Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования
"Сколковский институт науки и технологий"

На правах рукописи

Вадим Вячеславович Прокофьев

Интегрируемые иерархии нелинейных дифференциальных уравнений и многочастичные системы

*Резюме диссертации на соискание учёной степени
кандидата математических наук*

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Забродин Антон Владимирович

Москва – 2022

Введение

Одной из важнейших черт,, характеризующих интегрируемые системы является их нетривиальная взаимосвязь между собой. В частности, существует связь между интегрируемыми спиновыми цепочками, интегрируемыми иерархиями нелинейных уравнений в частных производных и классическими моделями многих тел.

В этой диссертации изучается динамика полюсов сингулярных решений интегрируемых иерархий типа КП и показывается, что она изоморфна динамике частиц в многочастичных интегрируемых системах на уровне иерархий. Такая связь между двумя разными типами интегрируемых систем была давно известна в качестве гипотезы. Связь между нелинейные интегрируемые уравнения и системы многих тел была впервые исследована в основополагающей статье (Airault et al. [1977]). А после работах (Krichever [1978],Krichever [1980], Krichever and Zabrodin [1995]) было показано, что для первых нетривиальных времен динамика полюсов соответствует движению частиц в системе типа Калоджеро-Мозера для стандартного гамильтониана. Позже в работах (Shiota [1994], Haine [2007], Zabrodin [2020]) эта связь была расширена до уровня иерархий,однако лишь для рациональных и тригонометрических решений, которые являются вырождением более общих эллиптических решений .

В серии статей, представленных в этой диссертации, авторами расширяются связь между интегрируемыми иерархиями и системами многих частиц типа Калоджеро для трех различных иерархий, таких как КП, 2D-решетка Тоды и матричное КП, до наиболее общих эллиптических решений. Основные результаты этой работы заключаются в том, что авторы устанавливают связь между спектральными кривыми эллиптических систем многих тел и гамильтонианами, отвечающими за динамику полюсов для старших времен соответствующих иерархии. Кроме того, методы, разработанные в этих статьях, могут быть использованы для обнаружения динамики полюсов для сингулярных решений других иерархий.

Данное исследование основано на пяти статьях, в которых я являюсь одним из соавторов. В этих статьях изучается связь между интегрируемыми иерархиями нелинейных дифференциальных уравнений и интегрируемых многочастичных систем. В них получен наиболее общий результат для таких иерархий как КП, двумеризованная цепочка Тоды и матричное КП.

Глава 1

Исторический очерк

1.1 Нелинейные дифференциальные иерархии

Уравнение Кортевега – де Фриза (1.1) это одно из первых примеров интегрируемых уравнений, изученных человечеством. Оно впервые было получено в работе (Boussinesq [1877]) и заново открыто в (Korteveg, D.J. and de Vries, G. [1895]), в попытках описать математически явление уединенных волн, описанных Расселом в (Russel [1844]).

$$4u_t - 12uu_x - u_{xxx} = 0 \tag{1.1}$$

Однако, тот факт, что это уравнение содержит в себе бесконечно много сохраняющихся величин $I_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Q_i(x,t)\mathrm{d}x$ Был доказан почти век спустя в (Miura et al. [1968]). В этой работе автор нашел формулу для произвольного Q_{2m+1} выразив его как полином от $u, u', u'', ...$, где $u' \equiv u_x \equiv \partial u$:

$$\begin{aligned} &Q_{-1}[u] = u, && Q_1[u] = \frac{u^2}{2}, \\ &Q_3[u] = \frac{u^3}{3} - \frac{u_x^2}{12}, && Q_5[u] = \frac{u^4}{4} - \frac{uu_x^2}{4} + \frac{u_{xx}^2}{360}, \\ &.......... && .... \end{aligned}$$

В тот же год в работе (Lax [1968]) было показано, что уравнение (1.1) может быть переписано через дифференциальные операторы

$$L_t = [A_3, L] = A_3 L - L A_3. \tag{1.2}$$

Данная форма записи уравнений стала называться Лаксовой формой.

В (1.2) L и A_3 имеют следующий вид:

$$L = \partial_x^2 + u \tag{1.3}$$

$$A_3 = \partial_x^3 + \frac{3}{2}u\partial_x + \frac{3}{4}u_x = \partial^3 + \frac{3}{4}u\partial_x + \frac{3}{4}\partial_x u \tag{1.4}$$

В последней формуле оператор записан в кососимметричной форме для стандартно определенного скалярного произведения $(f, g) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$.

Из уравнение (1.2) следует, что $L(t) = U(t)L(0)U^{-1}(t)$, где $U(t)$ унитарный оператор. В этом случае оператор Aимеет вид $A_3 = U^\dagger U_t = -U_t^\dagger U$ что означает, что он кососимметричный.

Лакс также исследовал обобщение своей конструкции на случай высших уравнений КдФ. Он ввел кососимметрические операторы

$$A_{2n+1} = \partial_x^{2n+1} + \sum_{i=1}^{n}(b_i\partial_x^{2i-1} + \partial_x^{2i-1}b_i) \tag{1.5}$$

и подставил их вместо A_3 в уравнение (1.2). Условие того, что $L_{t_{2n+1}} = [A_{2n+1}, L]$ просто функция а не дифференциальный оператор накладывает n уравнений из которых можно определить n коэффициентов b_i, а само уравнение задает старшее уравнение КдФ

$$u_{t_{2n+1}} = K_{2n+1}(u). \tag{1.6}$$

Бесконечный система уравнений такого вида называется иерархией.

В работе (Zakharov and Fadeev [1971]) было показано, что уравнение КдФ имеет Гамильтонов вид:

$$u_t = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\delta I_3[u]}{\delta u(x)}. \tag{1.7}$$

Тут дифференциальный оператор $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ служит бесконечномерным аналогом симплектической формы $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ в теории интегрируемых систем.

Кроме того старшие уравнения иерархии можно переписать в аналогичной форме

$$u_{t_n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\delta I_n[u]}{\delta u(x)}. \tag{1.8}$$

Это показывает, что уравнение КдФ можно рассматривать как бесконечномерный аналог классической интегрируемой системы.

Это наблюдение побудило желание связать уравнение КдФ с какой-то известной или неизвестной конечномерной интегрируемой системой. В основополагающей статье (Airault et al. [1977]) показана связь между классом эллиптических решений КдФ и так называемой системой Калоджеро-Мозера. Система Калоджеро-Мозера (1.17) описывает динамику нерелятивистских частиц на комплексной прямой с попарным взаимодействием каждой частицы друг с другом (Calogero [1971], Calogero [1975]).

Однако в динамика полюсов описывалась не в общем случае, а в особом локусом. Более естественная связь возникает между трехмерным обобщением иерархии КдФ - иерархией Кадомцева – Петвиашвили (или просто КП) и системой Калоджеро Мозера. Иерархия КП, как и иерархия КдФ, является обобщением нелинейного дифференциального уравнения, называемого уравнением КП.

$$3u_{yy} = (4u_t - 12uu_x - u_{xxx})_x \tag{1.9}$$

Уравнение Кадомцева-Петвиашвили впервые появляется в работе (Kadomtsev and Petviashvili [1970]), в которой авторы вывели это уравнение в качестве модели для исследования эволюции длинных ионно-звуковых волн малой амплитуды, распространяющихся в плазме под действием длинных поперечных возмущений. В отсутствие поперечной динамики эта задача описывается уравнением КдФ. Вскоре уравнение КП стало использоваться как естественное расширение классического уравнения КдФ на два пространственных измерения.

В статье (Dryoma [1974]) было предложено представление Лакса для уравнения КП:

$$L_t = [A, L] \tag{1.10}$$

с $L = \partial_y + \partial_x^2 + 2u$ и $A = \partial_x^3 + 3u\partial_x + \int^x u_y \mathrm{d}x$.

Однако, более естественный способ описать уравнение КП был предложен в (Sato [1983]) , где автор выписал всю иерархию

Основная идея статьи состояла в том что бы рассмотреть псевдодифференциальный операторов

$$\mathcal{L} = \partial + \sum_{m=1}^{\infty} u_m \partial^{-m} \tag{1.11}$$

тут ∂ обычный дифференциальный оператор действующий на x, обладающий обычными коммутационными соотношениями $\partial f = f' + f\partial$. Умножая обе части этого равенства на ∂^{-1} слева и справа, получим $\partial^{-1} f = f\partial^{-1} - \partial^{-1} f' \partial^{-1}$. Повторяя эту процедуру несколько раз, приходим к формуле:

$$\partial^{-n} f = \sum_{k \geq 0} (-1)^k \begin{pmatrix} k+n-1 \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} \partial^{-n-k}, \tag{1.12}$$

напоминающей правило для обычной производной

$$\partial^n f = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} f^{(k)} \partial^{n-k}. \tag{1.13}$$

Уравнения иерархии КП эквивалентны условию совместности системы уравнений Лакса:

$$\partial_{t_n} \mathcal{L} = [\mathcal{A}_n, \mathcal{L}]. \tag{1.14}$$

Где $\mathcal{A}_n$ дифференциальный оператор порядка n со старшим коэффициентом единицей. Уравнение (1.14) должно иметь смысл, то есть псевдодифференциальный оператор справа должен иметь нулевую дифференциальную часть. Простейший способ этого добиться это взять $\mathcal{A}_n$ как чисто дифференциальную часть от $\mathcal{L}^n$. Это можно описать, используя стандартные обозначения $\mathcal{A}_n = (\mathcal{L}^n)_+$. Действительно, так как $[\mathcal{L}^n, \mathcal{L}] = 0$ $[\mathcal{A}_n, \mathcal{L}] = -[\mathcal{L}^n - \mathcal{A}_n, \mathcal{L}]$, а $\mathcal{L}^n - \mathcal{A}_n$

имеет нулевую дифференциальную часть, очевидно, что у $[\mathcal{A}_n, \mathcal{L}]$ тоже нулевая дифференциальная часть.

