

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»

*На правах рукописи*

Казаков Алексей Олегович

**Псевдогиперболические аттракторы и смешанная динамика  
в многомерных динамических системах**

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ  
на соискание ученой степени доктора наук  
по прикладной математике

Москва – 2021

Диссертационная работа выполнена в Национальном исследовательском университете «Высшая школа экономики».

Научный консультант: Гонченко Сергей Владимирович, д.ф.-м.н., ведущий научный сотрудник института информационных технологий математики и механики Нижегородского государственного университета им. Н.И. Лобачевского.

## 1 Введение

**Актуальность.** На сегодняшний день теория динамического хаоса представляет собой стремительно развивающийся раздел точных наук. Создание новых методов математического моделирования и исследования хаоса является одной из наиболее актуальных задач в этой области. За последние десятилетия хаотическая динамика систем малой размерности (трехмерных систем дифференциальных уравнений и двумерных отображений) изучена достаточно хорошо, в то время как теория многомерного хаоса все еще весьма далека от своего завершения.

В диссертационной работе предложены новые качественные и численные методы анализа многомерной хаотической динамики, основанные на теории псевдогиперболических аттракторов и теории смешанной динамики. Обе эти теории возникли сравнительно недавно, благодаря работам Гонченко, Тураева, Шильникова, Ньюхауса, и позволили по-новому взглянуть на ряд проблем многомерного хаоса. Среди таких проблем можно выделить следующие две: (1) существуют ли «настоящие» странные аттракторы, отличные от гиперболических и сингулярно-гиперболических (лоренцевского типа) аттракторов; (2) как объяснить явления визуального перекрытия хаотических аттрактора и репеллера, часто наблюдаемое в численных экспериментах. Вторая проблема тесно связана с такими важными вопросами теории динамических систем как, например: может ли гиперхаос возникать в системах малой размерности и как доказать отсутствие гладкой инвариантной меры у хаотических обратимых систем. В работах диссертанта получены ответы на эти вопросы с помощью применения указанных выше теорий. Приведены примеры настоящих (псевдогиперболических) аттракторов как у четырехмерных систем дифференциальных уравнений, так и у трехмерных диффеоморфизмов. Применение концепции смешанной динамики позволило диссертанту положительно ответить на вопрос о возникновении гиперхаоса у двумерных диффеоморфизмов, а также установить отсутствие гладкой инвариантной меры в известной задаче В.В. Козлова о движении диска по шероховатой плоскости.

Таким образом, обе теории, псевдогиперболических аттракторов и смешанной динамики, оказались весьма эффективными при решении прикладных задач. Качественные и численные методы, развитые в диссертационной работе, были использованы соискателем для исследования моделей неголономной механики, гидродинамики, теории связанных осцилляторов, а также некоторых других задач нелинейной динамики. Эти методы могут применяться и для более широкого класса задач. Результатом работы диссертанта стало открытие ряда новых динамических явлений. Открыто явление мгновенного возникновения смешанной динамики, в результате столкновения аттрактора и репеллера. Открыта сильно-диссипативная смешанная динамика (когда численно найденные хаотические ат-

трактор и репеллер пересекаются, но сильно отличаются, хотя теоретически они должны совпадать). Обнаружены новые примеры псевдогиперболических аттракторов: дикий спиральный аттрактор в четырехмерной системе дифференциальных уравнений, восьмерочный аттрактор в неголономной модели волчка Чаплыгина, дискретный гетероклинический аттрактор в трехмерном отображении Эно и др. Открыты новые типы реверса в неголономной динамике твердого тела – для сферических тел со смещенным центром масс.

Важно отметить, что с проблемой (1) тесно связана одна из самых важных и трудных задач теории динамических систем о различия «настоящих» странных аттракторов от так называемых квазиаттракторов, которые, хоть и демонстрируют хаотическое поведение траекторий, но лишь на физическом уровне строгости. Квазиаттракторы (по Афраймовичу и Шильникову) либо сами содержат устойчивые периодические траектории (с возможно не уловимыми в численном эксперименте областями притяжения), либо такие траектории появляются при сколь угодно малых возмущениях. Таким образом, при исследовании квазиаттрактора невозможно отличить хаотическую динамику от длительного переходного процесса, после которого траектории выйдут на регулярный режим (устойчивую периодическую траекторию). Настоящие же странные аттракторы (например, такие как гиперболические аттракторы, аттракторы Лоренца и др.) обладают тем свойством, что у любой их траектории существует максимальный положительный показатель Ляпунова, и это свойство выполняется для всех близких систем. Таким образом, хаос, демонстрируемый системами с такими аттракторами, устойчив к малым возмущениям. В отличие от этого, для квазиаттракторов характерно наличие т.н. окон устойчивости – областей параметров, в которых аттрактор является простым, например, предельным циклом.

До недавнего времени к настоящим хаотическим аттракторам можно было с уверенностью относить только лишь гиперболические и лоренцевские аттракторы. Ситуация существенно изменилась после открытия Тураевым и Шильниковым в 1998 г. диких псевдогиперболических аттракторов. Такие аттракторы, в отличие от гиперболических и лоренцевских, допускают гомоклинические касания и, как следствие, содержат дикие гиперболические множества Ньюхауса, что свидетельствует о принципиальной невозможности полного описания их динамики и бифуркаций. Тем не менее устойчивые периодические траектории здесь не возникают в силу основного свойства псевдогиперболичности, обеспечивающего экспоненциальное растяжение объемов в некоторых подпространствах касательного пространства. Автоматически это влечет, что у любой траектории аттрактора максимальный показатель Ляпунова положительный. Таким образом, изучение странных аттракторов, обладающих псевдогиперболической структурой, принципиально важно с прикладной точки зрения, так как, установив псевдогиперболичность аттрактора, исследователь может быть уверен, что такой тип хаотического поведения не разрушается при малых изменениях параметров системы. Задача развития теории псевдогиперболических аттракторов занимают одно из центральных мест в диссертации.

В этом направлении в диссертационной работе были разработаны новые эффективные численные методы проверки условий псевдогиперболичности аттракторов систем дифференциальных уравнений и диффеоморфизмов. В основе этих методов лежит непосредственная верификация всех условий из определения псевдогиперболичности. При этом

следует подчеркнуть, что если хотя бы одно из этих условий не выполняется, то аттрактор не является псевдогиперболическим и, согласно PQ-гипотезе (pseudohyperbolic or quasiattractor), выдвинутой диссертантом, он должен быть квазиаттрактором. Выполнение же всех условий псевдогиперболичности позволяет сделать вывод о том, что мы имеем дело с настоящим хаотическим аттрактором. В работах диссертанта численная реализация разработанного метода показала свою эффективность на примере целого ряда аттракторов в системах из различных приложений.

Для решения проблемы (2) в диссертационной работе применялась концепция смешанной динамики – третьей формы динамического хаоса, открытие которой относится к одному из недавних достижений теории динамических систем. До этого традиционно считалось, что хаос в динамических системах встречается только в двух совершенно разных формах: консервативный хаос, характерный, в частности, гамильтоновым системам; и диссипативный хаос, математическим образом которого является странный аттрактор – нетривиальное замкнутое инвариантное множество, к которому стремятся траектории из его окрестности. В работах Гонченко, Тураева и Шильникова было показано, что странный аттрактор может пересекаться со странным репеллером (аттрактором системы, полученной обращением времени) по замкнутому инвариантному множеству, так называемому обратимому ядру, которое ничего не притягивает и ничего не отталкивает. Это, безусловно, представляет собой принципиально новую, третью, форму хаотического поведения траекторий, неустрашимым образом сочетающую в себе как диссипативные (аттрактор / репеллер), так и консервативные (обратимое ядро) элементы динамики.

Первые конкретные примеры систем из приложений, в которых в явном виде продемонстрирован этот новый тип динамического хаоса, были обнаружены в работах диссертанта. Так, наличие смешанной динамики было показано в ряде задач неголономной механики, в цепочках взаимодействующих осцилляторов, а также в задачах вихревой динамики. Обнаружение смешанной динамики в прикладных моделях привело к необходимости создания теории, которая, в частности:

- позволяет объяснить наблюдаемое в численных экспериментах пересечение хаотических аттрактора и репеллера;
- объясняет, в результате каких внутренних механизмов (бифуркационных сценариев) может возникать смешанная динамика.

Развитию такой теории, а также описанию различных типов смешанной динамики и ее приложению к исследованию конкретных систем, посвящена вторая часть цикла статей, представленных в диссертационной работе.

При работе над диссертацией разработан ряд новых численных методов, позволяющих выполнять проверку псевдогиперболичности странных аттракторов, выявлять в пространстве параметров области, отвечающие каждому из трех типов динамического хаоса, с минимальными вычислительными затратами проводить построение диаграмм гомоклинических бифуркаций и др. Разработанные методы реализованы в рамках программного комплекса «Компьютерная динамика: Хаос» (патенты RU 2014619001 и RU 2016660109), краткое описание которого приведено в третьей части диссертационной работы.

### **Степень разработанности.**

*Псевдогиперболические аттракторы.* До сравнительно недавнего времени к настоящим странным аттракторам гладких динамических систем можно было относить только лишь гиперболические и сингулярно-гиперболические (лоренцевские) аттракторы. Основы теории гиперболических аттракторов были заложены в 60-х годах в классических работах Аносова, Боуэна, Вильямса, Мане, Пью, Робинсона, Синая, Смейла, Шильникова и др. В настоящее время эта тема продолжает оставаться весьма актуальной, как в направлении развития теории гиперболических аттракторов, где значительные результаты были получены в работах Аронсона, Гринеса, Жужомы, Медведева, Починки и др., так и в области приложений этой теории. Отметим, что долгое время гиперболические аттракторы не были известны в приложениях. Ситуация изменилась после работ С.П. Кузнецова, в которых такие аттракторы были обнаружены в различных физических моделях. Первый такой аттрактор появился в его работе 2005 года, а сейчас, благодаря работам Кузнецова, Купцова, И. Сатаева и др., известен уже целый ряд физических систем с гиперболическими аттракторами.

В отличие от гиперболических, сингулярно-гиперболические аттракторы не являются грубыми (структурно-устойчивыми). Несмотря на то, что первый пример такого аттрактора был приведен в работе Э. Лоренца в 1963 г., долгое время эта работа не была известна математикам. Только в конце 70-х годов появилось сразу несколько работ, посвященных математической теории аттрактора Лоренца. Среди них наиболее значительные – это известные работы Афраймовича-Быкова-Шильникова, Гукенхеймера-Вильямса, Бунимовича-Синая и др. Позднее, в работах Моралеса, Пасифико, Пужалса и Е. Сатаева была построена теория сингулярно-гиперболических аттракторов, которая в некотором смысле обобщала теорию аттракторов Лоренца.

Как известно сейчас, гиперболические и сингулярно-гиперболические аттракторы составляют лишь некоторый подкласс множества псевдогиперболических аттракторов. Среди последних особое место занимают дикие псевдогиперболические аттракторы, математическая теория которых была заложена в работах Тураева и Шильникова. Системы с такими аттракторами, в отличие от систем с гиперболическими и сингулярно-гиперболическими аттракторами, допускают гомоклинические касания. Однако бифуркации этих касаний не приводят к возникновению устойчивых периодических траекторий, благодаря наличию псевдогиперболической структуры, которая обеспечивает существование двух трансверсальных подпространств, сильно-сжимающего и центрально-неустойчивого, при этом в центрально-неустойчивом подпространстве растягивается объем. Отметим также, что в работе Тураева и Шильникова (1998) была предложена феноменологическая модель дикого спирального аттрактора четырехмерной системы содержащего седло-фокусное положение равновесия. Первый и пока единственный пример такой модели – в форме конкретной системы четырех дифференциальных уравнений – был построен совсем недавно в одной из работ диссертанта (2021).

Еще один принципиально важный результат в теории псевдогиперболических аттракторов получен в работе Гонченко, Овсянникова, Тураева и Симо (2005), в которой было установлено, что дискретные псевдогиперболические аналоги аттрактора Лоренца могут существовать у трехмерных диффеоморфизмов. Также в этой работе показано, что псевдогиперболические аттракторы, в отличие от гиперболических, могут встречаться в моделях самой разной природы, от которых не требуется слишком много ограничительных

условий. Таким образом, задача поиска таких аттракторов и проверки условий их псевдогиперболичности становится весьма актуальной. Если с первой частью этой задачи дела обстоят более или менее хорошо – целый ряд таких аттракторов был найден в работах А. Гонченко, С. Гонченко, Овсянникова, Тураева и др., то вторая ее часть долгое время была далеко от своего решения. Известные методы, основанные на анализе только лишь спектра показателей Ляпунова, не позволяют получить здесь полностью убедительные результаты. Универсальный подход, позволяющий проверять все условия из определения псевдогиперболичности странного аттрактора для достаточно широкого класса динамических систем, был разработан в рамках настоящего диссертационного исследования (раздел 2.1.1).

Частные случаи псевдогиперболичности (равномерная гиперболичность и сингулярная гиперболичность) для некоторых конкретных систем, проверялись и ранее. Среди соответствующих исследований важно отметить работы С.П. Кузнецова, Купцова, Такера, Жгличинского, Цапинского. Так, в известной работе Такера (1999), с помощью методов доказательных вычислений, установлена сингулярная гиперболичность классического аттрактора Лоренца и, тем самым, была решена известная гипотеза Смейла. В работах С.П. Кузнецова и Купцова были предложены эффективные численные методы проверки отсутствия касаний между инвариантными сжимающим и растягивающим подпространствами, что является одним из необходимых условий гиперболичности. В работе этих же авторов 2018 года указанные методы были модифицированы для проверки отсутствия касаний между сжимающим и центрально-неустойчивым подпространствами в случае псевдогиперболических инвариантных множеств. В работе Цапинского, Тураева и Жгличинского был предложен оригинальный метод проверки условий критерия Шильникова, дающего достаточные условия существования аттрактора Лоренца. Соответствующий подход реализован с помощью методов доказательных вычислений и, таким образом, как и метод Такера, является весьма трудоемким.

*Смешанная динамика.* Открытие смешанной динамики является одним из главных достижений в теории динамического хаоса, наряду с открытием двух его классических форм, консервативного хаоса и диссипативного хаоса. С точки зрения топологической динамики хаос в конечномерных детерминированных системах может встречаться только в трех различных формах (консервативный, диссипативный и смешанная динамика).

Самый старый тип хаоса – это консервативный. Классические его примеры – это хаотическая динамика, демонстрируемая неинтегрируемыми гамильтоновыми системами. Открытие консервативного хаоса связывают с именем Пуанкаре, который еще в 1889 году показал, что типичным свойством гамильтоновых систем с двумя и более степенями свободы является существование у них грубых гомоклинических кривых седловых периодических движений. Такие кривые (траектории) называются сейчас гомоклиническими кривыми (траекториями) Пуанкаре, а их грубость означает, что устойчивое и неустойчивое инвариантное многообразия седлового периодического движения пересекаются трансверсально. Пуанкаре связывал существование таких траекторий у гамильтоновых систем с их принципиальной неинтегрируемостью – сейчас это явление известно как критерий Пуанкаре консервативного (гамильтонового) хаоса.

Открытие диссипативного хаоса обычно связывают с классической работой Лоренца, опубликованной в 1963 г., в которой был приведен пример трехмерной системы, демонстрирующей сложное неперiodическое поведение траекторий на некотором глобально

устойчивом инвариантном множестве. Эта система впоследствии была названа моделью Лоренца, а притягивающее инвариантное множество с нерегулярным и неустойчивым поведением траекторий на нем – аттрактором Лоренца.

В настоящее время консервативный хаос, а также диссипативный хаос, математическим образом которого является странный аттрактор, представляют собой две наиболее популярные и актуальные темы исследований в нелинейной динамике. Они являются объектами исследований не только математиков, но и специалистов из самых различных областей точного естествознания: физики, биологии, химии и т.п.

Смешанная динамика – самый молодой тип динамического хаоса. Она была открыта совсем недавно. Само явление сосуществования бесконечного множества периодических траекторий всевозможных типов (устойчивых, вполне неустойчивых и седловых) и их неотделимости друг от друга, в том смысле, что замыкания множеств траекторий разных типов имеют непустое пересечение, было открыто в 1997 г. в работе Гонченко, Тураева и Шильникова. В работе 2017 г. Гонченко и Тураев, на основе понятия аттрактора по Рюэллю, показали, что аттрактор и репеллер могут пересекаться по замкнутому инвариантному множеству – обратимому ядру, которое является одновременно и аттрактором и репеллером, и в то же время не притягивает и не отталкивает никаких траекторий. В указанной работе, по существу, были заложены основы математической теории смешанной динамики.

Несмотря на то, что смешанная динамика открыта сравнительно недавно, уже известно большое число моделей, в которых она наблюдается. В численных экспериментах это явление впервые обнаружено в работах А. Гонченко, С. Гонченко и диссертанта, посвященных исследованию неголономных моделей кельтского камня и волчка Чаплыгина. В результате этих исследований стало понятно, что смешанная динамика – это типичное явление для неинтегрируемых неголономных систем без гладкой инвариантной меры. Позже, в работах Бизяева, Борисова, Мамаева, Круглова, С.П. Кузнецова это было подтверждено и для ряда других неголономных моделей. Важно отметить, что, как мы сейчас знаем, модели со смешанной динамикой появились задолго до того как она была открыта. Это известные модели двумерных обратимых отображений, рассмотренных в работах Полити, Квиспела, Робертса и др. Особо отметим здесь работу Пиковского и Топажа (2002), в которой смешанная динамика была, фактически, проиллюстрирована на примере цепочек симметрично связанных осцилляторов. Позднее существование смешанной динамики в этой модели было установлено в работе диссертанта (2017 г.).

Среди физических работ по смешанной динамике следует также отметить цикл недавних статей Емельяновой и Некоркина, посвященных изучению хаотической динамики в системе двух адаптивно связанных нейроноподобных элементов. Обнаруженная здесь смешанная динамика, как показали авторы, отвечает новым типам нейроноподобных колебаний, характеризующийся специфическим распределением межспайковых интервалов. Здесь важно отметить, что в этих работах смешанная динамика была обнаружена в системах общего положения – до этого все известные ее примеры относились к обратимым (реверсивным) системам, симметричным по отношению к обращению времени.

**Цели и задачи исследования.** Цель диссертационной работы – разработка новых качественных и численных методов исследования многомерного динамического хаоса и применение этих методов к анализу динамических систем, важных как с теоретической,

так и прикладной точек зрения. Для достижения поставленных целей рассмотрены следующие задачи:

- Разработка эффективно проверяемых методов проверки псевдогиперболичности странных аттракторов многомерных динамических систем.
- Построение новых примеров динамических систем, демонстрирующих псевдогиперболические аттракторы, а также изучение сценариев их возникновения.
- Разработка сценариев перехода от консервативной и диссипативной динамики к смешанной. Построение критериев существования смешанной динамики в обратимых системах.
- Разработка методов исследования вопроса об интегрируемости обратимых динамических систем.
- Исследование прикладных проблем неголономной механики, гидродинамики, теории цепочек взаимодействующих осцилляторов.
- Разработка программного комплекса, реализующего созданные новые численные методы исследования многомерных динамических систем.

**Методы исследования.** Для решения поставленных задач применялись качественные и аналитические методы теории динамических систем. При исследовании конкретных систем (неголономные модели динамики твердого тела, модели гидродинамики и др.) применялись методы прикладной теории бифуркаций, а также численные методы (построение диаграмм показателей Ляпунова, продолжение по параметру, численные методы проверки псевдогиперболичности, метод диаграмм символической динамики и др.). Численные методы реализованы на языке Си++ в рамках программного комплекса «Компьютерная динамика: Хаос» (патенты RU 2014619001 и RU 2016660109). Для ускорения работы методов применялись технологии Qt threads и CUDA API.

#### **Теоретическая и практическая значимость.**

*Псевдогиперболические аттракторы.* До недавнего времени в теории динамического хаоса известные примеры настоящих хаотических аттракторов ограничивались лишь равномерно-гиперболическими аттракторами (аттракторы Смейла-Вильямса, Аносова, Плыкина и т.п.) и аттракторами Лоренца. Возникшая в 1998 г. теория псевдогиперболических аттракторов представляла собой весьма многообещающую математическую теорию, в которой, по сути, не было примеров таких аттракторов, наблюдаемых в конкретных моделях. Эта большая проблема решена в рамках диссертационного исследования. В данной работе представлено четыре примера диких псевдогиперболических аттракторов: дикий спиральный аттрактор в четырехмерной системе дифференциальных уравнений и – в трехмерных отображениях – дискретный аттрактор Лоренца, восьмерочный аттрактор и гетероклинический аттрактор Лоренца. Таким образом, к классу настоящих аттракторов, помимо гиперболических и лоренцевских аттракторов, добавился еще и целый ряд новых псевдогиперболических диких аттракторов, что является существенным вкладом в теорию динамического хаоса и в теорию динамических систем в целом.

Помимо исследования конкретных моделей и обнаружения новых типов диких псевдогиперболических аттракторов соискателем предложен набор численных методов, реализованных в рамках программного комплекса, позволяющий ответить на один из главных вопросов теории динамических систем: является ли наблюдаемый в численном эксперименте странный аттрактор настоящим хаотическим или же это лишь длительный переходный процесс, после которого траектория убегает на устойчивый регулярный режим. Таким образом, практическая значимость полученных результатов состоит в том, что у специалистов из разных областей точного естествознания, физики, биологии, химии и т.п. появилась реальная возможность находить псевдогиперболические аттракторы в сложных прикладных моделях, а также эффективно исследовать их динамические свойства.

*Смешанная динамика.* Теория смешанной динамики, как третьей формы динамического хаоса, для которого хаотический аттрактора неустранимым образом пересекается с хаотическим репеллером, разработана совсем недавно. Поэтому любое открытие в данной области является существенным продвижением соответствующей теории. Автором диссертационного исследования открыт ряд новых явлений в области теории смешанной динамики и ее приложений: обнаружен новый ее тип – сильно-диссипативная смешанная динамика, а также ряд новых сценариев мгновенного возникновения смешанной динамики в результате столкновения как простых, так и странных аттракторов и репеллеров. На основе теории смешанной динамики предложен новый метод, позволяющий отвечать на вопросы об интегрируемости многомерных динамических систем, в частности, решена задача В.В. Козлова. Открытые явления также позволили объяснить возникновение неустранимого пересечения аттрактора и репеллера в модели Пиковского-Топажа четырех связанных осцилляторов, мгновенное возникновение смешанной динамики в неголономной модели волчка Суслова, а также в модели двух точечных вихрей в поле акустической волны.

К настоящему времени уже известно достаточно много конкретных моделей, в которых наблюдается смешанная динамика. Диссертантом создан оригинальный программный комплекс, реализующий численные методы, предназначенные для исследования систем различной природы не только со смешанной динамикой, но и со всеми тремя возможными типами динамического хаоса.

### **Результаты, выносимые на защиту.**

1. Новые численные методы проверки псевдогиперболичности странных аттракторов, основанные на прямой верификации непрерывности устойчивых и центрально-неустойчивых инвариантных подпространств.

С помощью этих методов в диссертационной работе, в частности, установлена псевдогиперболичность ряда странных аттракторов в трехмерных отображениях Эно, а также в неголономных моделях кельтского камня и волчка Чаплыгина.

2. Дикий спиральный аттрактор в четырехмерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая представляет собой расширение классической системы Лоренца.

Диссертантом приведен первый и пока единственный пример системы, демонстрирующей дикий спиральный аттрактор. Установлена его псевдогиперболичность, по-

казано, что такой аттрактор содержит дикое гиперболическое множество Ньюхауса. Феноменологическая модель такого аттрактора была построена Тураевым и Шильниковым достаточно давно, однако конкретных примеров систем с такими аттракторами известно до сих пор не было.

3. Неориентируемый псевдогиперболический гетероклинический аттрактор Лоренца в трехмерном отображении Эно.

Обнаружен новый пример дискретного хаотического аттрактора. Такой аттрактор содержит седловую траекторию периода два и гомоклинические к ней траектории. С помощью разработанных в диссертационной работе методов установлена псевдогиперболичность, а также показано, что такой аттрактор может рождаться в результате локальной бифуркации неподвижной точки с триплетом мультипликаторов  $(-1, i, -i)$ .

4. Странные аттракторы в обобщенной системе Лоренца.

