Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Григорий Ривенович Челноков

Перечисление накрытий компактных 3-мерных Евклидовых многообразий

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Осип Владимирович Шварцман

Москва – 2021

Диссертация выполнена на факультете математики федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» .

Результаты диссертации опубликованы в следующих статьях:

- G. Chelnokov, M. Deryagina and A. Mednykh, On the coverings of Euclidean manifolds $\mathbb{B}_1$ and $\mathbb{B}_2$ (Перечисление накрытий Евклидовых многообразий $\mathbb{B}_1$ и $\mathbb{B}_2$), *Comm. Algebra* 45 (2017), no. 4, 1558–1576.

- G. Chelnokov and A. Mednykh, On the coverings of Euclidean manifolds $\mathbb{G}_2$ and $\mathbb{G}_4$ (Перечисление накрытий Евклидовых многообразий $\mathbb{G}_2$ и $\mathbb{G}_4$), Comm. Algebra 48 (2020), no.7, 2725–2739, doi:10.1080/00927872.2019.1705468.

- G. Chelnokov and A. Mednykh, On the coverings of Euclidean manifolds $\mathbb{G}_3$ and $\mathbb{G}_5$ (Перечисление накрытий Евклидовых многообразий $\mathbb{G}_3$ и $\mathbb{G}_5$), *J. Algebra* 560 (2020), 48–66, https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2020.05.010.

- G. Chelnokov and A. Mednykh On the coverings of Hantzsche-Wendt manifold (Перечисление накрытий многообразия Ханце-Вендта) (expected in Tohoku Math. J. in October 2021) (preprint https://arxiv.org/abs/2009.06691)

Оглавление

Введение 3

1 Основные обозначения 4

2 Многообразия $\mathcal{G}_2$ и $\mathcal{G}_4$ 6

3 Многообразия $\mathcal{G}_3$ и $\mathcal{G}_5$ 9

4 Многообразие Ханце-Вендта 12

5 Многообразия $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ 13

6 Библиография 15

Введение

Классификация компактных трехмерных Евклидовых многообразий (последнее означает, что многообразие локально изометрично евклидову пространству $\mathbb{E}^3$) с точностью до гомеоморфизам получено W. Nowacki [20] и независимо W. Hantzsche и H. Wendt [3]. Эта классификация основана на теореме Биебербаха (1911), гласящей, что всякое такое многообразие есть факторизация евклидова пространства по действию группы Биебербаха $\mathbb{R}^3/\Gamma$. Напомним про подгруппа группы изометрий евклидова пространства называется *группой Биебербаха* если она дискретна, кокомпактна и свободно от кручения. В этом случае группа Γ изоморфна фундаментальной группе фактор-пространства, т.е. $\Gamma \cong \pi_1(\mathbb{R}^3/\Gamma)$. Упомянутая выше классификация гласит, что существует только 10 трехмерных Евклидовых форм: шесть ориентируемых $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_6$ и четыре неориентируемых $\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_4$. Фундаментальные группы этих многообразий приведены в явном виде, например, в [21]. Здесь $\mathcal{G}_1$ обозначает трехмерный тор, для которого все рассматриваемые ниже вопросы тривиальны, так что для него аналоги изложенных ниже результатов не приводятся.

Основная цель статей, составляющих данную диссертацию, описать классы гомеоморфности многообразий, могущих накрывать в конечное число слоев каждое из многообразий $\mathcal{G}_2, \ldots, \mathcal{G}_6$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$; и посчитать в замкнутой форме (как функцию от числа слоев) количество классов эквивалентности накрытий каждого типа гомеоморфности накрывающего и накрываемого многообразия. Напомним что два накрытия

$$p_1 : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M} \text{ and } p_2 : \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}$$

называются эквивалентными если существует гомеоморфизм $h : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ такой что $p_1 = p_2 \circ h$. Перечисления классов эквивалентности накрытий имеют богатую историю. Проблема описания классов эквивалентности накрытий Римановой сферы с данными простыми точками ветвления восходит к Гурвицу, решена в его статье 1891 г.([6]). Позже было показано ([7]), что данное число имеет естественную интерпретацию в терминах неприводимых характеров симметрической группы. Проблемы, аналогичные проблеме Гурвица, исследовались рядом авторов. Для замкнутой Римановой поверхности задача была полностью решена в [14] (1984).

Наибольший интерес представляют неразветвленные накрытия. Мы используем следующие обозначения: через $s_G(n)$ обозначено число подгрупп индекса n в группе G, а через $c_G(n)$ – число классов сопряженности таких подгрупп. Аналогично, через $s_{H,G}(n)$ обозначено число подгрупп индекса n в группе G, изоморфных H, а через $c_{H,G}(n)$ – число классов сопряженности таких подгрупп. В соответствии со сказанным выше, $c_G(n)$ есть число классов эквивалентности n-листных накрытий многообразия $\mathcal{M}$ с фундаментальной группой G, а $c_{H,G}(n)$ – число классов эквивалентности n-листных накрытий $p : \mathcal{N} \to \mathcal{M}$, имеющих фиксированную фундаментальную группу $\pi_1(\mathcal{N}) \cong H$ накрывающего пространства. Если $\mathcal{M}$ – компактная поверхность с непустой границей, ейлеровой характеристики $\chi(\mathcal{M}) = 1 - r$, где $r \geq 0$ (например, диск с r дырками), тогда ее фундаментальная группа – сво-

бодная с r образующими $\Gamma = F_r$. В этом случае $s_\Gamma(n)$ вычислена M. Hall (1949, [5]). В. А. Лисковец (1971, [9]) получил явное выражение для $c_\Gamma(n)$. Альтернативный подход предложен J. H. Kwak и Y. Lee (1996, [8]). Числа $s_G(n)$ и $c_G(n)$ для фундаментальной группы G замкнутой поверхности без края (ориентируемой и неориентируемой) получены А. Д. Медных (1978 [12], 1979 [13], 1986 [15]).Им же в статье (2008) [16], приведен общий метод получения $c_G(n)$ для произвольной конечно-порожденной группы G. Асимптотические формулы для $s_G(n)$ во многих важных частных случаях получены T. W. Müller с соавторами (2000 [17], 2002 [18], 2002 [19]).

