Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Международная лаборатория динамических систем и приложений

На правах рукописи

Баринова Марина Константиновна

ПОСТРОЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ 2- И 3-ДИФФЕОМОРФИЗМОВ С ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКОЙ

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Починка Ольга Витальевна

Нижний Новгород – 2021

Энергетическая функция для динамических систем является естественным обобщением функции энергии для диссипативных физических систем. В случае дискретных динамических систем, в отличие от непрерывных, такая функция существует не всегда даже для систем с регулярной динамикой. Настоящая работа посвящена исследованию существования и построению (в случае существования) энергетической функции у Ω-устойчивых диффеоморфизмов с хаотическим поведением, обусловленным наличием нетривиальных (отличных от периодической орбиты) базисных множеств.

Для любой динамической системы (потока или каскада), заданного на метрическом пространстве, можно ввести понятие цепно-рекуррентного множества, связанного с понятиями ε-траектории или псевдо-орбиты. Так как в работе рассматриваются дискретные динамические системы на компактных многообразиях, мы будем давать только соответствующие определения, для потоков можно ввести аналогичные. Пусть M — гладкое компактное ориентируемое n-многообразие, f — диффеоморфизм, заданный на M. *ε-цепью длины n*, соединяющей точку $x \in M$ с точкой $y \in M$ для каскада f называется последовательность $x = x_1, \ldots, x_n = y$ точек из M такая, что $d(f(x_i), x_{i+1}) < \varepsilon$ для $1 \leqslant i \leqslant n-1$ (см. рисунок 1). Точку $x \in M$ называют *цепно-рекуррентной*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n и ε-цепь длины n, соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно-рекуррентных точек каскада f называется *цепно-рекуррентным множеством* f и обозначается $\mathcal{R}_f$. На множестве $\mathcal{R}_f$ можно ввести отношение эквивалентности следующим правилом: $x \sim y$, $x, y \in \mathcal{R}_f$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют ε-цепи, соединяющие x с y и y с x. Тогда цепно-рекуррентное множество разбивается на классы эквивалентности, называемые *цепными компонентами* системы.

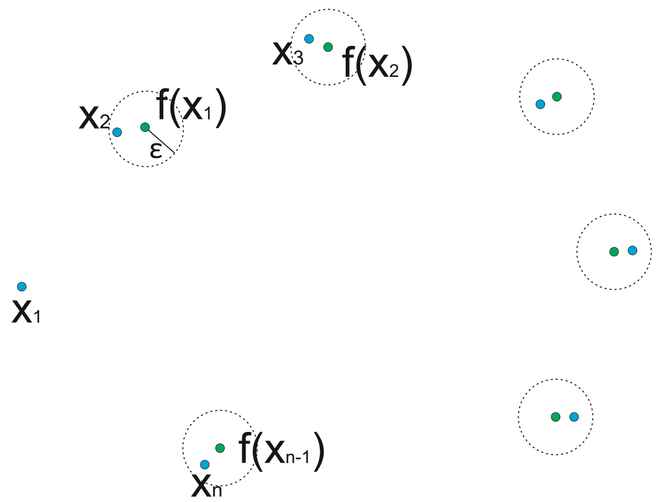

Рис. 1: ε-цепь

Функцией Ляпунова динамической системы (потока или каскада), заданной на M, называется непрерывная функция $\varphi : M \to \mathbb{R}$, которая постоянна на каждой цепной компоненте системы и убывает вдоль ее орбит вне цепно-рекуррентного множества. В силу результатов Ч. Конли [5], такая функция существует для любой динамической системы, а сам факт существования носит название "Фундаментальная теорема динамических систем". Следует отметить, что сам Ч. Конли дополнительно требовал, чтобы значения функции φ на различных компонентах цепно-рекуррентного множества были различны, а образ цепно-рекуррентного множества в силу φ был нигде не плотен на прямой и называл такую функцию *полной функцией Ляпунова.* Числа, принадлежащие образу цепно-рекуррентного множества, Ч. Конли назвал критическими значениями функции φ.