Численно установлено существование псевдогиперболических аттракторов Лоренца и аттракторов Ровеллы (квазиаттракторов лоренцевского типа, содержащих седловое состояние равновесия с отрицательной седловой величиной), в обобщенной модели Лоренца, предложенной Любимовым и Заксом, описывающей усредненную конвекцию в горизонтальном слое жидкости под действием высокочастотных колебаний. Предложен новый критерий рождения аттрактора Ровеллы при гомоклинических бифуркациях.

5. Хаотическая динамика и эффект реверса в неголономной модели волчка Чаплыгина.

Открыт первый и пока единственный пример псевдогиперболического восьмерочного аттрактора, дано описание нового бифуркационного сценария его возникновения из устойчивой точки периода 2. Открыт новый тип реверса, когда волчок Чаплыгина (шар со смещенным центром масс), закрученный определенным образом вокруг вертикальной оси, самопроизвольно меняет направление вращения вокруг этой оси на противоположное. Обнаружен дискретный спиральный аттрактор Шильникова в модели волчка Чаплыгина.

6. Хаотическая динамика неголономной модели волчка Сулова.

Показано, что эта модель может демонстрировать все три возможных типа динамического хаоса: консервативный хаос, диссипативный хаос и смешанная динамика. Разработан и реализован оригинальный численный метод выявления в пространстве параметров системы областей, отвечающих каждому из трех типов хаоса.

7. Смешанная динамика в модели Пиковского-Топажа четырех симметрично связанных осцилляторов.

Установлено существование смешанной динамики, т.е. явления неустраняемого пересечения аттрактора и репеллера, на основе численного выявления абсолютных областей Ньюхауса в рассматриваемой модели. Открыт новый механизм мгновенного возникновения смешанной динамики в результате столкновения простых аттрактора и репеллера.

8. Сценарий мгновенного возникновения смешанной динамики в обратимых системах в результате столкновения странного аттрактора с симметричным ему странным репеллером.

Построен феноменологический сценарий и численно показана его реализация на примерах модели двух точечных вихрей в поле акустической волны и неголономной модели волчка Суслова.

9. Сильно-диссипативная смешанная динамика.

Открыт новый тип смешанной динамики, для которой численно построенные аттрактор и репеллер пересекаются, но при этом сильно отличаются друг от друга, хотя по теории (Гонченко, Тураев, 2017) они должны практически совпадать. Дано объяснение этому явлению, в основе которого лежит то, что сингулярные инвариантные меры на аттракторе и репеллере обладают экстремально сильной асимметрией. Существование сильно-диссипативной смешанной динамики обнаружено в модели, описывающей динамику двух точечных вихрей в поле акустической волны.

10. Решение задачи В.В. Козлова о существовании гладкой инвариантной меры в неголономной модели движения диска по плоскости.

С помощью концепции смешанной динамики показано что в общем случае гладкая инвариантная мера отсутствует в соответствующей неголономной модели. Установлено, что в модели существуют очень узкие области фазового пространства, содержащие периодические источники и стоки, наличие которых является естественным препятствием для существования гладкой инвариантной меры.

11. Программный комплекс для исследования хаотической динамики в многомерных динамических системах.

Разработан программный комплекс, позволяющий: выявлять в пространстве параметров системы области с консервативным и диссипативным хаосом, а также со смешанной динамикой; выполнять проверку псевдогиперболичности странных аттракторов; строить нидинг-диаграммы гомоклинических бифуркаций; выявлять в пространстве параметров системы области с «диким» поведением траекторий; генерировать новые системы с помощью разработанного интерфейса ввода пользовательских задач. Для ускорения работы комплекса применялись технологии параллельного программирования.

### **Новизна и достоверность.**

Все результаты, представленные к защите, являются новыми. Они получены в рамках развития недавно созданных математических направлений в теории динамического хаоса – теории псевдогиперболических аттракторов и теории смешанной динамики. В диссертации решены новые задачи, которые раньше не могли и возникнуть, которые потребовали от соискателя создания оригинальных качественных и численных методов, а также разработку программного комплекса для исследования многомерного динамического хаоса.

Все результаты, выносимые на защиту опубликованы в ведущих рецензируемых физико-математических журналах, индексируемых в научных базах Web of Science и Scopus с

квартилями Q1 – 8 работ, Q2 – 3 работы и Q3 – 1 работа. Результаты, связанные с разработкой программного комплекса вошли в два патента.

#### **Апробация полученных результатов.**

Основные результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях и семинарах:

1. Доклад “*Regular and Chaotic Phenomena in the Nonholonomic Model of an Unbalanced Ball Moving on a Plane*”, четвертая международная конференция “Geometry, Dynamics, Integrable Systems – GDIS 2014: Bicentennial of The Great Poncelet Theorem and Billiard Dynamics”, июль 2014, Триесте, Италия.
2. Доклад “*On phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky-Toraj model of two coupled oscillators*”, международная конференция “GDHAM15 - Global Dynamics in Hamiltonian Systems”, июль 2015, Барселона, Испания.
3. Доклад “*Scenarios of the birth and evolution of strange attractors in the nonholonomic model of the Chaplygin top*”, международная конференция “Dynamics, Bifurcations and Chaos”, июль 2016, Нижний Новгород, Россия.
4. Доклад “*Variety of strange attractors in the nonholonomic model of Chaplygin top*”, международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, июль 2016, Суздаль, Россия.
5. Доклад “*Strange attractors and mixed in a problem of two vortexes*”, международная конференция “Dynamics, Bifurcations and Chaos 2016”, июль 2017, Нижний Новгород, Россия.
6. Доклад “*Примеры моделей со смешанной динамикой (как могут сталкиваться аттрактор и репеллер)*”, международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам, июль 2018, Суздаль, Россия.
7. Доклад “*Смешанная динамика в обратимых системах*”, XVIII научная школа конференция “Нелинейные волны - 2018”, февраль 2018, Нижний Новгород, Россия.
8. Приглашенный доклад “*On discrete Shilnikov attractors in a system of symmetrically coupled oscillators*”, международная конференция “Shilnikov Workshop-2018”, декабрь 2018, Нижний Новгород, Россия.
9. Приглашенный доклад “*Wild pseudohyperbolic attractor in a four-dimensional Lorenz model*”, международная конференция “Dynamics, Equations and Applications (DEA 2019)”, сентябрь 2019, Краков, Польша.
10. Приглашенный доклад “*On Pseudohyperbolic Attractors, Quasiattractors and Their Examples*”, межуниверситетский семинар политехнического университета Каталонии и университета Барселоны, ноябрь 2019, Барселона, Испания.
11. Доклад “*On the merger of a chaotic attractor with a chaotic repeller leading to the mixed dynamics*”, международная конференция “709. WE-Heraeus-Seminar on Quantization of Dissipative Chaos: Ideas and Means”, декабрь 2019, Бад Хоннеф, Германия.

12. Приглашенный доклад “*О слиянии странного аттрактора и странного репеллера, приводящем к смешанной динамике*”, XIX научная школа конференция «Нелинейные волны - 2020», февраль 2020, Нижний Новгород, Россия.
13. Приглашенный доклад “*On methods for verification of the pseudohyperbolicity of strange attractors*”, международная конференция “Shilnikov Workshop-2020”, декабрь 2020, Нижний Новгород, Россия.
14. Приглашенный доклад “*Universal Scenarios Associated with Torus Destruction Leading to Hyperchaos and Chaos with Additional Zero Lyapunov Exponents*”, международная конференция “SIAM Conference on Dynamical Systems Multi-Dimensional Chaos: from Theory to Applications”, май 2021, Портланд, Орегон, США.
15. Приглашенный доклад “*On bifurcations of Lorenz attractors in the Lyubimov-Zaks model*”, международная конференция “Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis-2021 (MPDSIDA)”, июль 2021, Москва, Россия.

**Список статей, представленных к защите по теме диссертации.**

- [1\*] Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. *The reversal and chaotic attractor in the nonholonomic model of Chaplygin's top* //Regular and Chaotic Dynamics **19(6)** (2014), pp. 718–733.

<https://link.springer.com/article/10.1134/S1560354714060094>

(Открытие нового типа реверса в неголономной модели волчка Чаплыгина, обнаружение восьмерочного аттрактора в этой модели и гипотеза о его псевдогиперболичности.)

- [2\*] Gonchenko A. S, Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. *Simple Scenarios of Onset of Chaos in Three-Dimensional Maps* //International Journal of Bifurcation and Chaos **24(8)** (2014), 1440005, (25 p.)

<https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218127414400057>

(Описание нового сценария возникновения восьмерочного аттрактора и его реализация на примере неголономной модели волчка Чаплыгина.)

- [3\*] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Kazakov A. O. *Dynamics of the Suslov problem in a gravitational field: Reversal and strange attractors* //Regular and Chaotic Dynamics **20(5)** (2015), pp. 605–626.

<https://link.springer.com/article/10.1134/S1560354715050056>

(Численные и качественные исследования всех трех типов хаоса в неголономной модели Суслова, а также методы выявления в пространстве параметров областей, отвечающих различным типам хаотической динамики.)

- [4\*] Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R. *Spiral chaos in the nonholonomic model of a Chaplygin top* //Regular and Chaotic Dynamics **21** (2016), pp. 939–954.

<https://link.springer.com/article/10.1134/S1560354716070157>

(Обнаружение в неголономной модели волчка Чаплыгина различных типов дискретных спиральных аттракторов, а также выявление соответствия между реальными типами движения волчка и обнаруженными режимами динамики в математической модели.)

- [5\*] Gonchenko A.S, Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Turaev D. *On the phenomenon of mixed dynamics in Pikovsky–Topaj system of coupled rotators* //Physica D: Nonlinear Phenomena **350** (2017), pp. 48–57.

<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0167278916301701>

(Численные исследования существования смешанной динамики в модели Пиковского–Топаж, описание сценариев возникновения этого явления, в том числе нового сценария мгновенного возникновения смешанной динамики в результате слияния простых аттрактора и репеллера.)

- [6\*] Gonchenko A.S., Gonchenko S.V., Kazakov A.O., Kozlov A.D. *Elements of Contemporary Theory of Dynamical Chaos: A Tutorial. Part I. Pseudohyperbolic Attractors* //International Journal of Bifurcation and Chaos **28(11)** (2018), 1830036, (29 p.)

<https://www.worldscientific.com/doi/10.1142/S0218127418300367>

(Представление нового метода проверки псевдогиперболичности странных аттракторов и его численная реализация; установление на основе этого метода псевдогиперболичности дискретных аттракторов Лоренца в трехмерном отображении Эно и неголономной модели кельтского камня, а также восьмерочного аттрактора в неголономной модели волчка Чаплыгина.)

- [7\*] Kazakov A.O. *On the Appearance of Mixed Dynamics as a Result of Collision of Strange Attractors and Repellers in Reversible Systems* //Radiophysics and Quantum Electronics **61(8–9)** (2019), pp. 650–658.

<https://link.springer.com/article/10.1007/s11141-019-09925-6>

(Описание феноменологического сценария столкновения хаотического аттрактора и хаотического репеллера, приводящего к возникновению смешанной динамики. Реализация этого сценария в неголономной модели волчка Сулова. Объяснение мгновенного перехода от диссипативного хаоса к смешанной динамике в этой модели.)

- [8\*] Kazakov A. *Merger of a Hénon-like attractor with a Hénon-like repeller in a model of vortex dynamics* //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **30(1)** (2020), 011105. (7 p.)

<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/1.5144144>

(Открытие нового явления – сильно-диссипативной смешанной динамики, для которой численно построенные аттрактор и репеллер пересекаются, но при этом сильно отличаются друг от друга. Обнаружение такого типа смешанной динамики в модели двух точечных вихрей в поле акустической волны. Работа отмечена как выбор редактора (Editor’s Pick).)

- [9\*] Gonchenko S.V., Gonchenko A.S., Kazakov A.O. *Three Types of Attractors and Mixed Dynamics of Nonholonomic Models of Rigid Body Motion* //Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics **308** (2020), pp. 125–140.

<https://link.springer.com/article/10.1134/S0081543820010101>

(Численное подтверждение возникновения смешанной динамики в ряде неголономных моделей движения твердого тела и отсутствия гладкой инвариантной меры в неголономной модели движения резинового диска на плоскости.)

- [10\*] Gonchenko S. V., Kazakov A. O., Turaev D. *Wild pseudohyperbolic attractors in a four-dimensional Lorenz system* //Nonlinearity **34(4)** (2021) (31 p.)

<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1361-6544/abc794>

(Разработка методов проверки псевдогиперболичности, численное подтверждение псевдогиперболичности дикого спирального аттрактора, построение различных геометрических моделей дикого спирального аттрактора.)

- [11\*] Gonchenko S., Gonchenko A., Kazakov A., Samylina E. *On discrete Lorenz-like attractors* //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **31(2)** (2021), 023117 (20 p.)

<https://aip.scitation.org/doi/abs/10.1063/5.0037621>

(Численное подтверждение псевдогиперболичности нового типа аттрактора – гетероклинического аттрактора Лоренца. Работа отмечена как выбор редактора (Editor’s Pick).)

- [12\*] Kazakov A.O. *On bifurcations of Lorenz attractors in the Lyubimov-Zaks model* //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science **31(9)** (2021), 093118 (19 p.)

<https://aip.scitation.org/doi/10.1063/5.0058585>

(Обнаружение псевдогиперболического аттрактора Лоренца и аттрактора Ровеллы в модели Любимова-Закса, критерий рождения аттрактора Ровеллы.)

## Патенты

- [13\*] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А., Казаков А. О., Чигарев В. Г. Программный комплекс для ЭВМ *Компьютерная динамика: Хаос версия 5.0 (Хаос 5.0)*. – 2014. Номер свидетельства: RU 2014619001

(Разработка и реализация численных методов исследования динамического хаоса, техническое руководство разработкой архитектуры и интерфейса комплекса.)

- [14\*] Борисов А. В., Мамаев И. С., Килин А. А., Казаков А. О., Чигарев В. Г., Бизяев И. А. Программный комплекс для ЭВМ *Компьютерная динамика: Хаос версия 5.5 (Хаос 5.5)*. – 2016. Номер свидетельства: RU 2016660109

(Разработка и реализация численных методов исследования динамического хаоса, распараллеливание методов с применением технологии CUDA, разработка модуля ввода пользовательских задач, техническое руководство разработкой архитектуры и интерфейса комплекса.)

## 2 Краткое содержание работы. Основные результаты

Основные результаты диссертационной работы разбиты на три части:

- псевдогиперболические аттракторы;
- смешанная динамика;
- комплекс программ.

### 2.1 Псевдогиперболические аттракторы.

В теории динамического хаоса особый интерес представляют странные аттракторы, которые демонстрируют устойчивое хаотическое поведение при изменении параметров системы. Примеров таких настоящих странных аттракторов до недавнего времени было совсем немного: гиперболические аттракторы [1] и сингулярно-гиперболические (лоренцевские) аттракторы [2, 3, 4].

Серьезное ослабление условий гиперболичности, не разрушающее свойство устойчивости хаотической динамики по отношению к изменению параметров системы было предложено в работе [5], где были заложены основы теории псевдогиперболических аттракторов.

Напомним соответствующее определение, следуя нашей работе [10\*].

**Определение 1 ([10\*])** Пусть  $\mathcal{A}$  является положительно-инвариантным множеством  $n$ -мерного  $C^r$ -гладкого потока  $F_t$  (т.е.,  $F_t(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}$  для  $t > 0$ ). Множество  $\mathcal{A}$  называется псевдогиперболическим, если оно обладает следующими свойствами.

- а) Для любой точки  $x \in \mathcal{A}$  существует два непрерывно зависящих от  $x$  линейных подпространства,  $E_1(x)$  и  $E_2(x)$ , где  $\dim E_1 = k$  и  $\dim E_2 = n - k$ , которые инвариантны относительно дифференциала  $DF$  потока,

$$DF_t E_1(x) = E_1(F_t(x)), \quad DF_t E_2(x) = E_2(F_t(x)),$$

для любых  $t \geq 0$ .

- б) Разложение на  $E_1$  и  $E_2$  является доминирующим, т.е., существуют константы  $C_1 > 0$  и  $\beta > 0$  такие, что

$$\|DF_t(x)|_{E_2}\| \cdot \|(DF_t(x)|_{E_1})^{-1}\| \leq C_1 e^{-\beta t}$$

для любых  $t \geq 0$  и  $x \in \mathcal{A}$ . Это означает, что любое возможное сжатие в  $E_1(x)$  равномерно слабее, чем сжатие в  $E_2(x)$  и любое возможное растяжение в  $E_1(x)$  равномерно сильнее любого возможного растяжения в  $E_2(x)$ .

- в) Линеаризованный поток  $DF$  на  $E_1$  экспоненциально растягивает любые  $k$ -мерные объемы, т.е., существуют константы  $C_2 > 0$  и  $\sigma > 0$  такие, что

$$\det(DF_t(x)|_{E_1}) \geq C_2 e^{\sigma t}$$

для любых  $t \geq 0$  и  $x \in \mathcal{A}$ .

Если псевдогиперболическое множество  $\mathcal{A}$  является аттрактором, мы называем его *псевдогиперболическим аттрактором*. Заметим, что определение 1 является обобщением соответствующего определения из работы [5].

Аналогичное определение можно дать для диффеоморфизмов. Для этого нужно просто считать, что время  $t$  принимает дискретные значения, т.е.  $t \in \mathbb{Z}$  и заменить  $F_t$  в приведенном выше определении на итерацию диффеоморфизма  $f$ , т.е.,  $F_t = f^t$ .

**Замечание 1** В случае диффеоморфизмов, если условия (b) и (c) этого определения заменить на более строгие условия:

b') дифференциал  $DF$  экспоненциально сжимает любые вектора в  $E_2$ , т.е. существуют константы  $B_1 > 0$  и  $\sigma_1 > 0$  такие, что

$$\|DF_t(x)|_{E_2}\| \leq B_1 e^{-\sigma_1 t}$$

для любых  $t \geq 0$  и  $x \in \mathcal{A}$ ,

c')  $DF$  экспоненциально растягивает любые вектора в  $E_1$ , т.е. существуют константы  $B_2 > 0$  и  $\sigma_2 > 0$  такие, что

$$\|(DF_t(x)|_{E_1})^{-1}\| \leq B_2 e^{-\sigma_2 t}$$

для любых  $t \geq 0$  и  $x \in \mathcal{A}$ ,

то мы получим определение гиперболического множества.

В случае гиперболических потоков в каждой точке  $x \in \mathcal{A}$  существует разложение на 3 подпространства. Помимо подпространств сжатия и растяжения направлений  $E_2$  и  $E_1$ , на которых выполняются такие же оценки, как в условиях (b') и (c'), здесь также выделяется нейтральное, касательное к траектории, подпространство  $E_0$ .

Один из основных вопросов в теории псевдогиперболических аттракторов и их приложений – нахождение условий, позволяющих надежно отличить их от часто наблюдаемых в экспериментах «ненастоящих» странных аттракторов, т.н. квазиаттракторов [6].

В цикле статей, представленных в настоящей диссертационной работе рассматриваются только примеры, в которых имеется равномерное сжатие в подпространствах  $E_2(x)$ . Таким образом, используя стандартные обозначения теории нормальной гиперболичности, мы будем называть  $E_2(x)$  сильно-сжимающими подпространствами и обозначать их через  $E^{ss}(x)$ ; центрально-неустойчивые подпространства  $E_1(x)$  будем обозначать через  $E^{cu}(x)$ . Кроме того, во всех рассмотренных примерах  $\dim E^{ss} = 1$ , то есть сильно сжимающее подпространство одномерно.

### 2.1.1 О методах проверки псевдогиперболичности.

В работах [6\*, 10\*] диссертантом предложен новый численный метод проверки псевдогиперболичности странных аттракторов, основанный на поэтапной верификации всех

условий определения 1. Программная реализация этого метода позволила диссертанту обнаружить целый ряд псевдогиперболических аттракторов нового типа.

Для того, чтобы проверить псевдогиперболичность аттрактора, используя определение 1, первое и самое простое, что нужно сделать, это вычислить спектр его показателей Ляпунова  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_n$ . Тогда из условия (с) определения 1 вытекает, что

$$\Lambda_1 + \dots + \Lambda_k > 0, \quad (1)$$

а из условия (b), что

$$\Lambda_k > \Lambda_{k+1}, \quad (2)$$

для некоторого  $k \geq 1$  и  $k < n$ .

Отметим, что эти условия должны выполняться для всех траекторий на аттракторе. Эффективный способ проверить это – взять только одну, достаточно длинную «репрезентативную» траекторию на аттракторе, поделить ее на множество относительно коротких частей, а затем проверить условия (1) и (2) для каждой части, вычислив т.н. «короткие» (finite-time) ляпуновские показатели [7].

Однако, даже если оба этих условия выполняются, то это все еще не свидетельствует о псевдогиперболичности аттрактора. Дело в том, можно легко пропустить маленькие «дырки», содержащие, например, устойчивые периодические траектории. Вообще говоря, эти «дырки» могут быть настолько маленькими, что их невозможно обнаружить при стандартных вычислениях [8]. Соответственно, нужен метод, позволяющий убедиться, что таких дырок нет. Такой метод состоит в том, чтобы кроме условий (b) и (с) определения 1 проверять еще и условие (a). Для этого нужно убедиться, что разбиение на пару инвариантных подпространств *непрерывно* зависит от точки на аттракторе. Это требует построения и анализа инвариантных подпространств  $E^{cu}(x)$ , соответствующего показателям Ляпунова  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_k$  и  $E^{ss}(x)$ , соответствующего показателям  $\Lambda_{k+1}, \dots, \Lambda_n$ .

Далее, следуя [10\*], более подробно опишем соответствующий алгоритм. Мы берем длинную траекторию системы, отбрасываем достаточно длинный начальный сегмент, отвечающий переходному процессу, чтобы быть уверенным, что оставшаяся часть траектории дает хорошую аппроксимацию аттрактора. Далее мы вычисляем спектр показателей Ляпунова для этой траектории вместе с соответствующими ляпуновскими ковариантными векторами. При таком подходе подпространства  $E^{ss}(x)$  и  $E^{cu}(x)$  вычисляются автоматически, а проверка условия (a) сводится к проверке непрерывной зависимости полученных подпространств от точки  $x$  на аттракторе.

Это делается следующим образом. Мы строим численно график функции угла  $\varphi$  между  $E^{ss}(x)$  и  $E^{ss}(y)$  в зависимости от расстояния между соответствующими точками аттрактора  $x$  и  $y$  (на участке траектории, которая используется как аппроксимация аттрактора). Если  $\varphi(E^{ss}(x), E^{ss}(y)) \rightarrow 0$  при  $dist(x, y) \rightarrow 0$ , то делается вывод, что  $E^{ss}(x)$  непрерывно зависит от точки на аттракторе. При этом, в каждой точке  $x$  аттрактора вектора, образующие  $E^{ss}(x)$ , выбираются сонаправленными соответствующим ляпуновским ковариантным векторам. То есть, мы измеряем угол между ориентированными подпространствами  $E^{ss}(x)$  и  $E^{ss}(y)$ .

Таким образом, метод из работы [10\*] позволяет проверять больше, чем требуется по условию (a) определения 1. А именно, он позволяет устанавливать существование и непре-

рывность *ориентируемого* поля подпространств  $E^{ss}(x)$ . Такое поле может существовать не для всех псевдогиперболических аттракторов (например, неориентируемый аттрактор Лоренца [4, 9] не обладает таким полем). Оно всегда существует, если поглощающая область  $\mathcal{D}$  (на которую распространяется свойство псевдогиперболичности аттрактора) односвязная. Однако в случае общей топологии аттрактора ориентация  $E^{ss}(x)$  может изменяться при продолжении по нестягиваемой петле. Это несколько сужает класс аттракторов, для которых наш метод применим непосредственно. Для анализа псевдогиперболичности аттракторов с неориентируемым полем  $E^{ss}(x)$  необходимо дополнительное исследование.

Аналогичная проверка непрерывности делается и для подпространства  $E^{cu}(x)$ , также наделенного инвариантной ориентацией. Если оба поля  $E^{cu}(x)$  и  $E^{ss}(x)$  непрерывны, то можно сделать вывод о псевдогиперболичности аттрактора.