Покажем, что $\partial_{t_n}\partial_{t_m}\mathcal{L} - \partial_{t_m}\partial_{t_n}\mathcal{L} = 0$.

$$
\begin{aligned}
\partial_{t_n}\partial_{t_m}\mathcal{L} - \partial_{t_m}\partial_{t_n}\mathcal{L} = \partial_{t_n}[(\mathcal{L}^m)_+, \mathcal{L}] - \partial_{t_m}[(\mathcal{L}^n)_+, \mathcal{L}] = \\
[(\mathcal{L}^n)_+, \mathcal{L}^m]_+\mathcal{L} + (\mathcal{L}^m)_+[(\mathcal{L}^n)_+, \mathcal{L}] - \mathcal{L}[(\mathcal{L}^n)_+, \mathcal{L}^m]_+ - [(\mathcal{L}^n)_+, \mathcal{L}](\mathcal{L}^m)_+ - (n \leftrightarrow m) = \\
(\mathcal{L}^n)_+(\mathcal{L}^m)_+\mathcal{L} + [(\mathcal{L}^n)_+, (\mathcal{L}^m)_-]_+\mathcal{L} + \mathcal{L}(\mathcal{L}^m)_+(\mathcal{L}^n)_+ - \mathcal{L}[(\mathcal{L}^n)_+, (\mathcal{L}^m)_-]_+ - (n \leftrightarrow m) \\
= [(\mathcal{L}^n, \mathcal{L}^m]_+\mathcal{L} - \mathcal{L}[\mathcal{L}^n, \mathcal{L}^m]_+ = 0.
\end{aligned}
$$

заметим, что случай $n = 1$ означает. что $\mathcal{A}_1 = \partial$, то есть $\partial_{t_1} = \partial_x = \partial$ и зависимость от x можно восстанавливить $u(x, t_1, t_2, ...) = u(t_1 + x, t_2, ...)$.

Само уравнение КП является условием совместности системы с $n = 2, 3$ и может быть переписано в форме уравнения нулевой кривизны.

$$\partial_{t_3}\mathcal{A}_2 - \partial_{t_2}\mathcal{A}_3 + [\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3] = 0 \tag{1.15}$$

тут за t_2, t_3 обозначены переменные y, t из (1.9).

Старшие уравнения КП получаются аналогично из условий для произвольных времен.

$$\partial_{t_n}\mathcal{A}_m - \partial_{t_m}\mathcal{A}_n + [\mathcal{A}_m, \mathcal{A}_n] = 0. \tag{1.16}$$

В серии работ (Krichever [1978], Krichever [1980]) Кричевер показал, что функция $u = c + 2\sum\limits_{j=1}^{n} \wp(x - x_j(y, t))$ является решением уравнения (1.9) тогда и только тогда, когда зависимость x_i от y задается динамикой эллиптической системы Калоджеро-Мозера.

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - 2\sum_{i \neq j} \wp(x_i - x_j) \tag{1.17}$$

Динамика x_i по $t = t_3$ задается Гамильтоновым потоком этой же системы, задаваемым Гамильтонианом, кубичным по импульсам.

В (1.17) $\wp(x)$– $\wp$ функция Вейерштрасса, которую можно рассматривать как усреднение x^{-2} по решетке:

$$\wp(x;\omega_1,\omega_2) = \frac{1}{x^2} + \sum_{(m,n)\neq(0,0)} \left(\frac{1}{(x+2\omega_1 m + 2\omega_2 n)^2} - \frac{1}{(2\omega_1 m + 2\omega_2 n)^2} \right). \quad (1.18)$$

Хорошо известно, что $\wp$ функция Вейерштрасса становится элементарной функцией, если одна или обе ω равны бесконечности Во втором случае очевидно, что $\wp(x)$ становится просто x^{-2}. Если же мы берем предел $\omega_1 \to \infty$, то, положив$\omega_2 = \frac{\pi i}{\gamma}$, мы получим, что

$$\wp(x;\omega_1,\omega_2) \to \frac{\gamma^2}{\sinh^2(\gamma x)} + \frac{1}{3}\gamma^2. \quad (1.19)$$

Эти пределы называются рациональным и тригонометрическим вырождением эллиптических функций.

1.2 Многочастичные системы

Еще один объектом исследования в моей диссертации - это классические системы многих тел, интегрируемые по Лиувиллю, т.е. содержащие максимальное количество независимых интегралов движения. Первой открытой системой такого рода многих тел была цепочка Тоды, исследовавшаяся в работах (Toda [1967a],Toda [1967b]). Количество частиц в данной системе произвольно, рассматривается взаимодействие только между соседними частицами. Гамильтониан ее может быть записан в виде

$$H = \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i^2}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} e^{x_i - x_{i+1}}, \quad (1.20)$$

а уравнения движения которые из него получаются

$$\ddot{x}_1 = e^{x_1 - x_2} \quad (1.21)$$

$$\ddot{x}_i = e^{x_i - x_{i+1}} - e^{x_{i-1} - x_i} \quad \text{for } 1 < i < n \quad (1.22)$$

$$\ddot{x}_n = -e^{x_{n-1} - x_n}. \quad (1.23)$$

Позже, в (Calogero [1971]) была найдена система частиц, которая в которой все частиц взаимодействовали друг с другом. Однако Калоджеро рассмотрел только квантовую интегриуемость данной системы которую сейчас знают как систему Калоджера или рациональный предел системы Калоджеро-Мозера.

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 - 2\sum_{i\neq j}\frac{1}{(}(x_i - x_j)^2) \tag{1.24}$$

Позже в (Sutherland [1972]) была изучена более общая система с потенциалом взаимодействия $\sin^{-2}(x_i - x_j)$, однако снова только в квантовом случае.

Классическая интегрируемость этих систем была доказана в работах (Calogero and Marchioro [1974], Moser, J. [1974]). В последней работе Мозер показал, что уравнение движения допускают Лаксову форму, т.е. система (1.24) может быть переписана в виде

$$\dot{L} = [M, L], \tag{1.25}$$

где L и M $n \times n$ матрицы с матричными элементами

$$L_{ij} = \delta_{ij}p_i + \frac{(1-\delta_{ij})}{x_i - x_j} \tag{1.26}$$

$$M_{ij} = -2\delta_{ij}\sum_{k\neq i}\frac{1}{(x_i - x_k)^2} + \frac{2(1-\delta_{ij})}{(x_i - x_j)^2} \tag{1.27}$$

в рациональном и

$$L_{ij} = \delta_{ij}p_i + (1-\delta_{ij})\coth(\gamma(x_i - x_j)) \tag{1.28}$$

$$M_{ij} = 2\delta_{ij}\sum_{k\neq i}\frac{1}{\sinh^2(\gamma(x_i - x_k))} - \frac{2(1-\delta_{ij})}{\sinh^2(\gamma(x_i - x_j))} \tag{1.29}$$

в тригонометрическом случаях.

Матрица Лакса L оказывается важным объектом исследования классических интегрируемых систем. Уравнение (1.25) появляется почти во всех известных интегрируемых системах с некоторыми важными исключениями, такими как двойная эллиптическая система (Braden et al. [2000]) и система, которую можно получить из иерархий БКП (Rudneva and Zabrodin [2020]). Было показано, что $I_m \mathrm{tr} L^m$ являются не только сохраняющимися величинами, что очевидно из уравнения (1.25), но они также коммутируют друг с другом, что делает первые n из них интегралами движения.

В итоге в работе (Calogero [1975]) было получено эллиптическое обобщение (1.17). Для эллиптического случая представление Лакса остается верным, но матрицы L и M теперь зависят от дополнительного параметра λ, который не входит в уравнения движения.

$$L_{ij} = \delta_{ij} p_i + (1-\delta_{ij})\Phi(x_i - x_j, \lambda) \tag{1.30}$$

$$M_{ij} = -2\delta_{ij} \sum_{k\neq i} \wp(x_i - x_k) - 2(1-\delta_{ij})\Phi'(x_i - x_j, \lambda) \tag{1.31}$$

тут $\Phi(x,\lambda)$ – функция Ламе и $\Phi'(x,\lambda) = \partial_x \Phi(x,\lambda)$

$$\Phi(x,\lambda) = \frac{\sigma(x)\sigma(\lambda)}{\sigma(\lambda + x)} e^{-x\zeta(\lambda)} \tag{1.32}$$

$$\sigma(x) = \sigma(x;\omega_1,\omega_2) = x \prod_{s\neq 0} \left(1 - \frac{x}{s}\right) e^{\frac{x}{s} + \frac{x^2}{2s^2}}, \quad s = 2m\omega_1 + 2n\omega_2 \tag{1.33}$$

с целыми m, n. $\zeta(x) = \partial_x \log(\sigma(x))$ and $\wp(x) = -\zeta'(x)$.

