Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Гриценко Валерий Алексеевич

Приложения автоморфных форм в алгебраической геометрии

Резюме диссертации на соискание ученой степени
доктора математических наук

Москва - 2021

ВВЕДЕНИЕ

Термин «*К3 поверхность*» был предложен А. Вейлем в 1957 г. в его известной программе по исследованию этих специальных поверхностей и их модулей. В течение многих лет последним открытым вопросом программы Вейля оставался вопрос о геометрическом типе пространств модулей поляризованных К3 поверхностей. В статье [D4] эта проблема была решена через 50 лет после ее постановки. Это один из главных результатов диссертации, кратко изложенный в §5. (См. также доклад К. Вуазен на семинаре Бурбаки [Vo2] и наш большой обзор [GHS1] в первом томе монографии "Handbook of Moduli".) В очень краткой форме результат можно сформулировать так:

Пространство модулей $\mathcal{F}_{2d}$ поляризованных К3 *поверхностей степени* $2d$ *имеет общий тип для всех* $d > 61$.

Для доказательства этого утверждения был разработан достаточно общий и эффективный метод, который с успехом применяется для различных модулярных многообразий ортогонального типа. Доказательство общего типа модулярных многообразий использует алгебраическую геометрию, модулярные формы относительно неопределенной ортогональной группы $\mathrm{O}(2, n)$, автоморфные произведения Борчердса, комбинаторику систем корней и арифметическую теорию квадратичных форм. *Это общий метод – основной результат диссертации.*

Необходимость изучения модулярных форм на ортогональных группах типа $\mathrm{O}(2, n)$ была впервые отмечена А. Вейлем в конце 50-х годов прошлого века в его программе по изучению К3 поверхностей: *"One interesting feature here is the occurrence, in a problem of moduli, of the automorphic functions belonging to the group of unites of a quadratic form of signature* $(n, 2)$ *(with* $n = 19$ *in the present case)."* (См. "Final report on research contract AF 18(603)-57", [We, стр. 390–395].)

Ниже мы приводим результаты автора в теории автоморфных форм на ортогональных группах, которые позволили решить некоторые классические проблемы в теории модулей поляризованных абелевых поверхностей и соответствующих им поверхностей Куммера, поляризованных К3 поверхностей и поляризованных гиперкэлеровых многообразий. Тексты статей [D1]–[D10], выносимых на защиту, собраны в Приложениях A–J данной диссертации. Их точное библиографическое описание дано ниже на странице 3. Кратко сформулируем основные результаты диссертации.

1) Доказана иррациональность (неотрицательность размерности Кодаиры) пространств модулей $(1, t)$-поляризованных абелевых поверхностей (вопрос Зигеля) для всех t кроме двадцати исключительных поляризаций.

2) Доказан общий тип пространств модулей поляризованных К3 поверхностей степени $2d$ при $d > 61$. Это была последняя открытая проблема программы А. Вейля о К3 поверхностях.

3) В середине 1980-х годов были открыты многомерные аналоги К3 поверхностей – неприводимые голоморфные симплектические многообразия или гиперкэлеровые многообразия. В диссертации установлен общей тип пространств модулей поляризованных гиперкэлеровых многообразий типа $\mathrm{K3}^{[2]}$ (размерность модулей равна 20) и пространств модулей поляризованных 10-мерных многообразий О'Грэди (размерность модулей равна 21).

4) Доказана иррациональность пространств модулей поверхностей Куммера, построенных по поляризованным абелевым поверхностям. Этот вопрос был открыт с 1996 года.

Ключевыми для решения этих алгебро-геометрических проблем являются результаты автора в области модулярных форм относительно ортогональных групп. Перечислим основные автоморфные результаты.

5) Предложен метод подъема форм Якоби до модулярных форм на парамодулярных группах Зигеля рода 2 и на ортогональных группах сигнатуры $(2, n)$. Эта конструкция позволяет строить канонические дифференциальные формы на модулярных многообразиях.

6) Доказаны два автоморфных критерия: *"Low weight cusp form trick"* для доказательства общего типа и *автоморфный критерий унилинейчатости* модулярных многообразий. Оба критерия технически связанны с рефлективными модулярными формами.

7) Найдено новое представление автоморфных произведений Борчердса в терминах форм Якоби в одномерных каспах ортогональной модулярной группы. Этот подход позволяет строить автоморфные формы для двух автоморфных критериев, отмеченных выше. Это основная трансцендентная часть доказательства алгебро-геометрических результатов пунктов 1) – 4). Кроме того, данный подход позволяет находить обобщенную матрицу Картана и кратность всех положительных корней лоренцевых алгебр Каца–Муди.

8) Автоморфные произведения в терминах форм Якоби от одной переменой имеют интерпретацию в физике как вторичное квантование эллиптического рода многообразий Калаби–Яу. Мы изучили автоморфные свойства эллиптического рода и его вторичного квантования.

Список публикаций, выносимых на защиту

[D1] V. Gritsenko, *Irrationality of the moduli spaces of polarized Abelian surfaces* (Иррациональность пространства модулей поляризованных абелевых поверхностей).
International Mathematics Research Notices **6** (1994), 235—243.

[D2] В. А. Гриценко, *Рефлективные модулярные формы и их приложения.* Успехи Математических Наук **73**:5 (2018), 53—122; *Reflective modular forms and applications.*
Russian Mathematical Surveys **73**:5 (2018), 797–864.

[D3] V. Gritsenko, V.V. Nikulin, *Lorentzian Kac-Moody algebras with Weyl groups of 2-reflections* (Лоренцевы алгебры Каца-Муди с группой Вейля 2-отражений).
Proceedings of the London Mathematical Society **116**:3 (2018), 485–533.

[D4] V. Gritsenko, K. Hulek, G. Sankaran, *The Kodaira dimension of the moduli of K3 surfaces* (Размерность Кодаиры модулей К3 поверхностей).
Inventiones Mathematicae **169** (2007), 519—567.

[D5] V. Gritsenko, K. Hulek, G. Sankaran, *Moduli spaces of irreducible symplectic manifolds* (Пространства модулей неприводимых симплектических многообразий).
Compositio Mathematica **146** (2010), 404—434.

[D6] V. Gritsenko, K. Hulek, G. Sankaran, *Moduli spaces of polarised symplectic O'Grady varieties and Borcherds products* (Пространства модулей поляризованных симплектических многообразий О'Грэди и произведения Борчердса).
Journal of Differential Geometry **88** (2011), 61—85.

[D7] V. Gritsenko, K. Hulek, *Uniruledness of orthogonal modular varieties* (Унилинейчатость ортогональных модулярных многообразий).

Journal of Algebraic Geometry **23** (2014), 711–725.

[D8] V. Gritsenko, *Elliptic genus of Calabi–Yau manifolds and Jacobi and Siegel modular forms* (Эллиптический род многообразий Калаби-Яу и модулярные формы Якоби и Зигеля).

Алгебра и Анализ **11**:5 (1999), 100—125; St. Petersburg Mathematical Journal **11**:5 (2000), 781—804 (with Appendix of F. Hirzebruch, *On the Euler characteristic of manifolds with* $c_1 = 0$. *A letter to V. Gritsenko.* 805—807).

[D9] V. Gritsenko, C. Poor, D. S. Yuen, *Antisymmetric Paramodular Forms of Weights 2 and 3* (Антисимметричные парамодулярные формы веса 2 и 3).

International Mathematics Research Notices, Issue **20** (2020), 6926—6946.

[D10] В. А. Гриценко, Х. Ванг, *Антисимметричные парамодулярные формы веса 3.*

Математический Сборник **210**:12 (2019), 43—64; *Antisymmetric paramodular forms of weight 3.* Sbornik: Mathematics, **210**:12 (2019), 1702–1723.

1 Модулярные многообразия и модулярные формы

Прежде всего мы определим важный для алгебраической геометрии класс многообразий – модулярные многообразия ортогонального типа. Пусть L – целочисленная решетка, а именно, свободный $\mathbb{Z}$-модуль конечного ранга с четной целочисленной симметричной билинейной формой $(\cdot,\cdot) : L \times L \to \mathbb{Z}$ сигнатуры $(2, n)$ над $\mathbb{R}$. Определим ассоциированную с L классическую эрмитову однородную n-мерную область

$$\mathcal{D}(L) = \{[Z] \in \mathbb{P}(L \otimes \mathbb{C}) \mid (Z, Z) = 0,\ (Z, \overline{Z}) > 0\}^{+},$$

где $+$ означает одну из двух компонент связности.

