизма f.

- **Лемма 5.2** Любой диффеморфизм Морса-Смейла $f : M^n \to M^n$ соединяется с любым диффеоморфизмом f_1, совпадающим с f на неблуждающем множестве и являющимся линейным в некоторой его окрестности.

- **Лемма 5.3** Любой градиентно-подобный диффеоморфизм $f : M^2 \to M^2$, являющийся линейным в некоторой окрестности неблуждающего множества соединяется с диффеоморфизмом f_1, совпадающим с f в этой окрестности и таким, что замыкания инвариантных многообразий всех его седловых точек являются гладкими подмногообразиями.

- **Лемма 5.4** Любой градиентно-подобный диффеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ с аттрактором A, являющимся гладким подмногообразием, соединяется дугой с любым диффеоморфизмом f_1, топологически сопряженным с f на аттракторе A и в некоторой его окрестности.

- **Лемма 5.5** Любой градиентно-подобный диффеоморфизм $f : M^2 \to M^2$, объединение неустойчивых седловых многообразий которого со стоками является гладко вложенным аттрактором A, соединяется с любым диффеоморфизмом f_1, совпадающим с f в некоторой окрестности A и в окрестности источников.

Полное изложение результатов данной главы опубликовано в статьях [20], [24].

В главе 6 изложена полная классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов 2-сферы с точностью до устойчивой изотопической связности.

Рассмотрим окружность S^1, как экватор 2-сферы S^2. Тогда структурно устойчивый диффеоморфизм окружности в точности с двумя периодическими орбитами периода $m \in \mathbb{N}$ и числом вращения $\frac{k}{m}$, может быть продолжен до диффеоморфизма $\phi_{k,m} : S^2 \to S^2$, имеющего два неподвижных источника в северном и южном полюсах.

Обозначим через $C_{k,m}$ компоненту устойчивой изотопической связности диффеоморфизма $\phi_{k,m}$ и через $C^-_{k,m}$ компоненту устойчивой изотопической связности диффеоморфизма $\phi^{-1}_{k,m}$. Обозначим через C_0 компоненту устойчивой изотопической связности диффеоморфизма источник-сток — диффеоморфизма $\phi_0 \in G$ с неблуждающим множеством, состоящим в точности из одного источника и одного стока.

Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 3. *Любой сохраняющий ориентацию градиентно-подобный диффеоморфизм двумерной сферы S^2 принадлежит одной из компонент C_0, $C_{k,m}$, $C^-_{k,m}$, k, $m \in \mathbb{N}$, $k < m/2$, $(k, m) = 1$. При этом:*

- *компоненты C_0, $C_{k,m}$, $C^-_{k,m}$, k, $m \in \mathbb{N}$, $k < m/2$, $(k, m) = 1$ попарно не пересекаются;*
- $C_{k,m} = C_{m-k,m}$, $C^-_{k,m} = C^-_{m-k,m}$, $C_{1,2} = C^-_{1,2} = C_{0,1} = C^-_{0,1} = C_0$.

Заметим, что принадлежность разным классам устойчивой изотопической связности диффеоморфизмов $\phi_{k,m}, \phi_{k',m'}$ для $m = 2^r \cdot q, m' = 2^{r'} \cdot q', q \neq q'$ для целых $r, r' \geq 0$ и натуральных $q \neq q'$ следует из работы [1]. Однако полной классификации в данной работе не приводится.

В основе доказательства теоремы 3 лежит полученное ранее разложение $(*)$. Используя технические леммы главы 5 и связность аттрактора A_f и репеллера R_f для диффеоморфизма $f \in G_1$ строится устойчивая дуга, соединяющая его с диффеоморфизмом ϕ_0. Также используя связность аттрактора A_f диффеоморфизма $f \in G_m$, $m > 1$ и технические леммы главы 5, удается тривиализовать его аттрактор, то есть соединить его устойчивой дугой с диффеоморфизмом g из класса $H_m \subset G_m$, состоящего из диффеоморфизмов g, для которых аттрактор A_g состоит из одной стоковой орбиты периода m.

Далее устанавливается, что для диффеоморфизма g существует седловая орбита $\mathcal{O}_\sigma$ периода m такая, что $cl\, W^u_{\mathcal{O}_\sigma}$ является g-инвариантной замкнутой кривой C_σ и отображение $g|_{C_\sigma}$ топологически сопряжено грубому преобразованию окружности с числом вращения $\frac{k}{m}$. При этом, числа вращения для всех таких окружностей совпадают. Это обстоятельство позволяет соединить диффеоморфизм g устойчивой дугой с диффеоморфизмом, неблуждающее множество которого состоит из одной седловой орбиты $\mathcal{O}_\sigma = \{\sigma, f(\sigma), \dots, f^{m-1}(\sigma)\}$, одной стоковой орбиты $\mathcal{O}_\omega = \{\omega, f(\omega), \dots, f^{m-1}(\omega)\}$ и неподвижных источников α_1, α_2. Используя технические леммы главы 5, полученный диффеоморфизм соединяются дугой без бифуркаций с модельным диффеоморфизмом $\phi_{k,m}$.