В трехмерном случае для широкого класса расслоений Зейферта $s_G(n)$ найдены В. А. Лисковцом и А. Д. Медных в (2000, [10]) и (2000, [11]).

Из общей теории накрытий всякое n-листное накрытие определяется подгруппой индекса n в фундаментальной группе накрываемого многообразия $\mathcal{M}$. Классы эквивалентности n-листных накрытий $\mathcal{M}$ биективно соответствуют классам сопряженности подгрупп индекса n в $\pi_1(\mathcal{M})$, см. например, ([4], p. 67). Таким образом естественно возникают две задачи: описать классы изоморфности подгрупп конечного индекса в фундаментальных группах рассматриваемых многообразий и найти число таких подгрупп (отдельно для каждого типа изоморфизам), а также число классов сопряженности таких подгрупп. В статьях, составляющих данную диссертацию, эти задачи полностью решены для групп $\pi_1(\mathcal{G}_2)$, $\pi_1(\mathcal{G}_3)$, $\pi_1(\mathcal{G}_4)$, $\pi_1(\mathcal{G}_5)$, $\pi_1(\mathcal{G}_6)$, $\pi_1(\mathcal{B}_1)$, $\pi_1(\mathcal{G}_2)$. Также для полученных последовательностей приводится их выражение в терминах производящих рядов Дирихле.

1 Основные обозначения

Для групп G и H через $s_{H,G}(n)$ обозначим число подгрупп индекса n в G, изоморфных H; а через $c_{H,G}(n)$ – число классоф сопряженности таких подгрупп.

Нат также потребуются следующие теоретико-числовые последовательности. Для натурального n мы будем часто брать суммы по всевозможным разложениям n в произведение двух или трех натуральных сомножителей $\sum_{ab=n}$ и $\sum_{abc=n}$. Порядок сомножителей важен. Мы считаем, что сумма обращается в ноль если n не натуральное.

Например, это естественный язык чтобы выразить фунцию $\sigma_0(n)$ – число представлений n в виде произведения двух натуральных чисел $\sigma_0(n) = \sum_{ab=n} 1$. Нам понадобятся следующие функции σ_0:

$$\sigma_1(n) = \sum_{ab=n} a, \qquad \sigma_2(n) = \sum_{ab=n} \sigma_1(a) = \sum_{abc=n} a,$$

$$d_3(n) = \sum_{ab=n} \sigma_0(a) = \sum_{abc=n} 1, \qquad \omega(n) = \sum_{ab=n} a\sigma_1(a) = \sum_{abc=n} a^2 b,$$

$$\chi(n) = \sum_{ab=n} a\sigma_1(b) = \sum_{ab=n} a\sigma_0(a) = \sum_{abc=n} ab;$$

$$\tau(n) = |\{(s,t)|s,t \in \mathbb{Z}, s>0, t \geq 0, s^2+t^2=n\}| = \sum_{\substack{ab=n \\ a\equiv 1 \bmod 4}} 1 - \sum_{\substack{ab=n \\ a\equiv 3 \bmod 4}} 1 = \sum_{k|n} \sin\frac{\pi k}{2},$$

$$\theta(n) = |\{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 | p>0, q \geq 0, p^2-pq+q^2=n\}| = \sum_{\substack{ab=n \\ a\equiv 1 \bmod 3}} 1 - \sum_{\substack{ab=n \\ a\equiv 2 \bmod 3}} 1 = \sum_{k|n} \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{2\pi k}{3}.$$

Для последовательности $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$, формальный степенной ряд

$$\widehat{f}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

называется *производящим рядом Дирихле* последовательности $\{f(n)\}_{n=1}^{\infty}$, see ([1], Ch. 12). Восстановить последовательность по ее производящему ряду Дирихле позволяет формула Перрона (см. [1], Th. 11.17).

Через $\zeta(s)$ будем обозначать зета-функцию Римана $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Следуя за [1] отметим, что

$$\widehat{\sigma}_0(s) = \zeta^2(s), \quad \widehat{\sigma}_1(s) = \zeta(s)\zeta(s-1), \quad \widehat{\sigma}_2(s) = \zeta^2(s)\zeta(s-1), \quad \widehat{\omega}(s) = \zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(s-2).$$

Определим последовательность $\{\phi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ как $\phi(n) = \begin{cases} 1 \text{ if } n \equiv 1 \mod 4 \\ 0 \qquad\quad \text{if } 2 \mid n. \\ -1 \text{ if } n \equiv 3 \mod 4 \end{cases}$

Положим $\eta(s) = \widehat{\phi}(s)$. То есть $\eta(s)$ – L-функция Дирихле для мультипликативного характера $\phi(n)$. Тогда $\widehat{\tau}(s) = \zeta(s)\eta(s)$, или в более аналитических терминах

$$\widehat{\tau}(s) = \frac{1}{1-2^{-s}} \prod_{p\equiv 1 \bmod 4} \frac{1}{(1-p^{-s})^2} \prod_{p\equiv 3 \bmod 4} \frac{1}{1-p^{-2s}}.$$

Детали см. ([2] стр. 4).

