Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Тюрин Димитрий Николаевич

K-группы Милнора и дифференциальные формы

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-матемаических наук
Горчинский Сергей Олегович

Москва - 2021

Пусть R — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей. Обозначим через R^* его мультипликативную группу. Тогда K-группой Милнора $K_n^M(R)$ степени n называется n-тая однородная компонента фактора тензорного кольца $(R^*)^{\otimes\bullet}$ по двустороннему идеалу, порожденному элементами вида $r\otimes(1-r)$, такими, что r и $1-r$ оба обратимы. Такие элементы называются соотношениями Стейнберга.

K-группы Милнора являются важным алгебраическим инвариантом, имеющим приложения в различных областях алгебры и арифметики. Тем не менее, они довольно сложны в вычислении, так как в основе их определения лежит тонкая связь между операциями сложения и умножения в кольце R.

В то же самое время, другой алгебраический инвариант кольца R, а именно модуль Ω^n_R абсолютных дифференциальных форм степени n, относительно прост в вычислении. Имеет место функториальный гомоморфизм групп $d\log\colon K_n^M(R)\to\Omega^n_R$, но общем случае он далек от того, чтобы быть изоморфизмом.

Пусть $I\subset R$ — нильпотентный идеал степени N, для которого существует сечение отображения факторизации $R\to R/I$, являющееся гомоморфизмом колец (при этом пара (R,I) называется расщепимым нильпотентным расширением кольца R/I). По определению относительная K-группа Милнора $K_n^M(R,I)$ является ядром естественного гомоморфизма $K_n^M(R)\to K_n^M(R/I)$. В 1975 Блох [4, § 1] построил канонический интеграл относительного отображения $d\log$, т.е. функториальный гомоморфизм групп

$$\mathrm{B}\ :\ K_n^M(R,I)\longrightarrow \Omega^{n-1}_{R,I}/d\,\Omega^{n-2}_{R,I}\,,\qquad n\geqslant 1\,,$$

для которого выполняется равенство между отображениями

$$d\circ\mathrm{B}=d\log\ :\ K_n^M(R,I)\longrightarrow\Omega^n_{R,I}\,.$$

При этом было сделано одно важное предположение, заключающееся в том, что натуральные числа от 1 до N обратимы в кольце R.

В дальнейшем совокупность результатов, полученных Блохом [4, теорема 0.1], Мааценом и Стинстрой [22, § 3.12], ван дер Калленом [18, следствие 8.5] и Дрибусом [14] показала что B является изоморфизмом при дополнительном условии 5-стабильности кольца R. Данный результат можно интерпретировать как вариант знаменитой теоремы Годвилля [8] дляK-групп Милнора вместо алгебраических K-групп.

Некоторое время спустя С.О. Горчинский и Д.В. Осипов [9, Теорема 2.9] доказали что отображение B является изоморфизмом в случае $R=S[\varepsilon]$, $I=(\varepsilon)$, где ε является формальной переменной, удовлетворяющей равенству $\varepsilon^2=0$, а S — слабо 5-стабильным кольцом, в котором 2 обратимо. Данный результат был впоследствии применен к изучению многомерного символа Конту–Карерра. При этом общий подход к доказательству [9] был основан на непосредственном анализе элементов в K-группах.

Нашим первым значительным результатом (который мы называем теоремой об изоморфизме для отображения Блоха) является теорема, утверждающая что для того, чтобы отображение B являлось изоморфизмом, дотаточно того, чтобы R было слабо 5-стабильным. Этот результат получен совместно с С.О. Горчинским и был ранее опубликован в статье [10] (см. [10, Теорема 2.12]). Отметим, что слабая 5-стабильность является значительно более общим условием, нежели простая 5-стабильность (хорошим примером является кольцо рядов Лорана с подходящим кольцом коэффициентов). Также подход к доказательству данной теоремы является существенно более элементарным, нежели указанных выше работах. В частности, доказательство опирается на утверждение [9, Теорема 2.9] используя тот факт что K-группы Милнора и модули дифференциальных форм оба коммутируют с определенным классом нефильтруемых копределов, а также несколько новых трюков, применяемых к элементам K-групп.