Мы рассматривали только случаи, когда пространства сильного сжатия  $E^{ss}(x)$  одномерны и, следовательно, подпространства  $E^{cu}(x)$  имеют коразмерность 1. Соответственно, непрерывность  $E^{cu}(x)$  эквивалентна непрерывности поля нормалей  $N^{cu}(x)$  к гиперплоскостям  $E^{cu}(x)$ . По определению  $E^{ss}(x)$  и  $N^{cu}(x)$  – поля прямых линий, а введение ориентации делает их векторными полями. Далее опишем процедуру построения векторных полей  $\vec{E}^{ss}(x)$  и  $\vec{N}^{cu}(x)$ .

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (3)$$

Возьмем некоторую траекторию этой системы и вычислим для нее ляпуновские показатели  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n$ . Сначала проверяем условия (1), (2), которые в нашем случае должны принимать вид

$$\Lambda_1 + \dots + \Lambda_{n-1} > 0, \quad (4)$$

$$\Lambda_{n-1} > \Lambda_n. \quad (5)$$

Пусть  $\{x_1, \dots, x_m\}$  – дискретизация (конечная последовательность точек) рассматриваемой траектории. Возьмем произвольный единичный вектор  $u_m$  в точке  $x_m$  и определяем последовательность единичных векторов  $u_s$  в точках  $x_s$ ,  $s = 1, \dots, m$ , с помощью следующей индуктивной процедуры: если  $u_s$  – вектор, полученный на  $(m_s)$ -й итерации, то  $u_{s-1}$  определяется как  $u_{s-1} = U_{s-1}/\|U_{s-1}\|$ , где  $U_{s-1}$  – решение при  $t = t_{s-1}$  следующего уравнения в вариациях

$$\dot{U} = DF(x(t)) U \quad (6)$$

с начальным условием  $U(t_s) = u_s$ ; здесь  $DF$  – матрица производных от  $F$ , а  $x(t)$  – решение (3) с начальным условием  $x(t_s) = x_s$ . Подчеркнем, что уравнения (3) и (6) решаются в обратном времени (от  $t = t_s$  до  $t = t_1$ ). Чтобы подавить неустойчивость при прохождении по траектории в обратном времени, на каждом шаге в качестве начального условия используется предварительно сохраненное значение  $x_s$ , которое вычислено интегрированием (3) в прямом времени. По условию (5) последовательность единичных векторов  $u_s$  экспоненциально сходится к ковариантному ляпуновскому вектору, соответствующему минимальному ляпуновскому показателю  $\Lambda_n$ , почти для всех начальных условий  $u_m$ . Таким образом, если  $m_1$ ,  $m_2$  и  $m$  достаточно велики, то сегмент траектории, для  $s \in [m_1, m - m_2]$ , дает хорошую аппроксимацию аттрактора, а векторы  $u_s$  – аппроксимацию поля  $\vec{E}^{ss}(x_s)$ .

Аналогичную процедуру мы используем для нахождения векторов  $\vec{N}^{cu}(x_s) = w_s$ . Начнем с единичного вектора  $w_0$  и определим индуктивно  $w_{s+1} = W_{s+1}/\|W_{s+1}\|$ , где  $W_{s+1}$  является решением в точке  $t = t_{s+1}$  сопряженного уравнения в вариациях

$$\dot{W} = -[DF(x(t))]^\top W \quad (7)$$

с начальным условием  $W(t_s) = w_s$ . Очевидно, что если  $u(t)$  является решением (6), а  $w(t)$  решением (7), то скалярное произведение  $(u(t), w(t))$  остается постоянным т.к.:

$$\frac{d}{dt}(u, w) = (Au, w) - (u, A^\top w) = 0$$

(здесь мы обозначили  $A(t) = DF(x(t))$ ). Следовательно, для любого подпространства ко-размерности 1, ортогонального  $w_0$ , последовательность его итераций по уравнению в вариациях (6) останется ортогональной  $W_s$  при  $t = t_s$ . Поскольку при типичном выборе такого подпространства его итерации экспоненциально сходятся к  $E^{cu}$ , отсюда следует, что вектора  $W_s$  дают хорошее приближение поля направлений  $\vec{N}^{cu}(x_s)$  (ортогонального  $E^{cu}$ ) для всех достаточно больших  $s$ .

Описанная процедура также применима для проверки псевдогиперболичности аттракторов дискретных динамических систем (отображений). Рассмотрим диффеоморфизм  $x \mapsto F(x)$  и возьмем его траекторию  $x_1, \dots, x_m$ , где  $x_{s+1} = F(x_s)$ . Тогда векторы  $u_s$  и  $w_s$  определяются по правилу

$$u_{s-1} = \frac{DF(x_s)^{-1}u_s}{\|DF(x_s)^{-1}u_s\|}, \quad w_{s+1} = \frac{[DF(x_s)^\top]^{-1}w_s}{\|[DF(x_s)^\top]^{-1}w_s\|}.$$

Стоит отметить, что аттрактор отображения  $F$  может иметь ориентируемые поля подпространств  $\vec{E}^{ss}$  и  $\vec{N}^{cu}$ , но их ориентация может меняться с каждой итерацией  $F$ . Чтобы этого избежать, можно удалить из последовательности  $(x_s, u_s, w_s)$  каждый второй элемент.

Наконец, как только траектория  $x_s$ ,  $s \in [m_1, m - m_2]$  и векторы  $u_s$  и  $w_s$  вычислены, мы строим *диаграммы непрерывности* для  $\vec{E}^{ss}$  и  $\vec{N}^{cu}$  – графики на плоскости  $(\rho, \varphi)$ , где для каждой пары точек  $(x_i, x_j)$ ,  $m_1 \leq i < j \leq m - m_2$  отображается точка с координатами  $(\rho, \varphi)$ , где  $\rho$  – расстояние между  $x_i$  и  $x_j$ , а  $\varphi$  – угол между соответствующими векторами  $u_i$  и  $u_j$  (для диаграммы непрерывности  $\vec{E}^{ss}$ ) или угол между  $w_i$  и  $w_j$  (для  $\vec{N}^{cu}$ ).

Эти диаграммы выглядят как два облака точек на плоскости  $(\rho, \varphi)$ , см., например рисунок 1c,d. Если каждое из этих облаков  $\vec{E}^{ss}$  или  $\vec{N}^{cu}$  касается оси  $\varphi$  только лишь в начале координат  $(\rho, \varphi) = (0, 0)$ , тогда можно считать поля направлений  $E^{ss}$  и  $N^{cu}$  непрерывными и, следовательно, аттрактор псевдогиперболическим.

С другой стороны, если одно из облаков касается оси  $\varphi$  в точках, отличных от нуля, или между облаком и осью  $\varphi$  нет видимого промежутка, то соответствующее поле подпространств не может считаться непрерывным. Поэтому рассматриваемый аттрактор либо квазиаттрактор, либо неориентируемый псевдогиперболический (точнее, поле  $E^{ss}(x)$  неориентируемо на аттракторе). Последний случай возможен только если одно из облаков касается оси  $\varphi$  только в двух точках  $\varphi = 0$  и  $\varphi = \pi$ . В этом случае проводится дополнительный качественный анализ для доказательства псевдогиперболичности аттрактора,

как это сделано, например, в [11\*] (см. раздел 2.1.5).

### 2.1.2 Дикий спиральный аттрактор в четырехмерной системе.

В работе [10\*] в четырехмерной системе обыкновенных дифференциальных уравнений диссертантом обнаружен первый и пока единственный пример дикого спирального аттрактора, феноменологическая модель которого предложена более 20 лет назад в работе Тураева-Шильникова [5]. Напомним соответствующие определения.

**Определение 2 ([5])** *Аттрактор называется диким, если он содержит дикое гиперболическое множество (вместе с его неустойчивым многообразием). Дикое гиперболическое множество [10] – равномерно гиперболическое инвариантное множество устойчивое и неустойчивое инвариантные многообразия которого имеют нетрансверсальное пересечение и это свойство сохраняется при  $C^2$ -малых возмущениях.*

**Определение 3 ([5])** *Дикий спиральный аттрактор – псевдогиперболический аттрактор  $C^r$ -гладкого ( $r \geq 4$ ) потока в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 4$ , содержащий состояние равновесия типа седло-фокус с собственными числами  $\gamma, -\lambda \pm i\omega, -\alpha_1, \dots, -\alpha_{n-3}$ , где*

$$\gamma > 0, \quad 0 < \lambda < \operatorname{Re} \alpha_j, \quad \gamma > 2\lambda.$$

Дикие псевдогиперболические аттракторы, в отличие от гиперболических, допускают существование гомоклинических касаний, однако бифуркации этих касаний не приводят к возникновению устойчивых периодических траекторий. Вместо этого здесь возможны только бифуркации, связанные с образованием негрубых периодических траекторий типа седло-седло, которые затем распадаются на два седла соседних индексов.

В работе [10\*] рассматривалась четырехмерная система

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = x(r - z) - y, \\ \dot{z} = xy - bz + \mu w, \\ \dot{w} = -bw - \mu z, \end{cases} \quad (8)$$

с параметрами  $\sigma, r, b$  и  $\mu$ .

Заметим, что при  $\mu = 0$  гиперплоскость  $w = 0$  является инвариантной и в ограничении на эту гиперплоскость система (8) является в точности моделью Лоренца. В работе [10\*] мы обнаружили дикий спиральный аттрактор в этой системе при

$$\mu = 7, \sigma = 10, b = 8/3, r = 25, \quad (9)$$

см. рис. 1а,б, и привели численное доказательство его псевдогиперболичности с помощью методов, изложенных в разделе 2.1.1.

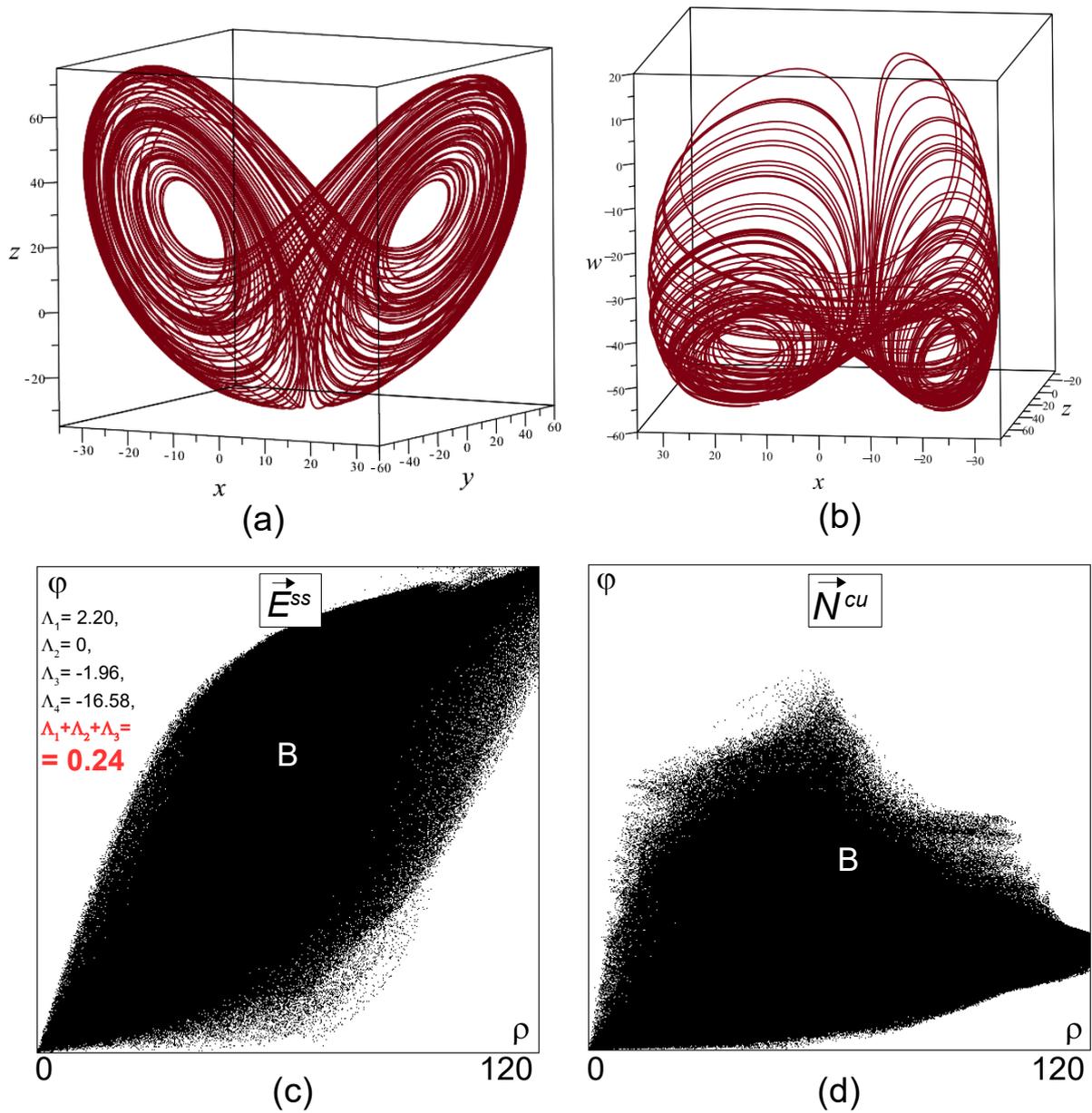


Рис. 1: (a) и (b) Проекции странного аттрактора системы (8) при  $\sigma = 10, b = 8/3, r = 25$  и  $\mu = 7$  на: плоскости  $(x, y, z)$  и плоскости  $(x, z, w)$ ; (c) и (d) диаграммы непрерывности подпространств  $E^{ss}$  и  $N^{cu}$ , подтверждающие псевдогиперболичность представленного аттрактора.

Рассматриваемый аттрактор содержит состояние равновесия, характеризующееся набором собственных чисел:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2} \left( \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r} - \sigma - 1 \right), \\ \lambda_{2,3} &= -b \pm i\mu, \\ \lambda_4 &= -\frac{1}{2} \left( \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r} + \sigma + 1 \right).\end{aligned}$$

При параметрах (9) собственные числа принимают следующие значения  $\lambda_1 \approx 11.83$ ,  $\lambda_{2,3} = -8/3 \pm i\mu$ ,  $\lambda_4 \approx -22.83$ . Таким образом, подпространство  $E^{ss}$  в точке  $O$  одномерное (оно имеет направление собственного вектора, отвечающего числу  $\lambda_4$ ). Для псевдогиперболичности обнаруженного аттрактора, по условиям непрерывности (условия (a) определения

1), необходимо, чтобы подпространство  $E^{ss}$  было одномерным в каждой точке аттрактора. Соответственно, подпространство  $E^{cu}$  должно быть трехмерным. Однако при малых  $\mu$  условие (с) определения 1 для аттрактора системы (8) не выполняется, так как сумма первых трех показателей Ляпунова является отрицательной. Действительно, хорошо известно, что первые два показателя Ляпунова для системы Лоренца при классических значениях параметров равны  $\Lambda_1 \approx 0.906$  и  $\Lambda_2 = 0$ . В системе (8) при  $\mu = 0$  показатели Ляпунова  $\Lambda_1$  и  $\Lambda_2$  остаются такими же, а  $\Lambda_3 = -8/3$ . Получается, что  $\Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_3 \approx -1.761 < 0$ , и эта сумма не может быть положительной при малых значениях  $\mu$ .

В точке (9) пространства параметров хаотический аттрактор имеет следующий набор показателей Ляпунова  $\Lambda_1 \approx 2.19$ ,  $\Lambda_2 \approx 0$ ,  $\Lambda_3 \approx -1.96$ ,  $\Lambda_4 \approx -16.56$ . Следовательно, аттрактор удовлетворяет необходимым условиям (b) и (с) определения псевдогиперболичности 1.

Для проверки оставшегося условия (a) нужно показать, что подпространства  $E^{ss}(x)$  и  $E^{cu}(x)$  непрерывно зависят от точки, принадлежащей аттрактору. Для этого мы построили диаграммы непрерывности подпространств  $\vec{E}^{ss}$  и  $\vec{N}^{cu}$ , в соответствии с методами, описанными в разделе 2.1.1. Соответствующие диаграммы представлены на рис. 1c,d. Построенные диаграммы показывают непрерывность  $E^{ss}$  и  $E^{cu}$ .

Кроме того, в [10\*] численно установлено соответствие аттрактора, представленного на рис. 1, условиям феноменологической модели Тураева-Шильникова [5], а также показано, что этот аттрактор содержит дикое гиперболическое множество Ньюхауса.

### 2.1.3 Псевдогиперболичность дискретного аттрактора Лоренца.

В работах [6\*, 10\*], с помощью разработанного диссертантом программного комплекса, реализующего методы, описанные в разделе 2.1.1, установлена псевдогиперболичность дискретного аттрактора Лоренца в трехмерном отображении Эно.

Впервые такой аттрактор был обнаружен в работе 2005 года [11], где было показано, что у трехмерных отображений Эно вида

$$\bar{x} = y, \quad \bar{y} = z, \quad \bar{z} = M_1 + Bx + M_2y - z^2, \quad (10)$$

где  $M_1, M_2, B$  – параметры ( $B$  – якобиан отображения), в некоторой области значений параметров, примыкающей к точке  $P : (M_1, M_2, B) = (1/4, 1, 1)$ , существуют *дикий дискретный аттрактор Лоренца*.

**Определение 4 ([11\*])** *Дискретный аттрактор Лоренца  $A$  можно определить как*

- (i) *гомоклические аттрактор, содержащий седловую неподвижную точку  $O$  с мультипликаторами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  такими что  $|\lambda_1| > 1$ ,  $0 < |\lambda_3| < \lambda_2 < 1$ ,  $|\lambda_1\lambda_2\lambda_3| < 1$  и седловой индекс  $\sigma \equiv |\lambda_1\lambda_2|$  больше единицы;*
- (ii) *пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  – неустойчивые сепаратрисы точки  $O$ , образующие вместе с  $O$  неустойчивое многообразие  $W^u(O)$ , тогда все точки принадлежащие пересечению  $\Gamma_1 \cap W_{loc}^s(O)$  и  $\Gamma_2 \cap W_{loc}^s(O)$  целиком лежат на одной и той же части множества  $W_{loc}^s(O) \setminus W^{ss}(O)$ , см. рис. 2;*

(iii) поглощающая область  $D$  аттрактора  $A$  имеет форму кренделя, в которой замкнутые кривые  $\mathcal{L}_i, i = 1, 2$ , образованные фрагментом  $\Gamma_i$ , соединяющим  $O$  с точкой  $h_i$  первого пересечения  $\Gamma_i$  с  $W_{loc}^s$  и простой дугой от  $h_i$  до  $O$ , являются не стягиваемыми в  $D$ , см. рис. 2.

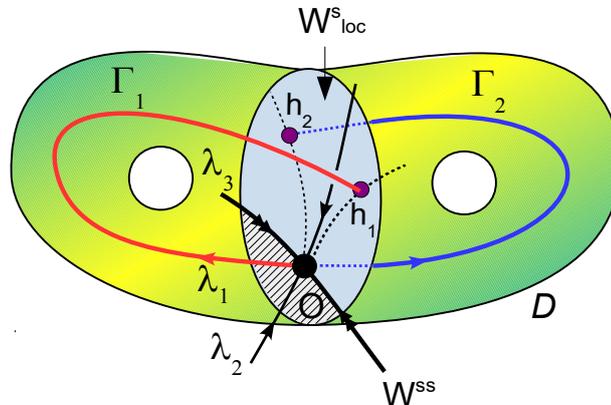


Рис. 2: Иллюстрация к определению 4 дискретного аттрактора Лоренца.

В работе [11] псевдогиперболичность дискретных аттракторов Лоренца проверялась аналитически на основе того, что при близких к точке  $P$  значениях параметров квадрат отображения в некоторой окрестности седловой неподвижной точки может быть представлен как отображение Пуанкаре периодически возмущенной системы Шимицу-Мориока, которая имеет аттрактор Лоренца [12, 13]. Когда возмущение достаточно мало (что определяется близостью параметров к точке  $P$ ), тогда искомая псевдогиперболичность должна естественно наследоваться от аттрактора Лоренца, который сам является таковым [14]. В частности, в работе [15], было показано, что свойство псевдогиперболичности потоков сохраняется при малых периодических возмущениях (соответствующие отображения Пуанкаре также являются псевдогиперболическими).

Однако значения параметров:  $(M_1, M_2, B) = (0, 0.85, 0.7)$ , при которых дискретные аттракторы Лоренца были найдены в отображении (10), совсем не близки к точке  $P$ , около которой существование аттрактора Лоренца обосновано теоретически. Поэтому условия псевдогиперболичности таких аттракторов нужно проверять дополнительно. Такая проверка, с помощью методов описанных в разделе 2.1.1, была выполнена в работе [10\*]. Кратко опишем результаты этой проверки.

На рис. 3 показаны примеры дискретных аттракторов лоренцевского типа для отображения (10) при  $B = 0.7$ . Диаграммы непрерывности вычислялись для каждой второй итерации отображения, т.к. рассматриваемое отображение обращает ориентацию на  $E^{ss}$ , поскольку наименьшее сильно устойчивое собственное значение неподвижной точки является отрицательным, ( $\lambda_3 < 0$ ). Аттракторы на рис. 3а и 3б обладают непрерывностью поля подпространств  $E^{ss}(x)$  и  $N^{cu}(x)$ , поэтому можно сделать вывод об их псевдогиперболичности (выполнение необходимых условий  $\Lambda_1 + \Lambda_2 > 0$  и  $\Lambda_2 > \Lambda_3$  установлено ранее, в работе [11]).

В свою очередь аттрактор на рис. 3с хоть и имеет положительный максимальный ляпуновский показатель (см. численные результаты в [11]), но не является псевдогиперболическим, т.к. поля подпространств  $E^{ss}(x)$  и  $N^{cu}(x)$  не являются непрерывными, см.

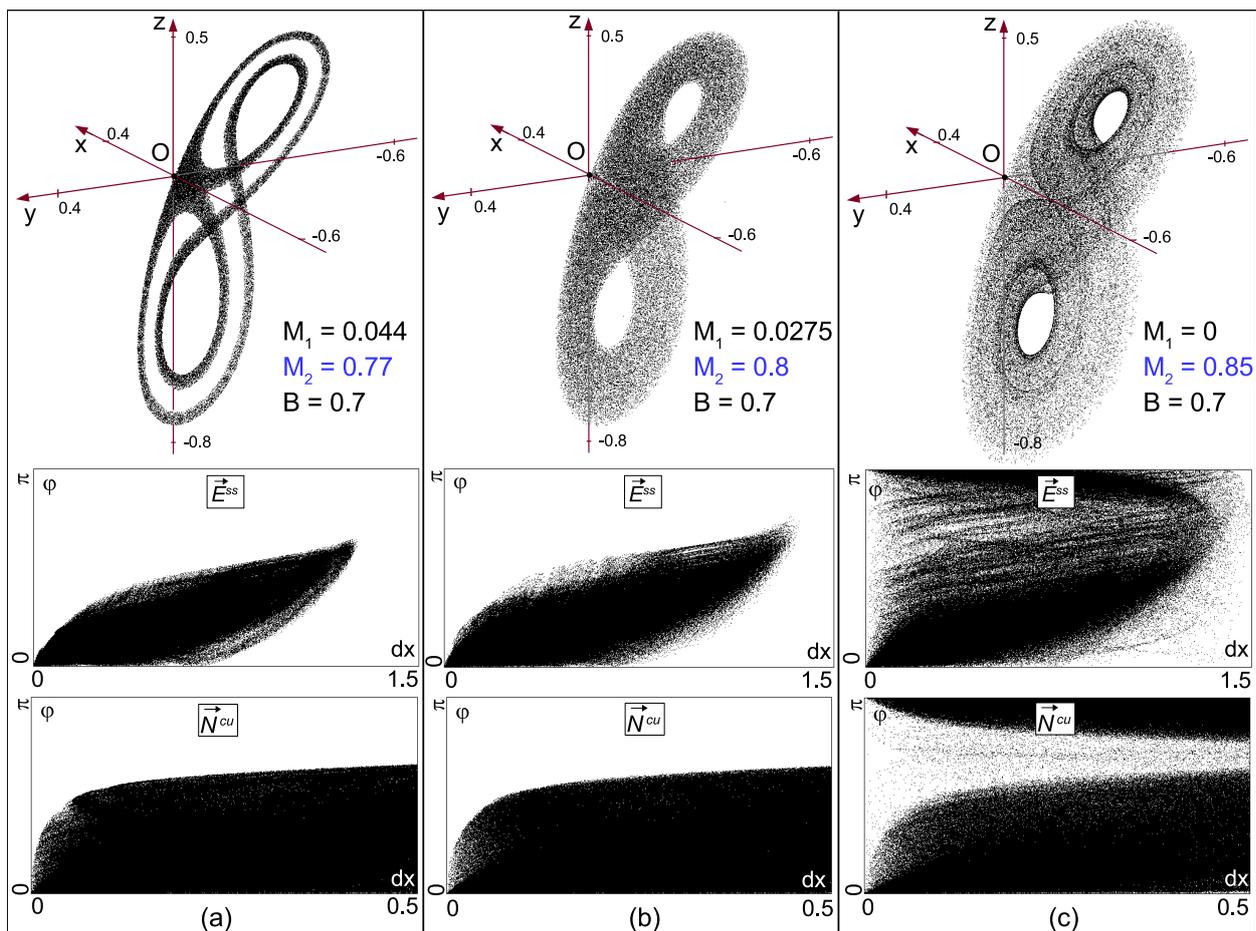


Рис. 3: Дискретные аттракторы лоренцевского типа в отображении (10) (верхняя строка) и соответствующие им диаграммы непрерывности  $\vec{E}^{ss}$  (средняя строка) и  $\vec{N}^{cu}$  (нижняя строка). Значения параметров: (a)  $M_1 = 0.044, M_2 = 0.77, B = 0.7$ , (b)  $M_1 = 0.0275, M_2 = 0.8, B = 0.7$ , (c)  $M_1 = 0, M_2 = 0.85, B = 0.7$ . Аттрактор на рис. (c) не является псевдогиперболическим.