Полная классификация модельных диффеоморфизмов $\phi_{k,m}$ отностительно отношения устойчивой изотопической связности существенно опирается на свойство некритичности седло-узловой точки.

Полное изложение результатов данной главы опубликовано в статьях [22], [23].

В главе 7 изложена полная классификация диффеоморфизмов Палиса с точностью до устойчивой изотопической связности. Основным результатом главы является следующий факт.

Теорема 4. *Любые диффеоморфизмы $f, f' \in P$, заданные на одной и той же поверхности M^2 соединяются устойчивой дугой с конечным числом проходящих общим образом некритических седло-узловых бифуркаций.*

Доказательство данного результата основано на построении дуги без бифуркаций соединяющей диффеоморфизм $f \in P$ с некоторым каноническим диффеоморфизмом $g \in P_0$. В силу леммы 4.7 для диффеоморфизма $g \in P_0$ существует энергетическая функция Φ, чье обратное градиентное векторное поле порождает градиентно-подобный поток ϕ_f^τ. Используя линии уровня этой функции строится дуга без бифуркаций, соединяющая g с ϕ_f. В силу существования устойчивой дуги между потоками Морса-Смейла на любом многообразии, диффеоморфизмы $\phi_f, \phi_{f'}$ соединяются дугой с конечным числом седло-узловых бифуркаций.

Для визуализации построенной дуги рассмотрен класс $Q \subset P$ полярных градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерном торе $\mathbb{T}^2$. Идейно эта визуализация является дискретным аналогом метода, примененного Ж. Флейтас в работе [10].

Полное изложение результатов данной главы опубликовано в статьях [20], [24].

По результатам исследований опубликовано восемь статей

- Nozdrinova E., Pochinka O. Stable Arcs Connecting Polar Cascades on a Torus // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2021. Vol. 17. No. 1. P. 23–37. (Ноздринова Е., Починка О. Устойчивые дуги, соединяющие полярные каскады на торе // Нелинейная динамика. 2021. Т. 17. № 1. С. 23–37.)

- Nozdrinova E., Pochinka O. Solution of the 33rd Palis-Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2021. Vol. 41. No. 3. P. 1101–1131. (Ноздринова Е., Починка О. Решение 33-й задачи Палис-Пью для градиенто-подобных диффеоморфизмов двумерной сферы // Дискретные и непрерывные динамические системы. 2021. Т. 41. № 3. С. 1101–1131.)

- Nozdrinova E., Pochinka O. Class of Stable Connectivity of Source-Sink Diffeomorphism on Two-Dimensional Sphere // Journal of Mathematical Sciences.

2020. No. 250. P. 94–108. (Ноздринова Е., Починка О. О классе устойчивой связанности диффеоморфизма источник-сток на двумерной сфере // Журнал математических наук. 2020. № 250. С. 94–108.)

- Ноздринова Е. В., Починка О. В. О решении 33-ей проблемы Палиса-Пью для градиентно-подобных диффеоморфизмов двумерной сферы // Успехи математических наук. 2020. Т. 75. № 2. С. 195–196.

- Medvedev T. V., Nozdrinova E., Pochinka O., Shadrina E. V. On a class of isotopic connectivity of gradient-like maps of the 2-sphere with saddles of negative orientation type // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15. No. 2. P. 199–211. (Медведев Т. В., Ноздринова Е., Починка О., Шадрина Е. В. О классе изотопической связности градиенто-подобных отображений двумерной сферы с седлами отрицательного типа ориентации // Российский журнал нелинейной динамики. 2019. Т. 15. № 2. С. 199–211.)

- Nozdrinova E., Pochinka O., On the existence of a smooth arc without bifurcations joining source-sink diffeomorphisms on the 2-sphere // Journal of Physics: Conference Series. 2018. Vol. 990. No. 1. P. 1–7. (Ноздринова Е., Починка О., О существовании гладкой дуги без бифуркаций, соединяющей диффеоморфизмы источник-сток на 2-сфере // Журнал физики: Серия конференций. 2018. Т. 990. № 1. С. 1–7.)

- Loginova A., Nozdrinova E., Pochinka O. One-dimensional reaction-diffusion equations and simple source-sink arcs on a circle // Nelineinaya Dinamika. 2018. Vol. 14. No. 3. P. 325–330. (Логинова А., Ноздринова Е., Починка О. Одномерные уравнения реакции-диффузии и простые дуги соединяющие источники-стоки на окружности // Нелинейная динамика. 2018. Т. 14. № 3. С. 325–330.)

- Nozdrinova E. Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2018. Vol. 14. No. 4. P. 543–551. (Ноздринова Е. Число вращения как полный топологический инвариант простого изотопического класса грубых преобразований окружности // Журнал нелинейной динамики. 2018. Т. 14. № 4. С. 543–551.)

Список литературы

[1] P. R. Blanchard, *Invariants of the NPT isotopy classes of Morse-Smale diffeomorphisms of surfaces*, Duke Mathematical Journal, 47:1 (1980), 33–46.