Обозначим через $\mathrm{O}^+(L)$ подгруппу индекса 2 целочисленной ортогональной группы $\mathrm{O}(L)$, сохраняющую $\mathcal{D}(L)$. Пусть Γ – подгруппа конечного индекса в $\mathrm{O}^+(L)$. Любая такая группа действует на $\mathcal{D}(L)$ как дискретная группа автоморфизмов. Определим фактор-пространство

$$\mathcal{M}_L(\Gamma) = \Gamma \backslash \mathcal{D}(L),$$

которое называется **ортогональным модулярным многообразием**.

Для геометрических приложений самыми важными арифметическими группами являются *стабильная ортогональная группа* и ее специальная подгруппа

$$\widetilde{\mathrm{O}}^+(L) = \{g \in \mathrm{O}^+(L) \mid g|_{L^\vee/L} = \mathrm{id}\}, \quad \widetilde{\mathrm{SO}}^+(L) = \mathrm{SO}(L) \cap \widetilde{\mathrm{O}}^+(L), \tag{1}$$

где $L^\vee$ – двойственная решетка и $L^\vee/L$ конечная дискриминантная группа порядка $|\det(L)|$.

Многие классические пространства модулей являются ортогональными модулярными многообразиями. Ниже приведены некоторые важные примеры таких многообразий, которые были исследованы в диссертации.

Пространства модулей.

(1) Пространство $\mathcal{A}_t$ модулей $(1,t)$-*поляризованных абелевых поверхностей* и пространство $\mathcal{K}_t$ *куммеровых поверхностей, построенных по* $(1,t)$-*поляризованным абелевым поверхностям.* Это следующие зигелевы модулярные 3-фолды

$$L_t = U \oplus U \oplus \langle -2t\rangle, \qquad \operatorname{sign}(L_t) = (2,3), \tag{2}$$

$$\mathcal{A}_t = \widetilde{\mathrm{SO}}^+(L_t) \setminus \mathcal{D}(L_t), \quad \mathcal{K}_t = \mathrm{O}^+(L_t) \setminus \mathcal{D}(L_t), \quad \dim \mathcal{A}_t = \dim \mathcal{K}_t = 3, \tag{3}$$

где $U \cong \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ – гиперболическая плоскость, $\langle -2t\rangle$ – решетка ранга 1 с матрицей Грамма $(-2t)$.

(2) Пространство $\mathcal{M}_{2d}$ модулей *поляризованных* K3 *поверхностей степени* $2d$

$$L_{2d} = 2U \oplus 2E_8(-1) \oplus \langle -2d\rangle, \qquad \operatorname{sign}(L_t) = (2,19), \tag{4}$$

$$\mathcal{M}_{2d} = \widetilde{\mathrm{O}}^+(L_{2d}) \setminus \mathcal{D}(L_{2d}), \tag{5}$$

где $2E_8(-1)$ две ортогональные копии отрицательно определенной решетки $E_8(-1)$.

(3) Пространство модулей *поляризованных неприводимых голоморфных симплектических многообразий типа* $\mathrm{K3}^{[2]}$ *с расщепимой поляризацией степени Богомолова–Бовиля* $2d$ (см. [D5], [GHS1])

$$L_{2,2d} = 2U \oplus 2E_8(-1) \oplus \langle -2\rangle \oplus \langle -2d\rangle, \qquad \operatorname{sign}(L_{2,2d}) = (2,20), \tag{6}$$

$$\mathcal{M}^{split}_{\mathrm{K3}^{[2]},2d} = \widetilde{\mathrm{O}}^+(L_{2,2d}) \setminus \mathcal{D}(L_{2,2d}). \tag{7}$$

(4) Пространство модулей *поляризованных 10-мерных многообразий О'Грэди с расщепимой поляризацией степени Богомолова–Бовиля* $2d$ (см. [D6], [GHS1])

$$L_{A_2,2d} = 2U \oplus 2E_8(-1) \oplus \langle A_2(-1)\rangle \oplus \langle -2d\rangle, \qquad \operatorname{sign}(L_{A_2,2d}) = (2,21), \tag{8}$$

$$\mathcal{M}^{split}_{O'G_{10},2d} = \widetilde{\mathrm{O}}^+(L_{A_2,2d}) \setminus \mathcal{D}(L_{2,2d}). \tag{9}$$

По построению, ортогональное модулярное многообразие является комплексным аналитическим пространством. Его компактификация типа Сатаке, а именно, компактификация Бейли–Бореля, была построена в [BB]. Граница компактификации Бейли–Бореля распадается в дизъюнктное объединение компонент F_P, являющихся в свою очередь симметрическими пространствами, соответствующими рациональным параболическим подгруппам ортогональной группы сигнатуры $(2,n)$, которые являются стабилизаторами изотропных пространств в $L \otimes \mathbb{Q}$. Имеет место следующий результат (см. [BB]): *компактификация Бейли–Бореля* $\mathcal{M}_L(\Gamma)^*$ *является неприводимым нормальным проективным многообразием над* $\mathbb{C}$ *и распадется в объединение непересекающихся компонент*

$$\mathcal{M}_L(\Gamma)^* = \mathcal{M}_L(\Gamma) \amalg \coprod_{\mathcal{P}} X_{\mathcal{P}} \amalg \coprod_{\ell} Q_\ell, \tag{10}$$

где ℓ *и* $\mathcal{P}$ *пробегают конечное число представителей* Γ-*орбит рациональных изотропных прямых и плоскостей в* $L \otimes \mathbb{Q}$. *Компонента* $\mathcal{M}_L(\Gamma) = \Gamma\backslash\mathcal{D}(L)$ *является отрытым по Зарискому множеством, каждая компонента* $X_{\mathcal{P}}$ *является модулярной кривой, а каждая* Q_ℓ *– точкой.* Q_ℓ *содержится в замыкании* $X_{\mathcal{P}}$ *тогда и только тогда, когда* ℓ

может быть выбрана так, что $\ell \subset \mathcal{P}$. Компоненты $X_{\mathcal{P}}$ и Q_ℓ обычно называются 1- и 0-мерными компонентами границы модулярного многообразия или его одномерными и нульмерными каспами.

Теория модулярных форм является одним из главных инструментов для изучения геометрии модулярных многообразий ортогонального типа. Например, компактификация Бейли–Бореля $\mathcal{M}_L(\Gamma)^*$ может быть определена как $\operatorname{Proj}\left(\bigoplus_k M_k(\Gamma)\right)$, где $M_k(\Gamma)$ обозначает конечномерное пространство модулярных форм веса k с тривиальным характером. Дадим определение модулярных форм.

Определение 1.1. *Рассмотрим решетку L сигнатуры $(2,n)$ с $n \geq 3$ и аффинный конус $\mathcal{D}(L)^\bullet = \{y \in L \otimes \mathbb{C} \mid x = \mathbb{C}^* y \in \mathcal{D}(L)\}$ над $\mathcal{D}(L)$. Пусть $k \in \mathbb{Z}$ и $\chi \colon \Gamma \to \mathbb{C}^*$ – характер подгруппы $\Gamma < \mathrm{O}^+(L)$ конечного индекса. Голоморфная функция $F \colon \mathcal{D}(L)^\bullet \to \mathbb{C}$ называется* **модулярной формой веса** k *и* **характера** χ *относительно группы Γ, если*

$$F(tZ) = t^{-k} F(Z), \quad \forall\, t \in \mathbb{C}^* \quad \text{и} \quad F(gZ) = \chi(g) F(Z), \quad \forall\, g \in \Gamma.$$

Модулярная форма называется **параболической***, если она обращается в ноль во всех каспах группы Γ, то есть на всех граничных компонентах компактификации Бейли–Бореля модулярного многообразия $\Gamma\backslash\mathcal{D}(L)$.*

Через $M_k(\Gamma,\chi)$ (соответственно, $S_k(\Gamma,\chi)$) обозначаем линейное пространство всех модулярных (соответственно, параболических) форм веса k и характера χ. Эти пространства конечномерны.

Дифференциальные формы на $\mathcal{M}_L(\Gamma)$ могут быть интерпретированы как модулярные формы относительно группы Γ. Выберем комплексную форму объема dZ на $\mathcal{D}(L)$. Тогда, если F – модулярная форма веса kn и характера $\det^k$ для группы Γ, то $F\,(dZ)^k$ является Γ-инвариантным сечением плюриканонического расслоения $\Omega(\mathcal{D}(L))^{\otimes k}$. Следовательно арифметическая информация о модулярных формах может быть использована для получения геометрической информации об ортогональном многообразии $\mathcal{M}_L(\Gamma)$.