среднюю и нижнюю панели на рис. 3. Фактически, можно показать, что при некоторых значениях параметров, существует устойчивая периодическая точка, а «хаотический аттрактор», представленный на рисунке 3c является артефактом (очень небольшого) численного шума, связанного, например, с округлением.

#### 2.1.4 Дискретный неориентируемый гетероклинический аттрактор Лоренца.

В работе [11\*] диссертантом был обнаружен псевдогиперболический аттрактор нового типа. Показано, что в трехмерном отображении Эно (10), в окрестности неподвижной точки с триплетом мультипликаторов  $(-1, +i, -i)$ , может возникать псевдогиперболический неориентируемый аттракторы лоренцевского типа на седловой точке периода 2. Неориентируемость аттрактора доказана на основе качественных методов. Псевдогиперболическость установлена с помощью разработанного соискателем программного комплекса, реализующего метода, описанные в разделе 2.1.1.

Геометрическая модель такого аттрактора представлен на рис. 4a, она иллюстрирует главную особенность аттрактора, связанную с тем, что все устойчивые и неустойчивые

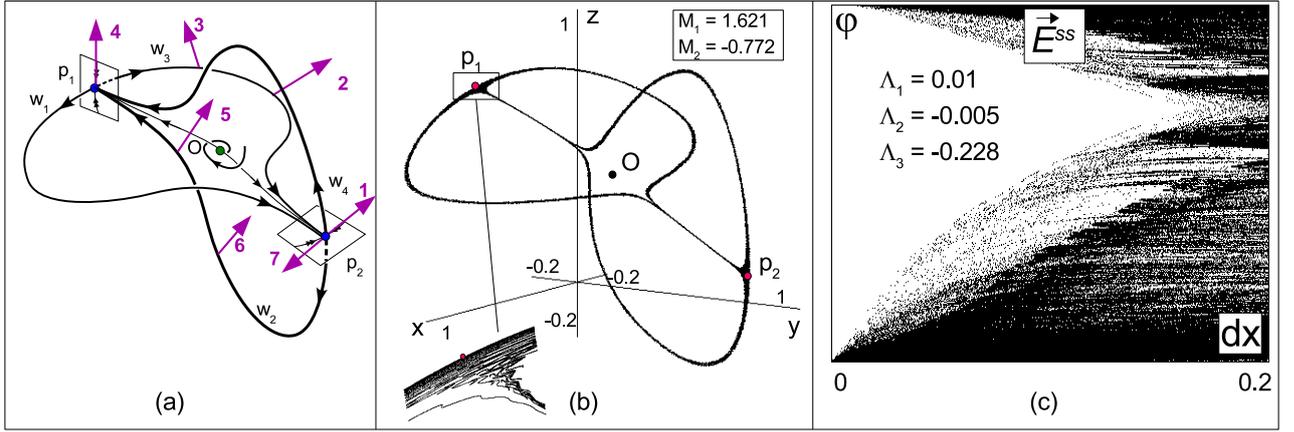


Рис. 4: Гетероклинический аттрактор, содержащий седловую точку  $P = (p_1, p_2)$  периода два: (a) геометрическая схема аттрактора; (b) пример такого аттрактора в отображении (10) при  $(M_1, M_2, B) = (1.621, -0.772, -0.8)$ ; здесь  $p_1 = (a, b, a)$ ,  $p_2 = (b, a, b)$ , где  $a = 0.12, b = 0.85$ ; (c) диаграмма непрерывности  $E^{ss}$ .

инвариантные многообразия точек  $p_1$  и  $p_2$  образующих орбиту периода 2 взаимно пересекаются. Пример такого аттрактора для отображения (10) при  $B = -0.8$  представлен на рис. 4b.

Рассматриваемые гетероклинические аттракторы могут быть псевдогиперболическими. В случае аттрактора, изображенного на рис. 4b, его диаграмма непрерывности подпространства  $E^{ss}$ , представленная на рис. 4c, подтверждает этот факт. Диаграмма построена для каждой четвертой итерации отображения. Несмотря на то, что облако точек на этой диаграмме касается оси  $O\varphi$  в точках  $0$  и  $\pi$ , это не противоречит псевдогиперболическости аттрактора, поскольку точки  $p_1$  и  $p_2$  (неподвижные для  $T^4$ ) вместе со своими инвариантными многообразиями образуют гетероклинические циклы неориентируемого типа, при прохождении по которым исходный вектор может менять свое направление на противоположное. В частности, это касается векторов из инвариантных подпространств  $E^{ss}(x)$  из определения 1. Этот факт проиллюстрирован на рис. 4a – здесь изображены семь последовательных положений векторов из  $E^{ss}$  вблизи контура  $[p_2, w_3, p_1, w_2]$ , в то время как соответствующие площади из  $E^{cu}$  представляют собой ленты Мёбиуса.

Тот факт, что такие аттракторы возникают около неподвижной точки коразмерности три говорит о том, что они, как и дискретные гомоклинические аттракторы Лоренца, имеют потоковые аналоги. А именно, такие аттракторы могут возникать в системах дифференциальных уравнений около состояния равновесия с тремя нулевыми собственными числами. Обнаружение гетероклинических аттракторов Лоренца мотивировали развитие соответствующей теории, в данный момент готовится статья на эту тему [16].

### 2.1.5 Дискретные восьмерочный и спиральный аттракторы, а также эффект реверса в неголономной модели волчка Чаплыгина.

В работе [1\*], в неголономной модели волчка Чаплыгина, диссертантом обнаружен первый пример восьмерочного аттрактора, высказана гипотеза о его псевдогиперболическости; в [2\*], диссертантом предложен новый бифуркационный сценарий возникновения псевдогиперболического восьмерочного аттрактора; в [6\*] псевдогиперболическость восьме-

рочного аттрактора в неголономной модели волчка Чаплыгина установлена численно с помощью программного комплекса, реализующего методы, описанные в разделе 2.1.1. В статье [4\*], в этой же модели обнаружен дискретный аттрактор Шильникова. Также важным результатом работы диссертанта является открытие нового типа реверса в неголономной динамике движения твердого тела, обнаруженное на примере волчка Чаплыгина в работе [1\*], а также волчка Сулова в работе [3\*].

Феноменологическая модель *восьмерочного псевдогиперболического аттрактора* была предложена в работе Гонченко и др. [17]. По аналогии с дискретным аттрактором Лоренца (см. определение 4) восьмерочный аттрактор можно определить как

**Определение 5** (i) *гомоклинический аттрактор, содержащий седловую неподвижную точку  $O$  с мультипликаторами  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , такими что  $\lambda_1 < -1 < \lambda_3 < 0 < \lambda_2 < 1$ ,  $|\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3| < 1$  и седловой индекс  $\sigma \equiv |\lambda_1 \lambda_3|$  больше единицы;*

(ii) *пусть  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  – неустойчивые сепаратрисы точки  $O$ , образующие вместе с  $O$  неустойчивое многообразие  $W^u(O)$ , тогда все точки принадлежащие пересечению  $\Gamma_1 \cap W_{loc}^s(O)$  и  $\Gamma_2 \cap W_{loc}^s(O)$  целиком лежат в одной и той же части множества  $W_{loc}^s(O) \setminus W^{ss}(O)$ , см. рис. 5d;*

(iii) *поглощающая область  $D$  аттрактора  $A$  имеет форму кренделя, в которой замкнутая кривая  $\mathcal{L}_i, i = 1, 2$ , образованная фрагментом  $\Gamma_i$ , соединяющим  $O$  с точкой  $h_i$  первого пересечения  $\Gamma_i$  с  $W_{loc}^s$  и простой дугой от  $h_i$  до  $O$ , являются не стягиваемыми в  $D$ , см. рис. 5d.*

Восьмерочный аттрактор во многом похож на описанный выше дискретный аттрактор Лоренца (ср. рис. 5с и 5d). Как и дискретный аттрактор Лоренца, восьмерочный аттрактор является гомоклиническим и содержит седловую неподвижную точку с действительными мультипликаторами удовлетворяющими следующему неравенству  $\lambda_1 < -1 < \lambda_3 < 0 < \lambda_2 < 1$ . Однако, ведущим здесь является направление, отвечающее отрицательному мультипликатору  $\lambda_3$ . Необходимым условием псевдогиперболичности восьмерочного аттрактора является условие  $\sigma = |\lambda_1 \lambda_3| > 1$ , обеспечивающее свойство растяжения площадей в точке  $O$ .

Отличительной чертой восьмерочного аттрактора является тот факт, что он не имеет потокового аналога. Действительно, в случае потока, геометрическая конструкция, представленная на рис. 5d, обеспечивает существование двумерного центрального многообразия, то есть динамика в окрестности седла является эффективно двумерной. Этот факт осложняет поиски восьмерочных аттракторов.

Тем не менее вскоре удалось обнаружить пример такого аттрактора. Первой и на данный момент единственной моделью, демонстрирующей псевдогиперболический восьмерочный аттрактор, является неголономная модель движения волчка Чаплыгина (неуравновешенного шара) на плоскости [1\*].

### **Уравнения движения волчка Чаплыгина и первые интегралы.**

Уравнения движения шара в переменных  $M$  и  $\gamma$ , где  $\gamma$  – вектор нормали, а  $M$  –

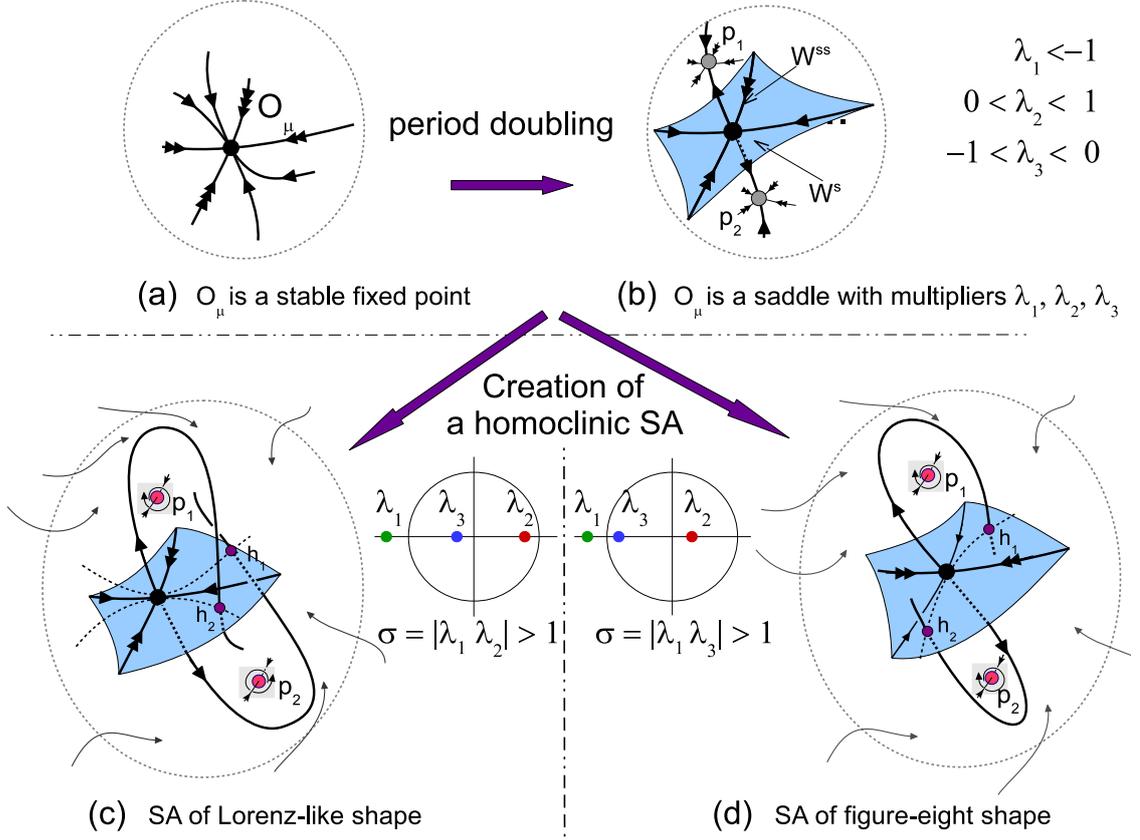


Рис. 5: Схематические изображения двух феноменологических сценариев возникновения дискретных гомоклинических аттракторов: случай аттрактора типа Лоренца – путь (a) → (b) → (c); случай восьмерочного аттрактора – путь (a) → (b) → (d).

кинетический момент относительно точки контакта, имеют следующий вид [18]:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{M}} = \mathbf{M} \times \boldsymbol{\omega} + m\dot{\mathbf{r}} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) + m\mathbf{g}\mathbf{r} \times \boldsymbol{\gamma}, \\ \dot{\boldsymbol{\gamma}} = \boldsymbol{\gamma} \times \boldsymbol{\omega}. \end{cases} \quad (11)$$

Здесь  $m$  – масса тела, а  $\mathbf{g}$  – ускорение свободного падения. В нашем случае, так как тело – шар, вектор  $\mathbf{r}$  связан с вектором  $\boldsymbol{\gamma}$  соотношением

$$\mathbf{r} = -R\boldsymbol{\gamma} - \mathbf{a}, \quad (12)$$

где  $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$  – вектор смещения центра масс шара. В свою очередь, вектор  $\mathbf{M}$  связан с  $\boldsymbol{\omega}$  и  $\mathbf{r}$  соотношением

$$\mathbf{M} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + m\mathbf{r} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), \quad (13)$$

Выразив вектора  $\mathbf{r}$ ,  $\dot{\mathbf{r}}$  и  $\boldsymbol{\omega}$  через  $\mathbf{M}$  и  $\boldsymbol{\gamma}$ , используя соотношения (13) и (12), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(\dot{\mathbf{M}}, \dot{\boldsymbol{\gamma}}) = F(\mathbf{M}, \boldsymbol{\gamma}, \mu),$$

зависящую от параметров  $\mu$ , характеризующих физические и динамические свойства волч-

ка Чаплыгина.

В общем случае система уравнений (11) обладает лишь двумя интегралами:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}(M, \omega) - mg(r, \gamma), \quad \mathcal{G} = (\gamma, \gamma)$$

– энергии и геометрическим. Причем из соображений нормировки константа геометрического интеграла определяется однозначно ( $\mathcal{G} = 1$ ). Таким образом, на уровне соответствующих интегралов движения, динамика волчка Чаплыгина задается четырехмерной системой дифференциальных уравнений. При выборе подходящей секущей исследование динамики волчка сводится к анализу соответствующего трехмерного отображения Пуанкаре.

### Сценарий возникновения восьмерочного аттрактора.

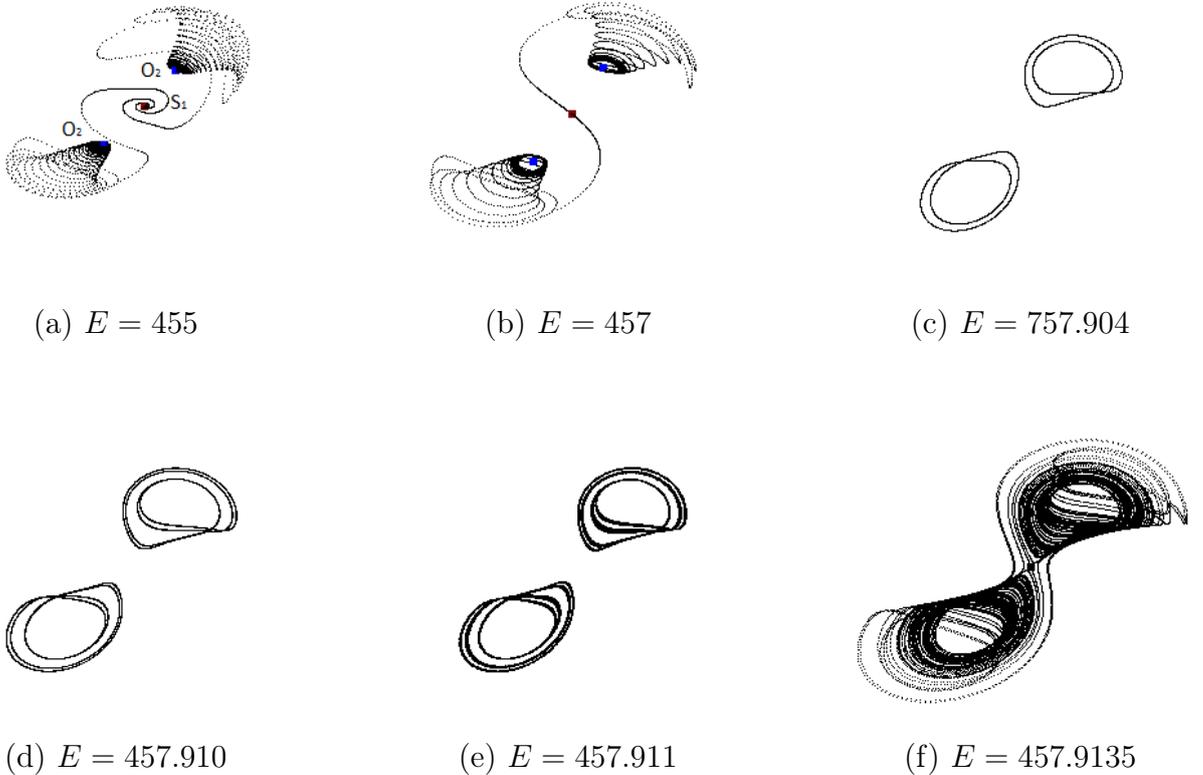


Рис. 6: Основные этапы возникновения восьмерочного аттрактора в неавтономной модели волчка Чаплыгина.

Согласно работе [17], первым этапом на пути к возникновению восьмерочного аттрактора является бифуркация удвоения периода устойчивой неподвижной точки (см. переход от (a) к (b) на рис. 5). Однако в рассматриваемом случае, сценарий рождения аттрактора, на начальном этапе, несколько отличается от [17]. Соответствующий сценарий дан в работе [2\*].

Зафиксируем параметры системы следующим образом

$$I_1 = 2, I_2 = 6, I_3 = 7, m = 1, g = 100, R = 3, a_1 = 1, a_2 = 1.5, a_3 = 1.9$$

и будем рассматривать параметр энергии  $E$  как бифуркационный. Результаты однопараметрического анализа приведены на рисунке 6. Поначалу, при  $417.5 \simeq E_1 < E < E_2 \simeq 455.60$ , аттрактором является точка  $(o_1, o_2)$  периода 2, которая рождается в результате седло-узловой бифуркации вместе с седловой точкой  $(s_1, s_2)$ . Важно отметить, что отображение Пуанкаре также имеет неподвижную седловую точку  $S_1$ , которая расположена между  $o_1$  и  $o_2$ , а ее двумерное неустойчивое многообразие наматывается на эти точки, см. рис. 6а. Точка  $S_1$  является седло-фокусом вплоть до  $E \simeq E_3 = 456.162$ . После чего ее неустойчивые комплексно сопряженные мультипликаторы становятся действительными отрицательными. В момент  $E \simeq E_4 = 456.30$ , в седло  $S_1$  влипают точка периода 2  $(s_1, s_2)$ , а само седло меняет тип с (1,2) на (2,1) (т.е. его неустойчивое многообразие становится одномерным). При этом  $S_1$  имеет мультипликаторы  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  и  $\lambda_3$ , такие что  $\lambda_1 < -1 < \lambda_3 < 0 < \lambda_2 < 1$ . При этом неустойчивое многообразие точки  $S_1$  начинает наматываться на инвариантную кривую  $L$  периода 2, см. рис. 6б, которая, в свою очередь, возникает в результате бифуркации Неймарка-Сакера из устойчивой точки периода 2  $(o_1, o_2)$  при  $E \simeq 455.60$ .

При дальнейшем увеличении параметра  $E$  инвариантная кривая  $L$  претерпевает серию бифуркаций удвоения периода (см. рис. 6с и 6д), а затем разрушается, на ее месте образуется хаотический аттрактор (рис. 6е). Вскоре после этого неустойчивое многообразие седла  $S_1$  начинает пересекаться с устойчивым многообразием, образуется восьмерочный аттрактор. На рисунке 6f представлен портрет обнаруженного аттрактора при  $E = 457.9135$ , полученный итерированием точки, запущенной из окрестности седла  $S_1$ .

#### **О псевдогиперболичности восьмерочного аттрактора.**

Далее приведем результаты проверки обнаруженного восьмерочного аттрактора на псевдогиперболичность. Мультипликаторы седловой неподвижной точки  $S_1$  для аттрактора, представленного на рис. 6f, принимают следующие значения:  $\lambda_1 = -1.00907$ ,  $\lambda_2 = 0.98885$ ,  $\lambda_3 = -0.99732$ . Таким образом, мультипликатор, отвечающий ведущему устойчивому направлению, положительный, т.е., гомоклиническая структура седловой точки  $S_1$  (см. поведение неустойчивых сепаратрис на рис. 7d) является ровно такой, как изображено на рис. 5d, а седловая величина  $\sigma = |\lambda_1 \lambda_3| > 1$  обеспечивает необходимое условие растяжения площадей в точке  $S_1$ .

Ляпуновские показатели случайно выбранной траектории аттрактора  $\Lambda_1 \simeq 0.00063$ ,  $\Lambda_2 \simeq 0$ ,  $\Lambda_3 \simeq -0.00492$ . Условие  $\Lambda_1 + \Lambda_2 > 0$  также свидетельствует о его возможной псевдогиперболичности.

Условие непрерывности подпространства сжатия направлений  $E^{ss}$  (условия (а) определения 1) проверены в работе [6\*]. Результаты соответствующей проверки приведены на рисунке 7а,б. Облако точек, на диаграмме непрерывности поля направлений  $E^{ss}$  касается линии  $\rho = 0$  только лишь в точке  $(0, 0)$ , что численно подтверждает псевдогиперболичность обнаруженного аттрактора.

