

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
“Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”

Факультет математики

На правах рукописи

Лавров Алексей Николаевич

**Геометрия пространств модулей
полустабильных пучков ранга 2 на
проективном пространстве**

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор
Тихомиров Александр Сергеевич

Москва – 2021

Введение

После того, как М. Маруяма [12] в 1977 году доказал существование проективной схемы модулей, параметризующей классы S -эквивалентности полустабильных пучков на проективном многообразии, изучение геометрии таких схем модулей стало центральной темой исследований в алгебраической геометрии. Несмотря на то, что известно много для случая кривых и поверхностей, общие результаты для трёхмерных многообразий всё ещё отсутствуют. В действительности, пространства модулей пучков на 3-мерных многообразиях становятся очень сложными объектами для изучения (как иллюстрирует формулировка Р. Вакиля закона Мерфи [7]), в частности, с несколькими неприводимыми компонентами различных размерностей.

Цель диссертации состоит в дальнейшем продвижении изучения пространства модулей полустабильных пучков ранга 2 на \mathbb{P}^3 с фиксированными классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 = k$, $c_3 = 0$, которое мы будем обозначать через $\mathcal{M}(k)$. Вопросы геометрии таких пространств, например, количество неприводимых компонент, менее исследованы по сравнению с изучением геометрии схем Гильберта кривых в проективном 3-мерном пространстве.

Резюме имеет следующую структуру. В первом разделе мы напоминаем различные определения стабильности пучков на проективных гладких многообразиях и приводим некоторые свойства полустабильных пучков. В разделе 2 мы напоминаем основы GIT-конструкции схемы модулей полустабильных пучков. Разделы 1 и 2 в основном следует содержанию книги [8]. В разделе 3 мы определяем рефлексивные пучки и описываем их свойства. В разделе 4 мы перечисляем все известные неприводимые компоненты схем модулей $\mathcal{M}(k)$, $k \geq 1$. Наконец, раздел 5 содержит изложение основных результатов настоящей диссертации, а именно, в этом разделе описываются новые неприводимые компоненты схем $\mathcal{M}(k)$, $k \geq 3$.

1 Стабильность пучков

Исторически понятие стабильности когерентного пучка впервые возникло в контексте векторных расслоений на алгебраических кривых [14]: пусть X – гладкая проективная кривая над алгебраически замкнутым полем k , и пусть E – локально свободный пучок ранга r и степени $\deg(E)$. Определим *наклон* расслоения E как $\mu(E) = \frac{\deg(E)}{r}$. Тогда E называется (полу)стабильным, если для всех подпучков $F \subset E$ с $0 < \operatorname{rk}(F) < \operatorname{rk}(E)$ имеет место неравенство $\mu(F) (\leq) \mu(E)$.

Если мы перейдём от пучков на кривых к многообразиям большей размерности, то понятие стабильности может быть обобщено следующим образом. Пусть $(X, \mathcal{O}(1))$ – поляризованное гладкое проективное многообразие размерности d над алгебраически замкнутым полем k . Напомним, что эйлеровой характеристикой когерентного пучка E называется число $\chi(E) = \sum (-1)^i h^i(X, E)$, где $h^i(X, E) = \dim_k H^i(X, E)$. Тогда многочлен Гильберта $P(E)$ задаётся отображением $m \mapsto \chi(E \otimes \mathcal{O}(m))$.

Определение 1 *Носителем пучка E называется замкнутое множество $\operatorname{Supp}(E) = \{x \in X \mid E_x \neq 0\}$. Размерность пучка $\dim(E)$ – это размерность его носителя.*

Определение 2 *Пучок E называется чистым размерности d , если для всех нетривиальных когерентных подпучков $F \subset E$ имеет место равенство $\dim(F) = d$.*

Определение 3 *Для любого пучка E на X существует открытое плотное подмножество $U \subset X$, такое, что $E|_U$ – локально свободный пучок. Рангом $\operatorname{rk}(E)$ пучка E называется ранг векторного расслоения $E|_U$.*

Определение 4 *Приведенным многочленом Гильберта $p(E)$ когерентного пучка E размерности d называется многочлен*

$$p(E, m) := \frac{P(E, m)}{\operatorname{rk}(E)}.$$

Напомним, что существует естественный порядок на множестве многочленов, заданный лексикографическим порядком коэффициентов. Точнее, $f \leq g$ тогда и только тогда, когда $f(m) \leq g(m)$ при $m \gg 0$. Аналогично, $f < g$ тогда и только тогда, когда $f(m) < g(m)$ при $m \gg 0$. Теперь мы готовы определить понятие стабильности.

Определение 5 *Когерентный пучок E размерности d называется полустабильным, если E является чистым и для любого собственного подпучка $F \subset E$ имеет место $r(F) \leq r(E)$. Пучок E называется стабильным, если E полустабилен и неравенство строгое, т. е. $r(F) < r(E)$ для всех собственных подпучков $F \subset E$.*

Утверждение 1 (см. [8, Cor. 1. 2. 8]) *Любой стабильный пучок E на X является простым, т. е. $\text{End}(E) \simeq k$.*

Другим способом определения стабильности пучка на многообразии большой размерности является непосредственное обобщение понятия наклона. А именно, пусть E – когерентный пучок размерности $d = \dim(X)$, и H – обильный дивизор, ассоциированный с $\mathcal{O}(1)$. Степень пучка E может быть определена следующим образом

$$\deg(E) := c_1(E) \cdot H^{n-1},$$

и наклон пучка E

$$\mu(E) := \frac{\deg(E)}{\text{rk}(E)}.$$

Определение 6 *Когерентный пучок E размерности $d = \dim(X)$ называется μ -(полу)стабильным, если E является чистым и имеет место неравенство $\mu(F) (\leq) \mu(E)$ для всех подпучков $F \subset E$, таких, что $0 < \text{rk}(F) < \text{rk}(E)$.*

Утверждение 2 (см. [8, Lemma 1. 2. 13]) *Если E – чистый когерентный пучок размерности $d = \dim(X)$, тогда имеет место следующая*

цепочка импликаций

μ -стабильность \Rightarrow стабильность \Rightarrow полустабильность \Rightarrow μ -полустабильность.