Однако для гладкой функции ее критическим значением принято называть образ критической точки (точки, в которой градиент функции обращается в 0), которая, вообще говоря, не обязана принадлежать цепно-рекуррентному множеству. В связи с чем, наряду с функцией Ляпунова, используется понятие *энергетической функции*, то есть гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно-рекуррентным множеством системы. Заметим, что в непрерывной категории также можно ввести понятие критической точки и определить энергетическую функцию не требуя гладкость функции Ляпунова.

Динамические системы с гиперболическим цепно-рекуррентым множеством являются естественными объектами для изучения на предмет существования энергетической функции. Напомним, что для диффеоморфизма $f : M \to M$ компактное f-инвариантное множество $\Lambda \subset M$ называется *гиперболическим*, если существует непрерывное Df-инвариантное разложение касательного подрасслоения $T_\Lambda M$ в прямую сумму $E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$, $x \in \Lambda$ такую, что

$$||Df^k(v)|| \leqslant c\lambda^k||v||,\ v \in E^s_\Lambda,\ k > 0,$$

$$||Df^{-k}(v)|| \leqslant c\lambda^k||v||,\ v \in E^u_\Lambda,\ k > 0$$

для некоторых фиксированных $c > 0$ и $0 < \lambda < 1$. Наличие гиперболической структуры на цепно-рекуррентном множестве эквивалентно Ω-устойчивости системы, то есть такие диффеоморфизмы сохраняют структуру неблуждающего множества при малых добавках. В этом случае цепно-рекуррентное множество совпадает с неблуждающим множеством системы и периодические орбиты плотны в R_f. Таким образом, если цепно-рекуррентное множество $\mathcal{R}_f$ диффеоморфизма f гиперболическое, то f является A-диффеоморфизмом[1] и имеет место теорема Смейла о спектральном разложении, а именно: R_f имеет лишь конечное число цепных компонент, каждая из которых является компактной, инвариантной и топологически транзитивной. В этом случаи их называют *базисными множествами* диффеоморфизма f. Если базисное множество является периодической орбитой, то его называют *тривиальным*, в противном

[1]Диффеоморфизм $f : M \to M$, заданный на компактном многообразии M, называется A-диффеоморфизмом, если он удовлетворяет аксиоме А (С. Смейл), то есть его неблуждающее множество $NW(f)$ гиперболично и периодические точки плотны в $NW(f)$.

случае *нетривиальным.* В окрестности гиперболической изолированной точки цепно-рекуррентного множества энергетическую функцию естественно строить в виде гиперповерхности второго порядка, поэтому для классов с конечным цепно-рекуррентным множеством задачу существования энергетической функции обычно решают в классе функций Морса — C^2-гладких функций, все критические точки которых невырождены.

Первые результаты по построению энергетической функции принадлежат С. Смейлу [17], который в 1961 году доказал существование энергетической функции Морса у градиентно-подобных потоков (структурно устойчивых потоков, цепно-рекуррентное множество которых состоит из конечного числа неподвижных гиперболических точек). К. Мейер [14] в 1968 году обобщил этот результат, построив энергетическую функцию Морса-Ботта[2] для произвольного структурно устойчивого потока, цепно-рекуррентное множество которого состоит из конечного числа неподвижных точек и конечного числа периодических орбит.

Как заметил в 1985 году Дж. Фрэнкс [6], применение результатов В. Вильсона [20] к конструкции К. Конли даёт существование энергетической функции у любого гладкого потока с гиперболическим цепно-рекуррентным множеством. Тогда с помощью надстройки можно построить гладкую функцию Ляпунова для любого диффеоморфизма с гиперболическим цепно-рекуррентным множеством. Но построенная таким образом функция может иметь критические точки, которые не являются цепно-рекуррентными и, следовательно, функция Ляпунова не является энергетической. Встает вопрос о том, какие дискретные динамические системы допускают энергетические функции. Первые результаты в этом направлении были получены Д. Пикстоном в 1977 году, в своей работе [15] он доказал существование энергетической функции Морса у любого диффеоморфизма Морса-Смейла (структурно устойчивого диффеоморфизма с цепно-рекуррентным множеством, состоящим из конечного числа периодических орбит) на поверхности. Результат Пикстона был обобщен на Ω-устойчивые 2-диффеоморфизмы с конечным цепно-рекуррентным множеством, энергетическая функция Морса для таких диффеоморфизмов была построена в работе Т. Митряковой, О. Починки, А. Шишенковой [36]. В той же работе [15] Д. Пикстон построил диффеоморфизм Морса-Смейла на трехмерной сфере, не обладающий энергетической функцией Морса. В работах В. Гринеса, Ф. Лауденбаха, О. Починки [8], [9] и книге [11] получены необходимые и достаточные условия существования энергетической функции Морса у трехмерных диффеоморфизмов Морса-Смейла. Также известны примеры диффеоморфизмов Морса-Смейла в размерности $n > 3$, которые не обладают энергетической функцией Морса (см., например, [13]).