аналогично определим $\{\psi(n)\}_{n=1}^{\infty}$ как $\psi(n) = \frac{2}{\sqrt{3}} \sin\frac{2\pi n}{3}$, или эквивалентно

$$\psi(n) = \begin{cases} 1 \text{ if } n \equiv 1 \mod 3 \\ -1 \text{ if } n \equiv 2 \mod 3 \\ 0 \text{ if } n \equiv 0 \mod 3. \end{cases}$$

Обозначим $\vartheta(s) = \widehat{\psi}(s)$. Опять же отметим, что $\vartheta(s)$ – L-функция Дирихле для мультипликативного характера $\psi(n)$. Тогда, $\widehat{\theta}(s) = \zeta(s)\vartheta(s)$, эквивалентно

$$\widehat{\theta}(s) = \frac{1}{1-3^{-s}} \prod_{p\equiv 1 \bmod 3} \frac{1}{(1-p^{-s})^2} \prod_{p\equiv 2 \bmod 3} \frac{1}{1-p^{-2s}}.$$

2 Многообразия $\mathcal{G}_2$ и $\mathcal{G}_4$

В статье из Аппендикса В рассматриваются многообразия $\mathcal{G}_2$ и $\mathcal{G}_4$. Основной интерес представляют следующие доказанные в статье теоремы.

Теорема 1. *Любая подгруппа Δ конечного индекса n в $\pi_1(\mathcal{G}_2)$ изоморфна $\pi_1(\mathcal{G}_2)$ или $\mathbb{Z}^3$. Соответствующие числа подгрупп:*

(i) $$s_{\pi_1(\mathcal{G}_2),\pi_1(\mathcal{G}_2)}(n) = \omega(n) - \omega(\frac{n}{2});$$

(ii) $$s_{\mathbb{Z}^3,\pi_1(\mathcal{G}_2)}(n) = \omega(\frac{n}{2}).$$

Теорема 2. *Для n-листного накрытия $\mathcal{N} \to \mathcal{G}_2$ при нечетном n накрывающее многообразие $\mathcal{N}$ гомеоморфно $\mathcal{G}_2$. Если n четно то накрывающее многообразие $\mathcal{N}$ гомеоморфно или $\mathcal{G}_2$, или $\mathcal{G}_1$. Соответствующие числа классов эквивалентности накрытий:*

$$c_{\pi_1(\mathcal{G}_2),\pi_1(\mathcal{G}_2)}(n) = \sigma_2(n) + 2\sigma_2(\frac{n}{2}) - 3\sigma_2(\frac{n}{4}); \quad (i)$$

$$c_{\mathbb{Z}^3,\pi_1(\mathcal{G}_2)}(n) = \frac{1}{2}\Big(\omega(\frac{n}{2}) + \sigma_2(\frac{n}{2}) + 3\sigma_2(\frac{n}{4})\Big). \quad (ii)$$

Теорема 3. *Любая подгруппа Δ конечного индекса n в $\pi_1(\mathcal{G}_4)$ изоморфна или $\pi_1(\mathcal{G}_4)$, или $\pi_1(\mathcal{G}_2)$, или $\mathbb{Z}^3$. Соответствующие числа подгрупп:*

(i) $$s_{\pi_1(\mathcal{G}_4),\pi_1(\mathcal{G}_4)}(n) = \sum_{a|n} a\tau(a) - \sum_{a|\frac{n}{2}} a\tau(a);$$

(ii) $$s_{\pi_1(\mathcal{G}_2),\pi_1(\mathcal{G}_4)}(n) = \omega(\frac{n}{2}) - \omega(\frac{n}{4});$$

(iii) $$s_{\mathbb{Z}^3,\pi_1(\mathcal{G}_4)}(n) = \omega(\frac{n}{4}).$$

Теорема 4. *Для n-листного накрытия $\mathcal{N} \to \mathcal{G}_4$ при нечетном n накрывающее многообразие $\mathcal{N}$ гомеоморфно $\mathcal{G}_4$. Если n четно но не делится на 4 то $\mathcal{N}$ гомеоморфно или $\mathcal{G}_4$, или $\mathcal{G}_2$. Наконец, если n делится на 4 то $\mathcal{N}$ гомеоморфно или $\mathcal{G}_4$, или $\mathcal{G}_2$, или $\mathcal{G}_1$.is homeomorphic to one of $\mathcal{G}_4$, $\mathcal{G}_2$ and $\mathcal{G}_1$. Соответствующие числа классов эквивалентности накрытий:*

(i) $$c_{\pi_1(\mathcal{G}_4),\pi_1(\mathcal{G}_4)}(n) = \sum_{a|n} \tau(a) - \sum_{a|\frac{n}{4}} \tau(a);$$

(ii) $$c_{\pi_1(\mathcal{G}_2),\pi_1(\mathcal{G}_4)}(n) = \frac{1}{2}\Big(\sigma_2(\frac{n}{2}) + 2\sigma_2(\frac{n}{4}) - 3\sigma_2(\frac{n}{8}) + \sum_{a|\frac{n}{2}} \tau(a) - \sum_{a|\frac{n}{8}} \tau(a)\Big);$$

(iii) $$c_{\mathbb{Z}^3,\pi_1(\mathcal{G}_4)}(n) = \frac{1}{4}\Big(\omega(\frac{n}{4}) + \sigma_2(\frac{n}{4}) + 3\sigma_2(\frac{n}{8}) + 2\sum_{a|\frac{n}{4}} \tau(a) + 2\sum_{a|\frac{n}{8}} \tau(a)\Big).$$

Теоремы 1 и 2 описывают всевозможные типы изоморфизма подгрупп конечного индекса в $\pi_1(\mathcal{G}_2)$и считают число таких подгрупп (с учетом типа) и их классов сопряженности. Теоремы 3 и 4 делают то же самое для $\pi_1(\mathcal{G}_4)$. Теоремы 1–4 соответствуют теоремам 1–4 в статье.