Для исследования соответствия между системами многих тел и нелинейной дифференциальной иерархией в эллиптическом случае становится существенным зависимость матриц Лакса от λ . В тригонометрических и рациональных пределах такая зависимость может быть легко отделена.

$$L^{tr(rat)} = L^{ell}(\lambda)\Big|_{ell\to tr(rat)} + (E - I) f^{tr(rat)}(\lambda), \tag{1.34}$$

где $f^{tr}(\lambda) = \gamma(\coth(\gamma\lambda) - 1)$ и $f^{rat}(\lambda) = \dfrac{1}{\lambda}$.

Тут E – матрица, состоящая из одних единиц, а I – единичная матрица.

Поскольку $\mathrm{tr} L^m(\lambda)$ в эллиптическом случае зависят от λ, они не могу служить интегралами движения. Однако, в работе (d'Hoker and Phong [1998]) было найдено следующее выражение для спектральной кривой:

$$\det(z+\zeta(\lambda)-L(\lambda))=\frac{\sigma(\lambda-\partial_z)}{\sigma(\lambda)}I(z) \tag{1.35}$$

тут $I(z)$ полином степени n с коэффициентами – интегралами движения.

$$I(k)=\sum_{m=0}^{n} I_n z^{n-m} \tag{1.36}$$

$$I_m=e_m(\boldsymbol{p})+\sum_{l=1}^{[m/2]}\sum_{\substack{|S_i\cap S_j|=2\delta_{ij}\\ 1\le i,j\le l}} e_{m-2l}(\boldsymbol{p}_{(\cup_{i=1}^{l}S_i)^c})\prod_{i=1}^{l}\wp(S_i) \tag{1.37}$$

Где мы используем следующие обозначения $e_r(\boldsymbol{p})$ элементарный симметрический полином в переменных $\{p_i|1\le i\le n\}$, $e_r(\boldsymbol{p}_S)$ элементарный симметрический полином в переменных $\{p_i|i\in S\}$, S^c–дополнение множества S. $\wp(S)$ где $S=\{i,j\}$ множество мощности два $\wp(x_i-x_j)$. Несколько примеров:

$$\begin{aligned}
I_0&=1\\
I_1&=\sum p_i\\
I_2&=\sum{}' \left(\frac{1}{2!}p_ip_j+\frac{1}{2!}\wp(x_i-x_j)\right)\\
I_3&=\sum{}' \left(\frac{1}{3!}p_ip_jp_k+\frac{1}{2!}p_i\wp(x_j-x_k)\right)\\
I_4&=\sum{}' \left(\frac{1}{4!}p_ip_jp_kp_l+\frac{1}{2!\cdot 2!}p_ip_j\wp(x_k-x_l)+\frac{1}{2\cdot(2!)^2}\wp(x_i-x_j)\wp(x_k-x_l)\right).
\end{aligned}$$

Здесь $\sum{}'$ означает суммирование по всем различным индексам. Коэффициенты подобраны так, что бы после суммирования каждый член входил с коэффициентом 1.

В (Shiota [1994]) было показано, что что бы функция $u(x,\boldsymbol{t})=2\sum_{i=1}^{n}(x-x_i(\boldsymbol{t}))^{-2}$ была решением всей иерархии КП (1.14), динамика полюсов x_i по времени t_m должна совпадать с динамикой частиц в рациональной системе Калоджеро-Мозеро заданной Гамильтонианом $I_m=\mathrm{tr}L^m$. позже, в статьях (Haine [2007], Zabrodin [2020])Этот результат был обобщен до тригонометрического случая в котором Гамильтонианы, отвечающие за динамику по старшим временам имеют вид $H_m = \frac{1}{2(m+1)\gamma}\mathrm{tr}\left((L+\gamma I)^{m+1} - (L-\gamma I)^{m+1}\right)$. Результат для эллиптического случая был получен в Статье (Prokofev and Zabrodin [2021b]), в этом случае $H_m = \underset{z=0}{\mathrm{res}}(z^m\lambda(z))$ где $\lambda(z)$ определяется из уравнения $\det(z+\zeta(\lambda)-L(\lambda)) = 0$.

Глава 2

Тау функция и билинейное уравнение

В статье (Prokofev and Zabrodin [2021b]) одним из важнейших элементов доказательства является рассмотрение интегральной билинейной формы иерархии КП. Чтобы сделать эту диссертацию более самодостаточной, может быть полезно доказать эквивалентность двух форм: интегральной формы иерархии КП и стандартной формы в виде бесконечного набора уравнений Лакса. Этот раздел посвящен доказательству этого утверждения. Здесь мы также введем важные объекты, такие как функция Бейкера-Ахиезера и тау-функция.

Содержание этого раздела опирается на главы 5 и 6 книги (Dickey [2003]).

2.1 Функция Бейкера-Ахиезера

Рассмотрим псевдодифференциальный оператор иерархии КП

$$\mathcal{L} = \partial + \sum_{m=0}^{\infty} u_m \partial^{-m}. \tag{2.1}$$

Его можно представить в так называемой Одетой форме:

$$\mathcal{L} = \mathcal{W} \partial \mathcal{W}^{-1}, \tag{2.2}$$

где $\mathcal{W} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} w_i \partial^{-i}$ и $w_0 = 1$. Очевидно, что все коэффициенты u_n могут быть выражены через w_n.

Иерархия (1.14) может быть расширена на $\mathcal{W}$ следующим образом.

$$\partial_{t_m}\mathcal{W} = -(\mathcal{L}^m)_-\mathcal{W}. \tag{2.3}$$

Тут $\mathcal{A}_+$ –дифференциальная часть оператора $\mathcal{A}$, а $\mathcal{A}_- = \mathcal{A} - \mathcal{A}_+$.

Вообще говоря действие псевдодифференциальных операторов не определено на произвольных функциях, однако мы определим их действие на функцию $\xi(t,z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} t_k z^k$ следующим образом. $\partial^m \xi(\boldsymbol{t},z) = \partial_{t_1}^m \xi(\boldsymbol{t},z) = z^m$ и $\partial^m \exp\xi(\boldsymbol{t},z) = z^m \exp\xi(\boldsymbol{t},z)$ для m больших и меньших нуля..

Определим функцию Бейкера-Ахиезера

$$\psi(\boldsymbol{t},z) = \mathcal{W}e^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = e^{\xi(\boldsymbol{t},z)}w(\boldsymbol{t},z), \tag{2.4}$$

где $w(\boldsymbol{t},z) = \sum\limits_{i=0}^{\infty} w_i(\boldsymbol{t})z^{-i}$.

Введем сопряжение: $(f\partial)^\dagger = -\partial\cdot f = -(\partial f) - f\partial$ и обозначим $\mathcal{W}^\dagger$ сопряженный к $\mathcal{W}$, тогда сопряженная функция Бейкера-Ахиезера равна

$$\psi^*(\boldsymbol{t},z) = (\mathcal{W}^{-1})^\dagger e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)} = e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)}w^*(\boldsymbol{t},z). \tag{2.5}$$

Эти функции удовлетворяют системам:

$$\begin{cases} \mathcal{L}\psi = z\psi \\ \mathcal{A}_n\psi = \partial_n\psi \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}\psi^* = z\psi^* \\ \mathcal{A}_n\psi^* = -\partial_n\psi^* \end{cases} \tag{2.6}$$

здесь и в дальнейшем мы обозначим $\partial_n = \partial_{t_n}$.

Уравнения (1.14) можно рассматривать как условие на согласованность этих систем.

Часто интегрируемые системы как конечномерные так и бесконечномерные могут быть записаны в виде условий на согласования неких переопределенных систем таких как (2.6) на функцию, которую можно назвать функцией Бейкера-Ахиезера. Бывает полезно изучать эту функцию Бейкера-Ахиезера вместо изначальной системы, так какэто всего лишь одна функция, которая удовлетворяет системе линейных уравнений.

Для бесконечных формальных степенных рядов $P(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} p_k z^k$ и бесконечных рядов псевдодифференциальных операторов $\mathcal{P} = \sum_{-\infty}^{\infty} p_k \partial^k$ определим операции.

Definition 1. $\operatorname*{res}_z(P(z)) = p_{-1}$

Definition 2. $\operatorname*{res}_\partial(\mathcal{P}(z)) = p_{-1}$

Их можно связать с помощью простой но полезной Леммы.

Lemma 1. $\operatorname*{res}_z\left[(\mathcal{P}e^{xz}) \cdot (\mathcal{Q}e^{-xz})\right] = \operatorname*{res}_\partial(\mathcal{P}\mathcal{Q}^\dagger)$

Она доказывается прямым вычислением.