Зафиксируем теперь некоторое простое число p не равное двум. В случае p-адически полного кольца R, в котором обратимы все натуральные числа за исключением p, интегрирование отображения $d\log$, вообще говоря, невозможно. Тем не менее, оказывается, что все-таки можно определить p-адический аналог отображения Блоха B, причем в этом случае даже не нужно рассматривать относительные K-группы для нильпотентного идеала. Однако при этом модули дифференциальных форм из области значения необходимо (производно) p-адически пополнять.

А именно, Като [19, § I.3] определил такой p-адический аналог отображения Блоха для гладких схем над кольцом векторов Витта совершенного поля характеристики $p > 2$, снабженных поднятием гомоморфизма Фробениуса. (На самом деле, Като определил такое отображение в более общем случае для синтомических схем над кольцом векторов Витта, для которых не выбрано, и даже может не существовать, поднятие гомоморфизма Фробениуса; в этом случае отображение принимает значение в синтомических когомологиях.) Главный нетривиальный факт здесь заключается в том, что построенное отображение удовлетворяет свойству Стейнберга, т.е. обращается в нуль на соотношениях Стейнберга, см. [19, предложение I.3.2]. Приведенное Като доказательство свойства Стейнберга основано на двух фактах. Во-первых, показывается, что p-адическое отображение Блоха в правильном смысле не зависит от выбора поднятия гомоморфизма Фробениуса [19, с. 212]. Для этого синтомические когомологии сводятся к кристаллическим и используются стандартные свойства последних. Во-вторых, отдельно рассматривается случай кольца $\mathbb{Z}_p[x, x^{-1}, (1-x)^{-1}]$ с поднятием гомоморфизма Фробениуса, переводящим x в x^p [19, с. 217]. Для этого все сводится к кольцу рядов Лорана $\mathbb{Z}_p((x))$. Однако, на наш взгляд, последняя редукция не снабжена в [19] достаточным количеством объяснений.

Рассмотренные Като (аффинные) гладкие схемы над кольцом векторов Витта являются частным случаем δ-колец. Данное понятие было введено Джоялем [17] и впоследствии подробно изучалось Буимом [7], который называл их кольцами с p-дифференцированиями. Хорошим источником по данной теме является также статья Бхатта–Шольце [2, § 2]. Кратко, под δ-структурой на кольце R подразумевается отображение $\delta\colon R \to R$, удовлетворяющее определенному набору свойств, из которых, в частности, следует, что отображение $\varphi\colon r \mapsto r^p + p\delta(r)$ представляет собой корректно определенный эндоморфизм кольца R, являющийся поднятием гомоморфизма Фробениуса. В частности, если кольцо R свободно от p-кручения, то δ-структура и поднятие гомоморфизма Фробениуса являются равносильными структурами.

Несложно показать, что δ-структура на кольце R позволяет определить на модуле Ω_R^n групповой эндоморфизм $\frac{\varphi}{p^n}$, который при умножении на p^n совпадает с естественным действием φ на Ω_R^n и коммутирует с дифференциалом.

Будем предполагать, что простое число p не равно 2. Тогда существует канонический интеграл отображения $\left(1-\frac{\varphi}{p}\right)d\log$, т.е. для любого p-адически полного δ-кольца (R,δ) существует функториальный гомоморфизм групп

$$\mathrm{B}_\delta \;:\; (R^*)^{\otimes n} \longrightarrow \widehat{\Omega}_R^{n-1}/d\,\widehat{\Omega}_R^{n-2}\,, \qquad n\geqslant 1\,,$$

для которого выполняется равенство между отображениями

$$d\circ \mathrm{B}_\delta = \left(1-\frac{\varphi}{p^n}\right)d\log \;:\; (R^*)^{\otimes n} \longrightarrow \widehat{\Omega}_R^n\,.$$

Здесь через ${}^D\widehat{\Omega}_R^n$ мы обозначаем производное p-адическое пополнение группы $\widehat{\Omega}_R^n$.