Всюду далее (μ -)полустабильный пучок, который не является (μ -)стабильным, мы будем называть *собственно (μ -)полустабильным пучком*.

Пусть E – нетривиальный, чистый пучок размерности d . Тогда *фильтрацией Хардера-Нарасимхана* для E мы называем фильтрацию

$$0 = \mathrm{NH}_0(E) \subset \mathrm{NH}_1(E) \subset \dots \subset \mathrm{NH}_l(E) = E,$$

такую, что факторы $\mathrm{gr}_i^{\mathrm{NH}} = \mathrm{NH}_i(E)/\mathrm{NH}_{i+1}(E)$ при $i = 1, \dots, l$, являются полустабильными пучками размерности d с приведенными многочленами Гильберта $p_i = p(\mathrm{gr}_i^{\mathrm{NH}})$, удовлетворяющими свойству

$$p_{\max}(E) := p_1 > \dots > p_l =: p_{\min}(E).$$

Предположим теперь, что E является полустабильным. *Фильтрацией Жордана-Гёльдера* пучка E мы называем фильтрацию

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_l = E,$$

такую, что факторы $\mathrm{gr}_i(E) = E_i/E_{i-1}$ являются стабильными пучками с приведенным многочленом Гильберта $p(E)$.

Утверждение 3 (см. [8, Thm. 1.3.4]) *Любой чистый пучок E имеет единственную фильтрацию Хардера-Нарасимхана.*

Утверждение 4 (см. [8, Prop. 1.5.2]) *Каждый полустабильный пучок E имеет фильтрацию Жордана-Гёльдера. Более того, соответствующий градуированный пучок $\mathrm{gr}(E) = \bigoplus_i \mathrm{gr}_i(E)$ не зависит от выбора фильтрации Жордана-Гёльдера.*

Определение 7 *Два полустабильных пучка E_1 и E_2 с одинаковым при-*

веденным многочленом Гильберта называются S -эквивалентными, если $\text{gr}(E_1) \simeq \text{gr}(E_2)$.

2 Конструкция схемы модулей

Для фиксированного многочлена $P \in \mathbb{Q}[z]$ определим функтор

$$\mathfrak{M}' : (\text{Sch}/k)^o \rightarrow (\text{Sets})$$

следующим образом. Если $S \in \text{Ob}(\text{Sch}/k)$, пусть $\mathfrak{M}'(S)$ – множество классов изоморфизма S -плоских семейств полустабильных пучков на X с многочленом Гильберта P . И если $f : S' \rightarrow S$ – морфизм в (Sch/k) , пусть $\mathfrak{M}'(f)$ – отображение соответствующих множеств, полученное при помощи взятия обратного образа пучка через $f_X = f \times \text{id}_X$:

$$\mathfrak{M}'(f) : \mathfrak{M}'(S) \longrightarrow \mathfrak{M}'(S'), \quad [E] \rightarrow [f_X^* E].$$

Если $E \in \mathfrak{M}'(S)$ – S -плоское семейство полустабильных пучков на X , и если L – произвольное линейное расслоение на S , тогда $E \otimes p^*(L)$ является также S -плоским семейством, где $p : X \times S \rightarrow S$ – каноническая проекция. Кроме того, слои E_s и $(E \otimes p^* L)_s = E_s \otimes_{k(s)} L(s)$ изоморфны для любой точки $s \in S$. Таким образом, имеет смысл рассмотреть фактор-функтор $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' / \sim$, где \sim является отношением эквивалентности:

$$E \sim E' \text{ для } E, E' \in \mathfrak{M}'(S) \iff E \simeq E' \otimes p^* L \text{ для некоторого } L \in \text{Pic}(S).$$

Если мы к тому же будем рассматривать только стабильные пучки, мы получим открытый подфунктор $(\mathfrak{M}')^s \subset \mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}^s \subset \mathfrak{M}$. Схема \mathcal{M} называется *схемой модулей полустабильных пучков*, если она копредставляет функтор \mathfrak{M} .

Утверждение 5 (см. [8, Лемма 4.1.2]) *Предположим, что \mathcal{M} копредставляет \mathfrak{M} . Тогда S -эквивалентные пучки соответствуют одной и*

той же замкнутой точке в \mathcal{M} . В частности, если существует неразложимый собственно полустабильный пучок E , тогда функтор \mathfrak{M} не может быть представлен схемой.

Семейство полустабильных пучков на X с многочленом Гильберта P является ограниченным (см. [8, Thm. 3.3.7]). В частности, это означает, что существует число m , такое, что $E(m)$ порождён глобальными сечениями, и $h^0(E(m)) = P(m)$. Таким образом, если мы положим $V := k^{\oplus P(m)}$ и $\mathcal{K} := V \otimes \mathcal{O}_X(-m)$, тогда существует сюръекция $\rho : \mathcal{K} \twoheadrightarrow E$, полученная взятием композиции канонического отображения $H^0(E(m)) \otimes \mathcal{O}_X(-m) \rightarrow E$ с изоморфизмом $V \rightarrow H^0(E(m))$. Эта сюръекция определяет замкнутую точку $[\rho : \mathcal{K} \twoheadrightarrow E] \in \text{Quot}(\mathcal{K}, P)$ соответствующей Quot-схемы, параметризующей фактор-пучки пучка \mathcal{K} с многочленом Гильберта P . На самом деле, эта точка содержится в открытом подмножестве $R \subset \text{Quot}(\mathcal{K}, P)$ всех факторов $[\mathcal{K} \twoheadrightarrow E]$, таких, что пучок E полустабильен, а индуцированное отображение

$$V = H^0(\mathcal{K}(m)) \rightarrow H^0(E(m))$$

является изоморфизмом. Обозначим через $R^s \subset R$ открытую подсхему, параметризующую стабильные пучки E .