Воспользовавшись этой леммой докажем следующую теорему.

Theorem 1. *Равенство*

$$\operatorname*{res}_z[(\partial_1^{i_1}...\partial_m^{i_m}\psi)\psi^*] = 0$$

верно для всех $(i_1, ..., i_m)$ *с произвольным* m *только и если только* ψ *и* ψ^* *вида* $(1 + \sum_{k>0} a_k z^{-k})e^{\pm\xi}$ *решения (2.6).*

Перед доказательством заметим, что ее можно переписать в несколько ином виде. действительно, вместо $\operatorname*{res}_z[(\partial_1^{i_1}...\partial_m^{i_m}\psi(\boldsymbol{t}))\psi^*(\boldsymbol{t})]$ для любых $(i_1, i_2, ..., i_m)$ мы можем написать $\operatorname*{res}_z[\psi(\boldsymbol{t'})\psi^*(\boldsymbol{t})]$ для любых $\boldsymbol{t}, \boldsymbol{t'}$, где $f(\boldsymbol{t'})$ понимается как формальное разложение:

$$f(\boldsymbol{t'}) = \sum \frac{1}{i_1!...i_m!}(t'_1 - t_1)^{i_1}....(t'_m - t_m)^{i_m}\partial_1^{i_1}...\partial_m^{i_m} f(\boldsymbol{t}).$$

Это равенство в свою очередь может быть переписано в интегральном виде.

$$\oint_\infty e^{\xi(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t'},z)} w(\boldsymbol{t'}, z) w^*(\boldsymbol{t}, z) \mathrm{d}z = 0. \tag{2.7}$$

Контур интегрирования представляет собой большой круг вокруг бесконечности, разделяющий полюса, в экспоненциальном множителе от полюсов функций w и w^*.

Доказательство. Сперва мы докажем, что если ψ и ψ^* решения (2.6), то

$$\operatorname*{res}_z[(\partial_1^{i_1}...\partial_m^{i_m}\psi)\psi^*] = 0.$$

Так как $\partial_s\psi = \mathcal{A}_s\psi$ нам нужно доказать это только для случая $m = 1$.

$$\operatorname*{res}_z[(\partial^i\psi)\psi^*] = \operatorname*{res}_z[(\partial^i\mathcal{W}e^{xz})(\mathcal{W}^\dagger)^{-1}e^{-xz}] =$$
$$= \operatorname*{res}_\partial[(\partial^i\mathcal{W})\mathcal{W}^{-1}] = \operatorname*{res}_\partial(\partial^i) = 0.$$

Что завершает первую половину доказательства.

Для доказательства обратного утверждения рассмотрим $\operatorname*{res}_z[(\partial^i w(\boldsymbol{t},z)w^*(\boldsymbol{t},z)] = 0$, где $\psi(z) = e^{\xi(\boldsymbol{t},z)}\sum\limits_{i=0}^{\infty} w_i z^{-i}$ и $\psi^*(z) = e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)}\sum\limits_{i=0}^{\infty} w_i^* z^{-i}$. Определим $\mathcal{W} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} w_i\partial^{-i}$ и $\mathcal{W}^* = \sum\limits_{i=0}^{\infty}(-1)^i w_i^*\partial^{-i}$.

Используя наше предположение покажем, что

$$0 = \operatorname*{res}_z[(\partial^i\psi)\psi^*] = \operatorname*{res}_z[(\partial^i\mathcal{W}e^{\xi})\mathcal{W}^*e^{-\xi}] = \operatorname*{res}_\partial[(\partial^i\mathcal{W})(\mathcal{W}^*)^\dagger] = \operatorname*{res}_\partial[\partial^i\mathcal{W}(\mathcal{W}^*)^\dagger].$$

Это верно для всех i, тогда определим псевдодифференциальный оператор $\mathcal{X} = \mathcal{X}_-$ как $\mathcal{W}(\mathcal{W}^*)^\dagger = 1 + \mathcal{X}$, но доказанные нами уравнения означают, что $\mathcal{X} = 0$ то есть $\mathcal{W}^* = (\mathcal{W}^\dagger)^{-1}$.

Определим $\mathcal{L} = \mathcal{W}\partial\mathcal{W}^{-1}$. Для него будет верно, что

$$(\partial_m\mathcal{W} + (\mathcal{L}^m)_-\mathcal{W})e^{\xi} = (\partial_m\cdot\mathcal{W} - \mathcal{W}\partial_m + (\mathcal{L}^m)_-\mathcal{W})e^{\xi} =$$
$$= (\partial_m\cdot\mathcal{W} - \mathcal{L}^m\mathcal{W} + (\mathcal{L}^m)_-\mathcal{W})e^{\xi} = (\partial_m - (\mathcal{L}^m)_+)\mathcal{W}e^{\xi}.$$

Но из нашего допущения мы знаем, что

$$0 = \operatorname*{res}_z[(\partial^i(\partial_m - (\mathcal{L}^m)_+)\psi)\psi^*] = \operatorname*{res}_z[(\partial^i(\partial_m - (\mathcal{L}^m)_+)\mathcal{W}e^{\xi})((\mathcal{W}^\dagger)^{-1}e^{-\xi})] =$$
$$\operatorname*{res}_z[(\partial^i(\partial_m\mathcal{W} + (\mathcal{L}^m)_-\mathcal{W})e^{\xi})((\mathcal{W}^\dagger)^{-1}e^{-\xi})] = \operatorname*{res}_\partial[(\partial^i(\partial_m\mathcal{W} + (\mathcal{L}^m)_-\mathcal{W})(\mathcal{W})^{-1})]$$

Откуда следует, что $\partial_m\mathcal{W}+(\mathcal{L}^m)_-\mathcal{W} = 0$ то есть уравнения иерархии КП. $\square$

2.2 Тау функция

В предыдущем разделе было показано, что всю иерархию КП можно переписать в виде интегрального уравнения (2.7). Однако его можно упростить, выделив зависимость от z. Для этого воспользуемся следующей легко доказываемой леммой.

Lemma 2. *Если* $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^{-i}$ *формальный степенной ряд, где* $a_0 = 1$ *тогда*

$$\operatorname*{res}_z f(z)(1 - z/\zeta)^{-1} = \zeta(f(\zeta) - 1).$$

Обобщая, если $g(z, \zeta) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} b_i(\zeta) z^{-i}$ *тогда*

$$\operatorname*{res}_z [(1 - z/\zeta)^{-1}] g(z) = \zeta g_-(\zeta, z)|_{z=\zeta}$$

где $g_-(z, \zeta) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i(\zeta) z^{-i}$.

Здесь $(1 - z/\zeta)^{-1}$ понимается как ряд по ζ^{-1}.

Пусть $D(\zeta)$ оператор, действующий на ряд по z^{-1} с коэффициентами, зависящими от $\boldsymbol{t}$ следующим образом

$$D(\zeta) f(\boldsymbol{t}, z) = f(\boldsymbol{t} - [\zeta^{-1}], z). \tag{2.8}$$

где мы обозначили $[\zeta^{-1}] = (\zeta^{-1}, \zeta^{-2}/2, \zeta^{-3}/3, ...)$.

Lemma 3. *Верны следующие равенства:*

$$w^{-1}(\boldsymbol{t}, z) = D(z) w^*(\boldsymbol{t}, z)$$

и

$$\partial \log w(\boldsymbol{t}, z) = (-D(z) + 1) w_1(\boldsymbol{t}).$$

Доказательство. Совмещая уравнение $\operatorname*{res}_z [\psi(\boldsymbol{t}) \psi^*(\boldsymbol{t'})] = 0$ с $\boldsymbol{t'} = \boldsymbol{t} - [\zeta]^{-1}$ и тождество

$$\exp \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k \zeta^k} = (1 - z/\zeta)^{-\zeta}$$

получим

$$\operatorname*{res}_z[w(\boldsymbol{t})D(\zeta)w^*(\boldsymbol{t})(1-z/\zeta)] = 0.$$

Первая часть Леммы 2 позволяет преобразовать это равенство в

$$\zeta(w(\boldsymbol{t},\zeta)D(\zeta)w^*(\boldsymbol{t},\zeta) - 1) = 0.$$

Откуда сразу следует первая часть нашей Леммы.

Аналогично

$$0 = \operatorname*{res}_z[\partial\psi(z)D(\zeta)\psi^*(z)] = \operatorname*{res}_z[(\partial w(z) + zw(z))(D(\zeta)w^*(z))(1-z/\zeta)^{-1}].$$

Пользуясь второй частью леммы 2 получим

$$0 = [(\partial w(z) + zw(x))D(\zeta)w^*(z)]_-|_{z=\zeta} = (\partial w(\zeta) + \zeta w(\zeta))D(\zeta)w^*(\zeta) -$$
$$-\zeta - w_1 + D(\zeta)w_1 = (\partial w(\zeta))w^{-1}(\zeta) - (1 - D(\zeta))w_1$$

Что доказывает вторую часть леммы. □

Мы показали, что производная $w(\boldsymbol{t},z)$ по t_1 может быть выражена только через функцию, не зависящую от z, а зависимость от z спрятана в сдвиг аргументов. Замечательный результат заключается в том, что таким же образом можно выразить саму $w(\boldsymbol{t},z)$.