Вес $k = n$ называется *каноническим* в силу следующей *Леммы Фрейтага* (см. [Fr, Предложение 2.1 Главы 3]) $S_n(\Gamma,\det) \cong H^0\big(\widetilde{\mathcal{M}}_L(\Gamma), \Omega(\widetilde{\mathcal{M}}_L(\Gamma))\big)$, где $\widetilde{\mathcal{M}}_L(\Gamma)$ – любая гладкая компактификация модулярного многообразия $\mathcal{M}_L(\Gamma)$ и $\Omega(\widetilde{\mathcal{M}}_L(\Gamma))$ – пучок канонических дифференциальных форм. Следовательно, имеется следующая важная формула для геометрического рода ортогонального модулярного многообразия в терминах размерности пространства параболических форм канонического веса n:

$$p_g(\widetilde{\mathcal{M}}_L(\Gamma)) = h^{n,0}(\widetilde{\mathcal{M}}_L(\Gamma)) = \dim S_n(\Gamma,\det). \tag{11}$$

Главная проблема: *Как построить хотя бы одну параболическую форму канонического веса для модулярных групп из теории модулей алгебраических многообразий?*

Для многообразия $\mathcal{A}_t$ данная проблема была решена автором в [D1], а для многообразия $\mathcal{K}_p$ первый нетривиальные результаты получены в [D9]–[D10].

2 Арифметический подъем форм Якоби и пространства модулей абелевых поверхностей (проблема Зигеля)

В этой диссертации мы рассматриваем решетки, содержащие две гиперболические плоскости U,

$$L = U \oplus L_1 = U \oplus (U_1 \oplus L_0(-1)), \quad U \cong U_1 \cong \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \tag{12}$$

где L_0 – четная целочисленная положительно определенная решетка ранга $n_0 > 0$, L_1 имеет сигнатуру $(1, n_0 + 1)$, а L – сигнатуру $(2, n_0 + 2)$. ($L(m)$ обозначает решетку L с квадратичной формой умноженной на m.) Первое разбиение решетки L в (12) дает цилиндрическую модель (так называемая *труба будущего*) однородной области:

$$\mathcal{D}(L) \cong \mathcal{H}(L_1) = \{Z \in L_1 \otimes \mathbb{C} \mid (\operatorname{Im} Z, \operatorname{Im} Z)_{L_1} > 0\}^+.$$

Второе разбиение решетки L в (12) дает более детальное представление области $\mathcal{D}(L)$ в одномерном каспе, отвечающем изотропной плоскости в L

$$\mathcal{H}(L_1) \cong \mathcal{H}(L_0) = \{Z = \omega e_1 + \mathfrak{z} + \tau f_1 \in L_1 \otimes \mathbb{C} \mid \\ \tau,\, \omega \in \mathbb{H}_1,\ \mathfrak{z} \in L_0 \otimes \mathbb{C},\ 2 \operatorname{Im} \tau \cdot \operatorname{Im} \omega - (\operatorname{Im} \mathfrak{z}, \operatorname{Im} \mathfrak{z})_{L_0} > 0\}. \quad (13)$$

Любая модулярная форма $F \in M_k(\widetilde{\mathrm{SO}}^+(L))$ периодична, т.е. $F(Z + l) = F(Z)$ для любого $l \in L_1$. Тем самым определено разложение Фурье по переменной $Z \in \mathcal{H}(L_1)$ в нульмерном каспе

$$F(Z) = \sum_{l \in L_1^\vee,\, (l,l) \geq 0} f(l) \exp\left(2\pi i\, (l, Z)\right). \quad (14)$$

Условие на гиперболическую норму индексов ненулевых коэффициентов Фурье $(l, l)_{L_1} \geq 0$ следует из голоморфности модулярной формы. (См. описание разложения Фурье в произвольном каспе в [GN2, §2.3] и [GHS1, §8.2–8.3].) Разложение Фурье–Якоби есть разложение в одномерном каспе. Точнее это разложение Фурье по переменной ω из (13)

$$F(\tau, \mathfrak{z}, \omega) = \sum_{m \geq 0} \varphi_m(\tau, \mathfrak{z}) \exp\left(2\pi i\, m\omega\right). \quad (15)$$

Коэффициенты $\varphi_m(\tau, \mathfrak{z})$ называются *коэффициентами Фурье–Якоби* в 1-мерном каспе.

Мы определяем формы Якоби веса k и индекса m относительно решетки L_0 как автоморфные формы типа $\varphi(\tau, \mathfrak{z}) \exp\left(2\pi i\, m\omega\right)$ относительно параболической подгруппы, сохраняющей данный одномерный касп. Это можно выразить при помощи функциональных уравнений двух типов, приведенных ниже.

Определение 2.1. (См. [D2, Определение 2.2], [G2] и [CG2].) *Голоморфная функция $\varphi : \mathbb{H} \times (L_0 \otimes \mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ называется* **слабо голоморфной формой Якоби веса $k \in \mathbb{Z}$, индекса $t \in \mathbb{N}$** *относительно решетки L_0, если она удовлетворяет функциональным уравнениям*

$$\varphi\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \frac{\mathfrak{z}}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k\, e^{i\pi t \frac{c(\mathfrak{z},\mathfrak{z})}{c\tau + d}}\, \varphi(\tau, \mathfrak{z}), \quad \forall \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}),$$

$$\varphi(\tau, \mathfrak{z} + x\tau + y) = e^{-i\pi t((x,x)\tau + 2(x,\mathfrak{z}))}\, \varphi(\tau, \mathfrak{z}), \quad \forall\, x, y \in L_0,$$

и обладает разложением Фурье типа

$$\varphi(\tau, \mathfrak{z}) = \sum_{n \geq c_0} \sum_{\ell \in L_0^\vee} f(n, \ell) q^n \zeta^\ell, \quad (16)$$

где $c_0 \in \mathbb{Z}$, $q = e^{2\pi i \tau}$ и $\zeta^\ell = e^{2\pi i (\ell, \mathfrak{z})}$. Если φ удовлетворяет условию

$$f(n, \ell) \neq 0 \Longrightarrow 2n - (\ell, \ell) \geq 0,$$

тогда φ называется **голоморфной формой Якоби**. *Если φ удовлетворяет более сильному условию ($f(n,\ell) \neq 0 \Longrightarrow 2n-(\ell,\ell) > 0$) тогда φ называется* **параболической**. *Обозначим через $J^{!}_{k,L_0,t}$ (соответственно $J_{k,L_0,t}$, и $J^{cusp}_{k,L_0,t}$) векторное пространство слабо голоморфных (соответственно, голоморфных или параболических) форм Якоби веса k и индекса t относительно решетки L.*

Теорема 2.2. (См. [D2, Теорема 3.1] и [G2].) *Подъём голоморфной формы Якоби $\varphi_k(\tau,\mathfrak{z}) \in J_{k,1}(L_0)$ (с $f(0,0)=0$ в (16)) веса k определяется действием формальной операторной L-функцией Гекке группы $SL_2(\mathbb{Z})$, задаваемой суммой*

$$\operatorname{Lift}(\varphi_k)(\tau,\mathfrak{z},\omega) = \sum_{m\geq 1} m^{k-1}\big(\varphi_k(\tau,\mathfrak{z})e^{2\pi i m\omega}\big) \mid_k T_{-}(m)$$

$$= \sum_{m\geq 1} m^{-1} \sum_{\substack{ad=m\\ b \mod d}} a^k \varphi_k\big(\frac{a\tau+b}{d},\ a\mathfrak{z}\big)\, e^{2\pi i m\omega}. \tag{17}$$

Подъём имеет следующее разложение Фурье

$$\operatorname{Lift}(\varphi_k)(Z) = \sum_{\substack{n,m>0,\, \ell\in L_0^\vee\\ 2nm-(\ell,\ell)\geq 0}} \sum_{d|(n,\ell,m)} d^{k-1} f(\frac{nm}{d^2},\frac{\ell}{d})\, e(n\tau + (\ell,\mathfrak{z}) + m\omega),$$

где $d|(n,\ell,m)$ обозначает положительный общий делитель n, m и вектора $\ell \in L_0$. Подъём есть модулярная форма веса k относительно стабильной ортогональной группы $\widetilde{\mathrm{SO}}^+(L)$ (см. (1))

$$\operatorname{Lift}(\varphi_k) \in M_k(\widetilde{\mathrm{SO}}^+(L)).$$

$\operatorname{Lift}(\varphi_k)$ *– параболическая форма, если φ_k параболическая форма Якоби.*

Модулярные формы Якоби веса k и индекса 1, отвечающие решетке $\langle 2t\rangle$, есть обычные модулярные формы Якоби веса k и индекса t в смысле Эйхлера–Загира. Для любой параболической формы Якоби веса 3 и индекса t конструкция подъема дает ненулевую параболическую форму веса 3 относительно парамодулярной группы Γ_t. В силу критерия Фрайтага мы получаем ненулевую каноническую дифференциальную форму на любой гладкой компактификации модулярного многообразия $\mathcal{A}_t$. Это дает следующую теорему.