Теорема 1 (см. [8, Thm. 4.3.4]) *Существует проективная схема $\mathcal{M}_{\mathcal{O}(1)}(P)$, которая универсально копредставляет функтор $\mathfrak{M}_{\mathcal{O}(1)}(P)$. Замкнутые точки $\mathcal{M}_{\mathcal{O}(1)}(P)$ находятся во взаимно однозначном соответствии с классами S -эквивалентности полустабильных пучков с многочленом Гильберта P . Более того, существует открытое плотное подмножество $\mathcal{M}_{\mathcal{O}(1)}^s(P)$, которое универсально копредставляет функтор $\mathfrak{M}_{\mathcal{O}(1)}^s(P)$.*

Теорема 2 (см. [8, Cor. 4.3.5]) *Морфизм $\pi : R^s \rightarrow \mathcal{M}^s$ является главным $PGL(V)$ -расслоением.*

Также имеет смысл рассмотреть относительные пространства модулей, т. е. пространства модулей полустабильных пучков на слоях проективного морфизма $X \rightarrow S$. Рассмотрим для данного многочлена P

функтор $\mathfrak{M}_{X/S} : (Sch/S)^o \rightarrow (Sets)$, который по определению ставит в соответствие S -схеме T конечного типа множество классов изоморфизма T -плоских семейств полустабильных пучков на слоях морфизма $X_T := T \times_S X \rightarrow T$ с многочленом Гильберта P . Если мы рассмотрим только семейства стабильных пучков, мы получим открытый подфунктор $\mathfrak{M}_{X/S}^s(P) \subset \mathfrak{M}_{X/S}(P)$.

Теорема 3 (см. [8, Thm. 4.3.7]) Пусть $f : X \rightarrow S$ – проективный морфизм k -схем конечного типа с геометрически связными слоями, и пусть $\mathcal{O}(1)$ – линейное расслоение на X , очень обильное относительно S . Существует проективный морфизм $\mathcal{M}_{X/S}(P) \rightarrow S$, который универсально копредставляет функтор $\mathfrak{M}_{X/S}(P)$. В частности, для любой замкнутой точки $s \in S$ имеет место изоморфизм $\mathcal{M}_{X/S}(P)_s \simeq \mathcal{M}_{X_s}(P)$. Более того, существует открытая подсхема $\mathcal{M}_{X/S}^s(P) \subset \mathcal{M}_{X/S}(P)$, которая универсально копредставляет подфунктор $\mathfrak{M}_{X/S}^s(P) \subset \mathfrak{M}_{X/S}(P)$.

Далее, мы будем сконцентрированы на схеме модулей Гиезекера-Маруямы полустабильных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 = k$, $c_3 = 2n$ на проективном пространстве \mathbb{P}^3 , которую мы обозначим через $\mathcal{M}(0, k, 2n)$. Также введем обозначение $\mathcal{M}(k) = \mathcal{M}(0, k, 0)$. Кроме того, обозначим через $\mathcal{B}(k)$ открытое подмножество схемы $\mathcal{M}(k)$, состоящее из стабильных локально свободных пучков. Для простоты мы не будем делать различия между стабильным пучком E и соответствующим классом изоморфизма $[E]$, как точкой пространства модулей. Кроме того, под общей точкой неприводимой схемы мы будем понимать замкнутую точку, принадлежащую некоторому открытому плотному подмножеству схемы.

3 Рефлексивные пучки

Пучок F называется рефлексивным, если каноническое отображение пучков $F \rightarrow F^{\vee\vee}$ является изоморфизмом. Множество особенностей $\text{Sing}(F)$

рефлексивного пучка F на X имеет коразмерность ≥ 3 . В частности, рефлексивный пучок на \mathbb{P}^3 имеет 0-мерные особенности. Более того, любой рефлексивный пучок ранга 1 является обратимым.

Теорема 4 (см. [4, Thm. 4.1]) *Зафиксируем целое число c_1 . Тогда существует взаимнооднозначное соответствие между*

- (i) *парамии (F, s) , где F – рефлексивный пучок ранга 2 на \mathbb{P}^3 с первым классом Черна $c_1(F) = c_1$, и $s \in H^0(F)$ – глобальное сечение с множеством нулей коразмерности 2, и*
- (ii) *парамии (Y, ξ) , где Y – кривая Коэна-Маколея в \mathbb{P}^3 , являющаяся локально полным пересечением в общей точке, и $\xi \in H^0(\omega_Y(4 - c_1))$ – глобальное сечение, порождающее пучок $\omega_Y(4 - c_1)$ всюду, за исключением конечного числа точек.*

Более того, при этом соответствии имеют место равенства

$$c_2 = d, \quad c_3 = 2p_a - 2 + d(4 - c_1),$$

где c_2, c_3 – классы Черна пучка F , и d, p_a – степень и арифметический род кривой Y .

Схема модулей $\mathcal{R}(0, m, 2n)$, параметризующая стабильные рефлексивные пучки ранга 2 на \mathbb{P}^3 с классами Черна $c_1 = 0, c_2 = m, c_3 = 2n$, может быть рассмотрена как открытое подмножество схемы модулей Гизекера-Маруямы $\mathcal{M}(0, m, 2n)$. В частности, схема $\mathcal{R}(0, m, 2n)$ является квази-проективной схемой (см. [4]). Известно, что для $(m, n) = (2, 1), (2, 2), (3, 4)$ эта схема является гладкой, неприводимой и рациональной; при $(m, n) = (3, 2)$ она является неприводимой и приведенной в общей точке; при $(m, n) = (3, 1), (3, 3)$ соответствующая приведенная схема является неприводимой (см. [3]). Кроме того, схема $\mathcal{R}(0, m, m^2 - m + 2)$ является неприводимой и гладкой для каждого $m \geq 2$ (см. [22]).