Из результатов выше следует, что не все диффеоморфизмы даже с регулярной динамикой имеют энергетическую функцию. Тем более удивительным является факт

[2] C^2-гладкая функция называется *функцией Морса-Ботта*, если гессиан в каждой критической точке невырожден в направлении, нормальном к критическому множеству уровня.

наличия энергетической функции у некоторых дискретных динамических систем с хаотическим гиперболическим поведением. В настоящей работе энергетическая функция конструируется для некоторых классов Ω-устойчивых 2- и 3-диффеоморфизмов с нетривиальными базисными множествами. Технически построение такой функции базируется на динамических свойствах базисных множеств и процедуре сглаживания непрерывного отображения.

Работа состоит из восьми глав.

Глава 1 является обзором имеющихся по данной тематике результатов.

В главе 2 формулируются основные результаты работы.

В главе 3 доказывается техническая теорема о сглаживании непрерывной функции, которая используется в дальнейшем для построения гладких энергетических функций рассматриваемых классов диффеоморфизмов.

Теорема 1 ([30]*[3], Лемма 2.1, [3]*, Lemma 5). *Пусть M^n — гладкое компактное n-многообразие, $K \subset M^n$ — замкнутое подмножество M и U — некоторая замкнутая окрестность множества K такая, что $K \subset int\, U$. Пусть задана непрерывная сюръективная функция $\varphi : U \to [0;1]$, гладкая на $U \setminus K$ и $\varphi^{-1}(0) = K$. Тогда для любого $\delta \in (0;1)$ существует гладкая функция $g : [0;1] \to [0;1]$, удовлетворяющая следующим свойствам:*

- $g'(0) = 0$ *и* $g'(c) > 0,\ \forall c \in (0;1]$;
- $g(c) = c,\ \forall c \in [\delta;1]$;
- *суперпозиция* $\psi = g \circ \varphi$ — *гладкая на всём множестве* U.

Идея доказательства теоремы 1 основана на построении искомой функции g методом разбиения единицы с выполнением условий, необходимых для дифференцируемости композиции $g \circ \varphi$.

В главе 4 приводятся необходимые для построения энергетических функций свойства нетривиальных базисных множеств. Кроме того, в этой главе рассмотрен класс $S(M^2)$ Ω-устойчивых диффеоморфизмов, заданных на замкнутой ориентируемой поверхности M^2, все нетривиальные базисные множества которых являются аттракторами[4] или репеллерами. Основным результатом главы является следующая теорема.

Теорема 2 ([28]*, Теорема 1). *Для любого диффеоморфизма $f \in S(M^2)$ существует гладкая энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне нетривиальных базисных множеств.*

---

[3]Здесь и далее звездочкой отмечены работы, в которых одним из соавторов является диссертант и результаты которых представлены в данной диссертации

[4]Компактное f-инвариантное множество $A \subset M$ называется *аттрактором* диффеоморфизма $f : M \to M$, если у него существует такая компактная окрестность U_A, называемая *захватывающей*, что $f(U_A) \subset int U_A$ и $A = \bigcap\limits_{k \geqslant 0} f^k(U_A)$. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1}.

Доказательство теоремы 2 существенно опирается на существование так называемого канонического носителя у одномерных базисных множеств Ω-устойчивых диффеоморфизмов поверхностей. Идеи построения такого носителя лежат в основе фундаментальной теории поверхностных базисных множеств, построенной в работах В.З. Гринеса [22, 23], А.Ю. Жирова [31, 32, 33], Р.В. Плыкина [37]. Это позволяет выделить захватывающую окрестность у нетривиальных базисных множеств в виде поверхности с краем, причем каждая компонента края является окружностью. Тогда блуждающая часть бассейна каждого нетривиального аттрактора расслаивается на окружности, что позволяет сделать их линиями уровня будущей энергетической функции внутри некоторой захватывающей окрестности. Вне захватывающих окрестностей аттракторов и репеллеров диффеоморфизм имеет конечное гиперболическое цепно рекурентное множество. Построение энергетической функции для регулярных компонент диффеоморфизма основано на существовании энергетической функции Морса у диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях, доказанном Д. Пикстоном. Результирующая энергетическая функция является константой на одномерных аттракторах и репеллерах и является функцией Морса на дополнении к ним. Гладкость такой функции обеспечивается технической теоремой 1.