Теорема 2.3. (См. [D1, Теорема 1.1].) *Пространство модулей $(1,t)$-поляризованных абелевых поверхностей $\mathcal{A}_t$ (см. (2)–(3)) имеет положительный геометрический род для всех t кроме двадцати исключительных поляризаций $t = 1,2,\dots,12,14,15,16,18,20,24,$ $30,36$. В частности, $H^3(\Gamma_t,\mathbb{C})$ не является тривиальной для всех неисключительных поляризаций.*

Рациональность или унирациональность соответствующего пространства модулей известна только для исключительных $t \leq 20$ (см. [GP]).

3 Рефлективные автоморфные формы: два автоморфных критерия в геометрии модулярных многообразий

Пусть Y – связное гладкое проективное многообразие размерности n. *Размерность Кодаиры $\kappa(Y)$* определяется как степень трансцендентности кольца плюриканонических дифференциальных форм

$$\kappa(Y) = \mathrm{Tr.deg}\Big(\bigoplus_{m\geq 0} H^0(Y, \Omega(Y)^{\otimes m})\Big) - 1,$$

или $-\infty$, если $H^0(Y, \Omega(Y)^{\otimes m}) = 0$ для всех $m > 0$. Этот инвариант дает асимптотическую размерность $h^0(Y, \Omega(Y)^{\otimes m}) \sim m^{\kappa(Y)}$ для достаточно больших m. Известно, что $\kappa(Y) \in \{-\infty, 0, 1, \dots, n = \dim Y\}$. Говорят, что **многообразие Y имеет общий тип**, если $\kappa(Y) = \dim Y$. Размерность Кодаиры является бимероморфным инвариантом, поэтому для любого неприводимого квазипроективного многообразия полагаем $\kappa(X) = \kappa(\widetilde{X})$, где $\widetilde{X}$ какая-то гладкая модель многообразия X.

Дивизор ветвления модулярной проекции $\pi_\Gamma : \mathcal{D}(L) \to \Gamma\backslash\mathcal{D}(L)$ является одним основным препятствием для продолжения плюриканонических дифферецниальных форм с открытой подобласти $\mathcal{F}_L(\Gamma)^o$ на гладкую компактификацию этого квазипроективного многообразия.

Теорема 3.1. (См. [D4, Следствие 2.13].) *Дивизор ветвления* $\mathrm{R.div}(\pi_\Gamma)$ *модулярной проекции* $\pi_\Gamma : \mathcal{D}(L) \to \Gamma\backslash\mathcal{D}(L)$ *индуцируется всеми элементами* $g \in \Gamma$ *такими, что* g *или* $-g$ *является отражением относительно вектора решетки* L

$$\mathrm{R.div}(\pi_\Gamma) = \bigcup_{\substack{r\in L/\pm 1\\ r\ \text{примитивный}\\ \sigma_r\in\Gamma\ \text{или}\ -\sigma_r\in\Gamma}} \mathcal{D}_r(L). \tag{18}$$

Определение 3.2. *Модулярная форма* $F \in M_k(\Gamma, \chi)$ *называется* **рефлективной**, *если*

$$\mathrm{supp}(\operatorname{div} F) \subset \mathrm{R.div}(\pi_\Gamma),$$

где $\mathrm{R.div}(\pi_\Gamma)$ *дивизор ветвления модулярной проекции из Теоремы 3.1. F называется* **строго рефлективной**, *если кратность всех неприводимых компонент* $\operatorname{div} F$ *равна* 1.

Модулярные формы с маленьким или большим дивизором. Согласно определению, данному выше, модулярная форма $F \in M_k(\Gamma, \chi)$ является строго рефлективной тогда и только тогда, когда $\operatorname{div} F \leq \mathrm{R.div}(\pi_\Gamma)$, т.е. дивизор строго рефлективный формы *маленький.* Будем говорить, что дивизор модулярной формы $F \in M_k(\Gamma, \chi)$ *большой*, если $\operatorname{div} F \geq \mathrm{R.div}(\pi_\Gamma)$.

Модулярные формы канонического веса. Малые и большие веса. Пусть $\mathrm{sign}(L) = (2, n)$. Дивизор произвольной модулярной формы канонического веса $F \in M_n(\Gamma, \det)$ всегда содержит дивизор ветвления $\mathrm{R.div}(\pi_\Gamma)$. Канонический вес является пограничным в геометрических приложениях. Мы говорим, что *вес k модулярной формы $F \in M_k(\Gamma, \chi)$ малый, если $k < n$, и большой, если $k > n$.* Ниже приводим **первый автоморфный критерий**.

Теорема 3.3. (**Low weight cusp form trick**, см. [D4, Теорема 1.1].) *Пусть* $\mathrm{sign}(L) = (2, n)$ *и* $n \geq 9$. *Модулярное многообразие* $\mathcal{M}_L(\Gamma)$ *имеет общий тип, если существует параболическая форма* $F \in S_k(\Gamma, \det^\varepsilon)$ ($\varepsilon = 0, 1$) *малого веса* $k < n$ *с большим дивизором, т.е. такая, что* $\operatorname{div} F \geq \mathrm{R.div}(\pi_\Gamma)$.

Второй критерий в некотором смысле противоположен первому. Мы докажем, что размерность Кодаиры модулярного многообразия $\mathcal{M}_L(\Gamma)$ равна $-\infty$, если существует модулярная форма большого веса с маленьким дивизором.

Теорема 3.4. (См. [D2, Теорема 5.8].) *Пусть* $\mathrm{sign}(L) = (2, n)$ *и* $n \geq 3$. *Предположим, что* $F_k \in M_k(\Gamma, \chi)$ *– строго рефлективная модулярная форма веса* k *и характера* χ *относительно подгруппы* $\Gamma < \mathrm{O}^+(L)$ *конечного индекса, т.е.*

$$\operatorname{div} F \leq \mathrm{R.div}(\pi_\Gamma).$$

Пусть $\kappa(X)$ *– размерность Кодаиры многообразия* X.

1) Если $k > n$, *то* $\kappa(\Gamma\backslash\mathcal{D}(L)) = -\infty$.

2) Пусть $k = n$. *Предположим в этом случае, что* Γ *имеет хотя бы один касп, т.е.* $\Gamma\backslash\mathcal{D}(L)$ *не является компактным многообразием. Если* F *не является параболической, то* $\kappa(\Gamma\backslash\mathcal{D}(L)) = -\infty$. *Если* F *параболическая форма (с кратностью нуля на границе не меньшей* 1*), то для подгруппы* $\Gamma_\chi = \ker(\chi \cdot \det) < \Gamma$ *имеем* $\kappa(\Gamma_\chi\backslash\mathcal{D}(L)) = 0$.

Отметим, что имеется следующее алгебро-геометрическое уточнение последней теоремы. Напомним, что многообразие называется унилинейчатым, если существует доминантное рациональное отображение $Y \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow X$, где Y многообразие с $\dim Y = \dim X - 1$. Если X унилинейчатое, то $\kappa(X) = -\infty$. Гипотетически предполагается, что обратное тоже верно, однако это доказано только для $\dim X = 3$.

Теорема 3.5. (См. [D7, Теорема 2.1].) *Пусть* $k > n$ *в условиях Теоремы 3.4. Тогда модулярное многообразие* $\Gamma\backslash\mathcal{D}(L)$ *является, по крайней мере, унилинейчатым.* (См. более общую формулировку и доказательство в [D7].)

4 Автоморфные произведения Борчердса в терминах форм Якоби веса 0, лоренцевы алгебры Каца–Муди, эллиптический род многообразий Калаби–Яу

В предыдущем параграфе была описана роль автоморфных форм со специальными дивизорами. Основная задача – построить автоморфные формы, удовлетворяющие условиям первого или второго автоморфных критериев.

4.1. Автоморфное произведение в одномерном каспе.