Theorem 2. *Существует функция $\tau(\boldsymbol{t})$ такая, что*

$$\log w(\boldsymbol{t},z) = (D(z)-1)\log\tau(\boldsymbol{t})$$

или, переписывая,

$$w(\boldsymbol{t},z) = \frac{\tau(\boldsymbol{t} - [z^{-1}])}{\tau(\boldsymbol{t})}. \tag{2.9}$$

Так как решение (2.6) может быть умножено на любую функцию от z, τ-функция определена так же с точностью до умножения на $c\exp\sum\limits_{i=1}^{\infty} c_i t_i$, где $c, c_1, c_2, \ldots$-произвольные константы.

Доказательство. Рассмотрим оператор $N(z) = \partial_z - \sum\limits_{j=1}^{\infty} z^{-j-1}\partial_j$, который обнуляет все функции вида $D(z)f(\boldsymbol{t})$ более того, для функций вида $f = \sum\limits_{i=0}^{\infty} f_i z^{-i-1}$ если $N(z)f = 0$, то $f = 0$.

Применяя $N(z)$ к $\log w(\boldsymbol{t}, z) = (D(z) - 1)\log \tau(\boldsymbol{t})$ мы получим набор уравнений:

$$a_i = \partial_i \log \tau = \operatorname*{res}_z z^i \left(-\sum_{j=1}^{\infty} z^{-j-1}\partial_j + \partial_z \right) \log w.$$

Условием того, что эта система самосогласована и согласована с уравнениями из леммы 3 необходимо, что бы $\partial a_i = -\partial_i w_1$ и $\partial_j a_i = \partial_i a_j$.

Первая часть проверяется простым вычислением, из нее следует, что $\partial(\partial_j a_i - \partial_i a_j) = 0$, но с другой стороны $(\partial_j a_i - \partial_i a_j)$ должен быть дифференциальным полиномом в переменных w_i, которые независимые функции. То что его производная равна нулю означает, что он постоянен. Но просто вычисление для случая $w_i = 0$ показывает, что эта константа должна быть нулевой.

$\square$

Равенство (2.9) вместе с первой частью леммы 3 означает, что

$$w^*(\boldsymbol{t}, z) = \frac{\tau(\boldsymbol{t} + [z^{-1}])}{\tau(\boldsymbol{t})}. \tag{2.10}$$

Окончательно мы можем переписать (2.7) как интегральное уравнение на функцию $\tau(\boldsymbol{t})$ этот вид также называют интегральным билинейным уравнением Хироты.

$$\oint_{\infty} e^{\xi(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t'}, z)} \tau(\boldsymbol{t} - [z^{-1}])\tau(\boldsymbol{t} + [z^{-1}]) \mathrm{d}z = 0 \tag{2.11}$$

Глава 3

Дальнейшие обобщения

В этом разделе будут показаны способы обобщения иерархии КП на иерархию двумеризованной цепочки Тоды Тоды и матричного КП. Для обоих этих систем динамика полюсов была получена в главах 2 и 3 для тригонометрических решений, а в главах 5 и 6 эти результаты обобщены на эллиптический случай.

3.1 Модифицированное КП

Содержание этого раздела основано на главе 13 (Dickey [2003]).

Напишем псевдодифференциальный оператор $\mathcal{L}$ иерархии КП, и добавим к нему бесконечно много функций v_i для всех $i \in \mathbb{Z}$, определяя бесконечное число новых псевдодифференциальных операторов как

$$\mathcal{L}_i = (\partial + v_{i-1})...(\partial + v_0)\mathcal{L}(\partial + v_0)^{-1}...(\partial + v_{i-1})^{-1} \quad \text{for } i > 0 \tag{3.1}$$

$$\mathcal{L}_{-i} = (\partial + v_{-i})^{-1}...(\partial + v_{-1})^{-1}\mathcal{L}(\partial + v_{-1})...(\partial + v_{-i}) \quad \text{for } i > 0 \tag{3.2}$$

$$\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}. \tag{3.3}$$

Таким образом получим очевидную реккурсию

$$\mathcal{L}_{i+1}(\partial + v_i) = (\partial + v_i)\mathcal{L}_i. \tag{3.4}$$

Зададим динамику на v_i по времени t_k уравнением

$$\partial_k v_i = (\mathcal{L}_{i+1}^k)_+(\partial + v_i) - (\partial + v_i)(\mathcal{L}_i^k)_+. \tag{3.5}$$

Легко показать, что в этом случае

$$\partial_k \mathcal{L}_i = [(\mathcal{L}_i^k)_+, \mathcal{L}_i]. \tag{3.6}$$

Можно определить одевающие операторы для каждого $\mathcal{L}_i$

$$\mathcal{W}_i \mathcal{L}_i \mathcal{W}_i^{-1} = \partial \tag{3.7}$$

где $\mathcal{W}_i = \sum_{\alpha=0}^{\infty} w_{i\alpha}\partial^{-\alpha}$, в котором $w_{i0} = 1$. Очевидно, что

$$(\partial + v_i)\mathcal{W}_i = \mathcal{W}_{i+1} \cdot \partial. \tag{3.8}$$

Использую подход аналогичный использованным в разделе 2.1 Введем функции Бейкера-Ахиезера

$$\psi_i(\boldsymbol{t}, z) = \mathcal{W}_i e^{\xi}$$
$$\mathcal{L}_i \psi_i = z\psi_i, \quad (\partial + v_i)\psi_i = z\psi_{i+1}$$

и сопряженные функции Бейкера-Ахиезера.

$$\psi_i^*(\boldsymbol{t}, z) = (\mathcal{W}_i^\dagger)^{-1} e^{-\xi}$$
$$\mathcal{L}_i^\dagger \psi_i = z\psi_i^*, \quad (\partial - v_i)\psi_{i+1}^* = -z\psi_i^*.$$

По аналогии с леммой 3 докажем

Lemma 4. *Для двух формальных рядов*

$$\psi_i = \sum_\alpha w_{i\alpha} z^{-\alpha} e^{\xi}, \quad \psi^* = \sum_\alpha w_{i\alpha}^* z^{-\alpha} e^{\xi}$$

с $w_{i0} = w^*_{i0} = 1$ *Следующие два утверждения эквивалентны*

1) ψ_i *and* ψ^*_i *–функции и сопряженные функции Бейкера Аккиезера иерархии мКП.*

2) $\operatorname{res}_z[z^{i-j}(\partial_1^{k_1}...\partial_m^{k_m}\psi_i)\psi^*_j] = 0$ *для* $i \geq j$ *и произвольного набора* $(k_1, ..., k_m)$*.*

Доказательство. Для начала докажем, что если выполнено первое условие, то второе условие тоже выполнено.

Подобно аналогичному доказательству для Кп, очевидно, что нам необходимо рассмотреть только случай $(k, 0, 0, ..., 0)$, так как $\partial_s\psi_i = (\mathcal{L}^s_i)_+\psi_i$.

$$\begin{aligned}\operatorname{res}_z[z^{i-j}(\partial^k\psi_i)\psi^*_j] = \operatorname{res}_z[(\partial^k\mathcal{W}_i\partial^{i-j}e^{\xi})((\mathcal{W}^\dagger_j)^{-1}e^{-xi})] = \operatorname{res}_\partial[(\partial^k\mathcal{W}_i\partial^{i-j})\mathcal{W}^{-1}_j] = \\ = \operatorname{res}_\partial[(\partial^k(\partial + v_{i-1})...(\partial + v_j)\mathcal{W}_j\mathcal{W}^{-1}_j] = 0.\end{aligned}$$

Теперь докажем обратное утверждение. Если $i = j$, то это просто случай иерархии КП, и мы уже доказали, что если $\operatorname{res}_z[(\partial_1^{k_1}...\partial_m^{k_m}\psi_i)\psi^*_i] = 0$, тогда psi_i и psi^*_i – функции Бейкера-Ахиезера иерархии КП для псевдодифференциального оператора $\mathcal{L}_i$. Нам осталось доказать, что эти операторы связаны уравнением (3.4). Для этого мы рассмотрим случай $i = j + 1$ и $(k, 0, 0, ..., 0)$.

$$0 = \operatorname{res}_z[z(\partial^k\psi_{j+1})\psi^*_j] = \operatorname{res}_z[(\partial^k\mathcal{W}_{j+1}\partial e^{\xi})((\mathcal{W}^\dagger_j)^{-1}e^{-\xi})] = \operatorname{res}_\partial[\partial^k\mathcal{W}_{j+1}\partial\mathcal{W}^{-1}_j].$$

Это означает, что $\mathcal{W}_{j+1}\partial\mathcal{W}^{-1}_j$ просто дифференциальный оператор первого порядка со старшим коэффициентом 1. Мы можем обозначить его $\mathcal{W}_{j+1}\partial\mathcal{W}^{-1}_j = \partial + v_j$. Откуда сразу следует уравнение (3.4).