Теорема 5 (см. [10, Thm. 8]) Для каждой тройки (a, b, c) положительных целых чисел, таких, что $3a + 2b + c$ не равно нулю и четно, рефлексивные пучки ранга 2, заданные точной последовательностью

$$0 \longrightarrow G_{(a,b,c)} \xrightarrow{\alpha} (a + b + c + 2) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow F(k) \longrightarrow 0,$$

$$G_{(a,b,c)} := a \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3) \oplus b \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \oplus c \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1),$$

составляют неприводимую, гладкую компоненту $\mathcal{S}(a, b, c)$ of $\mathcal{R}(0, m, 2n)$ ожидаемой размерности $8m - 3$, где m и n выражаются следующим образом

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{4}(3a + 2b + c)^2 + \frac{3}{2}(3a + 2b + c) - (b + c), \\ 2n &= 27 \binom{a+2}{3} + 8 \binom{b+2}{3} + \binom{c+2}{3} + 3(3a + 2b + 5)ab + \\ &\quad + \frac{3}{2}(3a + c + 4)ac + (2b + 3c + 3)bc + 6abc. \end{aligned}$$

Пусть $\tilde{\mathcal{S}}(a, b, c) \subset \text{Hom}(G_{(a,b,c)}, (a + b + c + 2) \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$ – открытое подмножество, состоящее из мономорфизмов с 0-мерными локусами вырождений; тогда имеет место

$$\mathcal{S}(a, b, c) = \tilde{\mathcal{S}}(a, b, c) / \left(\left(\text{Aut}(G_{(a,b,c)}) \times GL(a + b + c + 2) \right) / \mathbb{C}^* \right).$$

Также мы можем построить схему $\mathcal{V}(0, m, 2n)$, параметризующую некоторое множество рефлексивных собственно μ -полустабильных пучков ранга 2 с соответствующими классами Черна, следующим образом. Рассмотрим схему Гильберта $\text{Hilb}_{m,g}(\mathbb{P}^3)$ гладких пространственных кривых степени m и рода g ; пусть $n = g + 2m - 1$. Теперь обозначим через $\mathcal{Z} \hookrightarrow \text{Hilb}_{m,g}(\mathbb{P}^3) \times \mathbb{P}^3$ соответствующую универсальную кривую, а через $\text{pr} : \text{Hilb}_{m,g}(\mathbb{P}^3) \times \mathbb{P}^3 \longrightarrow \text{Hilb}_{m,g}(\mathbb{P}^3)$ проекцию на первый множитель. Мы определим схему $\mathcal{V}(0, m, 2n)$ как открытое подмножество схемы $\mathbf{P}((\text{pr}_* \omega_{\mathcal{Z}}(4))^\vee)$, состоящее из точек $(Y, \mathbb{P}\xi) \in \mathbf{P}((\text{pr}_* \omega_{\mathcal{Z}}(4))^\vee)$, которые удовлетворяют условию: $\xi \in H^0(\omega_Y(4))$ порождает пучок $\omega_Y(4)$

всюду за исключением конечного числа точек.

Согласно конструкции, мы имеем формулу для вычисления размерности этой схемы

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{V}(0, m, 2n) &= \dim \text{Hilb}_{m,g}(\mathbb{P}^3) + \dim \mathbb{P}(H^0(\omega_Y(4))) = & (1) \\ &= h^0(N_{Y/\mathbb{P}^3}) + h^0(\omega_Y(4)) - 1, \end{aligned}$$

где Y – произвольная кривая из $\text{Hilb}_{m,g}(\mathbb{P}^3)$. Далее, заметим, что в силу изоморфизма $H^0(\omega_Y(4)) \simeq \text{Ext}^1(I_Y, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})$, любая точка $(Y, \mathbb{P}\xi) \in \mathcal{V}(0, m, 2n)$ определяет единственным образом пучок F , удовлетворяющий следующей точной тройке

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow F \longrightarrow I_Y \longrightarrow 0. \quad (2)$$

Можно показать, что F – рефлексивный собственно μ -полустабильный пучок ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 = m$, $c_3 = 2n$. Таким образом, существует взаимнооднозначное соответствие между точками схемы $\mathcal{V}(0, m, 2n)$ и некоторым семейством собственно μ -полустабильных рефлексивных пучков ранга 2 с классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 = m$, $c_3 = 2n$ (подробности см. [4, Thm. 4.1, Prop. 4.2]).

Если кривые Y из описанной конструкции являются рациональными, тогда мы имеем $n = 2m - 1$. Обозначим соответствующую схему модулей $\mathcal{V}(0, m, 4m - 2)$ через \mathcal{V}_m .

4 Разложение на неприводимые компоненты схемы $\mathcal{M}(k)$

Не сложно доказать, что схема $\mathcal{M}(1)$ является неприводимой. Ключевое место доказательства – проверить, что любой полустабильный пучок E ранга 2 на \mathbb{P}^3 с классами Черна $c_1(E) = 0$, $c_2(E) = 1$ и $c_3(E) = 0$ является нулькорреляционным пучком в смысле [1], то есть удовлетворяет точной

тройке следующего вида

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow \Omega_{\mathbb{P}^3}^1(1) \longrightarrow E \longrightarrow 0.$$

Следовательно, пучок E определяется единственным образом сечением $\sigma \in H^0(\Omega_{\mathbb{P}^3}^1(2))$ с точностью до умножения на число, поэтому $\mathcal{M}(1) \simeq \mathbb{P}H^0(\Omega_{\mathbb{P}^3}^1(2)) \simeq \mathbb{P}^5$.

При $k \geq 2$ схема модулей $\mathcal{M}(k)$ становится уже приводимой. Однако, были построены некоторые бесконечные серии неприводимых компонент схем $\mathcal{M}(k)$. Мы опишем эти серии в данном разделе.

Во-первых, для любого $k \geq 1$ существует пространство модулей инстантонных расслоений $\mathcal{I}(k)$, которое может быть рассмотрено как под-схема схемы модулей стабильных расслоений $\mathcal{B}(k) \subset \mathcal{M}(k)$. Инстантонным расслоением заряда k называется расслоение E ранга 2, удовлетворяющее следующим свойствам

$$c_1(E) = 0, \quad c_2(E) = k, \quad h^0(E(-1)) = h^1(E(-2)) = 0.$$

Известно, что пространство модулей $\mathcal{I}(k)$ является неприводимым (см. [19, 20]), гладким (см. [21]) и аффинным (см. [18]). Замыкание $\overline{\mathcal{I}(k)}$ в $\mathcal{M}(k)$ является неприводимой компонентой схемы $\mathcal{M}(k)$ размерности $8k - 3$. В частности, $\mathcal{M}(1) \simeq \overline{\mathcal{I}(1)}$, $\mathcal{M}(1) \setminus \mathcal{I}(1) \simeq \text{Gr}(2, 4) \subset \mathbb{P}^3$, и $\mathcal{I}(1)$ параметризует нулькорреляционные расслоения.