Рассмотрим *η-функцию Дедекинда*

$$\eta(\tau) = q^{1/24} \prod_{n \geq 1} (1 - q^n) \in S_{1/2}(\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}), v_\eta), \tag{19}$$

которая является параболической формой веса $1/2$ с системой мультипликаторов $v_\eta : \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \to U_{24}$ порядка 24 (проективный характер). Базовый объект в нашей конструкции – **нечетная тета-функция Якоби** ($\vartheta(\tau, -z) = -\vartheta(\tau, z)$)

$$\vartheta(\tau, z) = q^{\frac{1}{8}} (\zeta^{\frac{1}{2}} - \zeta^{-\frac{1}{2}}) \prod_{n \geq 1} (1 - q^n \zeta)(1 - q^n \zeta^{-1})(1 - q^n). \tag{20}$$

В [GN3] было замечено, что $\vartheta(\tau, z) \in J_{1/2,1/2}(v_\eta^3 \times v_H)$ является голоморфной формой Якоби веса $1/2$ и индекса $1/2$ в терминах определения из §4.

Пусть дана целочисленная квадратичная решетка $L = 2U \oplus L_0(-1)$ (см. (12)) сигнатуры $(2, n)$. $\widetilde{\mathrm{O}}^+(L)$ – стабильная ортогональная группа. Для любого $v \in L \otimes \mathbb{Q}$, удовлетворяющего $(v, v) < 0$, определим соответствующий рациональный квадратичный дивизор $\mathcal{D}_v = \{[Z] \in \mathcal{D}(M) : (Z, v) = 0\}$. Зафиксируем аффинную цилиндрическую реализацию $\mathcal{H}(L_0)$ однородной области $\mathcal{D}(L)$ (см. (13)).

Теорема 4.1. (См. [D2, Теорема 4.2].) *Пусть дана слабо голоморфная форма Якоби веса* 0 *и индекса* 1 *для решетки* L_0 *(см. §2)*

$$\varphi(\tau,\mathfrak{z}) = \sum_{n\in\mathbb{Z},\ell\in L_0^\vee} f(n,\ell)q^n\zeta^\ell \in J^!_{0,L_0;1}.$$

Предположим, что $f(n,\ell)\in\mathbb{Z}$ *для всех* $2n-(\ell,\ell)\le 0$. *Введем порядок в векторной системе* $\{\ell; f(0,\ell)\}$, *аналогичный положительным и отрицательным корням. По-определению,* $(n,\ell,m)>0$ *означает, что либо* $m>0$, *либо* $m=0$ *и* $n>0$, *либо* $m=n=0$ *и* $\ell<0$. *Определим четыре константы*

$$A=\frac{1}{24}\sum_{\ell\in L^\vee} f(0,\ell),\quad \vec{B}=\frac{1}{2}\sum_{\ell>0} f(0,\ell)\ell\in\frac{1}{2}L_0^\vee,\quad C=\frac{1}{2\operatorname{rank}(L)}\sum_{\ell\in L^\vee} f(0,\ell)(\ell,\ell).$$

Тогда произведение

$$\operatorname{Borch}(\varphi)(Z)=q^A r^{\vec{B}}\xi^C \prod_{\substack{n,m\in\mathbb{Z},\ell\in L_0^\vee\\ (n,\ell,m)>0}} (1-q^n\zeta^\ell\xi^m)^{f(nm,\ell)} \in M^{mer}_{\frac{f(0,0)}{2}}(\widetilde{\mathrm{O}}^+(L),\chi), \tag{21}$$

является мероморфной автоморфной формой веса $f(0,0)/2$ *относительно стабильной ортогональной группы* $\widetilde{\mathrm{O}}^+(2U\oplus L_0(-1))$ *с характером* χ. *При этом* $Z=(\tau,\mathfrak{z},\omega)\in\mathcal{H}(L_0)$, $q=\exp(2\pi i\tau)$, $\zeta^\ell=\exp(2\pi i(\ell,\mathfrak{z}))$, $\xi=\exp(2\pi i\,\omega)$, *а характер* χ *индуцируется своими значениями на подгруппах:*

$$\chi|_{\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})}=v_\eta^{24A},\qquad \chi|_{H(L)}([\lambda,\mu;r])=e^{\pi i C((\lambda,\lambda)+(\mu,\mu)-(\lambda,\mu)+2r)},\qquad \chi(V)=(-1)^D,$$

где $V:(\tau,\mathfrak{z},\omega)\to(\omega,\mathfrak{z},\tau)$ *и* $D=\sum_{n<0}\sigma_0(-n)f(n,0)$, *т.е.*

$$\operatorname{Borch}(\varphi)(\tau,\mathfrak{z},\omega)=(-1)^D\operatorname{Borch}(\varphi)(\omega,\mathfrak{z},\tau).$$

Все полюса и нули *формы* $\operatorname{Borch}(\varphi)$ *лежат на рациональных квадратичных дивизорах типа* $\mathcal{D}_v$, *где* $v\in 2U\oplus L^\vee(-1)$ *– примитивный вектор с* $(v,v)<0$. **Кратность дивизоров** *задаётся формулой*

$$\operatorname{mult}\mathcal{D}_v=\sum_{d\in\mathbb{Z},d>0} f(d^2n,d\ell),$$

где $v\equiv\ell \mod 2U\oplus L_0(-1)$, $\ell\in L_0^\vee$, $n\in\mathbb{Z}$ *такие, что* $(v,v)=2n-(\ell,\ell)$.

Замечание. Наш вариант произведения Борчердса является *экспоненциальным вариантом арифметического подъема.* Бесконечное произведение Теоремы 4.1 в нашей конструкции записывается другим образом. Пусть φ исходная форма Якоби веса 0 и

$$\widetilde{\varphi}(Z)=\widetilde{\varphi}(\tau,\mathfrak{z},\omega)=\varphi(\tau,\mathfrak{z})\exp(2pii\omega).$$

Тогда

$$\operatorname{Borch}(\varphi)(Z)=\widetilde{\psi}_{L;C}(Z)\exp\big(-\sum_{m\ge1} m^{-1}\widetilde{\varphi}|T_-(m)(Z)\big), \tag{22}$$

где под экспонентой стоит *арифметический подъем формы Якоби веса* 0 из Теоремы 2.2. Первый множитель, т.е. первый ненулевой коэффициент Фурье–Якоби индекса C формы $\operatorname{Borch}(\varphi)$ в данном одномерном каспе является обобщённым тета-блоком

$$\psi_{L,C}(\tau,\mathfrak{z})=\eta(\tau)^{f(0,0)}\prod_{\ell>0}\left(\frac{\vartheta(\tau,(\ell,\mathfrak{z}))}{\eta(\tau)}\right)^{f(0,\ell)}. \tag{23}$$

Частный случай Теоремы 4.1 для решеток сигнатуры $(2,3)$ был предложен в статьях Гриценко и Никулина [GN1]–[GN3]. В пунктах 4.2–4.5 мы дадим несколько приложений Теоремы 4.1.

4.2. Двадцать три новых конструкции формы Борчердса Φ_{12}.

Рассмотрим четную унимодулярную решетку $II_{2,26}$ сигнатуры $(2,26)$. Граница компактификации Бейли–Бореля модулярного многообразия $\mathrm{O}^+(II_{2,26})\backslash\mathcal{D}(II_{2,26})$ (так называемое пространство модулей бозонной струны) состоит из одного нульмерного каспа и 24 одномерных каспов, отвечающих классам четных унимодулярных решеток Нимейера ранга 24 (см. [D4, Лемма 4.4]).

Теорема 4.2. (См. [D2, Теорема из Введения].) *Форма Борчердса $\Phi_{12}\in M_{12}(\mathrm{O}^+(II_{2,26}),\det)$ обращается в ноль с кратностью 1 в нульмерном каспе группы $\mathrm{O}^+(II_{2,26})$. На одномерном каспе, отвечающем решетке Лича, значение Φ_{12} равно форме Рамануджана $\Delta_{12}(\tau)$. В одномерных каспах, отвечающих решеткам Нимейера $N(R)$ с нетривиальной системой корней $R(N)$, Φ_{12} обращается в ноль с кратностью $h(R)$, где $h(R)$ число Кокстера неприводимых компонент системы корней R. Первый коэффициент Фурье–Якоби Φ_{12} в окрестности этой одномерной компоненты совпадает, с точностью до знака, с функцией знаменателя Каца–Вейля соответствующей аффинной алгебры $\hat{\mathfrak{g}}(R)$*

$$\Phi_{12}(\tau,\mathfrak{z},\omega)=\pm\eta(\tau)^{24}\prod_{v\in R_+}\frac{\vartheta(\tau,(v,\mathfrak{z}))}{\eta(\tau)}\,e^{2\pi i h(R)\omega}+\ldots,$$

где $\vartheta(\tau,z)$ – нечетная тета-функция Якоби (см. (20)*), $\eta(\tau)$ – функция Дедекинда (см.* (19)*), а произведение берется по всем положительным корням конечной системы корней R. Первый тета-блок в формуле для $\Phi_{12}(\tau,\mathfrak{z},\omega)$ совпадает с формулой знаменателя Каца–Вейля аффинной алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}(R(N))$, где $R(N)$ непустая система корней решетки Нимейера N.*

4.3. Давний вопрос Френкеля–Фейнгольда о простейшей гиперболической алгебре Каца–Муди.