Еще одна важная проблема при исследовании восьмерочного аттрактора связана с доказательством того факта, что обнаруженный аттрактор действительно является гомоклиническим, т.е. содержит седловую неподвижную точку  $S_1$ , вместе с ее неустойчивым многообразием и гомоклиническими траекториями. В работе [6\*] построено неустойчивое многообразие седловой точки  $S_1$ . Пара сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$ , образующих это многообразие, при близких значениях параметра  $E$ , приведена на рисунках 7с,д. В отличие от

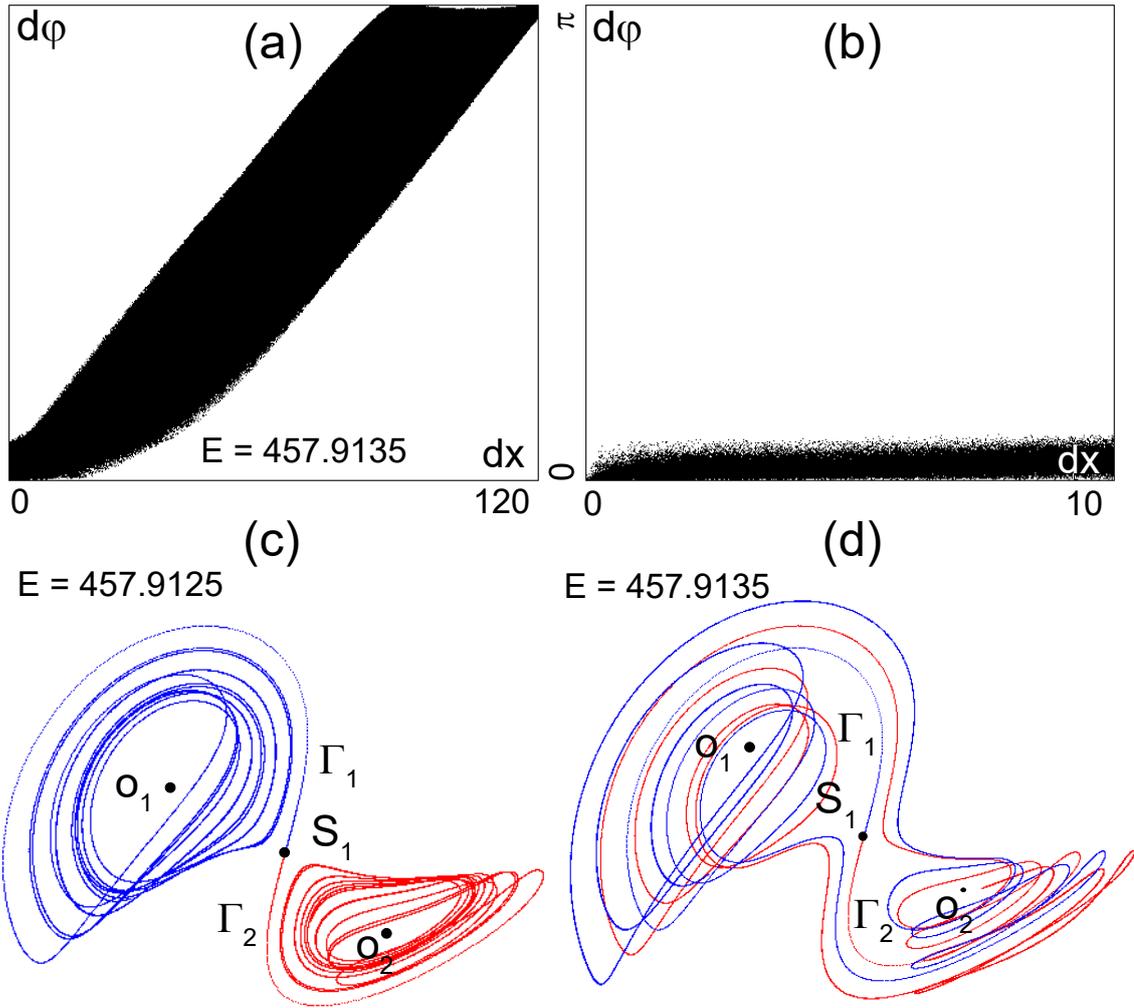


Рис. 7: (а)  $E = 457.9135$ , диаграмма непрерывности подпространства  $E^{ss}$  и (б) ее увеличенный фрагмент вблизи линии  $\rho = 0$ ; (с)  $E = 457.9125$  и (д)  $E = 457.9135$  поведение неустойчивых сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  седловой точки  $S_1$ : при изменении параметра  $E$  возникает гомоклиническая структура седловой неподвижной точки  $S_1$ .

дискретного аттрактора Лоренца, для рассматриваемого восьмерочного аттрактора не удастся обнаружить характерных осцилляций инвариантных многообразий в окрестности седловой неподвижной точки, являющихся наглядным подтверждением возникновения гомоклинических пересечений между этими многообразиями. Однако, существование таких пересечений может быть установлено косвенно. Так, при  $E = 457.9125$ , каждая из неустойчивых сепаратрис совершает обороты только лишь вокруг одной из компонент точки периода 2 ( $\Gamma_1$  вокруг  $o_1$ , а  $\Gamma_2$  вокруг  $o_2$ ), см. рис. 7с. При  $E = 457.9135$ , возникает перестройка неустойчивых сепаратрис: теперь каждая из сепаратрис совершает обходы как вокруг точки  $o_1$ , так и вокруг точки  $o_2$ , проходя через некую окрестность седловой точки  $S_1$ , см. рис. 7д, что свидетельствует о возникновении пересечений между неустойчивым и устойчивым многообразиями седловой точки  $S_1$  интервале  $E \in (457.9125, 457.9135)$ , т.е. исследуемый аттрактор является гомоклиническим.

#### Дискретный спиральный аттрактор Шильникова.

В работе [4\*] в неголономной модели волчка Чаплыгина обнаружен дискретный спиральный аттрактор Шильникова – третий тип дискретных гомоклинических аттракторов, теория которых была заложена в статье [17].

**Определение 6** *Дискретный спиральный аттрактор Шильникова – гомоклинический аттрактор, содержащий седло-фокусную неподвижную точку с двумерным неустойчивым многообразием.*

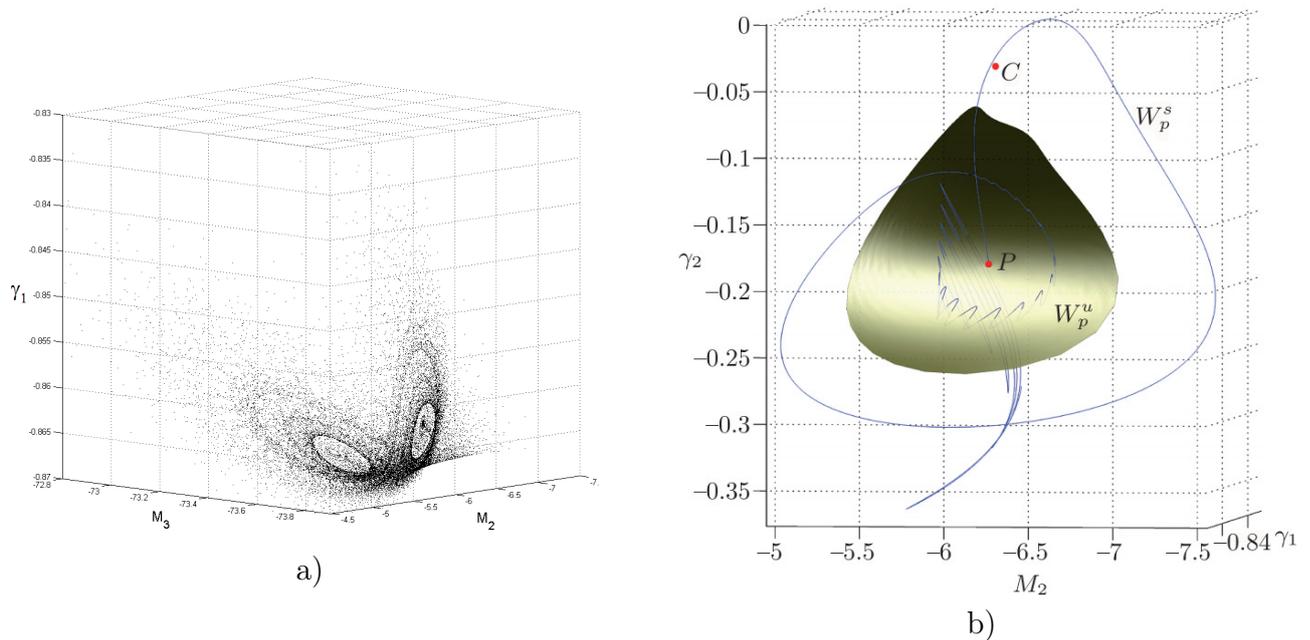


Рис. 8: (а) Портрет гомоклинического дискретного спирального аттрактора на отображении Пуанкаре, (б) его гомоклиническая структура.

Такой аттрактор в системе (11) обнаружен при следующих значениях параметров:

$$I_1 = 2, I_2 = 6, I_3 = 7, m = 1, g = 100, R = 3, a_1 = 1, a_2 = 1.5, a_3 = 0.655, E = 422.70068.$$

На рис. 8а приведен портрет соответствующего аттрактора на трехмерном отображении Пуанкаре секущей  $M_1 = 0$ . На рисунке 8b изображено поведение одной ветки (сепаратрицы) одномерного устойчивого многообразия  $W^s(P)$  а также неустойчивое многообразие  $W^u(P)$  в некоторой окрестности седло-фокусной точки  $P$ . Наличие пересечения между многообразиями подтверждает «гомоклиническую природу» обнаруженного аттрактора.

Спектр показателей Ляпунова для аттрактора:  $\Lambda_1 = 0.0218, \Lambda_2 = 0.0000, \Lambda_3 = -0.113$ . Оценка корреляционной размерности аттрактора в сечении Пуанкаре  $D_{cor} = 2.12 \pm 0.03$  достаточно хорошо совпадает с ляпуновской размерностью, оцененной по формуле Каплана-Йорке:  $D_{K-Y} = 2 + \Lambda_1/|\Lambda_3| \approx 2.19$ .

### Эффект реверса.

Еще одним нетривиальным явлением, наблюдаемым в системе (11) является эффект реверса, при котором волчок, закрученный определенным образом вокруг вертикальной оси, самопроизвольно меняет направление вращения вокруг этой оси на противоположное. Ранее такой эффект наблюдался у кельтского камня – твердого тела с округлой симметричной поверхностью, обладающего динамической асимметрией распределения масс. Эффект реверса кельтского камня удалось объяснить с помощью исследования его неголономной модели движения. В работе [1\*] такой же эффект обнаружен в неголономной модели волчка Чаплыгина.

Заметим, что уравнения (11) обратимы относительно инволюции

$$R_0 : M \rightarrow -M, \gamma \rightarrow \gamma, t \rightarrow -t, \quad (14)$$

отвечающей за обращение момента тела относительно точки контакта (а значит и угловых скоростей шара  $\omega$ ). Благодаря ей, для каждого асимптотически устойчивого динамического режима в системе существует симметричный ему аналог – неустойчивый режим, с противоположными по знаку угловыми скоростями.

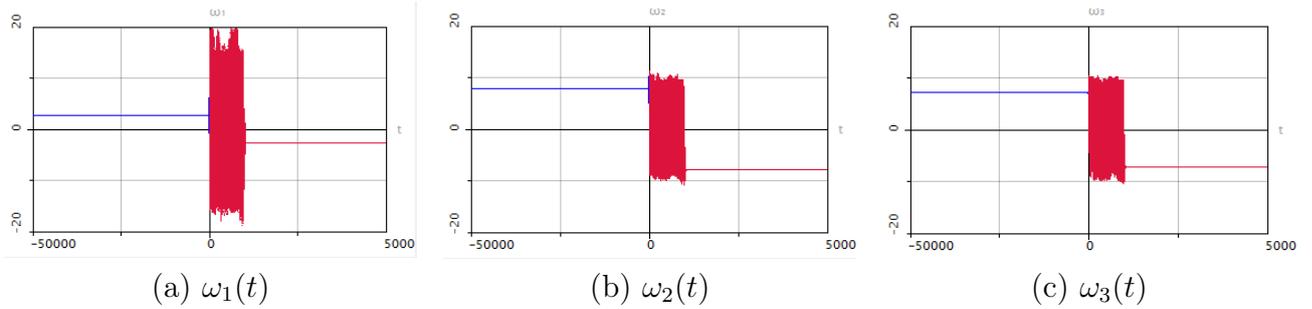


Рис. 9: Зависимость компонент угловой скорости от времени при следующих параметрах:  $I_1 = 2, I_2 = 6, I_3 = 7, m = 1, g = 100, R = 3, a_1 = 1, a_2 = 1.5, E_0 = 500, a_3 = 1$ .

Анализ состояний равновесия системы (11) показал, что при определенных параметрах в системе есть асимптотически устойчивое и неустойчивое состояния равновесия. Устойчивое равновесие отвечает вращению шара вокруг некой вертикальной оси с угловыми скоростями  $(\omega_1^*, \omega_2^*, \omega_3^*)$ , а неустойчивое равновесие отвечает вращению шара вокруг той же оси с угловыми скоростями  $(-\omega_1^*, -\omega_2^*, -\omega_3^*)$ . Таким образом, при задании начальных условий в окрестности неустойчивого состояния равновесия волчок Чаплыгина после некоторого (достаточно продолжительного) переходного процесса попадает в окрестность устойчивого равновесия и продолжает устойчиво вращаться вокруг той же оси в противоположном направлении. На рис. 9 изображена эволюция угловых скоростей волчка при соответствующем переходе.

### 2.1.6 Аттракторы Лоренца и Ровеллы в системе Любимова-Закса.

В работе [12\*] диссертантом численно установлено существование псевдогиперболического аттрактора Лоренца, а также аттрактора Ровеллы в модели Любимова-Закса. Также в этой работе предложен новый критерий рождения аттрактора Ровеллы.

Напомним, что аттрактор Лоренца, впервые обнаруженный в системе трех дифференциальных уравнений Э. Лоренцом [2], является первым примером «настоящего» хаотического аттрактора, не являющегося гиперболическим. Теория таких аттракторов разрабатывалась 70х-80х годах в работах Гукенхеймера-Вильямса [19, 20], Афраймовича-Быкова-Шильникова [3, 4] и др. Здесь мы будем пользоваться следующим определением аттрактора Лоренца.

**Определение 7 ([3, 4])** *Аттрактор Лоренца – аттрактор трехмерной системы дифференциальных уравнений, отображение Пуанкаре которого удовлетворяет условиям геометрической модели Афраймовича-Быкова-Шильникова.*

Важно отметить, что среди прочих определений аттрактора Лоренца, определение 7 является наиболее удобным, т.к. условия, предложенные Афраймовичем, Быковым и Шильниковым, являются эффективно проверяемыми. Именно с помощью проверки этих условий В. Такер доказал существование аттрактора Лоренца в классической системе Лоренца. Аналитическая проверка этих условий для конкретных систем дифференциальных уравнений как правило не представляется возможной. В своей работе [14] Такер проверил их с помощью методов доказательных вычислений (computer-assisted proof methods).

Кроме непосредственной проверки условий модели Афраймовича-Быкова-Шильникова, существование аттрактора Лоренца может быть установлено ковенно, с помощью проверки т.н. *критериев Шильникова* [21]. Эти критерии позволяют установить существование аттрактора Лоренца в открытой области значений параметров по некоторым характеристикам лишь одной траектории системы – гомоклинической петли седлового состояния равновесия. Таким образом, существование аттрактора Лоренца было установлено А. Шильниковым в известной системе Шимицу-Мориока [12, 13].<sup>1</sup>

В работе [12\*], с помощью проверки условий одного из критериев Шильникова, показано существование аттрактора Лоренца в системе

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) + \sigma D y (z - r) \\ \dot{y} = x(r - z) - y \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (15)$$

предложенной Любимовым и Заксом [23] в качестве обобщения классической модели Лоренца. Эта система описывает усредненную конвекцию в горизонтальном слое жидкости под действием высокочастотных колебаний. Здесь  $b, r, \sigma$  – классические лоренцевские параметры, а параметр  $D$  характеризует амплитуду колебаний.

Подробное описание этого критерия можно найти в книге [24]. Далее лишь кратко опишем основные моменты для трехмерного случая. Рассмотрим трехмерную систему дифференциальных уравнений, обладающую седловым состоянием равновесия  $O$ , собственные значения которого  $\gamma, \lambda_1, \lambda_2$ , такие что:

$$\gamma > 0 > \lambda_1 > \lambda_2.$$

Пусть эта система инвариантна относительно симметрии  $\mathbb{S}$ , такой что  $O$  – симметричное состояние равновесия ( $\mathbb{S} O = O$ ) и собственные вектора  $V_\gamma$  и  $V_{\lambda_1}$ , соответствующие собственным значениям  $\gamma$  и  $\lambda_1$ , инвариантны относительно  $\mathbb{S}$ :  $\mathbb{S} V_\gamma = -V_\gamma$  и  $\mathbb{S} V_{\lambda_1} = V_{\lambda_1}$ . Кроме того, будем считать, что рассматриваемая симметрия подразумевает также симметрию двух неустойчивых сепаратрис  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  касающихся собственного вектора  $V_\gamma$  в точке  $O$ , т.е.  $\mathbb{S} \Gamma_1 = \Gamma_2$  и  $\mathbb{S} \Gamma_2 = \Gamma_1$ . Далее предположим, что для системы выполняются следующие условия:

1. обе неустойчивые сепаратрисы  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  возвращаются в  $O$  при  $t \rightarrow +\infty$  вдоль вектора  $V_{\lambda_1}$ , т.е. возникает гомоклиническая бифуркация восьмерка бабочка к  $O$ ;
2. седловой индекс  $O$  равен единице, т.е.  $\nu = -\lambda_1/\gamma = 1$ ;

<sup>1</sup>Строгое доказательство, этого факта дано в работе [22].

3. сепаратрисная величина  $A$  удовлетворяет условию

$$0 < |A| < 2. \quad (16)$$

Согласно работе Л.П. Шильникова [21], бифуркации такой системы приводят к рождению аттрактора Лоренца.

Заметим, что в классе рассматриваемых  $\mathbb{S}$ -симметричных систем условия 1 и 2 соответствуют бифуркации коразмерности 2. Таким образом, если вложить такую систему в двухпараметрическое семейство систем  $F_{\mu,\nu}$ , для которого, меняя параметры  $\mu$  и  $\nu$ , отвечающие за расщепление гомоклинической бабочки и варьирование седлового индекса около 1, можно сформулировать критерий Шильникова более точно. Если условие (16) выполняется в точке  $S$  коразмерности-2 (когда в системе  $F_{\mu,\nu}$  возникает гомоклиническая бабочка нейтрального седла), то на плоскости параметров  $(\mu, \nu)$  существует открытая область с аттрактором Лоренца, удовлетворяющим условиям модели Афраймовича-Быкова-Шильникова и точка  $(\mu, \nu) = (0, 1)$  принадлежит ее границе.

В малой окрестности точки  $S$ , нормальная форма для исследования аттрактора Лоренца определяется одномерным отображением [24]

$$X_{n+1} = (-\mu + A|X_n|^\nu + o(|X_n|^\nu))\text{sign}(X_n). \quad (17)$$

Здесь  $\mu$  – параметр расщепления симметричной гомоклинической бабочки,  $\nu$  – седловой индекс равновесия, а  $A$  – сепаратрисная величина.

Для проверки условий критерия Шильникова необходимо показать, что выполняются все три приведенных выше условия. Первые два условия легко проверяются стандартными методами бифуркационного анализа (например, с помощью пакета программ MatCont). Для того чтобы оценить значение сепаратрисной величины в точке  $S$ , применялась следующая процедура.

На плоскости параметров берется пробная точка в хаотической области очень близко к точке  $S$ . Для этой точки вычисляется одномерное отображение  $X_{n+1} = f(X_n)$  по численно построенному двумерному отображению Пуанкаре. Далее, на основе одномерного отображения, определяется значение параметра  $\mu$ . Параметр  $\nu$  легко определяется как седловой индекс состояния равновесия  $O$  рассматриваемой системы (15). Последний параметр  $A$  подбирается с помощью метода наименьших квадратов таким образом, чтобы обеспечить наилучшее соответствие между численно полученным графиком  $f(X)$  и одномерным отображением (17).

Описанная процедура позволяет получить достаточно точную оценку значения сепаратрисной величины в точке  $S$ . В работе [12\*] показано, что в системе (15) сепаратрисная величина  $A$  приблизительно равна 1.19, то есть, согласно критерию Шильникова, к точке  $S$  примыкает область с аттрактором Лоренца.

### **Критерий рождения аттрактора Ровеллы.**

Результаты численного исследования показывают, что в системе (15) аттракторы лоренцевского типа существуют также в области, где седловое состояние равновесия имеет отрицательную седловую величину. Теория таких аттракторов была разработана в работе А. Ровеллы [25]., где было показано, что при выполнении некоторых условий такие

аттракторы могут существовать на нигде не плотных множествах, имеющих положительную меру Лебега.

До недавнего времени примеров конкретных систем, демонстрирующих аттракторы Ровеллы, известно не было. Более того, в работе [26] задача о нахождении примера системы с таким аттрактором была отмечена как одна из актуальных проблем нелинейной динамики. В работе [12\*] диссертантом показано, что аттракторы Ровеллы возникают в системе (15). Кроме того, предложен критерий возникновения таких аттракторов.

Результаты нашего анализа показывают, что если в точке  $S$  условие Шильникова на значение сепаратрисной величины  $0 < |A| < 2$  заменить на условие

$$|A| > 1, \quad (18)$$

а остальные условия из критерии Шильникова принять без изменений, тогда бифуркации такой системы будут приводить к рождению аттрактора Ровеллы. Точнее, верно следующее утверждение.

**Гипотеза 1** *Если условие (18) выполняется в точке коразмерности-2 (когда в системе  $F_{\mu,\nu}$  возникает гомоклиническая бабочка нейтрального седла), то на плоскости  $(\mu, \nu)$  существует нигде неплотное замкнутое множество, имеющее положительную меру Лебега, с аттрактором Ровеллы, и точка  $(\mu, \nu) = (0, 1)$  принадлежит его границе.*

**Замечание 2** *В случае  $|A| > 2$ , при дополнительных ограничениях на собственные значения седлового равновесия, это утверждение было доказано в работе [26].*

## 2.2 Смешанная динамика.

Вторая часть цикла статей, представленных в диссертационной работе, посвящена развитию теории и методов исследования смешанной динамики, а также ей приложениям.

В настоящее время можно выделить три независимых и различных формы динамического хаоса гладких конечномерных систем: «диссипативный хаос», «консервативный хаос» и «смешанная динамика». Диссипативный хаос характеризуется существованием у системы *странного аттрактора* – нетривиального притягивающего замкнутого инвариантного множества, лежащего в фазовом пространстве системы внутри некоторой поглощающей области, в которую входят все траектории, пересекающие границу этой области. В отличие от диссипативного, консервативный хаос «размазан» по всему фазовому пространству – в этом случае все точки являются неблуждающими. Если говорить в терминах аттракторов,  $\mathcal{A}$ , и репеллеров (аттракторов при обращении времени),  $\mathcal{R}$ , которые, по известной теореме Конли, существуют у любой системы с компактным фазовым пространством, то  $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} = \emptyset$  в случае диссипативного хаоса, и  $\mathcal{A} = \mathcal{R}$  в случае консервативного хаоса.

Смешанная динамика – это тот новый тип хаоса, который характеризуется тем, что устойчивые элементы динамики (например, устойчивые периодические траектории) сосуществуют с вполне неустойчивыми, и они неотделимы друг от друга. Для нее формально выполняются условия  $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$  и  $\mathcal{A} \neq \mathcal{R}$  [27, 28], которые являются дополнительными к соответствующим условиям для консервативного и диссипативного хаоса.

Как только появилась концепция смешанной динамики, сразу же в работах соискателя появились первые примеры динамических систем, в том числе из приложений, которые демонстрируют этот тип динамического хаоса. Так, смешанная динамика была обнаружена при исследовании задач неголономной механики в работах [29, 30, 3\*, 7\*, 9\*], в цепочках взаимодействующих осцилляторов Пиковского-Топажа [5\*], в модели вихревой динамики [8\*]. В первых двух случаях смешанная динамика была близкой к консервативной, и для доказательства ее существования нужно было прежде всего определить диссипативные элементы динамики, что само по себе было трудно задачей. В особенности это касалось модели движения неуравновешенного диска по плоскости (в которой диссипация проявлялась на чрезвычайно мелких масштабах), см. раздел 2.2.5. В случае модели взаимодействующих вихрей ситуация была совершенно другой: в работе [8\*] была открыта сильно диссипативная смешанная динамика. В этом случае численно полученные хаотические аттрактор и репеллер сильно отличаются друг от друга, хотя по теории [27, 28] они должны практически совпадать. Объяснение этому явлению дано в работе [8\*], см. раздел 2.2.4.

### 2.2.1 Три типа хаоса в неголономной модели волчка Сулова.

Модель волчка Сулова – тяжелого неуравновешенного тела с неподвижной точкой, подчиненного неголономной связи, запрещающей вращение тела вокруг некоторой выбранной оси – является одной из простейших неинтегрируемых моделей неголономной механики. В работе [3\*] диссертантом показано, что, в зависимости от выбора значений параметров, эта модель может демонстрировать все три типа динамического хаоса: консервативный (гамильтонов) хаос, диссипативный хаос (отделенные друг от друга странный аттрактор и странный репеллер) и смешанная динамика.