Самостоятельный интерес представляют следующие утверждения, дающие полную систему инвариантов, нумерующих подгруппы конечного индекса $\pi_1(\mathcal{G}_2)$ и $\pi_1(\mathcal{G}_4)$, и классы сопряженности таких подгрупп, а также определяющие тип изоморфизма.

Определение 1. n-порождающей для $\pi_1(\mathcal{G}_2)$ *будем называть тройку* (a, H, ν) *следующего вида:*

(i) a *– натуральный делитель* n*,*

(ii) H *– подгруппа индекса* n/a *в* $\mathbb{Z}^2$*,*

(iii) ν *– элемент* $\mathbb{Z}^2/H$*.*

Предложение 1. *Существует биекция между* n*-порождающими для* $\pi_1(\mathcal{G}_2)$ *тройками* (a, H, ν) *и подгруппами* Δ *индекса* n *в* $\pi_1(\mathcal{G}_2)$*. Более того,* $\Delta \cong \mathbb{Z}^3$ *если* $a(\Delta)$ *четно и* $\Delta \cong \pi_1(\mathcal{G}_2)$ *если* $a(\Delta)$ *нечетно.*

Предложение 2. *Классы сопряженности подгрупп* $\Delta \cong \mathbb{Z}^3$ *индекса* n *в* $\pi_1(\mathcal{G}_2)$ *нумеруются тройками* $(a, H, \bar{\nu})$*, где* a *и* H *имеют тот же смысл, что и в Предложении 1 а* $\bar{\nu}$ *– множество вида* $\bar{\nu} = \{\nu, -\nu\}$*, где* ν *– то же что и выше.*

Классы сопряженности подгрупп $\Delta \cong \pi_1(\mathcal{G}_2)$ *индекса* n *в* $\pi_1(\mathcal{G}_2)$ *нумеруются тройками* $(a, H, \tilde{\nu})$*, где* a *и* H *имеют тот же смысл, что и в Предложении 1 а* $\tilde{\nu}$ *– элемент* $\mathbb{Z}^2/\langle H, (2,0), (0,2)\rangle$*.*

Определение 2. n-порождающей для $\pi_1(\mathcal{G}_2)$ *будем называть тройку* (a, H, ν) *следующего вида:*

(i) a *– натуральный делитель* n*,*

(ii) H *– подгруппа индекса* n/a *в* $\mathbb{Z}^2$*, причем для нечетных* a *подгруппа* H *сохраняется автоморфизмом* $\ell : (x, y) \to (-y, x)$*,*

(iii) ν *элемент* $\mathbb{Z}^2/H$*.*

Предложение 3. *Существует биекция между* n*-порождающими для* $\pi_1(\mathcal{G}_4)$ *тройками* (a, H, ν) *и подгруппами* Δ *индекса* n *в* $\pi_1(\mathcal{G}_4)$*. Более того,* $\Delta \cong \mathbb{Z}^3$ *если* $a(\Delta)$ *делится на 4,* $\Delta \cong \pi_1(\mathcal{G}_2)$ *если* $a(\Delta)$ *делится на 2 но не на 4, и* $\Delta \cong \pi_1(\mathcal{G}_4)$ *если* $a(\Delta)$ *нечетно.*

Предложения 1 и 3 соответствуют Предложениям 3 и 5 в статье, Предложение 3, хотя явным образом в статье не сформулировано, фактически доказано в доказательстве Теоремы 2.

Производящие функции для полученных последовательностей приведены в следующей таблице.

H \ G		$\mathcal{G}_2$	$\mathcal{G}_4$
$\mathbb{Z}^3$	$\widehat{s}_{H,G}$	$2^{-s}\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(s-2)$	$4^{-s}\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(s-2)$
	$\widehat{c}_{H,G}$	$2^{-s-1}\zeta(s)\zeta(s-1)\Big(\zeta(s-2)+(1+3\cdot 2^{-s})\zeta(s)\Big)$	$2^{-2s-2}\zeta(s)\Big(\zeta(s-1)\zeta(s-2)+(1+3\cdot 2^{-s})\zeta(s)\zeta(s-1)+2(1+2^{-s})\zeta(s)\eta(s)\Big)$
$\mathcal{G}_2$	$\widehat{s}_{H,G}$	$\big(1-2^{-s}\big)\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(s-2)$	$2^{-s}\big(1-2^{-s}\big)\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(s-2)$
	$\widehat{c}_{H,G}$	$\big(1-2^{-s}\big)\big(1+3\cdot 2^{-s}\big)\zeta(s)^2\zeta(s-1)$	$2^{-s-1}(1-2^{-s})\zeta(s)^2\Big((1+3\cdot 2^{-s})\zeta(s-1)+(1+2^{-s})\eta(s)\Big)$
$\mathcal{G}_4$	$\widehat{s}_{H,G}$	0	$\big(1-2^{-s}\big)\zeta(s)\zeta(s-1)\eta(s-1)$
	$\widehat{c}_{H,G}$	0	$\big(1-2^{-s}\big)\big(1+2^{-s}\big)\zeta(s)^2\eta(s)$

3 Многообразия $\mathcal{G}_3$ и $\mathcal{G}_5$

В статье из Аппендикса C рассматриваются многообразия $\mathcal{G}_3$ и $\mathcal{G}_5$. Основной интерес представляют следующие доказанные в статье теоремы:

Теорема 5. *Любая подгруппа Δ конечного индекса n в $\pi_1(\mathcal{G}_3)$ изоморфна $\pi_1(\mathcal{G}_3)$ или $\pi_1(\mathcal{G}_1) \cong \mathbb{Z}^3$. Соответствующие числа подгрупп:*

(i)
$$s_{\pi_1(\mathcal{G}_3),\pi_1(\mathcal{G}_3)}(n) = \sum_{k|n} k\theta(k) - \sum_{k|\frac{n}{3}} k\theta(k);$$