В 1983 году в работе И. Френкеля и А. Фейнгольда [FF] был поставлен вопрос о возможных соотношениях между аффинными алгебрами Ли, простейшей гиперболической алгеброй Каца–Муди и модулярными формами Зигеля рода 2. Отметим, что нечетная тета-функция Якоби $\vartheta(\tau,z)$ – функция знаменателя Каца–Вейля простейшей аффинной алгебры $\hat{\mathfrak{g}}(A_1)$ системы корней $A_1=\langle 2\rangle$.

Результат Теоремы 4.2 дает автоморфный ответ на вопрос Френкеля–Фейнгольда в случае алгебры Борчердса $\mathfrak{G}_{FM}$ гиперболического ранга 26. Это так называемая **Fake Monster Lie Algebra**. Последняя теорема показывает, что Fake Monster Lie Algebra продолжает (в автоморфном смысле) 23 аффинных алгебры Ли $\hat{\mathfrak{g}}(R)$ с системами корней решеток Нимейера: $3E_8$, $E_8\oplus D_{16}$, D_{24}, $2D_{12}$, $3D_8$, $4D_6$, $6D_4$, A_{24}, $2A_{12}$, $3A_8$, $4A_6$, $6A_4$, $8A_3$, $12A_2$, $24A_1, E_7\oplus A_{17}$, $2E_7\oplus D_{10}$, $4E_6$, $E_6\oplus D_7\oplus A_{11}, A_{15}\oplus D_9$, $2A_9\oplus D_6$, $2A_7\oplus D_5$, $4A_5\oplus D_4$. Отметим, что *Борчердс дал в [Bor1]–[Bor2] конструкцию автоморфных произведений в нольмерном каспе.* Точнее говоря, он нашел разложение Фурье формы Φ_{12} в единственном нольмерном каспе группы $\mathrm{O}^+(II_{2,26})$ в терминах решетки Лича, которая не содержит корней. Именно поэтому в формуле Борчердса для Φ_{12} не появлялись системы корней аффинных алгебр Ли.

4.4. Лоренцевы алгебры Каца–Муди и унилинейчатые модулярные многообразия.

Построение рефлективных модулярных форм является важной прикладной проблемой в алгебраической геометрии и теории алгебр Каца–Муди. В статье [D3] выполнена полная классификация лоренцевых алгебр Каца–Муди с гиперболической группой Вейля, порожденной всеми 2-отражениями решетки корней. Мы не будем давать определения этих обобщенных гиперболических (супер) алгебр Каца–Муди (см. детали в [D3]), так как мы сконцентрировались в этой диссертации на приложениях рефлективных модулярных форм в алгебраической геометрии. Следующая теорема (мы даем ниже сокращенный вариант оригинального результата) является приложением Теоремы 4.2. Применение конструкцию квазиограничения (см. Теорему 5.4 в §5) дает следующий результат.

Теорема 4.3. (См. [D3, Теорема 3.1] и [D2, Теорема 6.10].) *Положим $L = 2U \oplus L_0(-1)$, где L_0 одна из 33 решеток корней, указанных ниже. Квазиограничение (см. ниже Теорему 5.4) формы Борчердса*

$$\Phi_{12}|_{L_0} \in M_k(\widetilde{\mathrm{O}}^+(L), \det)$$

является строго (-2)-рефлективной модулярной формой с полным (-2)-дивизором и имеет вес k, указанный в нижней строчке,

$$A_1,\ 2A_1,\ 3A_1,\ 4A_1;\quad A_2,\ 2A_2,\ 3A_2;\quad A_3,\ 2A_3;\quad A_4,\ A_5,\ A_6,\ A_7;$$

$$k = 35,\ \ 34,\ 33,\ \ 32;\quad\ 45,\ \ 42,\ \ 39;\quad 54,\ \ 48;\quad\ 62,\ \ 69,\ \ 75,\ \ 80,$$

$$D_4,\ 2D_4,\ D_5,\ D_6,\ D_7,\ \ D_8;\ E_6,\ \ E_7,\ \ E_8,\ \ 2E_8;\ N_8;$$

$$k =\ 72,\ \ 60,\ \ 88,\ 102,\ 114,\ 124,\ 120,\ 165,\ 252,\ 132,\ \ 28;$$

или вес $k = 12$ для решеток

$$\langle 4\rangle,\ \langle 6\rangle,\ \langle 8\rangle,\ D_2(2) = \langle 4\rangle \oplus \langle 4\rangle,\ A_2(2),\ A_2(3),\ A_3(2),\ D_4(2),\ E_8(2).$$

Отметим, что первые 24 формы веса $k > 12$ являются параболическими формами. Эти формы определяют автоморфные лоренцевы алгебры Каца–Муди гиперболической решетки $U \oplus L_0$.

Теорема 4.4. (См. [D2, §6.5].) *Для всех 33 решеток L из Теоремы 4.3 модулярное многообразие $\widetilde{\mathrm{O}}^+(L) \setminus \mathcal{D}(L)$ является по крайней мере унилинейчатым.*

4.5. Эллиптический род от двух переменных многообразий с $c_1 = 0$. Вторичное квантование эллиптического рода многообразий Калаби–Яу.

Пусть M – (почти) комплексное компактное многообразие M (комплексной) размерности d, T_M – голоморфное касательное расслоение многообразия M, T_M^* – двойственное к нему. Положим $q = \exp(2\pi i\tau)$ и $y = \exp(2\pi iz)$ ($\tau \in \mathbb{H}_1$, $z \in \mathbb{C}$). Определим формальный степенной ряд $\mathbf{E}_{q,y} \in K(M)[[q, y^{\pm 1}]]$

$$\mathbf{E}_{q,y} = \bigotimes_{n=0}^{\infty} \bigwedge\nolimits_{-y^{-1}q^n} T_M^* \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} \bigwedge\nolimits_{-yq^n} T_M \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} S_{q^n} T_M^* \otimes \bigotimes_{n=1}^{\infty} S_{q^n} T_M,$$

где $\bigwedge_x E = \sum_{k\ge 0} (\wedge^k E)x^k$ и $S_x E = \sum_{k\ge 0} (S^k E)x^k$. Предположим, что первый класс Черна $c_1(T_M) = 0$ (над полем). Голоморфная эйлеровая характеристика $\mathbf{E}_{q,y}$

$$EG(M_d; \tau, z) = y^{d/2} \int_M \mathrm{ch}(\mathbf{E}_{q,y}) \mathrm{td}(T_M) = y^{d/2} \sum_{p=0}^{d} (-1)^p y^{-p} \chi^p(M) + q(\dots),$$

называется **эллиптическим родом** многообразия M. Заметим, что q^0-коэффициент эллиптического рода совпадает с χ_y-родом Хирцебруха M, где $\chi^p(M) = \chi(M, \wedge^p T^*_M) = \sum_{q=0}^{d}(-1)^q h^{p,q}(M)$.

Теорема 4.5. (См. [D8].) *Эллиптический род $EG(M_d;\tau,z)$ комплексного многообразия M размерности d с $c_1(M)=0$ является слабой формой Якоби веса 0 и индекса $d/2$ типа Эйхлера–Загира с целыми коэффициентами Фурье*

$$EG(M_d;\tau,z) \in J^{weak,\mathbb{Z}}_{0,d/2}.$$

Эллиптический род однозначно определен $\chi_y(M)$-родом Хирцебруха, если размерность M меньше 12 *или равна* 13*.*

Понятие эллиптического рода для $N=2$ суперсимметричных теорий было введено в теорию струн в работах Виттена, Егучи и других (см. детали в [D8]). В физике эллиптический род многообразия Калаби–Яу определяется как статистическая сумма рода один суперсимметричной сигма-модели, целевым пространством которой является многообразие M_d. В [D8] мы дали математическое доказательство того, что эллиптический род многообразия Калаби–Яу размерности d есть форма Якоби веса 0 и индекса $d/2$. По этой форме можно построить автоморфное произведение в силу Теоремы 4.1. Функция $\mathrm{Borch}^{-1}(EG(M_d), Z)$ задает вторичное квантование эллиптического рода многообразия Калаби–Яу M_d в силу результатов Р. Дайкграафа, Г.Мур, Э. Верлинде и Х. Верлинде (см. [SQ] и [D8]). В [D8] исследована также связь вторичного квантования с лоренцевыми алгебрами Каца–Муди сигнатуры $(1,2)$, построенными Гриценко и Никулиным в [GN2].