#### Уравнения движения и первые интегралы.

Выберем систему координат  $Oxyz$ , жестко связанную с телом, следующим образом. Начало координат  $O$  поместим в неподвижную точку тела, ось  $Oz$  зададим коллинеарной выбранному неподвижному в теле вектору  $\mathbf{e}$ , а оси  $Ox$  и  $Oz$  направим таким образом, чтобы занулить компоненты тензора инерции  $I_{12}$  и  $I_{21}$ . В таком случае неголономная связь  $(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{e}) = 0$ , запрещающая движение тела вокруг заданной оси  $\mathbf{e}$  принимает простой вид  $\omega_3 = 0$ . При этом система уравнений, определяющая угловую скорость  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, 0)$  и ориентацию волчка  $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ , где  $\gamma_1, \gamma_2$  и  $\gamma_3$  – проекции вертикального вектора  $\boldsymbol{\gamma}$  на оси  $Ox, Oy$  и  $Oz$ , определяется следующим образом [3\*]:

$$\begin{aligned} I_{11}\dot{\omega}_1 &= -\omega_2(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) - mgc_3\gamma_2 + mgc_2\gamma_3, \\ I_{22}\dot{\omega}_2 &= \omega_1(I_{13}\omega_1 + I_{23}\omega_2) - mgc_1\gamma_3 + mgc_3\gamma_1, \\ \dot{\gamma}_1 &= -\gamma_3\omega_2, \\ \dot{\gamma}_2 &= \gamma_3\omega_1, \\ \dot{\gamma}_3 &= \gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1. \end{aligned} \tag{19}$$

Здесь,  $I_{11}, I_{22}, I_{13}, I_{23}$  – ненулевые компоненты тензора инерции тела,  $m$  – масса волчка,  $g$  – ускорение свободного падения, а вектор  $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$  задает смещение центра масс волчка относительно центра сферы  $O$ .

Приведенная система уравнений обладает интегралом энергии и геометрическим ин-

тегралом:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}(I_{11}\omega_1^2 + I_{22}\omega_2^2) - mg(\mathbf{c}, \boldsymbol{\gamma}), \\ G &= (\boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\gamma}). \end{aligned} \quad (20)$$

Из соображений нормировки, значение геометрического интеграла всегда будет фиксированным  $G = 1$ , а значение интеграла энергии  $E = h$  будем рассматривать как еще один параметр системы. Уравнения (19) на уровне интегралов (20) задают трехмерный поток на некотором компактном трехмерном многообразии. Для параметризации этого потока, как и в работе [3\*], будем использовать переменные  $\gamma_2, \omega_1$  и  $\gamma_1$ , выражая  $\omega_2$  и  $\gamma_3$  через интегралы (20). Далее, выбрав  $\gamma_1 = const$  в качестве секущей, получим двумерное отображение Пуанкаре

$$(\bar{\gamma}_2, \bar{\omega}_1) = P(\gamma_2, \omega_1).$$

Далее, зафиксируем параметры

$$h = 101, m = 1, g = 10, I_{11} = 3, I_{22} = 4, I_{13} = 0, c_1 = 0, c_2 = 0, c_3 = 10$$

и будем варьировать параметр  $I_{23}$ .

#### Результаты численных исследований.

Согласно работе [31] при  $I_{23} = I_{13} = 0$  в системе (19) существует гладкая инвариантная мера, обеспечивающая выполнение условия  $\mathcal{A} = \mathcal{R}$ . Отображение Пуанкаре в этом случае приведено на рисунке 10а. Наблюдаемая хаотическая динамика в рассматриваемом случае является консервативной.

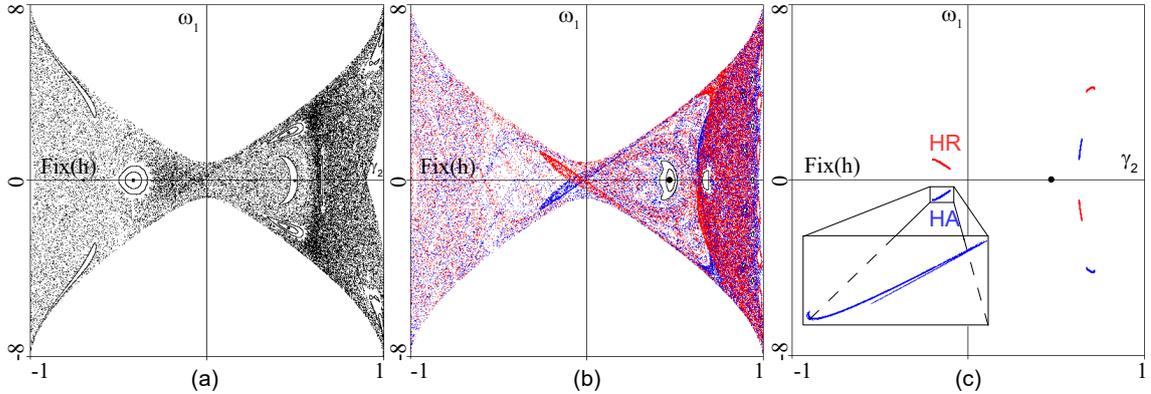


Рис. 10: Три типа хаоса в неголомонной модели волчка Суллова; (a)  $I_{23} = 0$  – консервативный хаос, (b)  $I_{23} = 0.9$  – смешанная динамика и (c)  $I_{23} = 0.908$  – отделенные друг от друга странный аттрактор и странный репеллер.

При  $I_{23} > 0$ , возникает асимметрия между аттрактором и репеллером, см. рис. 10b. В работе [3\*] было показано, что в этом случае внутри области с хаотической динамикой возникают бифуркации потери симметрии, в результате которых периодические эллиптические точки становятся седловыми, а в их окрестности рождаются пары устойчивых и неустойчивых точек такого же периода. В рассматриваемом случае выполняется условие  $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} \neq \emptyset$  и  $\mathcal{A} \neq \mathcal{R}$ , то есть наблюдается смешанная динамика.

На рисунке 10c приведен третий возможный случай, когда  $\mathcal{A} \cap \mathcal{R} = \emptyset$ . Здесь странный аттракторы системы НА явно отделен от странного репеллера RH. В этом случае странный аттрактор (репеллер) возникает в результате каскада бифуркаций удвоения периода, устойчивой (неустойчивой) точки периода 3.

Также в работе [3\*] было замечено, что смешанная динамика, характеризуется свойством сжатия усредненного объема вдоль типичных траекторий системы. Притом это сжатие намного слабее сжатия усредненных объемов в случае отделенных друг от друга странных аттрактора и репеллера. Это свойство легко проверяется с помощью стандартного вычисления показателей Ляпунова [32]. На основе этого предложен метод для выявления в пространстве параметров системы областей, отвечающих консервативному хаосу, диссипативному хаосу и смешанной динамике. Пусть  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_n$  – спектр показателей Ляпунова  $n$ -мерной системы. В зависимости от значений суммы показателей Ляпунова  $\Sigma = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \dots + \Lambda_n$ , описывающей усредненную вдоль траекторий дивергенцию, построена следующая классификация хаотических режимов:

- $\Lambda_1 > 0, \quad |\Sigma| \leq \varepsilon_1 \approx 0$  – консервативный хаос;
- $\Lambda_1 > 0, \quad \varepsilon_1 < |\Sigma| \leq \varepsilon_2$  – смешанная динамика;
- $\Lambda_1 > 0, \quad \varepsilon_2 < |\Sigma|$  – странный аттрактор.

Здесь  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – экспериментально определяемые пороговые значения. Для волчка Суслова  $\varepsilon_1 = 0.0001$  и  $\varepsilon_2 = 0.01$ . Соответствующая диаграмма показателей Ляпунова для системы (19) на плоскости параметров  $(I_{23}, E)$  приведена на рисунке 11.

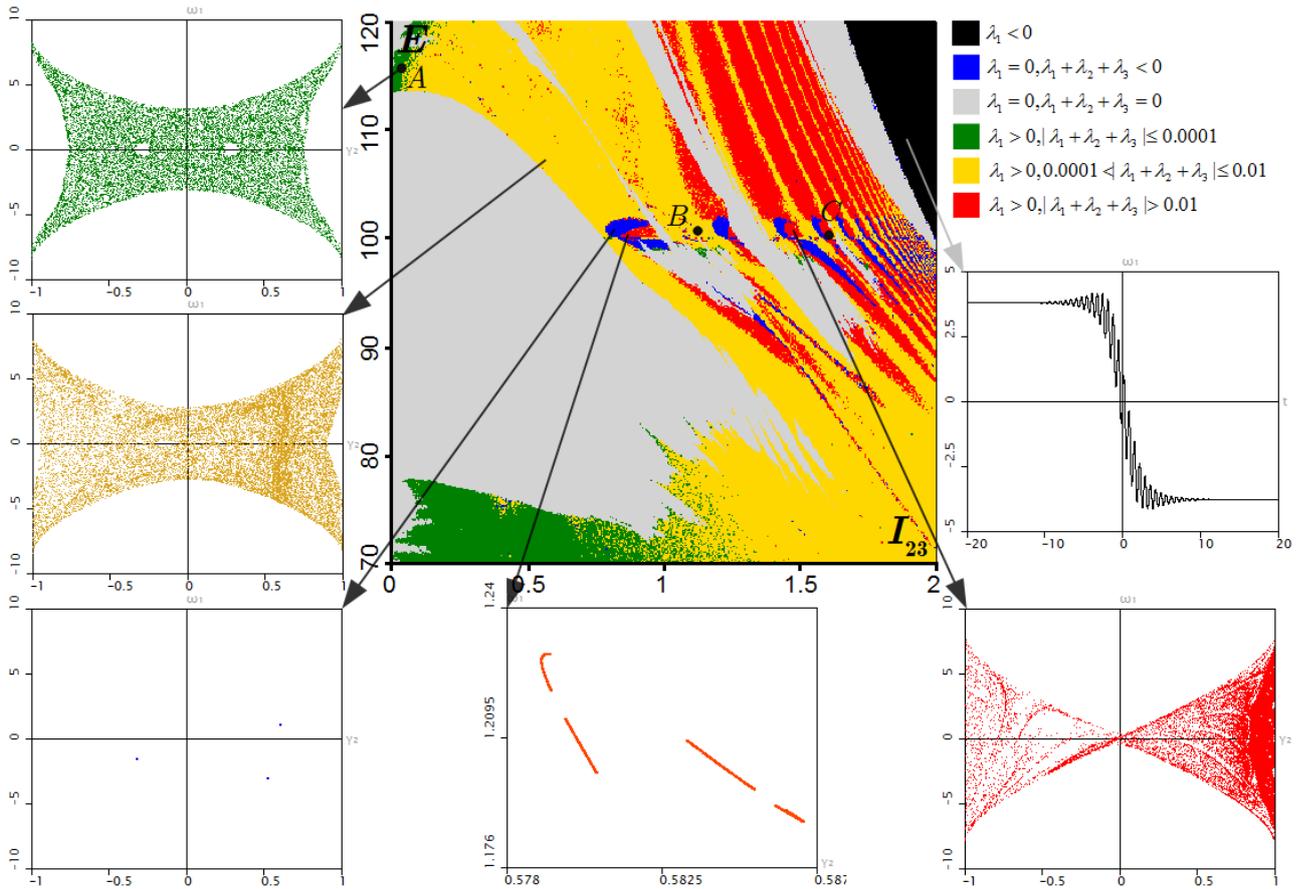


Рис. 11: Карта показателей Ляпунова и характерные фазовые портреты при различных параметрах  $I_{23}$  и  $E$ .

Важно отметить, что представленное разнообразие динамических режимов в модели (19) наблюдается при изменении одного параметра системы (например, параметра энергии

*E*). Такая особенность рассмотренной модели позволяет использовать ее для исследования бифуркационных сценариев перехода между этими режимами в однопараметрических семействах. Сценарии перехода от консервативного хаоса к смешанной динамике, а также от диссипативного хаоса к смешанной динамике исследованы в работе [7\*], см. раздел 2.2.3.

### 2.2.2 Смешанная динамика в модели Пиковского-Топажа.

В работе [5\*] установлено существование смешанной динамики в модели Пиковского-Топажа на основе численного выявления абсолютных областей Ньюхауса. Открыт новый механизм мгновенного возникновения смешанной динамики в результате столкновения простых аттрактора и репеллера.

Система Пиковского-Топажа, описывающая динамику цепочки связанных осцилляторов, является первым примером модели, в которой авторы обратили внимание на возможность «перекрытия» хаотического аттрактора и хаотического репеллера в численном эксперименте [33]. Однако текущее состояние дел в теории динамических систем на тот момент не позволяло объяснить это явление. Доказательство того факта, что обнаруженное явления объясняется возникновением в системе смешанной динамики дано нами недавно в работе [5\*].

В самой работе [33] рассматривалась система:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_1 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_2 + \varepsilon \sin \psi_1 + \varepsilon \sin \psi_3 \\ \dot{\psi}_3 &= 1 - 2\varepsilon \sin \psi_3 + \varepsilon \sin \psi_2.\end{aligned}\tag{21}$$

Здесь  $\psi_i \in [0, 2\pi)$ ,  $i = 1, 2, 3$ , – угловые переменные, а  $\varepsilon$  параметр, отвечающий за силу связи между элементами. Такой выбор связи в системе делает ее обратимой относительно замены времени  $t \rightarrow -t$  и инволюции  $R$ :

$$\psi_1 \rightarrow \pi - \psi_3, \quad \psi_2 \rightarrow \pi - \psi_2, \quad \psi_3 \rightarrow \pi - \psi_1.\tag{22}$$

Для проведения аналитических и численных исследований систему (21) с помощью замены координат

$$\xi = \frac{\psi_1 - \psi_3}{2}, \quad \eta = \frac{\psi_1 + \psi_3 - \pi}{2}, \quad \rho = \frac{\psi_1 + \psi_3 - \pi}{2} + \psi_2 - \pi,$$

и времени  $dt_{new} = (2 + \varepsilon \cos(\rho - \eta))dt$  удобно переписать в виде неавтономной, периодической по времени (с периодом  $2\pi$ ) системы двух уравнений

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \frac{2\varepsilon \sin \xi \sin \eta}{2 + \varepsilon \cos(t - \eta)}, \\ \dot{\eta} &= \frac{1 - \varepsilon \cos(t - \eta) - 2\varepsilon \cos \xi \cos \eta}{2 + \varepsilon \cos(t - \eta)}.\end{aligned}\tag{23}$$

Заметим, что система (23) обратима относительно замены координат

$$R: \quad \xi \rightarrow \xi, \quad \eta \rightarrow -\eta\tag{24}$$

и обращения времени  $t \rightarrow -t$ . При дальнейших численных исследованиях мы строили отображение Пуанкаре  $T_\varepsilon$  двумерного тора  $\tau = (\xi, \eta) : 0 \leq \xi < 2\pi, 0 \leq \eta < 2\pi$  за период  $t = 2\pi$ , которое является диффеоморфизмом при  $\varepsilon < 2$ .

При достаточно малых  $\varepsilon$ , динамика  $T_\varepsilon$  неотличима от консервативной, см. рис. 12а,б. В частности, на секущей Пуанкаре четко наблюдаются эллиптические острова, см.рис. 12б. Кроме того, усредненная по времени дивергенция векторного поля очень близка к нулю. Однако, с увеличением  $\varepsilon$ , очевидная консервативность разрушается, средняя дивергенция становится отличной от нуля, аттрактор системы больше не совпадает с репеллером, см. рис. 13.

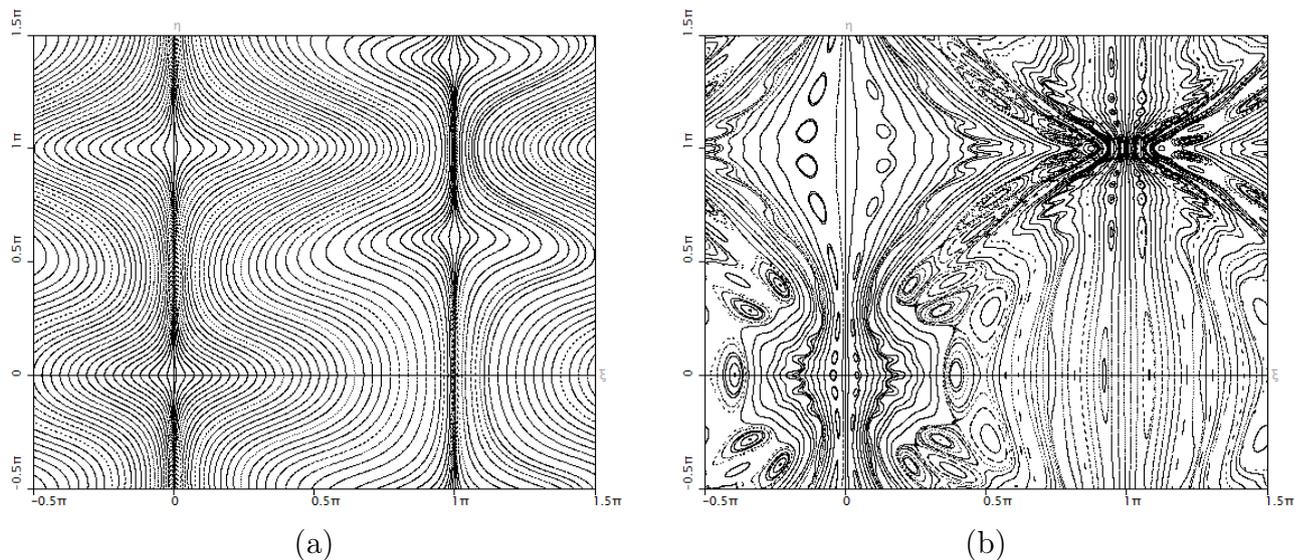


Рис. 12: Фазовые портреты на секущей Пуанкаре системы (21) при (a)  $\varepsilon = 0.1$ , и (b)  $\varepsilon = 0.35$ . Динамика консервативная.

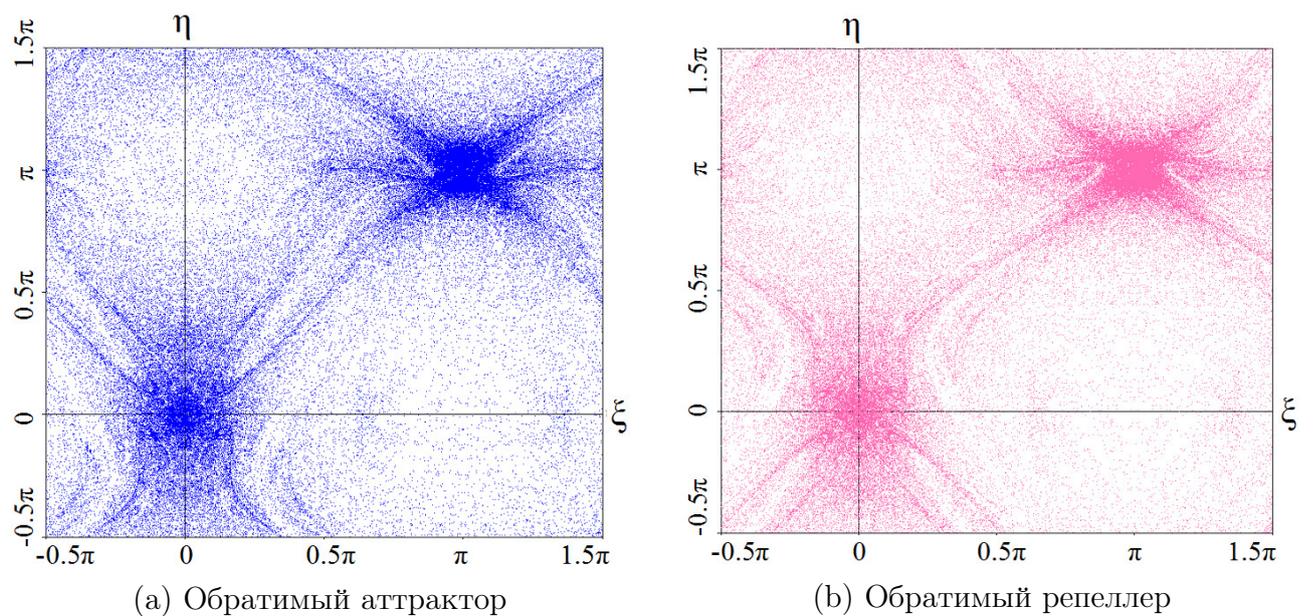


Рис. 13: Отображение Пуанкаре для аттрактора (a) и репеллера (b) в системе при  $\varepsilon = 0.49$ . Средняя дивергенция на аттракторе  $\overline{\text{div}} \approx -0.00122$ , на репеллере  $-\overline{\text{div}} \approx 0.00122$ . Хаотический аттрактор пересекается с хаотическим репеллером, но не совпадает с ним.

Для доказательства возникновения смешанной динамики при  $\varepsilon > 0$  здесь не ставится

задача непосредственного обнаружения асимптотически устойчивых и неустойчивых периодических траекторий внутри «хаотического моря», как это было сделано, например, в работах [29, 9\*]. Вместо этого существование таких траекторий установлено косвенно, на основе численного выявления абсолютных областей Ньюхауса. В работе [5\*] были обнаружены различные примеры нетрансверсальных гетероклинических контуров (см. рис. 14 и 15), соединяющих пары седловых точек малых периодов (до периода 7) с якобианами больше и меньше единицы, соответственно. Согласно теории [34], [35], бифуркации таких контуров приводят к рождению бесконечного множества сосуществующих периодических аттракторов и репеллеров, имеющих в замыкании непустое пересечение.

Для поиска гетероклинических контуров проведен анализ локальных бифуркаций симметричных периодических точек. Показано, что отображение Пуанкаре  $T_\varepsilon$  в этой модели является квадратом меняющего ориентацию диффеоморфизма  $T_*$ , в котором симметричные периодические точки  $T_*$  с мультипликаторами  $(-1, +1)$  возникают в однопараметрических семействах. Такие бифуркации могут быть описаны с помощью той же нормальной формы, что и бифуркации периодических точек с мультипликаторами  $(+1, +1)$  с дополнительной симметрией. Есть четыре различных случая нормальных форм такой бифуркации [36]. Два таких случая мы обнаружили в модели Пиковского-Топажа (21).

В первом случае, в результате локальной бифуркации, рождается одна симметричная эллиптическая периодическая траектория и пары седловых, одна из которых растягивающая, а другая – сжимающая. Эти седла рождаются вместе с гетероклиническими контурами с нетрансверсальными пересечениями, необходимыми для доказательства смешанной динамики (см. рис. 14).

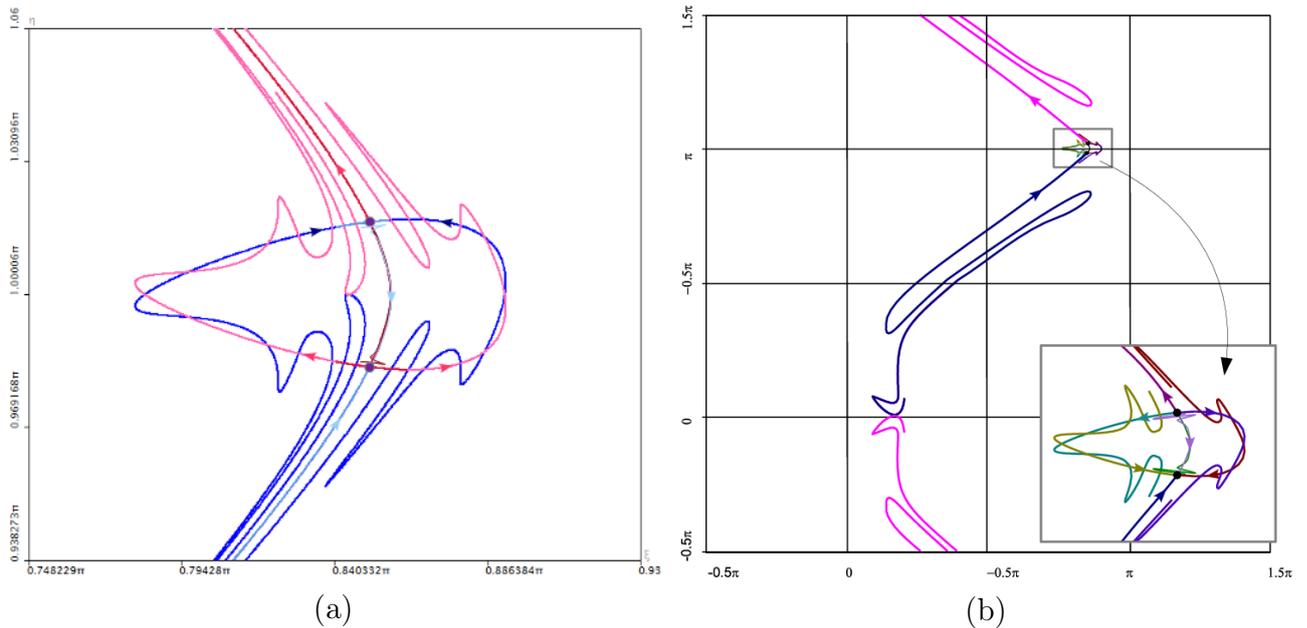


Рис. 14: (а) «Малый» гетероклинический контур при  $\varepsilon \approx 0.46207$ . (б) «Большой» гетероклинический контур при  $\varepsilon \approx 0.463$ .