Вторым нашим основным результатом является теорема (называемая нами теоремой о существовании отображения Блоха–Артина–Хассе), утверждающая, что отображение B_δ перводит отношения Стейнберга в ноль. Таким образом, определен групповой гомоморфизм

$$\mathrm{B}_\delta \;:\; K_n^M(R) \longrightarrow {}^D\widehat{\Omega}_R^{n-1}/d\,{}^D\widehat{\Omega}_R^{n-2}\,.$$

При этом доказательство осуществляется непосредственным образом и не использует понятия разделенных степеней или кристаллических когомологий.

Мы называем гомоморфизм B_δ отображением Блоха–Артина–Хассе, поскольку в случае $n=1$ соответствующий гомоморфизм групп из R^* в R представляет собой обобщение классического логарифма Артина–Хассе, являющегося изоморфизмом групп $1+t\mathbb{Z}_p[[t]] \xrightarrow{\sim} t\mathbb{Z}_p[[t]]$, переводящим элемент $1+t$ в $\sum_{p\nmid i}(-1)^{i-1}\frac{t^i}{i}$ (см., например, [34, § 1]).

Пусть теперь $R=S\oplus I$ — расщепимое нильпотентное расширение S, такое, что R и S являются p-адически полными кольцами с тривиальным p-кручением и $I^N=0$ для какого-то $N\in\mathbb{N}$. Предполжим, что на R определена такая δ-структура, что $\delta(S)\subset S$ и $\delta(I)\subset I$. Несложно показать, что ограничение отображения Блоха–Артина–Хассе B_δ определяет гомморфизм

$$\mathrm{B}_\delta :\; {}^D\widehat{K}_{n+1}^M(R,I) \to {}^D\widehat{\Omega}_{R,I}^n/d\,{}^D\widehat{\Omega}_{R,I}^{n-1}\,.$$

Как и в случае первой теоремы, имеются основания полагать, что при некоторых дополнительных условиях данное отображение является изоморфизмом. К примеру, легко доказать, что если δ-кольцо R имеет тривиальное p-кручение а также имеется вложение $\delta(I)\subset I^2$, то соответсвующее отображение Блоха–Артина–Хассе $\mathrm{B}_\delta\colon 1+I \xrightarrow{\sim} I$ является изоморфизмом (ср. с результатами [13], а также с частным случаем кольца $\mathbb{Z}_p[[t]]$ в [34, Предложение 1]).

Нашим третьим основным результатом является теорема, утверждающая, что если S является p-адически полным, слабо 5-стабильным δ-кольцом с тривиальным

p-кручением, то для любого $N \in \mathbb{N}$ и для любого продолжения δ-структуры на R_N, удовлетворяющего условию $\delta(I_N) \subset I_N^2$, гомоморфизм $B_\delta : {}^D\widehat{K}_2^M(R_N, I_N) \to {}^D\widehat{\Omega}^1_{R_N,I_N}/dI_N$ является изоморфизмом. Здесь через R_N мы обозначаем кольцо $S[t]/(t^N)$ и через I_N — его нильпотентный идеал $(\bar{t})$. Доказательство проводится с помощью индукции по N и активно использует техники, разработанные в статье [10]. Стоит также заметить, что несмотря на то, что теорема о существовании отображения Блоха–Артина–Хассе верна и для случая классического p-адического пополнения, для того, чтобы достичь данного результата нам пришлось обратиться к его поизводному варианту. Это обусловленно тем, что классическое p-адическое пополнение не удовлетворяет некоторым существенным условиям, необходимым для доказательства (так, например, коядро p-адически полных модулей может не быть p-адически полным).