При $k = 1, 2$ мы имеем $\mathcal{B}(k) = \mathcal{I}(k)$. Однако, при $k \geq 3$ это уже не так, схема $\mathcal{B}(k)$ также становится приводимой. Далее мы опишем серию компонент схем $\mathcal{B}(k)$, которые не совпадают с $\mathcal{I}(k)$. А именно, для любых трех целых чисел $c > b \geq a \geq 0$ рассмотрим монаду

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-c) \xrightarrow{\alpha} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(b) \xrightarrow{\beta} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c) \longrightarrow 0, \quad (3)$$

с морфизмами следующего вида

$$\alpha = \begin{pmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_3 \\ -\sigma_2 \\ -\sigma_1 \end{pmatrix}$$

и $\beta = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$, где

$$\sigma_1 \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c+b)), \quad \sigma_2 \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c+a)),$$

$$\sigma_3 \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c-a)), \quad \sigma_4 \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(c-b))$$

не зануляются одновременно.

Теорема 6 (см. [2, Prop. 1.2(a)]) При $c > a + b$ существует неприводимая компонента $\mathcal{N}(a, b, c)$ схемы модулей $\mathcal{B}(c^2 - b^2 - a^2)$, точки которой соответствуют локально свободным пучкам, являющимся когомологиями монад вида (3). Замыкание $\overline{\mathcal{N}(a, b, c)}$ является неприводимой компонентой схемы модулей $\mathcal{M}(c^2 - b^2 - a^2)$. Эти компоненты называются компонентами Эйна.

Следующая теорема описывает серию компонент схем $\mathcal{M}(k)$, общие пучки которых имеют 0-мерные особенности. Эти компоненты строятся при помощи компонент схем модулей, параметризующих стабильные рефлексивные пучки. Например, мы можем использовать серию $\mathcal{S}(a, b, c)$ из теоремы 5.

Теорема 7 (см. [10, Thm. 7]) Для каждой гладкой неприводимой компоненты \mathcal{F} схемы модулей $\mathcal{R}(0, k, 2s)$ ожидаемой размерности $8k - 3$, существует неприводимая компонента $\overline{\mathcal{T}(k, s)}$ размерности $8k - 3 + 4s$ схемы $\mathcal{M}(k)$, общая точка которой $[E]$ удовлетворяет точной тройке

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow Q \longrightarrow 0,$$

где $[F] \in \mathcal{F}$, и Q – нуль-мерный пучок длины s .

В следующей теореме представлена серия компонент схем $\mathcal{M}(k)$, параметризующих стабильные пучки с одномерными особенностями.

Теорема 8 (см. [10, Thm. 17]) *Для любых положительных целых чисел $0 < d_1 \leq d_2$ и неотрицательного целого числа $c \geq 0$ существует неприводимая компонента $\overline{\mathcal{C}(d_1, d_2, c)}$ схемы модулей $\mathcal{M}(d_1 d_2 + c)$, общая точка $[E]$ которой удовлетворяет следующей точной тройке*

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow L(2) \longrightarrow 0,$$

где $[F] \in \mathcal{I}(c)$, и L – линейное расслоение на кривой C , являющейся гладким полным пересечением бистепени (d_1, d_2) и рода $g = 1 + \frac{1}{2}d_1 d_2 (d_1 + d_2 - 4)$, такое, что

$$\deg L = g - 1, \quad h^0(L) = h^1(L) = 0, \quad L^{\otimes 2} \neq \omega_C.$$

Далее, мы напомним описание разложения на неприводимые компоненты схемы $\mathcal{M}(2)$, данное в работах [5, 6]. Во-первых, схема модулей $\mathcal{M}(2)$ имеет инстантонную компоненту $\overline{\mathcal{I}(2)}$. Более того, все локально свободные пучки из $\mathcal{M}(2)$ являются инстантонными расслоениями. Далее, согласно [6, Thm. 7.12], $\mathcal{M}(2)$ содержит ещё две дополнительные компоненты, которые являются замыканиями в $\mathcal{M}(2)$ следующих подсхем

$$\mathcal{P}(2)_s = \{[E] \in \mathcal{M}(2) \mid \dim \operatorname{Ext}^2(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = s\}, \quad s = 1, 2.$$

Имеет место равенство $\dim \overline{\mathcal{P}(2)}_s = 13 + 4s$. Эти компоненты называются компонентами Траутмана.

На самом деле, компоненты $\overline{\mathcal{P}(2)}_s$ совпадают с компонентами $\overline{\mathcal{T}(2, s)}$, описанными выше. Действительно, заметим, что если $[E] \in \mathcal{T}(2, s)$, то

$$\dim \operatorname{Ext}^2(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = h^0(\mathcal{E}xt^2(E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})) = h^0(\mathcal{E}xt^3(Q_E, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})) = h^0(Q_E).$$

С другой стороны, длина пучка Q_E равна половине $c_3(E^{\vee\vee})$, из чего следует $[E] \in \mathcal{P}(2)_s$, а значит $\mathcal{T}(2, s) \subset \mathcal{P}(2)_s$.

Из предыдущего раздела мы знаем, что схема $\mathcal{R}(0, 2, 2s)$ является неприводимой, гладкой схемой размерности 13 для каждого значения $s = 1, 2$. Из теоремы 7 следует, что, для каждого значения $s = 1, 2$, схема $\overline{\mathcal{T}(2, s)}$ является неприводимой компонентой схемы $\mathcal{M}(2)$ размерности $13 + 4s$; таким образом, имеет место $\overline{\mathcal{T}(2, s)} = \overline{\mathcal{P}(2)_s}$.