Во втором случае, в результате такой бифуркации рождаются: одна симметричная седловая неподвижная точка, один сток (устойчивая неподвижная точка – простой аттрактор) и один источник (вполне неустойчивая неподвижная точка – простой репеллер). Такая бифуркация происходит в системе при  $\varepsilon = \varepsilon_1^* \approx 0.6042$ . Из-за наличия дополнитель-

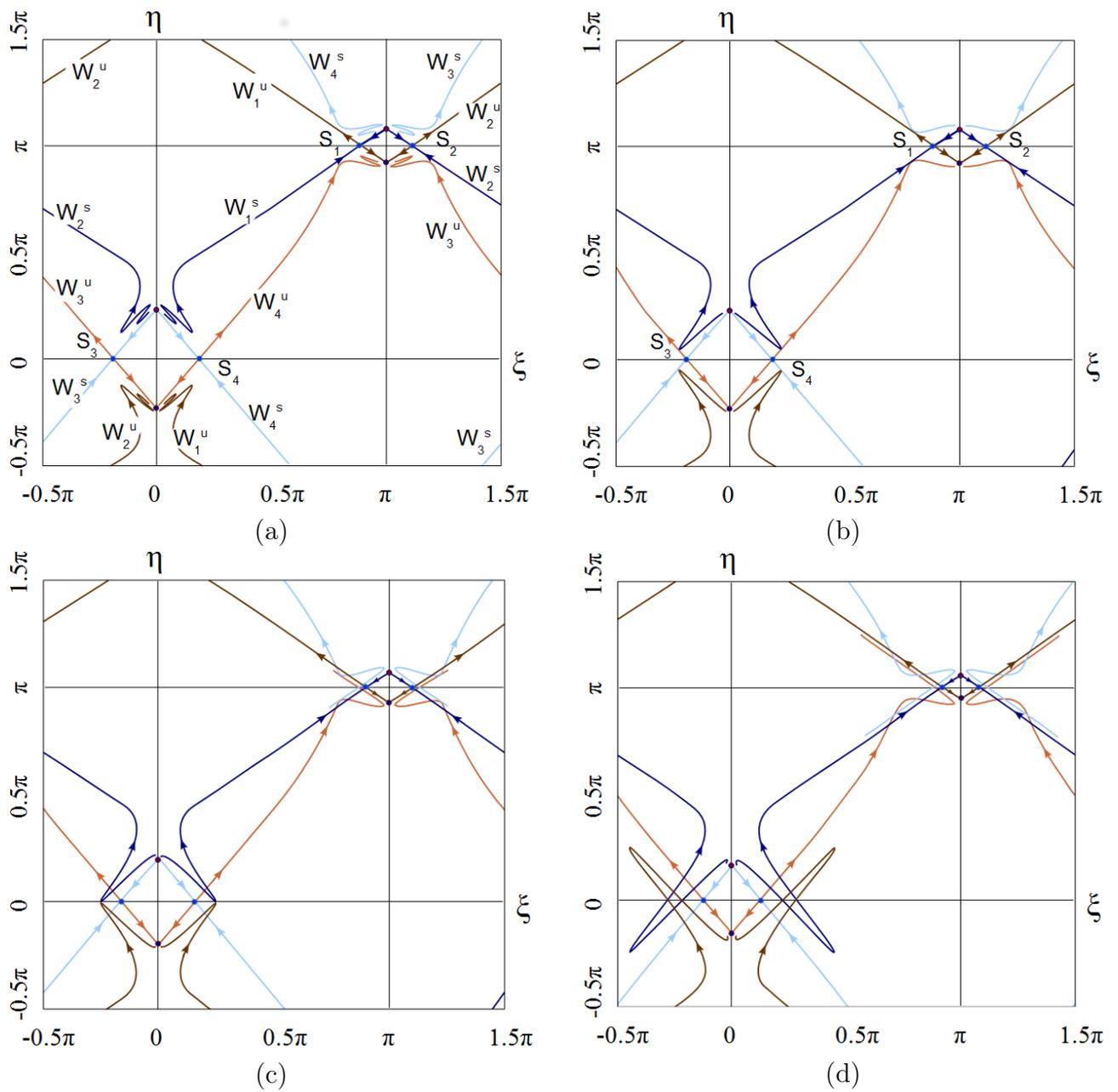


Рис. 15: Устойчивые и неустойчивые многообразия седловой неподвижной точки: (a)  $\varepsilon = 0.7$ , эти многообразия не пересекаются; (b)  $\varepsilon = \varepsilon_1^{het} \approx 0.690$ , многообразия формируют гетероклинические пересечения, динамики вблизи них становится хаотической; (c)  $\varepsilon = \varepsilon_2^{het} \approx 0.679$ , возникают симметричные гетероклинические пересечения; (d)  $\varepsilon = 0.650$ , развитие гомоклинических и гетероклинических переплетений при  $\varepsilon < \varepsilon_2^{het}$ .

ной симметрии в системе одновременно бифурцируют две негрубые неподвижные точки. Таким образом, при  $\varepsilon > \varepsilon_1^*$ , на отображении Пуанкаре существует сразу восемь неподвижных точек: 2 аттрактора, 2 репеллера и 4 консервативных седла см. рис. 15. Большинство траекторий стремятся к устойчивой неподвижной точке. Однако, при  $\varepsilon < \varepsilon_1^{het} \approx 0.690$ , существуют гетероклинические пересечения инвариантных многообразий седловых неподвижных точек, см. рис. 15d (моменты возникновения гетероклинических и симметричных гетероклинических касаний изображены на рис. 15b,c). Следовательно, устойчивые неподвижные точки сосуществуют с хаотическим множеством. Более того, при таких  $\varepsilon$  могут существовать и гомоклинические касания. Несмотря на то, что седла здесь являются

консервативными ( $J = 1$ ), консервативность отображения Пуанкаре может нарушаться вблизи касательных траекторий и, согласно [37], обратимая смешанная динамика может существовать даже на некотором интервале  $\varepsilon > \varepsilon_1^*$ , хотя это может быть трудно обнаружить численно.

При  $\varepsilon < \varepsilon_1^*$  все неподвижные точки исчезают, и мы сразу видим большой хаотический аттрактор и репеллер, см. рис. 13. Это явление связано с существованием гомоклинических пересечений сепаратрис неподвижной точки в момент бифуркации. Стоит отметить, что полученные численно аттрактор и репеллер явно пересекаются, это означает, что мы имеем большую область в фазовом пространстве, соответствующую смешанной динамике.

### 2.2.3 О столкновении хаотических аттрактора и репеллера, приводящем к возникновению смешанной динамики.

При малых изменениях значений параметров в обратимых системах может наблюдаться скачкообразный переход от диссипативного хаоса к смешанной динамике (например, при переходе от рис. 10с к рис. 10b). В работе [7\*] предложено объяснение этого явления, а также описан сценарий перехода от консервативной динамики к смешанной через возникновение, а затем столкновение хаотического аттрактора с хаотическим репеллером.

#### Описание сценария.

Рассмотрим однопараметрическое семейство двумерных обратимых отображений

$$\bar{x} = f(x, \varepsilon),$$

заданных на компактном многообразии и зависящих от параметра  $\varepsilon$ . Предположим, что для всех  $\varepsilon$  эти отображения обратимы относительно одной и той же инволюции  $h$  (т.е.  $f = h \circ f^{-1} \circ h$ , где  $h \circ h = id$ ), для которой множество  $Fix(h)$  ее неподвижных точек (для которых  $h(x) = x$ ) является одномерным.

Пусть  $O$  – неподвижная точка, принадлежащая линии  $Fix(h)$ . Предположим, что эта точка является эллиптической при  $\varepsilon < \varepsilon_0$ , а при  $\varepsilon = \varepsilon_0$  она претерпевает обратимую бифуркацию «вилка» [36], после которой точка  $O$  становится седловой, и симметричная пара асимптотически устойчивой,  $S^a$ , и вполне неустойчивой,  $S^r$ , неподвижных точек (одна точка симметрична другой относительно  $h$ ) рождается рядом с  $O$  (см. рис. 16, при  $\varepsilon = \varepsilon_0$ ). Далее предположим, что при дальнейшем увеличении параметра, при  $\varepsilon = \varepsilon_F$ , в результате каскада бифуркаций удвоения периода с точкой  $S^a$ , рождается странный аттрактор  $AF$ . По обратимости, в тот же момент, из  $S^r$  рождается странный репеллер  $RF$ . Заметим, что после первой бифуркации удвоения периода точки  $S^a$  и  $S^r$  становятся седловыми.

Напомним, что сразу после перехода к хаотической динамике через каскад бифуркаций удвоения периода странный аттрактор состоит из непересекающихся компонент. При дальнейшем увеличении  $\varepsilon$  эти компоненты попарно сливаются (из-за возникновения гетероклинических пересечений между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями седловых периодических точек, принадлежащих разным компонентам). Наконец, две последние компоненты, разделенные устойчивым многообразием точки  $S^a$ , объединяются и появляется гомоклинический аттрактор типа Эно  $AH$  (см. рис. 16а при  $\varepsilon = \varepsilon_H$  и

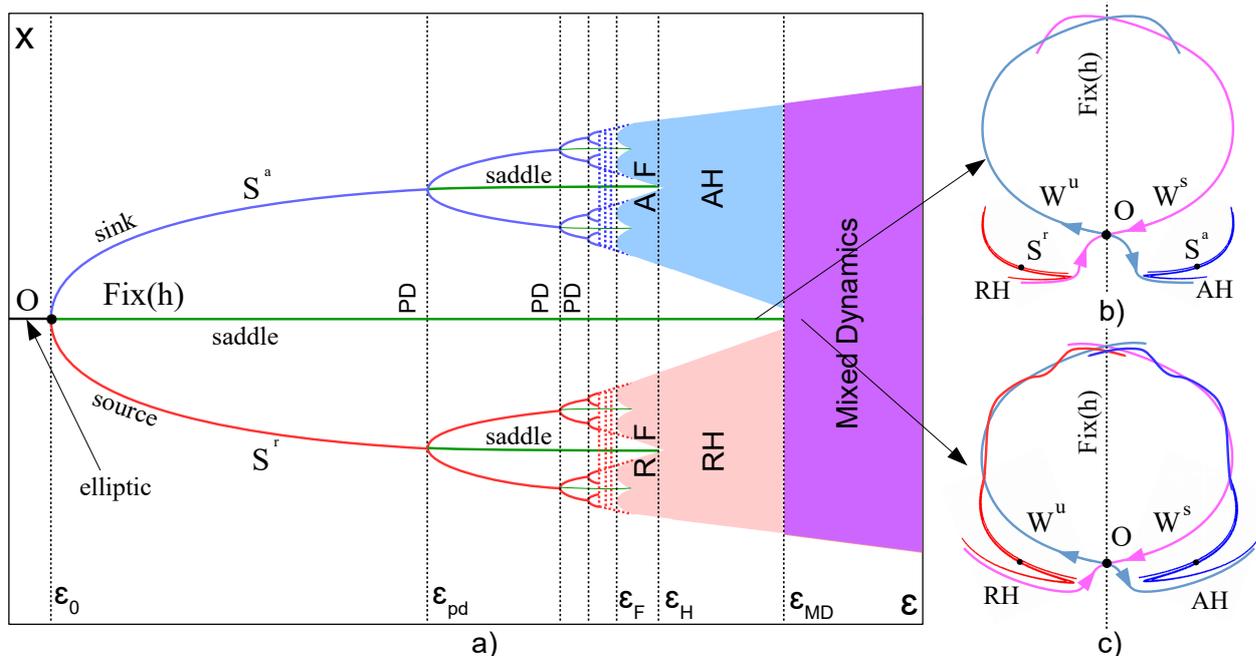


Рис. 16: Сценарий столкновения аттрактора типа Эно с репеллером типа Эно, приводящий к появлению смешанной динамики в обратимых двумерных отображениях

рис. 16b). По обратимости в этот момент также рождается гомоклинический репеллер типа Эно  $RH$ , содержащий неподвижную точку  $S^r$ .

При дальнейшем увеличении параметра  $\varepsilon$  аттрактор типа Эно  $AH$  увеличивается и приближается к границе своей области притяжения, образованной устойчивым многообразием  $W^s$  седловой неподвижной точки  $O$  (соответственно, бассейн для  $RH$  ограничен неустойчивым многообразием  $W^u$  той же точки  $O$ ). Также отметим, одна пара сепаратрис точки  $O$  уже пересекается, а другая пара – нет, см. рис. 16b.

При  $\varepsilon = \varepsilon_{MD}$  наступает кризис аттрактора  $AH$  и репеллера  $RH$  ( $AH$  сталкивается с границей своей поглощающей области  $W^s$ , а  $RH$  симметрично сталкивается с границей своей области отталкивания  $W^u$ ), после чего оба этих множества входят в одну и ту же гомоклиническую структуру, аттрактор сливается с репеллером, возникает смешанная динамика, см. рис. 16c.

#### Реализация сценария на примере неголономной модели волчка Сулова.

В работе [7\*] показано, что описанный выше сценарий реализуется в неголономной модели волчка Сулова (19). Зафиксируем параметры в этой модели, как было описано в разделе 2.2.1 и проведем однопараметрический анализ, увеличивая параметр  $I_{23}$ .

При  $I_{23} = 0.692$  в системе возникает симметричная эллиптическая точка периода 3, см. рис. 17a. Далее, при  $I_{23} = 0.7835$ , эта эллиптическая точка претерпевает бифуркацию обратимая вилка, в результате которой точка становится седловой ( $S_o$ ), а в ее окрестности рождается асимптотически устойчивая и вполне неустойчивая точки периода 3, см. рис. 17b. При дальнейшем увеличении параметра  $I_{23}$  из устойчивой периодической точки рождается аттрактор типа Эно, а из вполне неустойчивой – репеллер типа Эно, см. рис. 17c.

Важно отметить, что на рассматриваемом диапазоне параметров исследуемая систе-

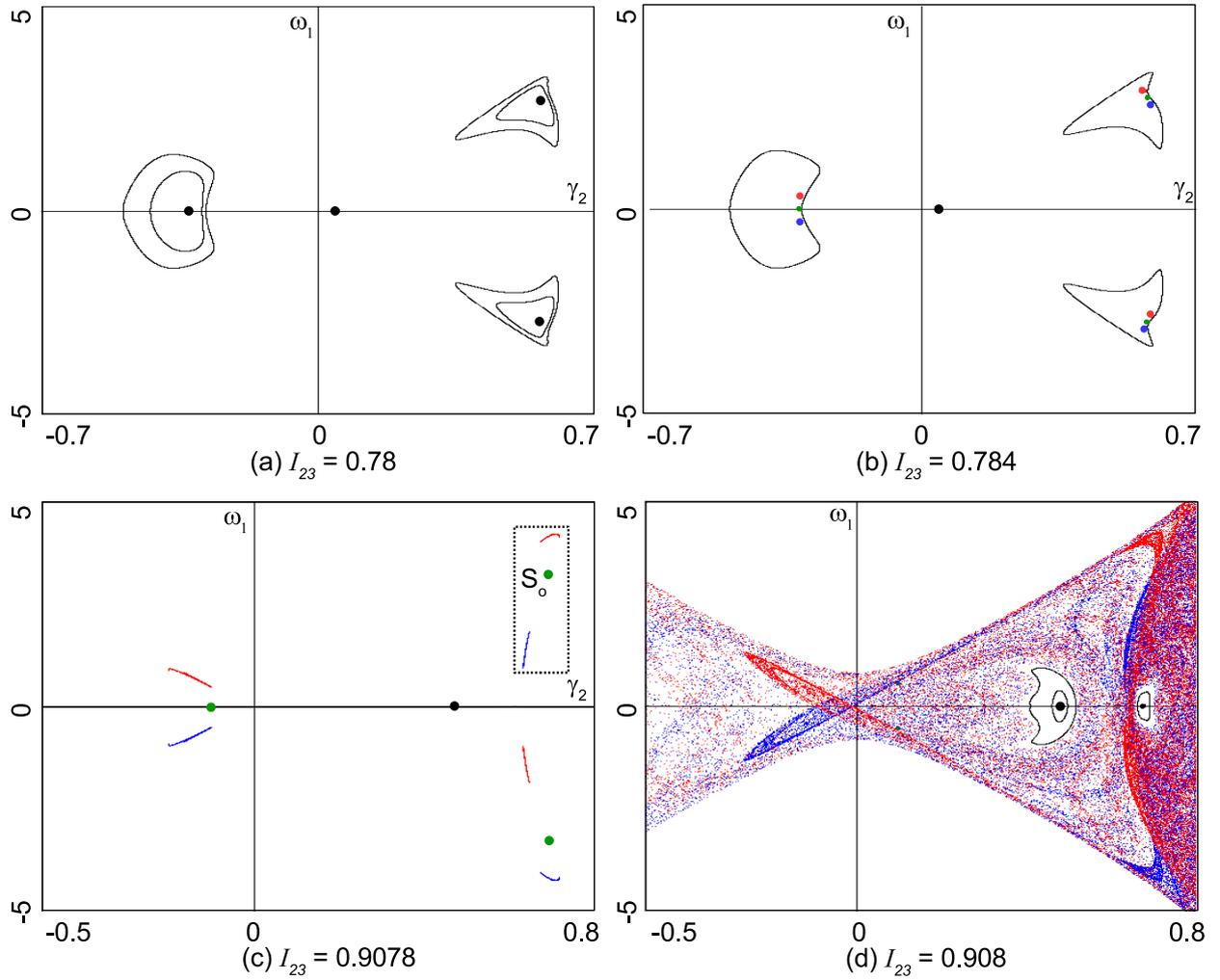


Рис. 17: Сценарий возникновения смешанной динамики в неголомной модели Сулова (19).

ма является моностабильной, то есть аттрактор типа Эно является глобальным аттрактором в системе, а репеллер типа Эно – глобальным репеллером. Далее, при  $I_{23} = 0.9079$ , в соответствии вышеописанным сценарием, аттрактор Эно и репеллер Эно сталкиваются. Возникший после этого в системе аттрактор пересекается с репеллером, возникает смешанная динамика, изображенная на рис. 17d.

Опишем подробнее гомоклинические бифуркации, приводящие к возникновению смешанной динамики в рассматриваемой системе. На рисунке 18 изображено расположение устойчивой  $W_o^s$  и неустойчивой  $W_o^u$  сепаратрис симметричной седловой точки  $S_o$ , возникающей после бифуркации разрушения симметрии, а также неустойчивая сепаратриса  $W_a^u$ , образующая аттрактор Эно и устойчивая сепаратриса  $W_r^s$ , образующая репеллер Эно. При  $I_{23} < 0.9079$  устойчивая сепаратриса  $W_o^s$  ограничивает область притяжения аттрактора Эно, а  $W_o^u$  ограничивает область «отталкивания» репеллера, см. рис. 18a. При  $I_{23} > 0.9079$  неустойчивое многообразие  $W_a^u$ , образующее аттрактор, пересекается с  $W_o^s$ , тогда как  $W_r^s$ , образующее репеллер, пересекается с  $W_o^u$ . При этом, так как вторая пара сепаратрис седловой точки  $S_0$  уже пересекается трансверсально (для удобства не приведено на рисунке), мгновенно возникает пересечение между сепаратрисами  $W_a^u$  и  $W_r^s$ , см. рис. 18b. Таким образом, аттрактор системы, возникающий после разрушения аттрактора Эно, пересекается

с репеллером, образуется смешанная динамика, приведенная на рисунке 17d.

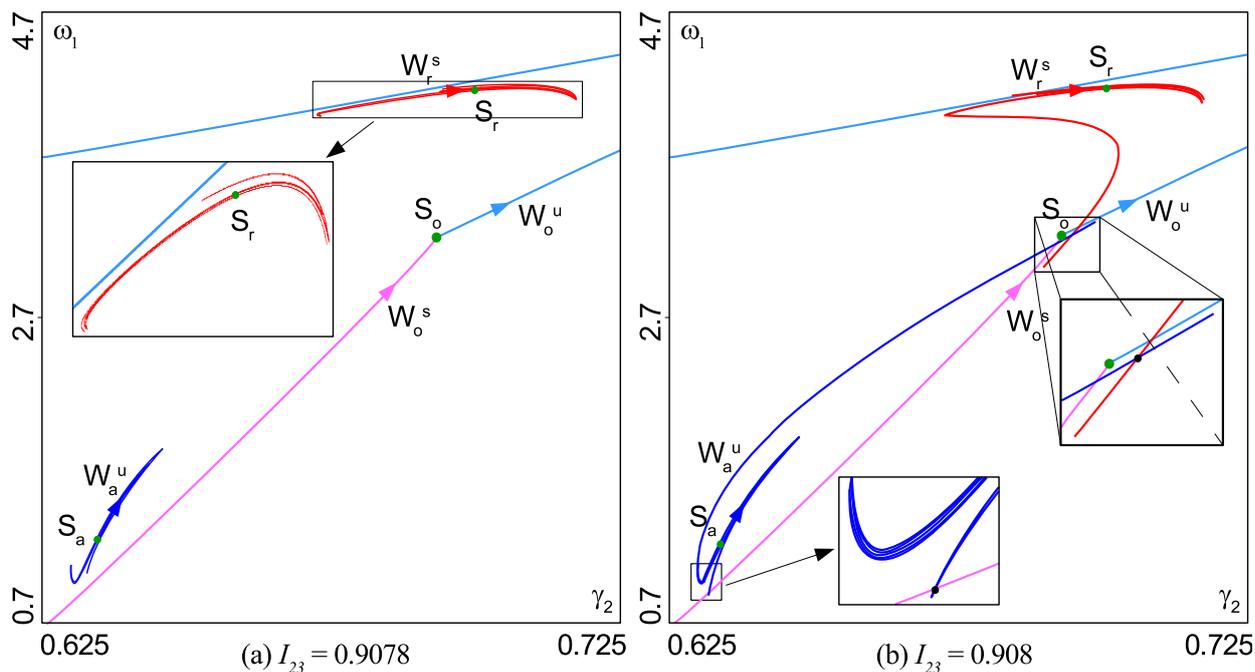


Рис. 18: Гомоклинические бифуркации, приводящие к возникновению смешанной динамики: (a)  $I_{23} = 0.9078$ , (b)  $I_{23} = 0.9080$ .

#### 2.2.4 Сильно-диссипативная смешанная динамика.

В неголономной модели волчка Суслова, как и во многих известных обратимых моделях со смешанной динамикой, разница между численно полученными хаотическим аттрактором и хаотическим репеллером уменьшается с увеличением времени счета. Этот результат хорошо согласуется с теоремой 2 из работы [28], в которой показано, что если цепно-транзитивные аттрактор и репеллер пересекаются, то они должны совпадать. В нашем случае аттрактор (репеллер) являются квазиаттрактором (квазирепеллером) по Афраймовичу-Шильникову. В этом случае, например, аттрактор содержит большое цепно-транзитивное неравномерно гиперболическое множество с очень маленькими дырками, внутри которых лежат устойчивые траектории больших периодов, как правило неуловимые в численных экспериментах.<sup>2</sup>

В работе [8\*], на примере системы, описывающей движение двух точечных вихрей, возмущенных акустической волной, представлен новый, явно неконсервативный, тип смешанной динамики, когда странный аттрактор и странный репеллер имеют непустое пересечение, но очень сильно отличаются друг от друга, и эта разница не исчезает при разумном увеличении времени вычислений, что, казалось бы, противоречит упомянутой выше теореме из работы [28], см. рис. рис. 19b. Как и в неголономной модели волчка Суслова, такой тип смешанной динамики возникает в результате столкновения аттрактора типа Эно с репеллером типа Эно, см. рис. 19a.