Подводя итог, мы выделяем в диссертации три основных результата:

(i) Пусть $I \subset R$ нильпотентнй идеал кольца R такой, что $I^N = 0$ для некоторого $N \geqslant 1$. Предположим, что имеется сечение $R/I \to R$ гомоморфизма $R \to R/I$, являющееся гомоморфизмом колец, а также что $N!$ обратимо в R и что R слабо 5-стабильно. Тогда для любого $n \geqslant 0$ отображение Блоха

$$\mathrm{B} \ : \ K^M_{n+1}(R, I) \xrightarrow{\sim} \Omega^n_{R,I}/d\,\Omega^{n-1}_{R,I}\,.$$

является изоморфизмом.

(ii) Существует гомоморфизм

$$\mathrm{B}_\delta \ : \ K^M_n(R) \longrightarrow {}^D\widehat{\Omega}^{n-1}_R/d\,{}^D\widehat{\Omega}^{n-2}_R\,,$$

функториальный относительно категории p-адически полных δ-колец и удовлетворяющий условию

$$d \circ \mathrm{B}_\delta = \Big(1 - \frac{\varphi}{p^n}\Big) d\log\ .$$

(iii) Если S — p-адически полное слабо 5-стабильное δ-кольцо с тривиальным p-кручением, то для любого $N \in \mathbb{N}$ и для любого продолжения δ-структуры на R_N, удовлетворяющего условию $\delta(I_N) \subset I_N^2$, гомоморфизм

$$B_\delta : {}^d\widehat{K}^M_2(R_N, I_N) \to {}^D\widehat{\Omega}^1_{R_N,I_N}/dI_N$$

является изоморфизмом.

Результаты диссертации отражены в следующих статьях:

- D.Tyurin, S.Gorchinskiy, “Relative Milnor K-groups and differential forms of split nilpotent extensions”, *Izvestiya: Mathematics*, (2018), **82**-5, 880-913.

  (Д.Н.Тюрин, С.О.Горчинский “Относительные K-группы Милнора и дифференциальные формы расщепимых нильпотентных расширений”, *Изв. РАН. Сер. матем,* **82**:5 (2018), 23–60.)

- Д.Н.Тюрин “Обобщение логарифма Артина–Хассе для K-групп Милнора δ-колец”. Работа принята к печати в *Математический сборник.*

Список литературы

[1] D. Arapura, S.-J. Kang, “Kähler–de Rham cohomology and Chern classes”, *Comm. Algebra*, **39**:4, 1153–1167, (2011)

[2] B. Bhatt, P. Scholze, “Prisms and prismatic cohomology”, preprint (2019) arXiv:1905.08229.

[3] S. Bloch “On the tangent space to Quillen K-theory”, *Lecture Notes in Math.*, **341**, 205–210, (1973)

[4] S. Bloch, “K_2 of Artinian $\mathbb{Q}$-algebras, with application to algebraic cycles”, *Comm. Algebra*, **3** (1975), 405–428.

[5] S. Bloch, “Higher regulators, algebraic K-theory, and zeta functions of elliptic curves”, *CRM Monograph Series*, **11**, American Mathematical Society (2000).

[6] S. Bloch, “Applications of the dilogarithm function in algebraic K-theory and algebraic geometry”, *Proceedings of the International Symposium on Algebraic Geometry (Kyoto, 1977)*, (M. Nagata, ed.), Kinokuniya, Tokyo (1978), 103–114.

[7] A. Buium, “Arithmetic analogues of derivations”, *Journal of Algebra*, **198** (1997), 290–299.

[8] T. G. Goodwillie, “Relative algebraic K-theory and cyclic homology”, *Ann. of Math. (2)*, **124**:2, 347–402, (1986)

[9] S. O. Gorchinskiy, D. V. Osipov, “Tangent space to Milnor K-groups of rings”, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, **290**, 26–34 (2015)

[10] S. O. Gorchinskiy, D. N. Tyurin, “Relative Milnor K-groups and differential forms of split nilpotent extensions”, *Izv. Math.*, **82**:5 (2018), 880–913.