(ii)
$$s_{\mathbb{Z}^3,\pi_1(\mathcal{G}_3)}(n) = \omega(\frac{n}{3}).$$

Теорема 6. *Для n-листного накрытия $\mathcal{N} \to \mathcal{G}_3$ при n не делящемся на 3 накрывающее многообразие $\mathcal{N}$ гомеоморфно $\mathcal{G}_3$. Если n делится на 3 то накрывающее многообразие $\mathcal{N}$ гомеоморфно или $\mathcal{G}_3$, или $\mathcal{G}_1$. Соответствующие числа классов эквивалентности накрытий:*

(i)
$$c_{\pi_1(\mathcal{G}_3),\pi_1(\mathcal{G}_3)}(n) = \sum_{k|n} \theta(k) + \sum_{k|\frac{n}{3}} \theta(k) - 2\sum_{k|\frac{n}{9}} \theta(k);$$

(ii)
$$c_{\mathbb{Z}^3,\pi_1(\mathcal{G}_3)}(n) = \frac{1}{3}\Big(\omega(\frac{n}{3}) + 2\sum_{k|\frac{n}{3}} \theta(k) + 4\sum_{k|\frac{n}{9}} \theta(k)\Big).$$

Теорема 7. *Любая подгруппа Δ конечного индекса n в $\pi_1(\mathcal{G}_5)$ изоморфна или $\pi_1(\mathcal{G}_5)$, или $\pi_1(\mathcal{G}_3)$, или $\pi_1(\mathcal{G}_2)$, или $\pi_1(\mathcal{G}_1) \cong \mathbb{Z}^3$. Соответствующие числа подгрупп:*

(i)
$$s_{\pi_1(\mathcal{G}_5),\pi_1(\mathcal{G}_5)}(n) = \sum_{k|n,\,(\frac{n}{k},6)=1} k\theta(k);$$

(ii)
$$s_{\pi_1(\mathcal{G}_3),\pi_1(\mathcal{G}_5)}(n) = \sum_{k|\frac{n}{2}} k\theta(k) - \sum_{k|\frac{n}{6}} k\theta(k);$$

(iii)
$$s_{\pi_1(\mathcal{G}_2),\pi_1(\mathcal{G}_5)}(n) = \omega(\frac{n}{3}) - \omega(\frac{n}{6});$$

(iv)
$$s_{\mathbb{Z}^3,\pi_1(\mathcal{G}_5)}(n) = \omega(\frac{n}{6}).$$

Теорема 8. *Числа классов сопряженности подгрупп конечного индекса n в $\pi_1(\mathcal{G}_5)$ таковы:*

(i)
$$c_{\pi_1(\mathcal{G}_5),\pi_1(\mathcal{G}_5)}(n) = \sum_{k|n,\,(\frac{n}{k},6)=1} \theta(k);$$

(*ii*) $$c_{\pi_1(\mathcal{G}_3),\pi_1(\mathcal{G}_5)}(n) = \sum_{k|\frac{n}{2}} \theta(k) - \sum_{k|\frac{n}{18}} \theta(k);$$

(*iii*) $$c_{\pi_1(\mathcal{G}_2),\pi_1(\mathcal{G}_5)}(n) = \frac{1}{3}\Big(\sigma_2(\frac{n}{3}) + 2\sigma_2(\frac{n}{6}) - 3\sigma_2(\frac{n}{12}) + 2\sum_{k|\frac{n}{3}} \theta(k) - 2\sum_{k|\frac{n}{6}} \theta(k)\Big);$$

(*iv*) $$c_{\mathbb{Z}^3,\pi_1(\mathcal{G}_5)}(n) = \frac{1}{6}\Big(\omega(\frac{n}{6}) + \sigma_2(\frac{n}{6}) + 3\sigma_2(\frac{n}{12}) + 4\sum_{k|\frac{n}{6}} \theta(k) + 4\sum_{k|\frac{n}{18}} \theta(k)\Big).$$

Теоремы 5–8 соответсвуют теоремам 1–4 в статье.

Самостоятельный интерес представляют следующие утверждения, дающие полную систему инвариантов, нумерующих подгруппы конечного индекса $\pi_1(\mathcal{G}_3)$ и $\pi_1(\mathcal{G}_5)$, , а также определяющие тип изоморфизма подгруппы.

Определение 3. *n-порождающей для $\pi_1(\mathcal{G}_3)$ или $\pi_1(\mathcal{G}_5)$ будем называть тройку (a, H, ν) следующего вида:*

(i) a – натуральный делитель n,

(ii) H – подгруппа индекса n/a в $\mathbb{Z}^2$, причем если n не делится на 3, то H сохраняется автоморфизмом $\ell : (x, y) \to (-y, x - y)$,

(iii) ν – элемент $\mathbb{Z}^2/H$.

Замечание. Как семейства объектов n-порождающие тройки для $\pi_1(\mathcal{G}_3)$ или $\pi_1(\mathcal{G}_5)$ совпадают, мы просто по-разному строим по тройке соответсвующую ей подгруппу в $\pi_1(\mathcal{G}_3)$ и $\pi_1(\mathcal{G}_5)$. Так что, чтобы избежать путаницы, мы называем тройку порождающей для $\pi_1(\mathcal{G}_3)$ или $\pi_1(\mathcal{G}_5)$ в зависимости от того, подгруппу в чем мы хотим определить.