Если среди нетривиальных базисных множеств Ω-устойчивого диффеоморфизма, заданного на замкнутой ориентируемой поверхности, появляется хотя бы одно нульмерное базисное множество, то на вопрос о существовании энергетической функции до сих пор нет однозначного ответа.

В главе 5 рассмотрен подкласс таких диффеоморфизмов, а именно Ω-устойчивые диффеоморфизмы, заданные на замкнутой ориентируемой поверхности M^2, чье неблуждающее множество содержит хотя бы одно нетривиальное нульмерное базисное множество без пар сопряженных точек (точки x, y из некоторого базисного множества Λ называется *парой сопряженных точек*, если $W^s_x = W^s_y$, $W^u_x = W^u_y$ и открытые дуги устойчивого и неустойчивого многообразий, ограниченные точками x и y не содержат точек базисного множества Λ, на рисунке 2 изображена пара сопряженных точех: хотя бы одна из дуг (красная или зеленая) содержит точки базисного множества). Как следует из приведенного ниже основного результаты этой главы, наличие такого базисного множества является препятствием к существованию энергетической функции у диффеоморфизма.

Теорема 3 ([1]*, Theorem 1). *Каждый Ω-устойчивый диффеоморфизм $f : M^2 \to M^2$, заданный на замкнутой ориентируемой поверхности M^2, неблуждающее множество которого содержит нульмерное нетривиальное базисное множество без пар сопряженных точек, не обладает энергетической функцией.*

Доказательство теоремы 3 базируется на свойствах нульмерных нетривиальных базисных множеств без пар сопряженных точек. Идея изучения таких множеств с помощью универсального накрытия плоскостью Лобачевского развита в работах В.З. Гринеса и Х. Калая [22, 26, 34]. Отсутствие пар сопряженных точек у нульмерного

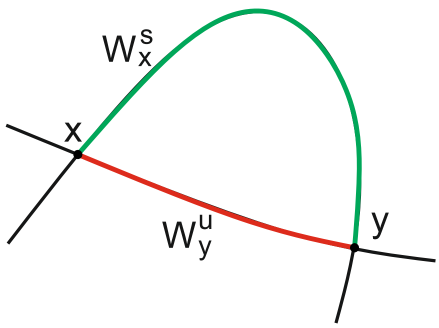

Рис. 2: Точки x и y — пара сопряженных точек

базисного множества позволяет выделить диски, внутренность которых состоит из блуждающих точек диффеоморфизма, причем такие, что любая функция Ляпунова (даже негладкая) имеет критические точки внутри этих дисков, то есть не является энергетической функцией.

Если диффеоморфизм $f : M \to M$ является Ω-устойчивым, то на множестве его базисных множеств можно ввести отношение частичного порядка С. Смейла следующим образом: $\Lambda_1 \prec \Lambda_2$, если $W^s_{\Lambda_1} \cap W^u_{\Lambda_2} \neq \emptyset$.

В главе 6 получено частичное решение проблемы Смейла, касающейся описания диаграмм Ω-устойчивых диффеоморфизмов, построенных на основе частичного порядка С. Смейла. Диаграмма Смейла является частным случаем диаграммы Хассе частично упорядоченного множества $(X, \prec)$, то представляет из себя граф, вершинами которого являются элементы множества X, а пара (x, y) образует ребро, если $x \prec y$ и $\nexists z : \ x \prec z, \ z \prec y$. В лемме 6.1 установлено, что диаграмма Смейла любого Ω-устойчивого диффеоморфизма является связной диаграммой Хассе. С помощью хирургической операции Смейла конструируются модельные диффеоморфизмы двумерного тора. В лемме 6.6 получены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности модельных диффеоморфизмов. Далее вводится класс $\mathcal{H}$ Ω-устойчивых диффеоморфизмов поверхности, являющихся связной суммой модельных диффеоморфизмов. Основным результатом раздела является следующая теорема.