Следовательно, результат [6, Thm. 7.12] может быть переформулирован следующим образом

$$\mathcal{M}(2) = \overline{\mathcal{I}(2)} \cup \overline{\mathcal{T}(2, 1)} \cup \overline{\mathcal{T}(2, 2)}.$$

В работе [13] было показано, что $\mathcal{B}(3)$ имеет ровно две компоненты. Эти компоненты являются гладкими и рациональными, а также имеют ожидаемую размерность 21. Они могут быть описаны следующим образом:

- инстантонная компонента $\mathcal{I}(3)$, чьи точки являются когомологиями монад вида

$$0 \longrightarrow 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \longrightarrow 8\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow 3\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow 0;$$

- компонента Эйна $\mathcal{N}(0, 1, 2)$, точки которой являются когомологиями монад вида

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2) \longrightarrow 0.$$

Как это было замечено в предыдущем разделе, схема $\mathcal{R}(0, 3, 2s)$ является, для всех $s = 1, \dots, 4$, неприводимой и имеет ожидаемую размерность 21. Таким образом, мы можем применить теорему 7, чтобы показать, что существуют четыре неприводимых компоненты $\overline{\mathcal{T}(3, s)}$ размерности $21 + 4s$, $s = 1, \dots, 4$, в $\mathcal{M}(3)$.

Более того, теорема 8 даёт ещё одну неприводимую компоненту $\overline{\mathcal{C}(1, 3, 0)}$, общая точка которой соответствует пучку с 1-мерными особенностями.

Таким образом, схема модулей $\mathcal{M}(3)$ имеет не менее семи неприводимых компонент, которые можно разделить на три типа следующим образом:

1. $\overline{\mathcal{I}(3)}$ и $\overline{\mathcal{N}(0, 1, 2)}$, обе размерности 21, общие пучки являются локально свободными;
2. $\overline{\mathcal{C}(1, 3, 0)}$, размерности 21; общий пучок имеет особенности вдоль гладкой плоской кубики;
3. $\overline{\mathcal{T}(3, s)}$ для $s = 1, 2, 3, 4$, размерности $21 + 4s$; общий пучок имеет особенности вдоль $3s$ различных точек.

5 Новые компоненты схем $\mathcal{M}(k)$, $k \geq 3$

В серии работ [15, 16, 17] были описаны новые неприводимые компоненты схем модулей $\mathcal{M}(k)$, $k \geq 3$, начиная с конструкции одной компоненты схемы $\mathcal{M}(3)$, и затем последовательно обобщая эту конструкцию до построения бесконечной серии компонент. Новым свойством этих компонент является то, что их общие пучки имеют особенности смешанной размерности, а именно, вдоль объединения кривой и набора точек в \mathbb{P}^3 .

Первая компонента этой серии была описана в работе [15]. Общий пучок этой компоненты имеет особенности вдоль дизъюнктного объединения проективной прямой и двух точек. Аналогично конструкции компонент $\overline{\mathcal{T}(k, l)}$ и $\overline{\mathcal{C}(d_1, d_2, c)}$ из теорем 7 и 8, конструкция этой компоненты основана на технике так называемых элементарных преобразований. Более подробно, мы рассматриваем все пучки E , удовлетворяющие следующей точной тройке

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_l(2) \longrightarrow 0, \quad (4)$$

где F – рефлексивный пучок из $\mathcal{R}(0, 2, 2)$, и l – проективная прямая, такая, что $l \cap \text{Sing}(F) = \emptyset$. Можно показать, что пучок E является стабильным с классами Черна $c_1 = 0$, $c_2 = 3$, $c_3 = 0$. Более того, оказывается, что размерность касательного пространства $T_{[E]}\mathcal{M}(3)$ схемы модулей $\mathcal{M}(3)$ в точке $[E]$ совпадает с размерностью семейства пучков, полученных при помощи точной тройки (4). Мы обозначим это семейство через $\mathcal{X}(1, 0)$. Таким образом, мы имеем следующую теорему

Теорема 9 (см. [15, Thm.] *Замыкание семейства $\mathcal{X}(1, 0)$ в $\mathcal{M}(3)$ является неприводимой компонентой схемы $\mathcal{M}(3)$ размерности 22.*

Нетрудно показать, что общий пучок этой компоненты имеет особенности вдоль $l \sqcup \text{Sing}(F)$. Фактически, эта компонента являлась первым примером компоненты схем $\mathcal{M}(k)$, общий пучок которой имеет особенности смешанной размерности.

Далее, этот результат был обобщен в [16]. Были построены ещё две компоненты схемы модулей $\mathcal{M}(3)$. Общие пучки E этих компонент включаются в точную тройку следующего вида

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_l(r) \oplus \mathcal{O}_W \longrightarrow 0, \quad (5)$$

где $[F] \in \mathcal{R}(0, 2, 2n)$, $n = 1, 2$, l – проективная прямая, и $W = \{q_1, \dots, q_s\} \in \text{Sym}^s(\mathbb{P}^3)^*$ – подмножество точек в \mathbb{P}^3 , такое, что $l \cap W = \emptyset$, $(l \sqcup W) \cap \text{Sing}(F) = \emptyset$. Условие $c_1(E) = 0$ накладывает ограничение $r = n + 1 - s$, поэтому мы имеем 7 семейств пучков $\mathcal{X}(n, s)$, где

$$(n, s) = (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3).$$

Из этих семи семейств четыре лежат в известных компонентах $\overline{\mathcal{T}(3, s)}$.