□

Так как каждая ψ_i решение иерархии КП, то мы можем применить результаты теоремы 2 что бы переписать доказанную лемму как утверждению, что иерархия мКП эквивалентна интегральным билинейным уравнениям:

$$\oint_\infty z^{n-m}e^{\xi(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{t'},z)}\tau_n(\boldsymbol{t} - [z^{-1}])\tau_m(\boldsymbol{t} + [z]^{-1})\mathrm{d}z = 0 \tag{3.9}$$

для $n \geq m$.

Но для наших целей будет удобно по-другому взглянуть на иерархию мКП как на половину более общей иерархии двумеризованной цепочки Toda.

3.2 $\mathfrak{gl}((\infty))$ алгебра и иерархия двумеризованной цепочки Тоды

Этот раздел основан на статье (Ueno and Takasaki [1984]).

Рассмотрим формальную алгебру Ли $\mathfrak{gl}((\infty))$

Пусть Λ^j – матрица j смещения $\Lambda^j = (\delta_{\mu+j,\nu})_{\mu,\nu\in\mathbb{Z}}$ а E_{ij} – матрица, с единственным ненулевым элементом на позиции (i,j): $E_{ij} = (\delta_{\mu i}\delta_{\nu j})_{\mu,\nu\in\mathbb{Z}}$. Пусть $\mathfrak{gl}((\infty))$ формальная алгебра Ли состоящая из всех $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ матриц

$$\mathfrak{gl}((\infty)) = \left\{\sum_{i,j\in\mathbb{Z}} a_{ij}E_{ij} | a_{ij}\in\mathbb{C}\right\}. \tag{3.10}$$

Матрицу $A\in\mathfrak{gl}((\infty))$ можно написать в виде

$$A = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \mathrm{diag}[a_j(s)]\Lambda^j \tag{3.11}$$

здесь $\mathrm{diag}[a_j(s)]$ обозначает диагональную матрицу $\mathrm{diag}(..., a_j(-1), a_j(0).a_j(1), ...)$. Определим положительную/отрицательную часть матрицы $A : (A)_+ = \sum_{j\geq 0} \mathrm{diag}[a_j(s)]\Lambda^j$ and $(A)_- = \sum_{j<0} \mathrm{diag}[a_j(s)]\Lambda^j$.

Если $a_j(s) = 0$ для всех $j > m$ скажем, что матрица A степени меньшей чем m.Если $a_j(s) = 0$ для всех $j < m$ скажем, что матрица A порядка большего чем m. Если обе матрицы A и B меньше или больше чем некоторое m, то произведение AB хорошо определено.

Каждой матрице A можно поставить в соответствие разностный оператор.

$$\mathcal{A}(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j(x)e^{j\eta\partial_x} \tag{3.12}$$

где оператор $e^{j\partial_s}$ определяется своим действием на функции $e^{j\eta\partial_s}f(x) = f(x+$

$j\eta$).

Definition 3. *Зададим два бесконечных набора времен* $\boldsymbol{t}_+$ *и* $\boldsymbol{t}_-$. *Пусть* $L, \bar{L}$ *и* M_n *для* $n \in \mathbb{Z}/\{0\}$ *элементы* $\mathfrak{gl}((\infty))$ *такие что*

$$L = \sum_{j\leq 1} \mathrm{diag}[l_j(s)]\Lambda^j \quad \textit{где } l_1(s) = 1 \textit{ для любых } s \tag{3.13}$$

$$\bar{L} = \sum_{-1\leq j} \mathrm{diag}[\bar{l}_j(s)]\Lambda^j \quad \textit{где } \bar{l}_{-1}(s) \neq 0 \textit{ для любых } s \tag{3.14}$$

$$M_{n>0} = (L^n)_+ \qquad\qquad B_{n<0} = (\bar{L}^{-n})_-. \tag{3.15}$$

Иерархия двумеризованной цепочки Тоды это система уравнений

$$\partial_n L = [M_n, L] \quad \partial_n \bar{L} = [M_n, \bar{L}]. \tag{3.16}$$

То же, что и для иерархии КП, можно доказать, что вторые производные коммутируют. В случае положительных или отрицательных значений m и n доказательство такое же, как и в случае КП. Следующая цепочка равенств докажет это для времен из разных потоков:

$$\begin{aligned}
\partial_n\partial_{-m}L - \partial_{-m}\partial_n L = \partial_n[\bar{L}^m_-, L] - \partial_{-m}[L^n_+, L] = \\
[L^n_+, \bar{L}^m]_- L + \bar{L}^m_-[L^n_+, L] - L[L^n_+, \bar{L}^m]_- - [L^n_+, L]\bar{L}^m_- - \\
-[\bar{L}^m_-, L^n]_+ L - L^n_+[\bar{L}^m_-, L] + L[\bar{L}^m_-, L^n]_+ + [\bar{L}^m_-, L]L^n_+ \\
= [L^n_+, \bar{L}^m]L + (\bar{L}^m_- L^n_+ - L^n_+\bar{L}^m_-)L - L[L^n_+, \bar{L}^m] + L(L^n_+\bar{L}^m_- - \bar{L}^m_- L^n_+) = 0.
\end{aligned}$$

Теперь мы докажем несколько лемм, которые помогут нам получить выражение для иерархии цепочки Тоды в билинейной форме:

Lemma 5. *Существуют две матрицы* W *и* $\bar{W}$ *следующего вида*

$$W = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{diag}[w_j(s)]\Lambda^{-j} \tag{3.17}$$

$$\bar{W} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{diag}[\bar{w}_j(s)]\Lambda^j \tag{3.18}$$

с $w_0(s) = 1$ и $\bar{w}_0(s) \neq 0$ для всех s такие, что $L = W\Lambda W^{-1}$, $\bar{L} = \bar{W}\bar{\Lambda}^{-1}\bar{W}^{-1}$ и они удовлетворяют уровнениям

$$\partial_n W = -L_-^n W \quad \partial_{-n} W = \bar{L}_-^n W \quad n > 0 \tag{3.19}$$

$$\partial_n \bar{W} = L_+^n \bar{W} \quad \partial_{-n} W = -\bar{L}_+^n \bar{W} \quad n > 0. \tag{3.20}$$

Кроме того они обе определены с точностью до

$$W \to WF^-(\Lambda) \quad \bar{W} \to \bar{W}F^+(\Lambda), \tag{3.21}$$

где $F^\pm(\Lambda) = \sum\limits_{j \geq 0} f_j^\pm \Lambda^{\pm j}$.

Доказательство. Прямым вычислением можно убедится в том, что система (3.19)-(3.20) согласована.

Ясно, что существуют некоторые постоянные матрицы W_0 и $\bar{W}_0$ вида (3.17) и (3.18) соответственно такие, что

$$L = W_0 \Lambda W_0^{-1} \quad \bar{L} = \bar{W}_0 \bar{\Lambda} \bar{W}_0^{-1}.$$

Рассмотрим задачу Коши для (3.19) и (3.20) с начальными условиями W_0, $\bar{W}_0$.

Прямым вычислением удостоверяемся в том, что, $LW - WL$ и $\bar{L}\bar{W} - \bar{W}\bar{L}$ решают одну и ту же систему с нулевым начальным условием, а значит, по единственности решения это должно быть нулевое решение,то есть мы построили W и $\bar{W}$ как в требовалось в лемме. □

Используя эту лемму можно показать, что матрицы $\Psi = We^{\xi(\boldsymbol{t}_+,\Lambda)}$ и $\bar{\Psi} = \bar{W}e^{\xi(\boldsymbol{t}_-,\Lambda^{-1})}$ решения следующих линейных задач:

$$L\Psi = \Psi\Lambda, \quad \partial_n \Psi = M_n \Psi \tag{3.22}$$

$$\bar{L}\bar{\Psi} = \bar{\Psi}\Lambda^{-1}, \quad \partial_n \bar{\Psi} = M_n \bar{\Psi}. \tag{3.23}$$

$L\Psi = LWe^{\xi(\boldsymbol{t}_+,\Lambda)} = W\Lambda e^{\xi(\boldsymbol{t}_+.\Lambda)} = \Psi\Lambda$ и для $n > 0$ $\partial_n \Psi = -L_-^n \Psi + \Psi\Lambda^n = (-L_-^n + L^n)\Psi = M_n \Psi$ Остальные вычисления схожи.

Мы доказали, что

$$M_n = (\partial_n \Psi)\Psi^{-1} = (\partial_n \bar{\Psi})\bar{\Psi}^{-1} \tag{3.24}$$

и даже

$$(\partial_{i_k}^{n_k} ... \partial_{i_1}^{n_1}\Psi)\Psi^{-1} = (\partial_{i_k}^{n_k} ... \partial_{i_1}^{n_1}\bar{\Psi})\bar{\Psi}^{-1} \tag{3.25}$$

для любых $(i_1, ... i_k) \in (\mathbb{Z}/\{0\})^k$ и $(n_1, ... n_k) \in (\mathbb{N}^*)^k$.