Теорема 4 ([21]*, Теорема). *Любая связная диаграмма Хассе реализуется некоторым диффеоморфизмом из класса $\mathcal{H}$.*

Размеченной диаграммой Смейла называется диаграмма Смейла, в которой около каждой вершины дополнительно указан класс топологической сопряженности ограничения диффеоморфизма на соответствующем базисном множестве. Для диффеоморфизмов $f,\ f' \in \mathcal{H}$ изоморфность их размеченных диаграмм Смейла является необходимым и достаточным условием их Ω-сопряженности. Однако сопрягающий гомеоморфизм в общем случае не продолжается с базисных множеств на несущую поверхность. В работе выделен подкласс $\mathcal{H}_* \subset \mathcal{H}$ диффеоморфизмов, у которых любые два модельных диффеоморфизма связаны не более, чем по одной орбите. Для таких диффеоморфизмов класс изоморфности размеченной диаграммы Смейла является полным инвариантом объемлющей Ω-сопряженности.

Теорема 5 ([2]*, Теорема). *Диффеоморфизмы $f, f' \in \mathcal{H}_*$ объемлюще Ω-сопряжены тогда и только тогда, когда их размеченные диаграммы изоморфны.*

В главе 7 рассматриваются Ω-устойчивые 3-диффеоморфизмы с двумерными нетривиальными множествами. Если топологическая размерность аттрактора (репеллера) совпадает с размерностью неустойчивых (неустойчивых) многообразий его точек, то он называется *растягивающимся (сжимающимся)*. Для класса $T(M^3)$ структурно устойчивых диффеоморфизмов с двумерным растягивающимся аттрактором или сжимающимся репеллером из результатов В.З. Гринеса, Е.В. Жужомы и В.С. Медведева [24, 35] известно, что все остальные базисные множества таких диффеоморфизмов являются тривиальными, а несущее многообразие всегда гомеоморфно трехмерному тору. Кроме того, нетривиальное базисное множество отделяется от множества с регулярной динамикой так называемыми характеристическими сферами. Этот факт позволяет доказать ручное вложение сепаратрис седловых точек и построить энергетическую функцию Морса для рассматриваемого диффеоморфизма вне растягивающегося аттрактора (сжимающегося репеллера), воспользовавшись результатами В.З. Гринса, Ф. Лауденбаха и О.В. Починки [9] о существовании энергетической функции Морса для 3-диффеоморфизмов Морса-Смейла. Теорема 1 позволяет гладко продолжить построенную функцию на нетривиальное базисное множество и, таким образом, доказать следующую теорему.

Теорема 6 ([29]*, Теорема 1). *Для любого диффеоморфизма $f \in T(M^3)$ существует гладкая энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне нетривиального базисного множества.*

Аналогичный результат получен для класса $Q(M^3)$ Ω-устойчивых 3-диффеоморфизмов с двумерными поверхностными базисными множествами.

Теорема 7 ([30]*, Теорема 1.1). *Любой диффеоморфизм $f \in Q(M^3)$ обладает гладкой энергетической функцией.*

Идея доказательства теоремы 7 основана на том, что любое базисное множество рассматриваемого диффеоморфизма является тором, ручно вложенным в многообразие M^3, а ограничение диффеоморфизма на базисное множество топологически сопряжено алгебраическому автоморфизму тора. Этот факт, следующий из работ В.З. Гринеса, Е.В. Жужомы, В.С. Медведева, Ю.А. Левченко и О.В. Починки [10, 27, 25], позволяет построить гладкую энергетическую функцию на блуждающем множестве такого диффеоморфизма. Для продолжения построенной функции на цепно-рекуррентное множество используется теорема 1.