<sup>2</sup>Например, в работе [38], показано, что аттрактор Эно может содержать «дырку» диаметром  $10^{-51}$ , в которой лежит устойчивая траектория периода 115. При стандартном численном счете (использующем числа двойной точности) такие эффекты, естественно, не наблюдаются.

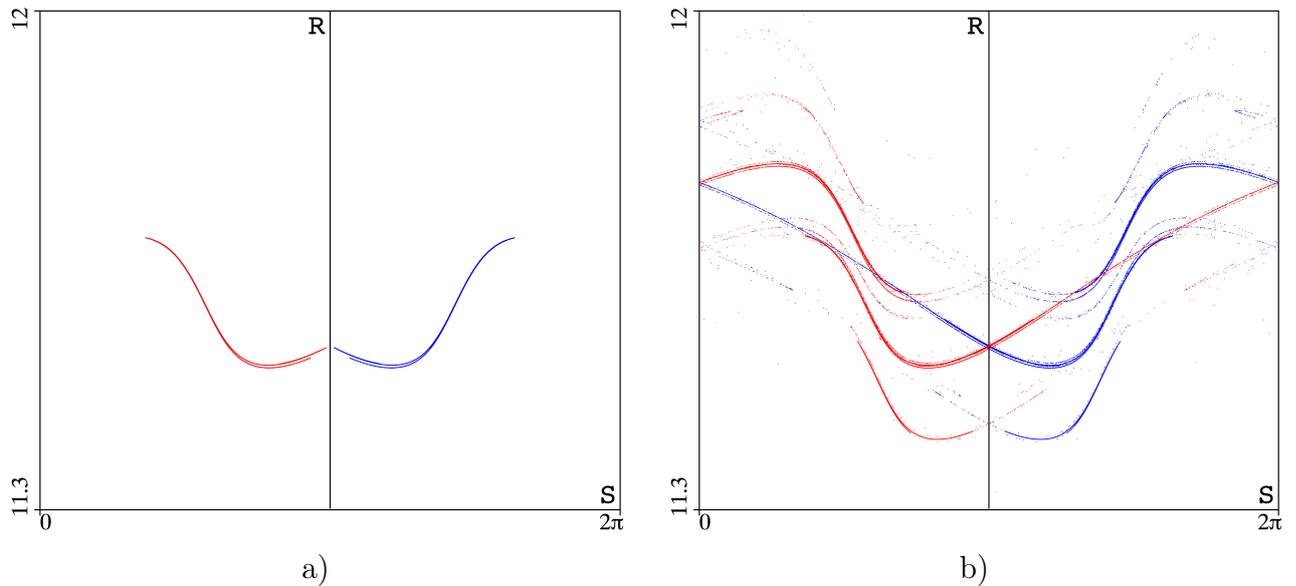


Рис. 19: Фазовые портреты аттрактора (синий) и репеллера (красный) на секущей Пуанкаре для модели двух точечных вихрей, возмущенных акустической волной. (а) Аттрактор типа Эно отделен от репеллера типа Эно. (б) Смешанная динамика после столкновения аттрактора типа Эно с репеллером типа Эно.

Такое явление было названо *сильно диссипативной смешанной динамикой*. По сравнению с ранее известными случаями смешанной динамики скорость сжатия фазового объема (сумма показателей Ляпунова) на аттракторе для такого типа динамики намного меньше нуля, что делает систему сильно отличной от консервативной и, поэтому, возникает столь заметное различие между распределением точек на аттракторе и репеллере.<sup>3</sup> Время вычислений, необходимое для того, чтобы увидеть, что пересекающиеся аттрактор и репеллер занимают одну и ту же область в фазовом пространстве (как утверждается в работе [28]), в этом случае чрезвычайно велико и недостижимо в реальных численных экспериментах.

В работе [8\*] также описан бифуркационный сценарий перехода от консервативной к смешанной динамике в исследуемой вихревой модели. Основная часть этого сценария – столкновение аттрактора типа Эно с репеллером типа Эно, которое происходит за счет появления гетероклинических контуров между инвариантными многообразиями пары седловых неподвижных точек, одна из которых принадлежит аттрактору, а другая – репеллеру, см. раздел 2.2.3.

### 2.2.5 Смешанная динамика в неголономной модели диска на плоскости.

В работе [9\*] с помощью концепции смешанной динамики установлено отсутствие гладкой инвариантной меры в неголономной модели резинового диска на плоскости.

Рассмотренные выше вихревая модель и неголономная модель волчка Сулова демонстрирует такой тип смешанной динамики, когда хаотический аттрактор системы заметно отличается от ее хаотического репеллера. Однако в некоторых неголономных системах

<sup>3</sup>Как мы сейчас понимаем, это связано с очень сильной асимметрией сингулярных инвариантных мер, сосредоточенных на аттракторе и репеллере, что формализуется тем, что т.н. расстояние Канторовича-Рубинштейна-Вассерштейна между аттрактором и репеллером становится весьма большим по мере увеличения диссипации [39].

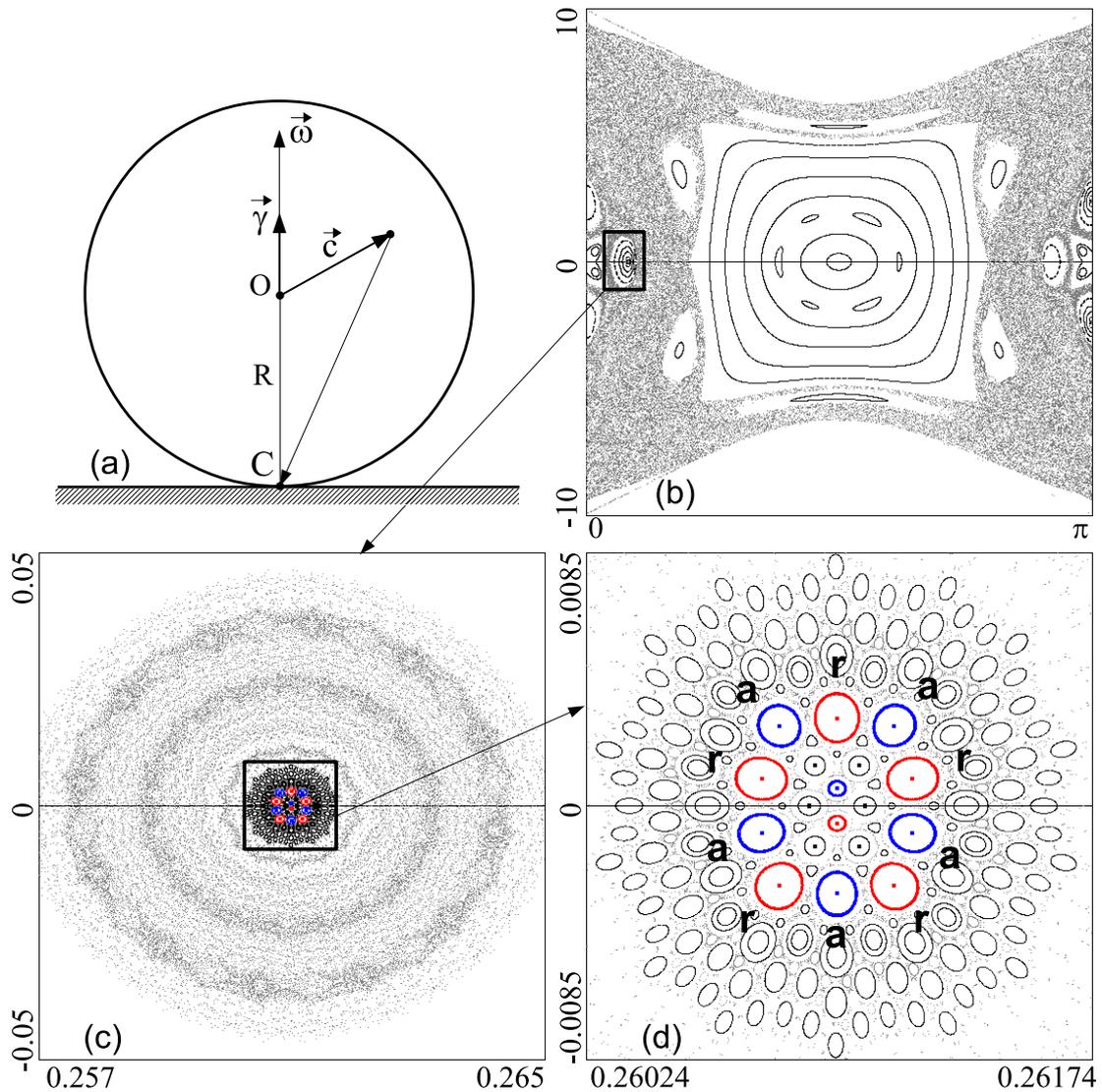


Рис. 20: (a) Резиновый диск на плоскости; (b) фазовый портрет отображения Пуанкаре; (c) и (d) увеличенные его фрагменты (от (b) к (d) – увеличение в 1000 раз). На рис. (d) на фазовом портрете отмечены аттракторы (обозначены буквой “a”) и репеллеры (обозначены буквой “r”) и их области притяжения (кружок вокруг аттрактора (репеллера) – это на самом деле кусок чрезвычайно плохо скручивающейся спирали).

такие отличия совсем не заметны. Их удастся обнаружить только при внимательном рассмотрении фазового портрета системы, предварительно изучив бифуркации возникновения устойчивых периодических траекторий.

К такому типу моделей относится неголономная модель резинового диска – круглого уравновешенного твердого тела нулевой толщины, обладающего разными главными моментами инерции [40, 41, 42], см. рис. 20а. На движение такого диска по плоскости наложены 2 неголономные связи: одна запрещает проскальзывание, другая – верчение вокруг вертикальной оси. Таким образом, как и в случае волчка Суллова, динамика резинового диска на плоскости определяется трехмерным потоком или же двумерным отображением Пуанкаре.

При компьютерном моделировании поведение траекторий в этом отображении Пуан-

каре казалось, даже в мелких деталях, очень похожим на консервативное, см., например, рис. 20b. Поэтому здесь естественным образом возникает вопрос о существовании в этой модели гладкой инвариантной меры, важность которого отмечалась В.В. Козловым в работе [41]. Однако вместо того, чтобы искать инвариантную меру мы решили исследовать другой, даже более естественный вопрос о существовании в этой модели смешанной динамики. На этот вопрос был получен положительный ответ. Внутри на первый взгляд консервативного хаоса на мелких масштабах (порядка  $10^{-3} \times 10^{-3}$ ) удалось обнаружить сосуществующие эллиптические, устойчивые и вполне неустойчивые периодические точки, расположенные внутри зоны с хаотическим поведением траекторий, см. рис. 20c и 20d. Таким образом, подход к изучению моделей с использованием концепции смешанной динамики и в этом случае оказался весьма успешным.

### 2.3 Программный комплекс для исследования хаоса в многомерных динамических системах.

Разработанные автором диссертации численные методы исследования многомерных динамических систем реализованы в виде готовых программных решений – комплекса программ «Компьютерная динамика: Хаос», представленного в трех версиях 5.0, 5.5 и 6.0. Версии 5.0 и 5.5 запатентованы авторским коллективом, в состав которого входит диссертант [13\*, 14\*].

Программный комплекс может быть использован для исследования широкого класса динамических моделей, заданных как системами обыкновенных дифференциальных уравнений, так и точечными отображениями, а гибкая система настроек методов и инструментов позволяет подобрать оптимальные для исследования параметры, обеспечивающие баланс между точностью результатов и временем их получения.

Функциональность комплекса позволяет:

- выявлять в пространстве параметров области с консервативным, диссипативным, а также смешанным хаосом;
- выполнять проверку псевдогиперболичности странных аттракторов;
- строить диаграммы гомоклинических бифуркаций;
- выявлять в пространстве параметров системы области «дикого» поведения;
- создавать новые задачи с помощью разработанного интерфейса ввода пользовательских задач.

Комплекс программ реализован на языке Си++. Для ускорения работы с целью эффективного проведения двухпараметрического анализа, большинство методов комплекса реализованы с применением технологий параллельного программирования, использующих как ядра центрального, так и графического процессоров. Распараллеливание на ядра графического процессора осуществляется с применением технологии CUDA.

Для работы с комплексом пользователь:

- выбирает задачу из списка Problems и задает соответствующие управляющие параметры;

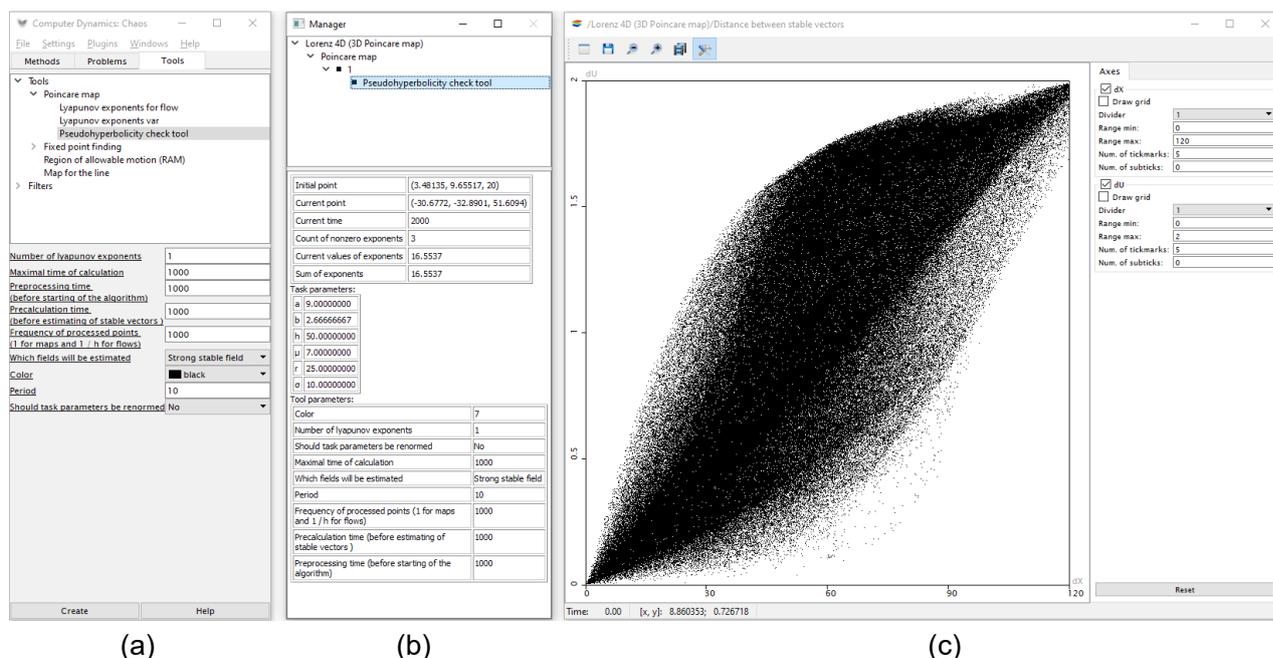


Рис. 21: Скриншот программы «Компьютерная динамика: хаос» после проверки непрерывности подпространства  $E^{ss}$  в четырехмерной системе Лоренца : (а) главное управляющее окно; (б) окно с результатами работы инструмента метода проверки псевдогиперболичности; (с) диаграмма непрерывности подпространства  $E^{ss}$ , подтверждающая псевдогиперболичность дикого спирального аттрактора.

- выбирает метод интегрирования из списка Methods (если исследуемая задача, описывается системы дифференциальных уравнений) и настраивает параметры метода (начальный шаг, максимальный шаг, относительная и абсолютная погрешности – для методов с переменным шагом);
- выбирает инструмент исследования из списка Tools и задает его настройки через соответствующее меню.

После этого можно запускать расчет. Результаты работы экспортируются в файл, а также выводятся в окно работы выбранного инструмента. На рисунке 21 приведен скриншот работы с комплексом при проверке дикого спирального аттрактора на псевдогиперболичность, см. раздел 2.1.2.

Разработанный комплекс оснащен системой ввода пользовательских задач. После ввода новой задачи, эта задача появляется в общем списке задач и для нее могут применяться те же методы интегрирования и инструменты исследования, что и для других задач.

## Список литературы

- [1] Аносов Д.В., Арансон С.Х., Гринес В.З., Плыкин Р.В., Сатаев Е.А., Сафонов А.В., Солодов В.В., Старков А.Н., Степин А.М., Шлячков С.В. *Динамические системы с гиперболическим поведением* //Итоги науки и техники. Сер. «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления». М.: ВИНТИ, 66, 1991, С. 5–242.
- [2] Lorenz E.N. *Deterministic nonperiodic flow* //Journal of atmospheric sciences, **20(2)** (1963), pp. 130-141.
- [3] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца //Доклады Академии наук. – Российская академия наук, **234** (1977), pp. 336–339.
- [4] Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. *О притягивающих негрубых предельных множествах типа аттрактора Лоренца* //Труды Московского математического общества, **44** (1982), С. 150–212.
- [5] Тураев Д. В., Шильников Л. П. *Пример дикого странного аттрактора* //Математический сборник, **189(2)** (1998), С. 137-160.
- [6] Afraimovich, V.S. and Shilnikov, L.P. *Strange attractors and quasiattractors* //Strange attractors and quasiattractors Nonlinear Dynamics and Turbulenceed (G.I. Barenblatt, G. Iooss and D.D. Joseph (Boston, MA: Pitmen))-1983.
- [7] Kuptsov P.V., Kuznetsov S.P. *Lyapunov analysis of strange pseudohyperbolic attractors: angles between tangent subspaces, local volume expansion and contraction* //Regular and Chaotic Dynamics, **23(7)** (2018), pp. 908–932.
- [8] Galias Z., Tucker W. *Is the Henon attractor chaotic?* //International Journal of Bifurcation and Chaos, **25(3)** (2015), 033102.
- [9] Shil'nikov A.L., Shil'nikov L.P., Turaev D.V. *Normal forms and Lorenz attractors* //International Journal of Bifurcation and Chaos, **3(05)** (1993), pp. 1123–1139.
- [10] Newhouse S.E. *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms* //Publications Mathématiques de l'IHÉS, **50** (1979), pp. 101-151.
- [11] Gonchenko S.V., Ovsyannikov I.I., Simó C. and Turaev D. 2005 *Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors* //International Journal of Bifurcation and Chaos, **15(11)** (2005), 3493-3508.
- [12] Shilnikov A.L. *Bifurcation and chaos in the Morioka-Shimizu system* Methods of Qualitative Theory of Differential Equations (Gorky University Press), 1986, pp. 180-93.
- [13] Shilnikov A.L. *On bifurcations of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka model* //Physica D: Nonlinear Phenomena, **62(1-4)** (1993), pp. 338–346.
- [14] Tucker W. *The Lorenz attractor exists* //Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series I-Mathematics, **328.12** (1999), pp. 1197-1202.

- [15] Тураев Д. В., Шильников Л. П. *Псевдогиперболичность и задача о периодическом возмущении аттракторов лоренцевского типа* // Доклады Академии наук, **418(1)** (2008), С. 23-27.
- [16] Gonchenko S., Karatetskaia E., Kazakov A., Safonov K., Turaev D. *On new discrete attractors of Lorenz type in orientation reversing three-dimensional Hénon Maps and the bifurcation  $(-1, i, -i)$*  (в работе), 2022.
- [17] Гонченко А. С., Гонченко С. В., Шильников Л. П. *К вопросу о сценариях возникновения хаоса у трехмерных отображений* // Нелинейная динамика, **8(1)** (2012), С. 3-28.
- [18] Борисов А. В., Мамаев И. С. *Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос.* – Научно-издательский центр "Регулярная и хаотическая динамика 2005.
- [19] Guckenheimer J. *A strange, strange attractor* The Hopf Bifurcation Theorem and its Applications (Berlin: Springer) (1976), pp. 368–81.
- [20] Guckenheimer J., Williams R.F. *Structural stability of Lorenz attractors* Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **50** (1979), pp. 59–72.
- [21] Shilnikov L.P. *The bifurcation theory and quasi-hyperbolic attractors* // Uspehi Mat. Nauk, **36** (1981), pp. 240–241.
- [22] Capiński M.J, Turaev D., Zgliczyński P. *Computer assisted proof of the existence of the Lorenz attractor in the Shimizu–Morioka system* // Nonlinearity, **31(12)** (2018), pp. 5410.
- [23] Lyubimov D.V., Zaks M.A. *Two mechanisms of the transition to chaos in finite-dimensional models of convection* // Physica D: Nonlinear Phenomena, **9(1-2)** (1983), pp. 52–64.
- [24] Chua L.O., Shilnikov L.P., Shilnikov A.L., Turaev D.V. *Methods Of Qualitative Theory In Nonlinear Dynamics (Part Ii)*. **5** World Scientific, 2001.
- [25] Rovella A. *The dynamics of perturbations of the contracting Lorenz attractor* // Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática-Bulletin/Brazilian Mathematical Society, **24(2)** (1993), pp. 233-259.
- [26] Morales C. A., Pacifico M. J., Martin B. S. *Contracting Lorenz attractors through resonant double homoclinic loops* // SIAM journal on mathematical analysis, **38(1)** (2006), pp. 309-332.
- [27] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V. *Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps* // Physica D: Nonlinear Phenomena, **337** (2016), pp. 43-57.
- [28] Гонченко С. В., Тураев Д. В. *О трех типах динамики и понятии аттрактора* // Труды Математического института имени ВА Стеклова **297** (2017), С. 133-157.

- [29] Kazakov A. O. *Strange attractors and mixed dynamics in the problem of an unbalanced rubber ball rolling on a plane* //Regular and Chaotic Dynamics, **18(5)** (2013), pp. 508-520.
- [30] Gonchenko A. S., Gonchenko S. V., Kazakov A. O. *Richness of chaotic dynamics in nonholonomic models of a Celtic stone* //Regular and Chaotic Dynamics, **18(5)** (2013), pp. 521-538.
- [31] Козлов В.В. *К теории интегрирования уравнений неголономной механики* //Успехи механики, **8(3)** (1985), С. 85-101.
- [32] Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory* //Meccanica, **15(1)** (1980), pp. 9-20.
- [33] Pikovsky A., Topaj D., *Reversibility vs. synchronization in oscillator lattices*, Physica D: Nonlinear Phenomena, **170** (2002), pp. 118-130.
- [34] Gonchenko S.V., Shilnikov L.P., Turaev D.V. *On Newhouse domains of two-dimensional diffeomorphisms which are close to a diffeomorphism with a structurally unstable heteroclinic cycle* //In Proc. Steklov Inst. Math, **216** (1997), pp. 70-118.
- [35] Lamb J. S. W., Stenkin O. V. *Newhouse regions for reversible systems with infinitely many stable, unstable and elliptic periodic orbits* //Nonlinearity, **17(4)** (2004), pp. 1217.
- [36] Lerman L.M., Turaev D.V. *Breakdown of Symmetry in Reversible Systems* //Regul. Chaotic Dyn., **17(3-4)** (2012), pp. 318-336.
- [37] Delshams A., Gonchenko S. V., Gonchenko V. S., Lazaro J. T., Stenkin, O. *Abundance of attracting, repelling and elliptic periodic orbits in two-dimensional reversible maps* //Nonlinearity, **26(1)** (2012), pp. 1.
- [38] Galias Z., Tucker W. *Is the Hénon attractor chaotic?* // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, **25(3)** (2015), p. 033102.
- [39] Chigarev V., Kazakov A., Pikovsky A., *Kantorovich–Rubinstein–Wasserstein distance between overlapping attractor and repeller* // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, **30(7)** (2020), p. 073114.
- [40] Козлов В. В., Афонин А.А. *Задача о падении диска, движущегося по горизонтальной плоскости* //Изв. РАН. Мех. тв. тела, **1** (1997) С. 7–13.
- [41] Kozlov V. V. *Several Problems on Dynamical Systems and Mechanics* // Nonlinearity, **21(9)** (2008), pp. 149–155.
- [42] Bizyaev I. A., Borisov A. V., Mamaev I. S. *An Invariant Measure and the Probability of a Fall in the Problem of an Inhomogeneous Disk Rolling on a Plane* // Regular and Chaotic Dynamics, **23(6)** (2018), pp. 665–684.