Это может быть переписано как

$$\Psi(\boldsymbol{t}_+, \boldsymbol{t}_-)\Psi^{-1}(\boldsymbol{t'}_+, \boldsymbol{t'}_-) = \bar{\Psi}(\boldsymbol{t}_+, \boldsymbol{t}_-)\bar{\Psi}^{-1}(\boldsymbol{t'}_+, \boldsymbol{t'}_-) \tag{3.26}$$

Для любых $s, s', \boldsymbol{t}_+.\boldsymbol{t}_-, \boldsymbol{t'}_-, \boldsymbol{t'}_+,$

Это уравнение похоже на аналогичные для иерархий КП и мКП. Как и в случае с КП и мКП можно доказать, что уравнение (3.26) определяют всю иерархию. Сходство с иерархиями мКП и КП можно продолжить. По

$$W = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{diag}[w_j(s)]\Lambda^{-j}, \quad W^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{-j}\mathrm{diag}[w_j^*(s+1)],$$
$$\bar{W} = \sum_{j=0}^{\infty} \mathrm{diag}[\bar{w}_j(s)]\Lambda^{j}, \quad \bar{W}^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \Lambda^{j}\mathrm{diag}[\bar{w}_j^*(s+1)]$$

определим

$$\psi(s,z) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j(s) z^{s-j} e^{\xi(\boldsymbol{t}_+, z)}, \quad \psi^*(s,z) = \sum_{j=0}^{\infty} w_j^*(s) z^{-j-s} e^{-\xi(\boldsymbol{t}_+, z)},$$
$$\bar{\psi}(s,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{w}_j(s) z^{j+s} e^{\xi(\boldsymbol{t}_-, z^{-1})}, \quad \bar{\psi}^*(s,z) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{w}_j^*(s) z^{j-s} e^{-\xi(\boldsymbol{t}_-, z^{-1})}.$$

Тогда уравнение (3.26) может быть переписано в виде

$$\oint_{\infty} \psi(s,z;\boldsymbol{t}_+, \boldsymbol{t}_-)\psi^*(s',z;\boldsymbol{t'}_+, \boldsymbol{t'}_-)\frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} = \oint_{0} \bar{\psi}(s,z;\boldsymbol{t}_+, \boldsymbol{t}_-)\bar{\psi}^*(s',z;\boldsymbol{t'}_+, \boldsymbol{t'}_-)\frac{\mathrm{d}z}{2\pi i}. \tag{3.27}$$

В случае $s \geq s'$ и $\boldsymbol{t}_- = \boldsymbol{t'}_-$ правая сторона равна нулю и мы получаем уравнение мКП в билинейной форме. Введем тау-функции.

$$\psi(s,z,\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_-) = z^s e^{\xi(\boldsymbol{t}_+,z)} \frac{\tau_s(\boldsymbol{t}_+ - [z^{-1}],\boldsymbol{t}_-)}{\tau_s(\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_-)} \tag{3.28}$$

$$\psi^*(s,z,\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_-) = z^{-s} e^{\xi(\boldsymbol{t}_+,z)} \frac{\tau_s(\boldsymbol{t}_+ + [z^{-1}],\boldsymbol{t}_-)}{\tau_s(\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_-)}. \tag{3.29}$$

По аналогии введем r_n и r_n^* так что

$$\bar\psi(s,z,\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_-) = z^s e^{\xi(\boldsymbol{t}_-,z^{-1})} r_s(z,;\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_-) = z^s e^{\xi(\boldsymbol{t}_-,z^{-1})} \sum_{j\ge 0} r_{s,j} z^j \tag{3.30}$$

$$\bar\psi^*(s,z,\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_-) = z^{-s} e^{-\xi(\boldsymbol{t}_-,z^{-1})} r_s^*(z,;\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_-) = z^{-s} e^{-\xi(\boldsymbol{t}_-,z^{-1})} \sum_{j\ge 0} r_{s,j}^* z^j. \tag{3.31}$$

Применяя вычисления, похожие на вычисления из леммы 3 для разных выборов $s-s', \boldsymbol{t}'_- - \boldsymbol{t}_-, \boldsymbol{t}'_+ - \boldsymbol{t}_+$ мы можем доказать следующие равенства:

$$r_s^{-1}(z) = D_-(z^{-1}) r_{s+1}^*(z), \qquad \text{для } \boldsymbol{t}'_+ = \boldsymbol{t}_+,\ \boldsymbol{t}'_- = \boldsymbol{t}_- + [z],\ s' = s+1$$

$$\frac{r_s(z)}{r_{s-1}(z)} = \frac{D_-(z^{-1}) r_{s,0}}{r_{s-1,0}} \qquad \text{для } \boldsymbol{t}'_+ = \boldsymbol{t}_+,\ \boldsymbol{t}'_- = \boldsymbol{t}_- + [z],\ s' = s+2$$

$$\frac{D_+(\zeta)\tau_s D_-(z^{-1})\tau_{s+1}}{\tau_s D_+(\zeta) D_-(z^{-1})\tau_{s+1}} = \frac{r_s(z)}{D_+(\zeta) r_s(z)} \quad \text{для } \boldsymbol{t}'_+ = \boldsymbol{t}_+ + [\zeta^{-1}],\ \boldsymbol{t}'_- = \boldsymbol{t}_- + [z],\ s' = s+1.$$

Объединяя последние два уравнения находим, что

$$\bar\psi(s,z,\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_-) = z^s e^{\xi(\boldsymbol{t}_-,z^{-1})} \frac{\tau_{s+1}(\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_- - [z])}{\tau(\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_-)} \tag{3.32}$$

$$\bar\psi^*(s,z,\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_-) = z^{-s} e^{-\xi(\boldsymbol{t}_-,z^{-1})} \frac{\tau_{s-1}(\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_- + [z])}{\tau(\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_-)}. \tag{3.33}$$

В конце концов получаем интегральное уравнение на тау функцию двумеризованной цепочки Тоды

$$\begin{aligned} &\oint\limits_{\infty} z^{s'-s} e^{\xi(\boldsymbol{t}_+,z)-\xi(\boldsymbol{t}'_+,z)} \tau_s(\boldsymbol{t}_+ - [z^{-1}],\boldsymbol{t}_-)\tau_{s'}(\boldsymbol{t}'_+ + [z^{-1}],\boldsymbol{t}'_-)\frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} = \\ &= \oint\limits_{0} z^{s'-s} e^{\xi(\boldsymbol{t}_-,z^{-1})-\xi(\boldsymbol{t}'_-,z^{-1})} \tau_{s+1}(\boldsymbol{t}_+,\boldsymbol{t}_- - [z])\tau_{s'-1}(\boldsymbol{t}'_+,\boldsymbol{t}'_- + [z])\frac{\mathrm{d}z}{2\pi i}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Или же, если считать n не дискретным переменным, а непрерывным и ввести $x = \eta n$, тогда это интегральное уравнение перепишется в виде

$$\oint_{\infty} z^{\eta(x'-x)} e^{\xi(\boldsymbol{t}_+,z)-\xi(\boldsymbol{t}'_+,z)} \tau(x, \boldsymbol{t}_+ - [z^{-1}], \boldsymbol{t}_-)\tau(x', \boldsymbol{t}'_+ + [z^{-1}], \boldsymbol{t}'_-)\frac{\mathrm{d}z}{2\pi i} =$$
$$= \oint_{0} z^{\eta(x'-x)} e^{\xi(\boldsymbol{t}_-,z^{-1})-\xi(\boldsymbol{t}'_-,z^{-1})} \tau(x+\eta, \boldsymbol{t}_+, \boldsymbol{t}_- - [z])\tau(x'-\eta, \boldsymbol{t}'_+, \boldsymbol{t}'_- + [z])\frac{\mathrm{d}z}{2\pi i}. \tag{3.35}$$

3.3 Мультикомпонентная иерархия КП

Содержание этого раздела основано на статье (Dickey [1997]).

Еще одно обобщение иерархии КП получается, если рассматривать коэффициенты u_m оператора $\mathcal{L}$ из (2.1) как $n \times n$ матрицы

$$\boldsymbol{L} = \partial + U_1\partial^{-1} + U_2\partial^{-2} + ... \tag{3.36}$$

Введем времена : $t_{k\alpha}$, где $k > 0$, а $1 \leq \alpha \leq n$.

Для задания динамики по временам, введем операторы $\boldsymbol{R}_\alpha$ такие, что $\boldsymbol{R}_\alpha \boldsymbol{R}_\beta = \delta_{\alpha\beta}\boldsymbol{R}_\alpha$, $[\boldsymbol{R}_\alpha, \boldsymbol{L}] = 0$ и $\sum\limits_{\alpha} \boldsymbol{R}_\alpha = 1$ (здесь и в дальнейшем суммирование по греческим индексам будет проходить в диапазоне от 1 до n).

Теперь определим операторы $\boldsymbol{B}_{k\alpha} = (\boldsymbol{L}^k \boldsymbol{R}_\alpha)_+$ тут, как и в обычном КП $()_+$ означает взятиетолько дифференциальной части оператора. Определим динамику

$$\partial_{k\alpha}\boldsymbol{L} = [\boldsymbol{B}_{k\alpha}, L]. \tag{3.37}$$

Из этого определения следует, что $\sum\limits_{\alpha} \partial_{1\alpha} = \partial$.