В главе 8 рассматриваются 3-диффеоморфизмы с динамикой одномерный источник-сток. В этом случае аттрактор (репеллер) автоматически является растягивающимся (сжимающимся). Р. Вильямс [19] показал, что динамика на таких базисных множествах сопряжена сдвигу обратного предела ветвленного 1-многообразия относительно растягивающего отображения. Конструкция 3-диффеоморфизмов с динамикой одномерный аттрактор-репеллер впервые была предложена Дж. Гиббонсом [7]. Он построил множество моделей на 3-сфере с базисными множествами, являющимися соленоидами Смейла, и доказал, что все примеры не являются структурно устойчивыми. Б. Жанг, Я. Ни и С. Вонг [12] доказали, что трехмерное многообразие M^3 допускает диффеоморфизм f, неблуждающее множество которого состоит из аттракторов и репеллеров, являющихся соленоидами Смейла, тогда и только тогда, когда M^3 — это линзовое пространство $L(p,q)$ с $p \neq 0$. Они также показали, что такие диффеоморфизмы не являются структурно устойчивыми.

Все обобщения соленоидов Смейла как пересечений вложенных ручечных тел не являются поверхностными. Более того, все известные примеры диффеоморфизмов с обобщенными соленоидами в качестве аттрактора и репеллера не являются структурно устойчивыми.

Заметим, что рассматриваемая динамика одномерный источник-сток на поверхности не является структурно устойчивой в силу результатов Р. Робинсона и Р. Вильямса [18]. Естественный способ получить поверхностный одномерный аттрактор для 3-диффеоморфизма f — взять аттрактор A некоторого 2-диффеоморфизма и умножить его захватывающую окрестность на сжатие в трансверсальном направлении. В таком случае A называется *канонически вложенным поверхностным аттрактором.*

В настоящей работе построены примеры 3-диффеоморфизмов с канонически вложенными поверхностными одномерными аттрактором и репеллером, а именно, доказана следующая теорема.

Теорема 8 ([3]*, Theorem 1). *Существует бесконечное число попарно Ω-несопряженных 3-диффеоморфизмов, неблуждающие множества которых попарно гомеоморфны и каждое из них является объединением канонически вложенных одномерных поверхностных аттрактора и репеллера.*

Поверхностная динамика построенных диффеоморфизмов и результат теоремы 1 позволяют доказать для них существование гладкой энергетической функции.

Теорема 9 ([3]*, Theorem 2, [3]*, Theorem 1). *У каждого Ω-устойчивого диффеоморфизма, заданного на замкнутом ориентируемом трехмерном многообразии M^3, неблуждающее множество которого состоит из объединения связных канонически вложенных одномерных поверхностных аттрактора и репеллера, существует гладкая энергетическая функция.*

Хр. Бонатти, Н. Гильман [4] и И. Ши [16] построили примеры структурно устойчивых 3-диффеоморфизмов с динамикой одномерный аттрактор-репеллер. Но вложение базисных множеств в несущее многообразие столь нетривиально, что не позволяет нам решить проблему существования энергетической функции для таких диффеоморфизмов.

Заключение. Значительная часть настоящей диссертационной работы посвящена построению энергетических функций для Ω-устойчивых диффеоморфизмов с хаотической динамикой, заданных на 2- и 3-многообразиях. Основным результатом работы является конструктивное доказательство существования гладкой энергетической функции для следующих классов диффеоморфизмов:

- Ω-устойчивые диффеоморфизмы поверхности, все нетривиальные базисные множества которых являются одномерными (Теорема 2);
- структурно устойчивые 3-диффеоморфизмы с двумерным растягивающимся аттрактором или сжимающимся репеллером (Теорема 6);
- Ω-устойчивые 3-диффеоморфизмы с двумерным цепно-рекуррентным множеством (Теорема 7);
- Ω-устойчивые 3-диффеоморфизмы с динамикой одномерный канонически вложенный поверхностный аттрактор-репеллер (Теорема 9).

Конструкция гладкой энергетической функции существенно опирается на динамические свойства рассматриваемых диффеоморфизмов и техническую

- теорему о сглаживании непрерывной функции (Теорема 1)

В классе Ω-устойчивых 3-диффеоморфизмов с динамикой одномерный канонически вложенный поверхностный аттрактор-репеллер диссертантом построено

- бесконечное множество попарно Ω-несопряженных диффеоморфизмов (Теорема 8).

Кроме того, в диссертационной работе доказан

- факт отсутствия энергетической функции (даже в непрерывной категории) у Ω-устойчивых диффеоморфизмов поверхности с нульмерным нетривиальным базисным множеством без пар сопряженных точек (Теорема 3).