Теорема 4.6. (См. [D8, §3]). *Пусть M_d – многообразие Калаби–Яу размерности $d=2$,* 4 *или* 6*. Тогда вторичное квантование эллиптического рода многообразия M_d выражается в виде произведения функций знаменателя лоренцевых алгебр Каца–Муди ранга* 3 *из списка Гриценко–Никулина в [GN1]–[GN4].*

5 Основные результаты о пространствах модулей

В резюме мы сохраняем нумерацию теорем из основного текста диссертации.

5.1. Вопрос Зигеля о геометрическом типе пространства модулей поляризованных абелевых поверхностей. Ответ на этот вопрос дан выше в Теореме 2.3.

5.2. Пространства модулей поляризованных K3 **поверхностей.** Как было отмечено во Введении, последним открытым вопросом программы Вейля был вопрос о геометрическом типе пространств модулей поляризованных K3 поверхностей. Его решение было предложено в статье [D4]. (См. краткое изложение в докладе К. Вуазен на семинаре Бурбаки [Vo2].) Сформулируем один из основных результатов диссертации.

Теорема 5.1. ([D4, Теорема 1.]) *Пространство модулей $\mathcal{F}_{2d}$ (см. (4)–(5)) поляризованных* K3 *поверхностей степени $2d$ имеет общий тип для $d = 46, 50, 54, 57, 58, 60$ и для всех $d > 61$. Размерность Кодаиры $\mathcal{F}_{2d}$ неотрицательна, если $d \geq 40$ и $d \neq 41, 44, 45, 47$.*

Отметим, что открытым остается вопрос для поляризаций в интервале $20 \leq d < 40$, так как исследования Мукаи (1988–2010) дают следующий результат.

Утверждение. (См. [Mu1]–[Mu5].) *Пространство модулей поляризованных* K3 *поверхностей степени $2d$ является рациональным или унирациональным для $1 \leq d \leq 12$ и $d = 15, 16, 17, 19$.*

Для доказательства Теоремы 5.1 мы провели в [D4] детальное изучение модулярных многообразий. Очень важным является следующий общий результат.

Теорема 5.2. (См. [D4, Теорема 2.1].) *Пусть L – решетка сигнатуры $(2,n)$ с $n \geq 9$, и пусть $\Gamma < \mathrm{O}^+(L)$ – подгруппа конечного индекса. Тогда существует проективная тороидальная компактификация $\overline{\mathcal{F}}_L(\Gamma)$ модулярного многообразия $\Gamma \setminus \mathcal{D}(L)$ такая, что $\overline{\mathcal{F}}_L(\Gamma)$ имеет только канонические особенности и не имеет дивизоров ветвления на границе компактификации. Дивизоры ветвления в $\mathcal{F}_L(\Gamma)$ возникают из неподвижных дивизоров $\pm$-отражений в группе Γ.*

Доказательство этой фундаментальной теоремы состоит из трех частей: исследование эллиптических особенностей, дивизора ветвления и границы компактификации.

5.3. Общий тип пространств модулей поляризованных гиперкэлеровых многообразий. Изложенный выше общий метод дает следующие результаты для модулей поляризованных гиперкэлеровых многообразий.

Теорема 6.2 (См. [D5, Теорема 4.1].) *Пространство модулей $\mathcal{M}^{split}(\mathrm{K3}^{[2]}, 2d)$ (см. (6)–(7)) поляризованных многообразий типа $\mathrm{K3}^{[2]}$ с расщепимой поляризацией степени Богомолова–Бовиля $2d$ имеет общий тип, если $d \geq 12$. Для $d = 9$ и $d = 11$ его размерность Кодаиры неотрицательная.*

Для десятимерных многообразий О'Грэди [OG1] существуют расщепимые и нерасщепимые поляризации. Они полностью описаны в [D6]. Ниже сформулирован основной результат.

Теорема 6.3 ([D6, Теорема 4.1].) *Пусть d – натуральное число, не равное 2^n с $n \geq 0$. Пространство модулей поляризованных десятимерных многообразий О'Грейди $\mathcal{M}^{split}_{O'G_{10},2d}$ (см. (8)–(9)) с расщепимой поляризацией h степени Богомолова–Бовиля $h^2 = 2d \neq 2^{n+1}$ имеет общий тип.*

5.4. Квазиограничение формы Борчердса. Важной автоморфной частью нашего метода является следующая теорема, которая позволяет находить автоморфные формы, используемые в первом и во втором автоморфных критериях.

Теорема 5.3. (См. [D4, Теорема 6.2] и более общий и точный вариант в [D2, §6].) *Пусть $L \hookrightarrow II_{2,26}$ — примитивная невырожденная подрешетка сигнатуры $(2,n)$, $n \geq 3$, и пусть задано соответствующее вложение однородных областей $\mathcal{D}_L \hookrightarrow \mathcal{D}_{II_{2,26}}$. Множество (-2)-корней*

$$R_{-2}(L^\perp) = \{r \in II_{2,26} \mid r^2 = -2,\ (r, L) = 0\}$$

в ортогональном дополнении конечно. Положим $N(L^\perp) = \#R_{-2}(L^\perp)/2$. Тогда функция

$$\Phi|_L = \left. \frac{\Phi_{12}(Z)}{\prod_{r \in R_{-2}(L^\perp)/\pm 1} (Z, r)} \right|_{\mathcal{D}_L} \in M_{12+N(L^\perp)}(\widetilde{\mathrm{O}}(L), \det), \tag{24}$$

где в произведении по r фиксируется конечная система представителей в $R_{-2}(L^\perp)/\pm 1$, есть модулярная форма веса $12 + N(L^\perp)$. Модулярная форма $\Phi|_L$ обращается в нуль только на рациональных квадратичных дивизорах типа $\mathcal{D}_v(L)$, где $v \in L^\vee$ – ортогональная проекция (-2)-корня $r \in II_{2,26}$ на $L^\vee$ с $(v,v) < 0$.

Мы называем модулярную форму $\Phi|_L$ *квазиограничением* Φ_{12}, если набор корней $R_{-2}(L^\perp)$ не пуст.

Теорема 5.4. (См. [D4, Теорема 6.2].) *Пусть* $L \hookrightarrow II_{2,26}$ *– невырожденная подрешетка сигнатуры* $(2,n)$, $n \geq 1$. *Мы предполагаем, что множество* -2*-корней* $R_{-2}(L^{\perp})$ *не пусто. Тогда квазиограничение* $\Phi|_L \in S_{12+N(L^{\perp})}(\widetilde{\mathrm{O}}(L), \det)$ *формы Борчердса* Φ_{12} *будет параболической модулярной формой.*

5.5. Векторы поляризации: арифметика решеток корней. Для построения автоморфной формы малого веса с большим дивизором необходимо ответить на следующий чисто арифметический вопрос.

Ключевой вопрос в случае К3 **поверхностей:** *Для каких* $2d > 0$ *существует вектор* $l \in E_8$ *такой, что*

$$l \in E_8,\ l^2 = 2d,\ l \text{ ортогонален по крайней мере двум и не более 12 корням?} \qquad (25)$$

Если такой вектор существует, то квазиограничение Φ_{12} на подобласть $\mathcal{D}(2U \oplus 2E_8(-1) \oplus \langle l \rangle)$ в $\mathcal{D}(II_{2,26}) = \mathcal{D}(2U \oplus 3E_8(-1))$ даст нам параболическую форму малого веса с большим дивизором. Согласно *"the low weight cusp form trick"* (Теорема 3.3 из §3), пространство модулей $\mathcal{F}_{2d}$ будет иметь максимальную размерность Кодаиры.

Теорема 5.5. *Вектор* l*, удовлетворяющий* (25)*, действительно существует, если выполняется неравенство*

$$4N_{E_7}(2d) > 28N_{E_6}(2d) + 63N_{D_6}(2d), \qquad (26)$$

где $N_L(2d)$ *обозначает количество представлений* $2d$ *решеткой* L.