Предложение 4. *Существует биекция между n-порождающими для $\pi_1(\mathcal{G}_3)$ тройками (a, H, ν) и подгруппами Δ индекса n в $\pi_1(\mathcal{G}_3)$. Более того, $\Delta \cong \mathbb{Z}^3$ если $a(\Delta)$ делится на 3 и $\Delta \cong \pi_1(\mathcal{G}_3)$ если $a(\Delta)$ не делится на 3.*

Предложение 5. *Существует биекция между n-порождающими для $\pi_1(\mathcal{G}_5)$ тройками (a, H, ν) и подгруппами Δ индекса n в $\pi_1(\mathcal{G}_5)$. Более того, $\Delta \cong \mathbb{Z}^3$ если $a(\Delta)$ делится на 3 и $\Delta \cong \pi_1(\mathcal{G}_3)$ если $a(\Delta)$ не делится на 3. There is a bijection between the set of n-essential triple (a, H, ν) and the set of subgroups Δ of index n in $\pi_1(\mathcal{G}_5)$. Более того, $\Delta \cong \mathbb{Z}^3$ если $(a, 6) = 6$, $\Delta \cong \pi_1(\mathcal{G}_2)$ если $(a, 6) = 3$, $\Delta \cong \pi_1(\mathcal{G}_3)$ если $(a, 6) = 2$ и $\Delta \cong \pi_1(\mathcal{G}_5)$ если $(a, 6) = 1$.*

Предложения 4 и 5 соответствуют Предложениям 3 и 5 в статье.

Производящие функции для полученных последовательностей приведены в следующей таблице.

H \ G		$\pi_1(\mathcal{G}_3)$	$\pi_1(\mathcal{G}_5)$
$\pi_1(\mathcal{G}_1)$	$\widehat{s}_{H,G}$	$3^{-s}\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(s-2)$	$6^{-s}\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(s-2)$
	$\widehat{c}_{H,G}$	$3^{-s-1}\zeta(s)\Big(\zeta(s-1)\zeta(s-2)+2(1+2\cdot 3^{-s})\zeta(s)\vartheta(s)\Big)$	$6^{-s-1}\zeta(s)\Big(\zeta(s-1)\zeta(s-2)+(1+3\cdot 2^{-s})\zeta(s)\zeta(s-1)+4(1+3^{-s})\zeta(s)\vartheta(s)\Big)$
$\pi_1(\mathcal{G}_2)$	$\widehat{s}_{H,G}$	0	$3^{-s}\big(1-2^{-s}\big)\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(s-2)$
	$\widehat{c}_{H,G}$	0	$3^{-s-1}\big(1-2^{-s}\big)\zeta(s)^2\Big((1+3\cdot 2^{-s})\zeta(s-1)+2\vartheta(s)\Big)$
$\pi_1(\mathcal{G}_3)$	$\widehat{s}_{H,G}$	$\big(1-3^{-s}\big)\zeta(s)\zeta(s-1)\vartheta(s-1)$	$2^{-s}\big(1-3^{-s}\big)\zeta(s)\zeta(s-1)\vartheta(s-1)$
	$\widehat{c}_{H,G}$	$\big(1-3^{-s}\big)\big(1+2\cdot 3^{-s}\big)\zeta(s)^2\vartheta(s)$	$2^{-s}\big(1-3^{-s}\big)\big(1+3^{-s}\big)\zeta(s)^2\vartheta(s)$
$\pi_1(\mathcal{G}_5)$	$\widehat{s}_{H,G}$	0	$\big(1-2^{-s}\big)\big(1-3^{-s}\big)\zeta(s)\zeta(s-1)\vartheta(s-1)$
	$\widehat{c}_{H,G}$	0	$\big(1-2^{-s}\big)\big(1-3^{-s}\big)\zeta(s)^2\vartheta(s)$

4 Многообразие Ханце-Вендта

В статье из Аппендикса D рассматриваются многообразие Ханце-Вендта. Основной интерес представляют следующие доказанные в статье теоремы:

Теорема 9. *Любая подгруппа Δ конечного индекса n в $\pi_1(\mathcal{G}_6)$ изоморфна или $\pi_1(\mathcal{G}_6)$, или $\pi_1(\mathcal{G}_2)$, или $\mathbb{Z}^3$. Соответствующие числа подгрупп:*

(i) $$s_{\mathbb{Z}^3,\pi_1(\mathcal{G}_6)}(n) = \omega\left(\frac{n}{4}\right);$$

(ii) $$s_{\pi_1(\mathcal{G}_2),\pi_1(\mathcal{G}_6)}(n) = 3\omega\left(\frac{n}{2}\right) - 3\omega\left(\frac{n}{4}\right);$$

(iii) $$s_{\pi_1(\mathcal{G}_6),\pi_1(\mathcal{G}_6)}(n) = n\left(d_3(n) - 3d_3\left(\frac{n}{2}\right) + 3d_3\left(\frac{n}{4}\right) - d_3\left(\frac{n}{8}\right)\right).$$

Теорема 10. *Для n-листного накрытия $\mathcal{N} \to \mathcal{G}_3$ накрывающее пространство $\mathcal{N}$ имеет один из трех типов гомеоморфности: $\mathcal{G}_6$, $\mathcal{G}_2$ или $\mathcal{G}_1$. Соответствующие числа классов эквивалентности накрытий:*

(i) $$c_{\mathbb{Z}^3,\pi_1(\mathcal{G}_6)}(n) = \frac{1}{4}\omega\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{3}{4}\sigma_2\left(\frac{n}{4}\right) + \frac{9}{4}\sigma_2\left(\frac{n}{8}\right);$$

(ii)
$$c_{\pi_1(\mathcal{G}_2),\pi_1(\mathcal{G}_6)}(n) = \frac{3}{2}\Big(\sigma_2\Big(\frac{n}{2}\Big) + 2\sigma_2\Big(\frac{n}{4}\Big) - 3\sigma_2\Big(\frac{n}{8}\Big) + d_3\Big(\frac{n}{2}\Big) - d_3\Big(\frac{n}{4}\Big) - 3d_3\Big(\frac{n}{8}\Big) + 5d_3\Big(\frac{n}{16}\Big) - 2d_3\Big(\frac{n}{32}\Big)\Big);$$

(iii) $$c_{\pi_1(\mathcal{G}_6),\pi_1(\mathcal{G}_6)}(n) = d_3(n) - 3d_3\left(\frac{n}{2}\right) + 3d_3\left(\frac{n}{4}\right) - d_3\left(\frac{n}{8}\right).$$

Замечание. Если n нечетно то $\mathcal{N} \cong \mathcal{G}_6$. Если $n \equiv 2 \mod 4$ то $\mathcal{N} \cong \mathcal{G}_2$. Наконец, если $4 \mid n$ то $\mathcal{N} \cong \mathcal{G}_2$ или $\mathcal{N} \cong \mathcal{G}_1$.