Также в работе частично решена проблема Смейла, касающаяся описания диаграмм Ω-устойчивых диффеоморфизмов, построенных на основе частичного порядка С. Смейла на множестве его базисных множеств. С помощью хирургической операции Смейла построены модельные диффеоморфизмы на двумерном торе и доказано, что

- любая диаграмма Смейла может быть реализована Ω-устойчивым диффеоморфизмом поверхности, являющимся связной суммой модельных диффеоморфизмов (Теорема 4);
- выделен подкласс связных сумм модельных диффеоморфизмов, для которых класс изоморфности размеченной диаграммы Смейла является полным инвариантом объемлющей Ω-сопряженности (Теорема 5).

Результаты исследований изложены в четырех статьях

- Barinova M. On Existence of an Energy Function for Ω-stable Surface Diffeomorphisms // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2022. Vol. 43. No. 2. P. 257-263. (Баринова М. Существование энергетической функции у поверхностных диффеоморфизмов с нульмерными нетривиальными базисными множествами)

- Barinova M., Gogulina E., Pochinka O. Omega-classification of Surface Diffeomorphisms Realizing Smale Diagrams // Russian journal of non-linear dynamics. 2021. Vol. 17. No. 3. P. 321-334. (Баринова М., Гогулина Е., Починка О. Омега-классификация поверхностных диффеоморфизмов, реализующих диаграммы Смейла)

- Barinova M., Grines V., Pochinka O., Yu B. Existence of an energy function for three-dimensional chaotic "sink-source" cascades // Chaos. 2021. Vol. 31. No. 6. Article 063112. P. 1-8. (Баринова М., Гринес В., Починка О., Ю Б. Существование энергетической функции для трехмерных хаотических каскадов)

- Починка О. В., Гринес В. З., Носкова (Баринова) М.К. Построение энергетической функции для трёхмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором // Труды Московского математического общества. 2015. Т. 76. № 2. С. 271-286.

Список литературы

[1] *Barinova M.* On Existence of an Energy Function for Ω-stable Surface Diffeomorphisms // Lobachevskii Journal of Mathematics. —2022. —*43*, No. 2. —P. 257–263.

[2] *Barinova M., Gogulina E., Pochinka O.* Omega-classification of Surface Diffeomorphisms Realizing Smale Diagrams // Russian journal of non-linear dynamics. —2021. —*17*, No. 3. —P. 321–334.

[3] *Barinova M., Grines V., Pochinka O., Yu B.* Existence of an energy function for three-dimensional chaotic "sink-source" cascades // Chaos. —2021. —*31*, No. 6, Article 063112. —P. 1–8.

[4] *Guelman N., Bonatti Ch.* Axiom A diffeomorphisms derived from Anosov flows // Journal of Modern Dynamics. —2010. —*4*. —P. 1–63.

[5] *Conley C.* Isolated Invariant Sets and Morse Index // CBMS Regional Conference Series in Math. —1978. —*38*. —89 pp.

[6] *Franks J.* Nonsingular Smale Flow on S^3 // Topology. —1985. — *24*, No 3. — P. 265–282.

[7] *Gibbons J.* One-dimensional basic sets in the three-sphere // Trans. Amer. Math. Soc. —1972. —*164*. —P 163–178.

[8] *Grines V., Laudenbach F., Pochinka O.* Self-indexing enrgy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Moscow Math. Journal. —2009. — *9*, No 4. —P. 801–821.

[9] *Grines V., Laudenbach F., Pochinka O.* Dynamically ordered energy function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. —2012. —*278*, No 1. —P. 27–40.

[10] *Grines V., Levchenko Y., Medvedev V., Pochinka O.* The topological classification of structural stable 3-diffeomorphisms with two-dimensional basic sets // Nonlinearity. —2015. —*28*, No 11. —P. 4081–4102.

[11] *Grines V., Medvedev T., Pochinka O.* Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. —Springer International Publishing Switzerland. —2016. —364 p.

[12] *Jiang B., Ni Y., Wang S.* 3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors // Trans. Amer. Math. Soc. —2004. —*356*. —P. 4371–4382.