[2] Х. Бонатти, В. З. Гринес, В. С. Медведев, О. В. Починка, *Бифуркации диффеоморфизмов Морса–Смейла с дико вложенными сепаратрисами*, Динамические си-

стемы и оптимизация, Сборник статей. К 70-летию со дня рождения академика Дмитрия Викторовича Аносова, Тр. МИАН,Наука, М., 256 (2007), 54–69.

[3] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, В. С. Медведев, О. В. Починка, *О включении в поток диффеоморфизмов Морса–Смейла на многообразиях размерности, большей двух*, Математические заметки, 91:5 (2012), 791–794.

[4] В. З. Гринес, Е. Я. Гуревич, О. В. Починка, *О включении диффеоморфизмов Морса-Смейла в топологический поток*, Современная математика. Фундаментальные направления, 66:2 (2020), 160–181.

[5] V. Grines, E. Gurevich, O. Pochinka, *On Embedding of Multidimensional Morse-Smale Diffeomorphisms into Topological Flows*, Moscow Mathematical Journal, 19:4 (2019), 739–760.

[6] В. З. Гринес, Е. В. Жужома, В. С. Медведев, О. В. Починка, *Глобальные аттрактор и репеллер диффеоморфизмов Морса–Смейла*, Тр. МИАН 271 (2010), 111–133; V. Z. Grines, E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, O. V. Pochinka, *Global attractor and repeller of Morse–Smale diffeomorphisms*, Proc. Steklov Inst. Math., 271 (2010), 103–124.

[7] В. З. Гринес, О. В. Починка, *О простом изотопическом классе диффеоморфизма "источник-сток" на 3-сфере*, Математические заметки, 94:6 (2013), 828–845.

[8] V. Grines, O. Pochinka, S. Van Strien, *On 2-diffeomorphisms with one-dimensional basic sets and a finite number of moduli*, Moscow Mathematical Journal, 16:4 (2016), 727–749.

[9] A. Dolgonosova, E. Nozdrinova, O. Pochinka, *On the obstructions to the existence of a simple arc joining the multidimensional Morse-Smale diffeomorphisms*, Динамические системы, 7(35):2, (2017), 103–111.

[10] G. Fleitas, *Replacing tangencies by saddle-nodes*, Bol. Soc. Brasil. Mat., 8:1 (1977), 47–51.

[11] А. Б. Каток, Б. Хасселблат,*Введение в современную теорию динамических систем* / пер. с англ. А. Кононенко при участии С. Ферлегера. — М.: Факториал, (1999), 768.

[12] B. von Kerekjarto, *Uber die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelflache* Math. Ann, 80:1 (1919), 36–38.

[13] A. G. Mayer, *Rough transformation of a circle to a circle*, Sci. Notes Gorkiy State Univ., 12 (1939) 215–229.

[14] S. Matsumoto, *There are two isotopic Morse-Smale diffeomorphisms which cannot be joined by simple arcs*, Inventiones mathematical, 51 (1979), 1–7.

[15] S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, *Bifurcations and stability of families of diffeomorphisms*, Publications mathematiques de l' I.H.E.S, 57 (1983), 5–71.

[16] S. Newhouse, J. Palis, F. Takens, *Stable arcs of diffeomorphisms*, Bull. Amer. Math. Soc., 82:3 (1976), 499–502.

[17] S. Newhouse, M. Peixoto, *There is a simple arc joining any two Morse-Smale fows*, Asterisque, 31 (1976), 15–41.

[18] J. Nielsen, *Die struktur periodischer transformationen von flachen*, Math.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk. 15 (1937).

[19] Е. В. Ноздринова, *Существование связного характеристического пространства у градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей*, Журнал Средневолжского математического общества, 19:2 (2017), 91–97.

[20] E. Nozdrinova, *On a stable arc connecting Palis diffeomorphisms on a surface*, Динамические системы, 10(38):2 (2020), 139–148.

[21] E. Nozdrinova, *Rotation number as a complete topological invariant of a simple isotopic class of rough transformations of a circle*, Russian Journal of Nonlinear Dynamics, 14:4 (2018), 543–551.

[22] Е. В. Ноздринова, О. В. Починка, *О решении 33-ей проблемы Палиса-Пью для градиентно-подобных диффеоморфизмов двумерной сферы*, Успехи математических наук, 75:2 (2020), 195–196.

[23] E. Nozdrinova, O. Pochinka, *Solution of the 33rd Palis-Pugh problem for gradient-like diffeomorphisms of a two-dimensional sphere*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, 41:3 (2021), 1101–1131.

[24] E. Nozdrinova, O. Pochinka, *Stable arcs connecting polar cascades on a torus*, Russian Journal of Non-linear Dynamics, (2021).

[25] J. Palis,*On Morse-Smale dynamical systems*, Topology, 8:4 (1969), 385–404.

[26] J. Palis, C. Pugh, *Fifty problems in dynamical systems*, Lecture Notes in Math., 468 (1975), 345–353.

[27] D. Pixton, *Wild unstable manifolds*, Topology, 16:2 (1977), 167–172.