Теорема 10 (см. [16, Thm. 4]) *Мы имеем следующие вложения:*

$$\mathcal{X}(1, 1) \subsetneq \overline{\mathcal{T}(3, 1)}, \quad \mathcal{X}(2, 2) \subsetneq \overline{\mathcal{T}(3, 2)},$$

$$\mathcal{X}(1, 2) \subsetneq \overline{\mathcal{T}(3, 2)}, \quad \mathcal{X}(2, 3) \subsetneq \overline{\mathcal{T}(3, 3)}.$$

Поэтому замыканиях этих четырех семейств не даёт нам новых компонент. Семейство $\mathcal{X}(1, 0)$ было уже рассмотрено ранее. Однако, размерности семейств $\mathcal{X}(2, 0)$ и $\mathcal{X}(2, 1)$ совпадают с соответствующими размерностями касательных пространств схемы $\mathcal{M}(3)$, поэтому их замыкания, $\overline{\mathcal{X}(2, 0)}$ и $\overline{\mathcal{X}(2, 1)}$, являются неприводимыми компонентами схемы $\mathcal{M}(3)$. В силу того, что множества особенностей общих пучков этих двух компонент, а именно, $l \sqcup \text{Sing}(F) \sqcup W$, where $|\text{Sing}(F)| = 4$, $|W| = 0, 1$, не совпадают с множествами особенностей общих пучков других компонент схемы $\mathcal{M}(3)$, компоненты $\overline{\mathcal{X}(2, 0)}$ и $\overline{\mathcal{X}(2, 1)}$ являются новыми.

Теорема 11 (см. [16, Теорема 3]) *Замыкания семейств $\mathcal{X}(2, 0)$ и $\mathcal{X}(2, 1)$ являются новыми неприводимыми компонентами схемы $\mathcal{M}(3)$ размерности 24 и 26, соответственно.*

Конструкция из работ [15, 16] была обобщена в статье [11]. А именно, в этой статье были построены новые неприводимые компоненты схем модулей $\mathcal{M}(e, n, m)$, $e = -1, 0$, общие пучки которых имеют особенности вдоль дизъюнктного объединения проективной прямой и набора точек в \mathbb{P}^3 .

Далее, эти результаты были обобщены в работе [17], в которой была построена новая бесконечная серия компонент схем модулей $\mathcal{M}(k)$, $k \geq 3$, общие точки которых имеют особенности смешанной размерности. Конструкция обобщает вычисления из [10, 15, 16, 11]. Рассмотрим две серии схем Гильберта Hilb_d , $d \geq 1$, и $\text{Hilb}_{(d_1, d_2)}$, $1 \leq d_1 \leq d_2$, где Hilb_d параметризует гладкие рациональные кривые степени d , а $\text{Hilb}_{(d_1, d_2)}$ параметризует кривые, являющиеся гладкими полными пересечениями бистепени (d_1, d_2) в \mathbb{P}^3 . Для схем Гильберта $\text{Hilb}_{(d_1, d_2)}$ мы будем предполагать, что $1 \leq d_1 \leq d_2$ и $(d_1, d_2) \neq (1, 1), (1, 2)$. Обозначим через \mathcal{H} какую-нибудь компоненту из набора компонент $\{\text{Hilb}_d \mid d \geq 1\} \sqcup \{\text{Hilb}_{(d_1, d_2)} \mid 1 \leq d_1 \leq d_2, (d_1, d_2) \neq (1, 1), (1, 2)\}$. Пусть C – кривая из \mathcal{H} степени d и рода g . Далее, рассмотрим подмножество $W \subset \mathbb{P}^3$, состоящее из s дизъюнктных точек в \mathbb{P}^3 , удовлетворяющих условию $C \cap W = \emptyset$.

Теперь рассмотрим серию компонент $\mathcal{S}(a, b, c)$ пространств модулей

стабильных рефлексивных пучков из теоремы 5, а также рассмотрим серию пространств модулей \mathcal{V}_m , параметризующих рефлексивные собственнно μ -полустабильные пучки, из раздела 3. Обозначим через \mathcal{R} произвольную компоненту из набора $\{\mathcal{S}(a, b, c)\} \sqcup \{\mathcal{V}_m\}$, такую, что выполнено следующее условие

$$\begin{cases} s < n, & \text{если } \mathcal{H} = \text{Hilb}_d \text{ для некоторого } d, \\ s \leq n, & \text{если } \mathcal{H} = \text{Hilb}_{(d_1, d_2)} \text{ для некоторой пары } (d_1, d_2), \\ m \leq d, & \text{если } \mathcal{R} = \mathcal{V}_m \text{ для некоторого } m, \end{cases} \quad (6)$$

где m равно c_2 и n равно $\frac{1}{2}c_3$ пучков из \mathcal{R} . Предположим, что $F \in \mathcal{R}$ и рассмотрим линейное расслоение L степени $g - 1 + 2d + n - s$ на кривой C , удовлетворяющее свойству

$$\text{Hom}_e(F, L \oplus \mathcal{O}_W) \neq 0, \quad h^1(\text{Hom}(F, L)) = 0, \quad h^0(\omega_C(4) \otimes L^{-2}) = 0. \quad (7)$$

Далее, аналогично точной тройке (5), мы можем построить пучок E следующим образом

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow L \oplus \mathcal{O}_W \longrightarrow 0. \quad (8)$$

Можно показать, что пучок E является стабильным и он лежит в $\mathcal{M}(m + d)$. Более того, мы имеем следующую теорему.

Теорема 12 (см. [17, Thm]) *Замыкание семейства $\mathcal{C}(\mathcal{R}, \mathcal{H}, s)$, состоящего из пучков E , полученных при помощи точной тройки (8), является неприводимой компонентой схемы модулей $\mathcal{M}(m + d)$.*

Таким образом, варьируя пространство модулей $\mathcal{R} \in \{\mathcal{S}(a, b, c)\} \sqcup \{\mathcal{V}_m\}$, схему Гильберта $\mathcal{H} \in \{\text{Hilb}_d \mid d \geq 1\} \sqcup \{\text{Hilb}_{(d_1, d_2)} \mid 1 \leq d_1 \leq d_2, (d_1, d_2) \neq (1, 1), (1, 2)\}$ и число точек s , удовлетворяющие условиям (6), мы получим новую бесконечную серию неприводимых компонент $\overline{\mathcal{C}(\mathcal{R}, \mathcal{H}, s)}$ схем модулей $\mathcal{M}(k)$, $k \geq 3$. Общие пучки этих компонент имеют особенности смешанной размерности. В частности, это означает, что они не

совпадают с известными компонентами.