Производящие функции для полученных последовательностей приведены в следующей таблице.

H	$s_{H,\mathcal{G}_6}$	$c_{H,\mathcal{G}_6}$
$\pi_1(\mathcal{G}_1)$	$4^{-s}\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(s-2)$	$4^{-s-1}\zeta(s)\zeta(s-1)\big(\zeta(s-2) + 3(1+3\cdot 2^{-s})\zeta(s)\big)$
$\pi_1(\mathcal{G}_2)$	$2^{-s}\big(1-2^{-s}\big)\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(s-2)$	$3\cdot 2^{-s-1}(1-2^{-s})\zeta^2(s)\big((1+3\cdot 2^{-s})\zeta(s-1) + (1-2^{-s})^2(1+2^{-s+1})\zeta(s)\big)$
$\pi_1(\mathcal{G}_1)$	$\big(1-2^{-s+1}\big)^3\zeta^3(s-1)$	$\big(1-2^{-s}\big)^3\zeta^3(s)$

5 Многообразия $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$

В статье из Аппендикса D рассматриваются многообразия $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$. Основной интерес представляют следующие доказанные в статье теоремы:

Теорема 11. *Любая подгруппа Δ конечного индекса n в $\pi_1(\mathcal{B}_1)$ изоморфна или $\mathbb{Z}^3$, или $\pi_1(\mathcal{B}_1)$, или $\pi_1(\mathcal{B}_2)$. Соответствующие числа подгрупп:*

(i) $$s_{\mathbb{Z}^3,\pi_1(\mathcal{B}_1)}(n) = \omega(\frac{n}{2});$$

(ii) $$s_{\pi_1(\mathcal{B}_1),\pi_1(\mathcal{B}_1)}(n) = \chi(n) - \chi(\frac{n}{2});$$

(iii) $$s_{\pi_1(\mathcal{B}_2),\pi_1(\mathcal{B}_1)}(n) = 2\chi(\frac{n}{2}) - 2\chi(\frac{n}{4}).$$

Теорема 12. *Для n-листного накрытия $\mathcal{N} \to \mathcal{B}_1$ при нечетном n накрывающее многообразие $\mathcal{N}$ гомеоморфно $\mathcal{B}_1$. Если n четно то накрывающее многообразие $\mathcal{N}$ гомеоморфно или $\mathcal{G}_1$, или $\mathcal{B}_1$, или $\mathcal{B}_2$. Соответствующие числа классов эквивалентности накрытий:*

(i) $$c_{\mathbb{Z}^3,\pi_1(\mathcal{B}_1)}(n) = \frac{1}{2}\Big(\omega(\frac{n}{2}) + \sigma_2(\frac{n}{2}) + 3\sigma_2(\frac{n}{4})\Big);$$

(ii) $$c_{\pi_1(\mathcal{B}_1),\pi_1(\mathcal{B}_1)}(n) = \sigma_2(n) - \sigma_2(\frac{n}{4});$$

(iii) $$c_{\pi_1(\mathcal{B}_2),\pi_1(\mathcal{B}_1)}(n) = 2\sigma_2(\frac{n}{2}) - 2\sigma_2(\frac{n}{4}).$$

Теорема 13. *Любая подгруппа Δ конечного индекса n в $\pi_1(\mathcal{B}_2)$ изоморфна или $\mathbb{Z}^3$, или $\pi_1(\mathcal{B}_2)$, или $\pi_1(\mathcal{B}_1)$. Соответствующие числа подгрупп:*

(i) $$s_{\mathbb{Z}^3,\pi_1(\mathcal{B}_2)}(n) = \omega(\frac{n}{2});$$

(ii) $$s_{\pi_1(\mathcal{B}_2),\pi_1(\mathcal{B}_2)}(n) = \chi(n) - 5\chi(\frac{n}{2}) + 12\chi(\frac{n}{4}) - 8\chi(\frac{n}{8});$$

(iii) $$s_{\pi_1(\mathcal{B}_1),\pi_1(\mathcal{B}_2)}(n) = 2\chi(\frac{n}{2}) - 2\chi(\frac{n}{4}).$$

Теорема 14. *Для n-листного накрытия $\mathcal{N} \to \mathcal{B}_2$ при нечетном n накрывающее многообразие $\mathcal{N}$ гомеоморфно $\mathcal{B}_2$. Если n четно то накрывающее многообразие $\mathcal{N}$*

гомеоморфно или $\mathcal{G}_1$, или $\mathcal{B}_1$, или $\mathcal{B}_2$. Соответствующие числа классов эквивалентности накрытий:

(i) $$c_{\mathbb{Z}^3,\pi_1(\mathcal{B}_2)}(n) = \frac{1}{2}\Big(\omega(\frac{n}{2}) + \sigma_2(\frac{n}{2}) - \sigma_2(\frac{n}{4}) + 4\sigma_2(\frac{n}{8})\Big);$$

(ii) $$c_{\pi_1(\mathcal{B}_2),\pi_1(\mathcal{B}_2)}(n) = \sigma_2(n) - 4\sigma_2(\frac{n}{2}) + 7\sigma_2(\frac{n}{4}) - 4\sigma_2(\frac{n}{8});$$

(iii) $$c_{\pi_1(\mathcal{B}_1),\pi_1(\mathcal{B}_2)}(n) = 2\sigma_2(\frac{n}{2}) - 2\sigma_2(\frac{n}{4}).$$

Теоремы 11, 12, 13 и 14 соответсвуют теормам 1,3,4,6 в статье соответсвенно, однако даны в системе обозначений, согласованной с более поздними статьями.