[13] *Medvedev T., Pochinka O.* The wild Fox-Artin arc in invariant sets of dynamical systems // Dynamical Systems. —2018. — *33*, No 4. —P. 660–666.

[14] *Meyer K. R.* Energy functions for Morse-Smale systems // Amer. J. Math. —1968. —*90*. —P. 1031–1040.

[15] *Pixton D.* Wild unstable manifolds // Topology. —1977. — *16*. —P. 167–172.

[16] *Shi Y.* Partially hyperbolic diffeomorphisms on Heisenberg nilmanifolds and holonomy maps // Comptes Rendus Mathematique. —2014. —*352*, No. 9. —P. 743-747.

[17] *Smale S.* On gradient dynamical systems // Annals Math. —1961. — *74*. —P.199–206.

[18] *Robinson R., Williams R.* Finite Stability is not generic // Academic Press, New York. —1973. —P. 451–462.

[19] *Williams R.* Expanding attractors. // Publ. Math. IHES. —1974. — *43*. —P. 169–203.

[20] *Wilson W.* Smoothing derivatives of functions and applications// Trans. Amer. Math. Soc. —1969. —*139*. —P. 413–428.

[21] *Баринова М. К., Гогулина Е. Ю., Починка О. В.* Реализация ациклической диаграммы Смейла омега-устойчивым диффеоморфизмом поверхности // Огарёв-Online. —2020. —No. 13. —С. 1–10.

[22] *Гринес В. З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах I // Труды ММО. —1975. —*32*. —С. 35–61.

[23] *Гринес. В. З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах II // Тр. ММО. —1977. —*34*. —С. 243–252.

[24] *Гринес В.З., Жужома Е.В.* Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один // Известия РАН, сер. матем. —2002. —*66*, No 2. —С. 3–66.

[25] *Гринес В.З., Жужома Е.В., Починка О.В.* Грубые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один // СМФН. —2015. — *57*. —С. 5-–30.

[26] *Гринес В. З., Калай Х. Х.* Диффеоморфизмы двумерных многообразий с просторно расположенными базисными множествами // УМН. —1985. —*40*:1. —С. 189–190.

[27] *Гринес В.З., Медведев В.С., Жужома Е.В.* О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях // Мат. зам. —2005. — *78*, No 6. —С. 813 – 826.

[28] *Гринес В. З., Носкова (Баринова) М. К., Починка О.В.* Энергетическая функция для А-диффеоморфизмов поверхностей с одномерными нетривиальными базисными множествами // Динамические системы. —2015. — *5*, No 1–2. — С. 31–37.

[29] *Гринес В. З., Носкова (Баринова) М. К., Починка О.В.* Построение энергетической функции для трёхмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором // Труды Московского математического общества. —2015. — *76*, No 2. — С. 271–286.

[30] *Гринес В. З., Носкова (Баринова) М. К., Починка О. В.* Построение энергетической функции для А-диффеоморфизмов с двумерным неблуждающим множеством на 3-многообразиях // Труды Средневолжского математического общества. —2015. —*17*, No 3. — С. 12–17.

[31] *Жиров А. Ю.* Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей // Матем. сб. —1994. —*185*:6. —С. 3–50.

[32] *Жиров А. Ю.* Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей // Матем. сб. —1994. —*185*:9. —С. 29–80.

[33] *Жиров А. Ю.* Гиперболические аттракторы диффеоморфизмов ориентируемых поверхностей. Часть 3. Алгоритм классификации // Матем. сб. —1995. —*186*:2. —С. 59–82.

[34] *Калай Х. Х.* О топологической классификации А-диффеоморфизмов с нетривиальными базисными множествами на двумерных многообразиях: Кандидатская диссертация; Горьковский Государственный Университет им. Н. И. Лобачевского. —1988.

[35] *Медведев В.С., Жужома Е.В.* О неориентируемых двумерных базисных множествах на 3-многообразиях // Мат. сборник. —2002. — *193*, No 6. —С. 83–104.

[36] *Митрякова Т. М., Починка О. В., Шишенкова А.Е.* Энергетическая функция для диффеоморфизмов поверхностей с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством // Журнал средневолжского математического общества. — 2012. —*14*, No 1. —С. 98–107.

[37] *Плыкин Р.В.* О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов // УМН. —1984. —*39*:6(240). —С. 75–113.