Наименьшее k , для которых $\mathcal{M}(k)$ содержит компоненту этой серии, равно 3. Мы имеем следствие.

Следствие 1 *Замыкание семейства $\mathcal{C}(\mathcal{V}_1, \text{Hilb}_2, 0)$ является неприводимой компонентой схемы модулей $\mathcal{M}(3)$ размерности 21. Таким образом, схема модулей $\mathcal{M}(3)$ содержит не менее 11 неприводимых компонент.*

Общий пучок E этой компоненты удовлетворяет следующей точной тройке

$$0 \longrightarrow E \longrightarrow F \longrightarrow \mathcal{O}_C(2) \longrightarrow 0,$$

где $[F] \in \mathcal{V}_1$ и C – гладкая коника. Собственно μ -полустабильный рефлексивный пучок F включается в точную тройку вида

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \longrightarrow F \longrightarrow I_l \longrightarrow 0, \quad l \in \text{Gr}(2, 4).$$

Результаты диссертации опубликованы в трёх статьях:

1. A.N. Ivanov, A.S. Tikhomirov, The moduli component of the space of semistable rank-2 sheaves on \mathbb{P}^3 with singularities of mixed dimension (Компонента пространства модулей полустабильных пучков ранга 2 на \mathbb{P}^3 с особенностями смешанной размерности), *Doklady Mathematics*, 2017, Vol. 96, No. 2, pp. 506–509.
2. A. N. Ivanov, A. S. Tikhomirov, Semistable rank 2 sheaves with singularities of mixed dimension on \mathbb{P}^3 (Полустабильные пучки ранга 2 с особенностями смешанной размерности на \mathbb{P}^3), *Journal of Geometry and Physics*, Vol. 129, 2018, pp. 90-98.
3. A. N. Ivanov, A new series of moduli components of rank-2 semistable sheaves on \mathbb{P}^3 with singularities of mixed dimension (Новая бесконечная серия компонент модулей полустабильных пучков ранга 2 на \mathbb{P}^3 с особенностями смешанной размерности), *Sbornik: Mathematics*, 211:7 (2020), pp. 967-986.

Список литературы

- [1] L. Ein, Some stable vector bundles on \mathbb{P}^4 and \mathbb{P}^5 , *J. Reine Angew. Math.* 337 (1982), 142–153.
- [2] L. Ein, Generalized nullcorrelation bundles, *Nagoya Math. J.* 111 (1988), 13–24.
- [3] M.-C. Chang, Stable rank 2 reflexive sheaves on \mathbb{P}^3 with small c_2 and applications, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **284** (1984), 57–89.
- [4] R. Hartshorne, Stable Reflexive Sheaves, *Math. Ann.* **254** (1980), 121–176.
- [5] R. Hartshorne, Stable vector bundles of rank 2 on \mathbb{P}^3 , *Math. Ann.*, 254 (1978), 229–280.
- [6] J. Le Potier, Systèmes cohérents et structures de niveau, *Astérisque*, 214 (1993).
- [7] R. Vakil, Murphy’s law in algebraic geometry: badly-behaved deformation spaces, *Inv. Math.* 164 (2006), 569 – 590.
- [8] D. Huybrechts, M. Lehn, *The Geometry of Moduli Spaces of Sheaves*, 2nd ed., Cambridge Math. Lib., Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
- [9] M. Jardim, D. Markushevich, A. S. Tikhomirov, New divisors in the boundary of the instanton moduli space, *Moscow Mathematical Journal*, 2018, Vol. 18, No. 1, P. 117-148.
- [10] M. Jardim, D. Markushevich, A. S. Tikhomirov, Two infinite series of moduli spaces of rank 2 sheaves on \mathbb{P}^3 , *Annali di Matematica Pura ed Applicata* (4), 196(4):1573–1608, 2017.
- [11] C. Almeida, M. Jardim, A. S. Tikhomirov, Irreducible components of the moduli space of rank 2 sheaves of odd determinant on \mathbb{P}^3 , 2019, arXiv:1903.00292.

- [12] M. Maruyama, Moduli of stable sheaves, I, J. Math. Kyoto Univ., 17-1 (1977) 91-126.
- [13] G. Ellingsrud, S. A. Stromme, Stable rank 2 vector bundles on \mathbb{P}^3 with $c_1 = 0$ and $c_2 = 3$, Math. Ann. 255 (1981), 123–135.
- [14] D. Mumford, Projective invariants of projective structures and applications, Proc. Intern. Cong. Math. Stockholm (1962), 526-530.
- [15] A. N. Ivanov, A. S. Tikhomirov, The moduli component of the space of semistable rank-2 sheaves on \mathbb{P}^3 with singularities of mixed dimension. Dokl. Math. 96, 506–509 (2017).
- [16] A. N. Ivanov, A. S. Tikhomirov, Semistable rank 2 sheaves with singularities of mixed dimension on \mathbb{P}^3 , Journal of Geometry and Physics, 2018, Vol. 129, p. 90–98.
- [17] A. N. Ivanov, A new series of moduli components of rank-2 semistable sheaves on \mathbb{P}^3 with singularities of mixed dimension, Sbornik: Mathematics, 211:7 (2020), 967–986.
- [18] L. Costa, G. Ottaviani, Nondegenerate multidimensional matrices and instanton bundles, Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), 49–55.
- [19] A. S. Tikhomirov, Moduli of mathematical instanton vector bundles with odd c_2 on projective space, Izvestiya: Mathematics 76 (2012), 991–1073.
- [20] A. S. Tikhomirov, Moduli of mathematical instanton vector bundles with even c_2 on projective space, Izvestiya: Mathematics 77 (2013), 1331–1355.
- [21] M. Jardim, M. Verbitsky, Trihyperkähler reduction and instanton bundles on \mathbb{P}^3 , Compositio Math. 150 (2014), 1836–1868.
- [22] B. Schmidt, Rank two sheaves with maximal third Chern character in three-dimensional projective space, Matemática Contemporânea, Vol. 47 (2020), 228–270.