Производящие функции для полученных последовательностей приведены в следующей таблице.

H \ G		$\mathcal{B}_1$	$\mathcal{B}_2$
$\mathbb{Z}^3$	$\widehat{s}_{H,G}$	$2^{-s}\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(s-2)$	$2^{-s}\zeta(s)\zeta(s-1)\zeta(s-2)$
	$\widehat{c}_{H,G}$	$2^{-s-1}\zeta(s)\zeta(s-1)\Big(\zeta(s-2)+(1+3\cdot 2^{-s})\zeta(s)\Big)$	$2^{-s-1}\zeta(s)\zeta(s-1)\Big(\zeta(s-2)+(1-2^{-s}+4\cdot 2^{-2s})\zeta(s)\Big)$
$\mathcal{B}_1$	$\widehat{s}_{H,G}$	$\big(1-2^{-s}\big)\zeta(s)\zeta(s-1)^2$	$2^{-s+1}\big(1-2^{-s}\big)\zeta(s)\zeta(s-1)^2$
	$\widehat{c}_{H,G}$	$\big(1-2^{-s}\big)\big(1+2^{-s}\big)\zeta(s)^2\zeta(s-1)$	$2^{-s+1}\big(1-2^{-s}\big)\zeta(s)^2\zeta(s-1)$
$\mathcal{B}_2$	$\widehat{s}_{H,G}$	$2^{-s+1}\big(1-2^{-s}\big)\zeta(s)\zeta(s-1)^2$	$\big(1-2^{-s}\big)\big(1-4\cdot 2^{-s}+8\cdot 2^{-2s}\big)\zeta(s)\zeta(s-1)^2$
	$\widehat{c}_{H,G}$	$2^{-s+1}\big(1-2^{-s}\big)\zeta(s)^2\zeta(s-1)$	$\big(1-2^{-s}\big)\big(1-3\cdot 2^{-s}+4\cdot 2^{-2s}\big)\zeta(s)^2\zeta(s-1)$

6 Библиография

Литература

[1] Apostol, T., (1976) *Introduction to Analytic Number Theory*, Springer Science+Business Media New York

[2] Baake, M., Grimm, U., Quasicrystalline Combinatorics, ($https://web.ma.utexas.edu/mp_arc/c/02/02-392.ps.gz$)

[3] W. Hantzsche and H. Wendt, Dreidimensionale euklidische Raumformen, Mathematische Annalen 110 (1935), 593–611.

[4] Hatcher, A. (2002), *Algebraic Topology*. Cambridge: Cambridge University Press.

[5] Hall, M. Jr. (1949). Subgroups of finite index in free groups. *Canad. J. Math.*. 1(1): 187–190.

[6] Hurwitz A. (1891). Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten. *Math. Ann.*, 39: 1–60.

[7] Hurwitz A. (1902). Über die Anzahl der Riemann'schen Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten,. *Math. Ann.*, 55: 53–66.

[8] Kwak J. H., Lee J. (1996). Enumeration of connected graph coverings. *Journal of Graph Theory*, 23(12): 105–109.

[9] Liskovets V. A. (1971). Towards the enumeration of subgroups of the free group. *Dokl. AN BSSR*, 15(1): 6–9 (in Russian).

[10] Liskovets V., Mednykh A. (2000). Enumeration of subgroups in the fundamental groups of orientable circle bundles over surfaces, *Commun. Algebra* 28 (4): 1717–1738.

[11] Liskovets V., Mednykh A. (2000). The number of subgroups in the fundamental groups of some non-oriented 3-manifolds, in: Formal Power Series and Algebraic Combinatorics, Proceedings of the 12th International Conference, FPSAC'00, Moscow, Russia, June 26–30, 2000, Berlin: Springer, 276–287.

[12] Mednykh A. D. (1978). Determination of the number of nonequivalent coverings over a compact Riemann surface. *Soviet Math. Dokl.* 19(2): 318–320.

[13] Mednykh A. D. (1979). On unramified coverings of compact Riemann surfaces. *Soviet Math. Dokl.*, 20(1): 85–88.

[14] Mednykh A. D. (1984). Nonequivalent coverings of Riemann surfaces with a prescribed ramification type, *Siberian Math. J.*, 25(4): 606–625.

[15] Mednykh A. D. and Pozdnyakova, G. G. (1986). Number of nonequivalent coverings over a nonorientable compact surface. *Siber. Math. J.*, 27(1): 99–106.

[16] Mednykh A. (2008). Counting conjugacy classes of subgroups in a finitely generated group. *Journal of Algebra*, 320(6): 2209–2217.

[17] Müller T.W. (2000). Enumerating representations in finite wreath products, *Adv. Math.* 153 (1): 118–154.

[18] Müller T.W., Shareshian, J. (2002). Enumerating representations in finite wreath products. II: Explicit formulae, *Adv. Math.* 171 (2): 276–331.

[19] Müller T.W., Puchta, J.-C. (2002). Character theory of symmetric groups and subgroup growth of surface groups, J. London Math. Soc. (2) 66: 623–640.

[20] W. Nowacki, Die euklidischen, dreidimensionalen, geschlossenen und offenen Raumformen, Comment. Math. Helvetici 7 (1934/35), 81–93.

[21] J. Wolf, Spaces of Constant Curvature, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1972.