[11] A. B. Goncharov, “Geometry of configurations, polylogarithms, and motivic cohomology”, *Adv. Math.*, **114**:2, 197–318, (1995)

[12] H. Grauert, H. Kerner, “Deformationen von Singularitäten komplexer Räume”, *ath. Ann.*, **153**, 236–260, (1964)

[13] T. tom Dieck, “The Artin–Hasse logarithm for λ-rings”, *Algebraic topology (Arcata, CA, 1986), Lecture Notes in Math.*, **1370** (1989), 409–415.

[14] B. Dribus, “A Goodwillie-type theorem for Milnor K-Theory”, preprint arXiv:1402.2222.

[15] H.-J. Reiffen, “Das Lemma von Poincaré für holomorphe Differential-formen auf komplexen Räumen”, *Math. Z.*, **101**, 269–284, (1967)

[16] M. Rossi, L. Terracini, "Maple subroutines for computing Milnor and Tyurina numbers of hypersurface singularities with application to Arnol'd adjacencies", *Rend. Semin. Mat. Univ. Politec. Torino*, **73**:3-4, 269–316, (2015)

[17] A. Joyal, "δ-anneaux et vecteurs de Witt", *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, **7**:3 (1985), 177–182.

[18] W. van der Kallen, "The K_2 of rings with many units", *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **10**:4 (1977), 473–515.

[19] K. Kato, "On p-adic vanishing cycles", *Adv. Stud. Pure Math.*, **10** (1987), 207–251.

[20] K. Kato, "The explicit reciprocity law and the cohomology of Fontaine–Messing", *Bulletin de la S.M.F.*, **119**:4 (1991), 397–441.

[21] M. Kerz, "The Gersten conjecture for Milnor K-theory", *Invent. Math.*, **175**:1 (2009), 1–33.

[22] H. Maazen, J. Stienstra, "A presentation for K_2 of split radical pairs", *J. Pure Appl. Algebra*, **10**:3 (1977), 271–294.

[23] B. Malgrange, "Intégrales asymptotiques et monodromie",*Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **7**, 405–430, (1974),

[24] H. Matsumura,"Commutative ring theory",*Cambridge Studies in Advanced Mathematics***8** (1989)

[25] J. Milnor, "Singular points of complex hypersurfaces", *Annals of Mathematics Studies, No. 61*, Princeton University Press, University of Tokyo Press, (1968)

[26] D. Mond, "From the index of a differential operator to the Milnor number of a singularity", *Differential algebra, complex analysis and orthogonal polynomials, Contemp. Math.*, **509**, 129–141, (2010),

[27] M. Morrow, "K_2 of localisations of local rings", *J. Algebra*, **399** (2014), 190–204.

[28] Yu. P. Nesterenko, A. A. Suslin, "Homology of the general linear group over a local ring, and Milnor's K-theory", *Math. USSR-Izv.*, **34**:1 (1990), 121–146.

[29] V. P. Palamodov, "Multiplicity of holomorphic mappings", *Funct. Anal. Its Appl.*, **1**:3, 218–226, (1967)

[30] G. N. Tjurina, "Locally semi-universal flat deformations of isolated singularities of complex spaces", *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **33**:5, 967–999 (1969)

[31] Lê Dũng Tráng, "Calculation of Milnor number of isolated singularity of complete intersection", *Funct. Anal. Its Appl.*, **8**:2, 127–131, (1974)

[32] G.-M. Greuel, "Der Gauss–Manin–Zusammenhang isolierter Singularitäten von vollständigen Durchschnitten", *Math. Ann.*, **214**, 235–266, (1975)

[33] K. Saito, “Quasihomogene isolierte Singularitäten von Hyperflächen” *Invent. Math.*, **14**, 123–142, (1971)

[34] S. V. Vostokov, “An explicit form of the reciprocity law”, *Math. USSR-Izv.*, **13**:3 (1979), 557–588.