5.6. Пространства модулей поляризованных поверхностей Куммера (см. (2)–(3)). В данном случае речь идет о факторах конечного порядка пространства модулей поляризованных абелевых поверхностей. Парамодулярная группа Γ_t, модулярная группа пространства модулей (1,t)-поляризованных абелевых поверхностей, и ее нормальные расширения в $\mathrm{Sp}_2(\mathbb{R})$ имеют реализации в виде целых ортогональных групп сигнатуры $(2,3)$. Эта реализация ясно описывает природу расширений парамодулярной группы (см. [GH1]).

Пусть $L_t = 2U \oplus \langle -2t \rangle$ – четная целочисленная решетка сигнатуры $(2,3)$. Согласно [G2] и [GH1, Предложение 1.2 и Следствие 1.3]) у нас имеются следующие изоморфизмы

$$\Gamma_t^+/\{\pm E_4\} \cong \widetilde{\mathrm{O}}^+(L_t)/\{\pm E_5\}, \qquad \Gamma_t^*/\{\pm E_4\} \cong \mathrm{O}^+(L_t)/\{\pm E_5\}.$$

Накрытия $\Gamma_t \setminus \mathbb{H}_2 \to \Gamma_t^+ \setminus \mathbb{H}_2$ и $\Gamma_t \setminus \mathbb{H}_2 \to \Gamma_t^* \setminus \mathbb{H}_2$ являются накрытиями Галуа с конечной абелевой группой Галуа. Согласно [GH1, Предложение 1.5], модулярное многообразие $\mathcal{A}_t^+ = \Gamma_t^+ \setminus \mathbb{H}_2$ (t – бесквадратное) изоморфно *пространству модулей поляризованных* $K3$ *поверхностей с поляризацией типа* $\langle 2t \rangle \oplus 2E_8(-1)$. Согласно [GH1, Теореме 1.5], модулярное многообразие $\mathcal{K}_t = \Gamma_t^* \setminus \mathbb{H}_2$ изоморфно *пространству модулей поверхностей Куммера, соответствующих абелевым поверхностям с* $(1,t)$*-поляризацией.* В (3) дана ортогональная интерпретация этого модулярного многообразия.

Теорема 7.2 (См. полный вариант в [D9, Следствие 8.1] и [D10, Теорема 6.2].) *Пространство модулей* $\mathcal{K}_p = \Gamma_p^* \backslash \mathbb{H}_2$ *поверхностей Куммера, определённых* $(1,p)$*-поляризованными абелевыми поверхностями, имеет положительный геометрический род для* $p = 167$, 173, 223, 227, 251, 257, 269, 271, 283, 293. *Кроме того, справедливы неравенства*

$$h^{3,0}(\Gamma_p^*, \mathbb{C}) \geq 2, \quad t = 227, 257, 269, 283, \qquad h^{3,0}(\Gamma_{293}^*, \mathbb{C}) \geq 4.$$

Эта теорема доказана с использованием теории тета-блоков Гриценко–Скоруппы–Загира [GSZ] и методов статьи автора [GPY].

Список литературы

[BB] W.L. Baily Jr., A. Borel, *Compactification of arithmetic quotients of bounded symmetric domains.* Ann. of Math. (2) **84** (1966), 442–528.

[BK] A. Brumer, K. Kramer, *Paramodular abelian varieties of odd conductor.* Trans. Amer. Math. Soc. **366** (2014), 2463–2516.

[Be] A. Beauville, *Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle.* J. Differential Geometry **18** (1983), 755–782.

[Bo] F. Bogomolov, *The decomposition of Kähler manifolds with a trivial canonical class.* Matem. Sbornik (N.S.) **93(135)** (1974), 573–575, 630.

[Bor1] R.E. Borcherds, *Automorphic forms on $O_{s+2,2}(R)$ and infinite products.* Invent. Math. **120** (1995), 161–213.

[Bor2] R.E. Borcherds, *Automorphic forms with singularities on Grassmannians.* Invent. Math. **132** (1998), 491–562.

[CG1] F. Cléry, V. Gritsenko, *Siegel modular forms with the simplest divisor.* Proc. of London Math. Society **102** (2011), 1024–1052.

[CG2] F. Cléry, V. Gritsenko, *Modular forms of orthogonal type and Jacobi theta-series.* Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **83** (2013), 187–217.

[SQ] R. Dijkgraaf, G. Moore, E. Verlinde, H. Verlinde, *Elliptic genera of symmetric products and second quantized strings.* Commun. Math. Phys. **185** (1997), 197–209.

[FF] A.J. Feingold, I.B. Frenkel, *A hyperbolic Kac–Moody algebra and the theory of Siegel modular forms of genus* 2. Math. Ann. **263** (1983), 87–144.

[Fr] E. Freitag, *Siegelsche Modulfunktionen.* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften **254**. Springer-Verlag 1983.

[G2] V. Gritsenko, *Modular forms and moduli spaces of Abelian and* K3 *surfaces.* Algebra i Analiz **6** (1994), 65–102; English translation in St. Petersburg Math. J. **6** (1995), 1179–1208.

[G5] V. Gritsenko, *Modified Elliptic Genus*, pp. 87–119. In "Partition Functions and Automorphic Forms" (eds. V. A. Gritsenko, V. P. Spiridonov), Moscow Lectures vol. 5, Springer, 2020,

[GH1] V. Gritsenko, K. Hulek, *Minimal Siegel modular threefolds.* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **123** (1998), 461–485.

[GHS1] V. Gritsenko, K. Hulek, G.K. Sankaran, *Moduli spaces of K3 surfaces and holomorphic symplectic varieties.* Handbook of Moduli (ed. G. Farkas and I. Morrison), vol. 1, 459–526; Adv. Lect. in Math, Intern. Press, MA, 2012.

[GN1] V. Gritsenko, V. Nikulin, *Siegel automorphic form correction of some Lorentzian Kac–Moody Lie algebras.* Amer. J. Math. **119** (1997), 181–224.

[GN2] V. Gritsenko, V. Nikulin, *Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. I.* International J. Math. **9** (2) (1998), 153–200.

[GN3] V. Gritsenko, V. Nikulin, *Automorphic forms and Lorentzian Kac–Moody algebras. II.* International J. Math. **9** (2) (1998), 201–275.

[GN4] V. Gritsenko, V.V. Nikulin, *On the classification of Lorentzian Kac–Moody algebras.* Uspekhi Mat. Nauk **57** (2002), no. 5 (347), 79–138; English transl. in Russian Math. Surveys. **57** (2002), no. 5, 921–979.

[GPY] V. Gritsenko, C. Poor, D. Yuen, *Borcherds products everywhere.* J. Number Theory **148** (2015), 164–195.

[GSZ] V. Gritsenko, N.-P. Skoruppa, D. Zagier, *Theta-blocks.* arXiv:1907.00188, 57 pp.

[GP] M. Gross, S. Popescu, *Calabi–Yau three-folds and moduli of abelian surfaces II.* Trans. Amer. Math. Soc. **363** (2011), 3573–3599.

[KP] V. Kac, D.H. Peterson, *Infinite-dimensional Lie algebras, theta functions and modular forms.* Adv. in Math. **53** (1984), 125–264.

[Mu1] S. Mukai, *Curves, K3 surfaces and Fano* 3*-folds of genus* ≤ 10. Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I, 357–377, Kinokuniya, Tokyo, 1988.

[Mu2] S. Mukai, *Polarized K3 surfaces of genus* 18 *and* 20. Complex projective geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989), 264–276, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **179**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[Mu3] S. Mukai, *Curves and K3 surfaces of genus eleven.* Moduli of vector bundles (Sanda, 1994; Kyoto, 1994), 189–197, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **179**, Dekker, New York, 1996.

[Mu4] S. Mukai, *Polarized K3 surfaces of genus thirteen.* Moduli spaces and arithmetic geometry (Kyoto 2004), 315–326, Adv. Stud. Pure Math., **45**, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.

[Mu5] S. Mukai, *Polarized K3 surfaces of genus sixteen.* Oberwolfach Report 02/2010, DOI: 10.4171/OWR/2010/02.

[OG1] K. O'Grady, *Desingularized moduli spaces of sheaves on a K3.* J. Reine Angew. Math. **512** (1999), 49–117.

[Vo2] C. Voisin, *Géométrie des espaces de modules de courbes et de surfaces K3 [d'après Gritsenko–Hulek–Sankaran, Farkas–Popa, Mukai, Verra. . .].* Séminaire BOURBAKI 59ème année, 2006–2007, n 981.

[We] A. Weil, *Oeuvres scientifiques – Collected papers*, Volume II. Springer Verlag 1979.