Аналогично случаю КП введем одевающий оператор $\boldsymbol{W} = I + \sum\limits_{k>0} W_k \partial^{-k}$: $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{W}\partial\boldsymbol{W}^{-1}$. Теперь видно, что операторы $\boldsymbol{R}_\alpha$ могут быть записаны как $\boldsymbol{R}_\alpha = \boldsymbol{W} E_\alpha \boldsymbol{W}^{-1}$, R_α в этом случае они будут удовлетворять всем условиям. Тут $(E_\alpha)_{ij} = \delta_{i\alpha}\delta_{j\alpha}$.

Также введем Функцию Бейкера-Ахиезера и сопряженную функцию Бейкера-

Ахиезера

$$\Psi = \boldsymbol{W} e^{\xi(\boldsymbol{t},z)} = e^{\xi(\boldsymbol{t},z)} W \tag{3.38}$$

$$\Psi^* = (\boldsymbol{W}^\dagger)^{-1} e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)} = e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)} (W^*)^{-1} \tag{3.39}$$

тут $\xi(\boldsymbol{t},z) = \sum\limits_{k\geq 0}\sum\limits_{\alpha} z^k E_\alpha t_{k\alpha}$.

Эти функции являются решениями соответствующих линейных задач.

$$\boldsymbol{L}\Psi = z\Psi \qquad \boldsymbol{L}^\dagger\Psi^* = z\Psi^* \tag{3.40}$$

$$\partial_{n\alpha}\Psi = \boldsymbol{B}_{n\alpha}\Psi \quad \partial_{n\alpha}\Psi^* = -\boldsymbol{B}^\dagger_{n\alpha}\Psi^*. \tag{3.41}$$

Также как и в скалярном случае имеет место теорема 1:

Theorem 3. *Тождество*

$$\operatorname*{res}_z[(\partial^{i_1}_{k_1\alpha_1}...\partial^{i_m}_{k_m\alpha_m}\Psi)\Psi^*] = 0$$

выполнено для всех $(i_1,...,i_m)\in(\mathbb{N}^*)^m$, $(k_1,...,k_m)\in(\mathbb{N}^*)^m$ *и* $(\alpha_1,...,\alpha_m)\in[1,n]^m$ *если и только если* Ψ *и* Ψ^* *вида* $(I+\sum\limits_{k>0} A_i z^{-i})e^{\pm\xi}$ *решения (3.38).*

Оно может быть переписано в интегральном виде

$$\oint\limits_{\infty} \Psi(z;\boldsymbol{t})\Psi^*(z;\boldsymbol{t}')\mathrm{d}z = 0. \tag{3.42}$$

Можно обобщить понятие τ-функции.

Для начала введем операторы $D_\alpha(z) = \exp\left(-\sum\limits_{k>1}\frac{\partial_{k\alpha}}{z^k k}\right)$ действующие сдвигами α времен на вектор $[z^{-1}]$. $D_\alpha(z)f(\boldsymbol{t}) = f(...,t_{k\gamma}-\delta_{\alpha\gamma}(1/k)z^{-k},...)$.

Как и в случае доказательства существования τ-функции для КП воспользуемся тождествами $D_\alpha(\zeta)e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)} = (I - E_\alpha + (1-\zeta/z)^{-1}E_\alpha)e^{-\xi(\boldsymbol{t},z)}$.

Рассматривая (β,β)ый и (α,β)ый элементы в равенстве (3.42) с $t'_{k\gamma} = t_{k\gamma} + \delta_{\beta\gamma}\dfrac{1}{k\zeta^k}$ получим уравнения

$$W_{\beta\beta}D_\alpha W^*_{\beta\beta} = 1 \tag{3.43}$$

$$\zeta\frac{W_{\alpha\beta}(\zeta)}{W_{\beta\beta}(\zeta)} = D_\beta(\zeta)W_{1,\alpha\beta}. \tag{3.44}$$

Рассматривая (β,β)ый элемент уравнения (3.42) с $t'_{k\gamma} = t_{k\gamma} + \delta_{\beta\gamma}\left(\frac{1}{k\zeta_1^k} + \frac{1}{k\zeta_2^k}\right)$ получим

$$\frac{D_\beta(\zeta_1)W_{\beta\beta}(\zeta_2)}{W_{\beta\beta}(\zeta_2)} = \frac{D_\beta(\zeta_2)W_{\beta\beta}(\zeta_1)}{W_{\beta\beta}(\zeta_1)}. \tag{3.45}$$

Введем функцию $f_\beta = \log W_{\beta\beta}$, тогда это уравнение может быть переписано как

$$(D_\beta(\zeta_1) - 1)f_\beta(\zeta_2) = (D_\beta(\zeta_2) - 1)f_\beta(\zeta_1) \tag{3.46}$$

Комбинируя это уравнение с уравнениями, полученными при взятии (α,α)ого, (α,β)ого, (β,β)ого и (β,α)ого элемента с параметрами $t'_{k\gamma} = t_{k\gamma} + \left(\delta_{\beta\gamma}\frac{1}{k\zeta_1^k} + \delta_{\alpha\gamma}\frac{1}{k\zeta_2^k}\right)$ можно показать, что

$$(D_\alpha(\zeta_1) - 1)f_\beta(\zeta_2) = (D_\beta(\zeta_2) - 1)f_\alpha(\zeta_1). \tag{3.47}$$

Как и в случае КП покажем, что существует функция τ такая что $f_\alpha(z) = (D_\alpha(z) - 1)\log\tau$.

Введем операторы $N_\alpha(z) = \sum\limits_{j\geq 0} z^{-j-1}\partial_{j\alpha} + \partial_z$ такие что $N_\alpha(z)D_\alpha(z)f(\boldsymbol{t}, z) = 0$ и применяя их к (3.47) получим

$$D_\beta(\zeta_2)N_\alpha(\zeta_1)f_\alpha(\zeta_1) - N_\alpha f_\alpha(\zeta_1) = -\sum_{j\geq 0}\zeta^{-j-1}\partial_{j\alpha}f_\beta(\zeta_2). \tag{3.48}$$

Умножив это на ζ_1^i и беря вычет $\operatorname*{res}\limits_{\zeta_1}$ получим

$$b_{i\alpha} \equiv \operatorname*{res}_{\zeta_1}\zeta_1^i N_\alpha(\zeta_1)f_\alpha(\zeta_1) = D_\beta(\zeta_2)\operatorname*{res}_{\zeta_1}\zeta_1^i N_\alpha(\zeta_1)f_\alpha(\zeta_1) + \partial_{i\alpha}f_\beta(\zeta_2) \tag{3.49}$$

Что значит, что

$$b_{i\alpha} = D_\beta(\zeta_2) b_{i\alpha} + \partial_{i\alpha} f_\beta(\zeta_2). \tag{3.50}$$

Так как (i, α) произвольные, то мы можем продифференцировать это равенство п о$t_{j\gamma}$, а потом поменять индексы и вычесть одно из другог, получив

$$(D_\beta(\zeta_2) - 1)(\partial_{j\gamma} b_{i\alpha} - \partial_{i\alpha} b_{j\gamma}). \tag{3.51}$$

Так как в ядре оператора $(D_\beta(\zeta_2) - 1)$ только постоянные по всем временам функции, то применим тот же аргумент, что и в случае с КП для доказательства того, что $\partial_{j\gamma} b_{i\alpha} - \partial_{i\alpha} b_{j\gamma} = 0$, это значит, что мы можем ввести τ такое что $b_{i\alpha} = \partial_{i\alpha} \log \tau$. Тау функция определена с точностью до умножения на $c(z)$, однако эту неоднозначность можно спрятать в определение функции Бейкера-Ахиезера , которая определена тоже с точностью до умножения на постоянную,по всем временам матрицу, зависящую только от z.

Пользуясь 3.44 определим $\tau_{\alpha\beta} = \tau W_{1,\alpha\beta}$ и

$$W_{\alpha\beta}(z; \boldsymbol{t}) = \frac{1}{z} \frac{D_\beta(z) \tau_{\alpha\beta}(\boldsymbol{t})}{\tau(\boldsymbol{t})}, \ \alpha \neq \beta. \tag{3.52}$$

Если мы обозначим $t_i = \frac{1}{n} \sum\limits_\alpha t_{i\alpha}$ так что бы $\partial_n = \sum\limits_\alpha \partial_{n\alpha}$ и будем интересоваться только зависимостью от t_n , мы получим так называемую иерархию матричного КП.

Глава 4

Основные результаты

4.1 Иерархия КП

Эта диссертация продолжает серию работ, начатую с (Airault et al. [1977]), где авторы рассмотрели сингулярные решения уравнения КдФ и показали, что его полюса регулируются динамикой кубического гамильтониана системы Калоджеро-Мозера в специальном локусе, где H_2 равно нулю. Следуя известным результатам Кричевера (Krichever [1978]) и (Krichever [1980]), где он показал, что связь между полюсными решениями нелинейных уравнений в частных производных и многочастичными системами становится более естественной для уравнения КП. Шиота в (Shiota [1994]) обобщил этот результат на всю иерархию для рационального случая. Он показал, что полюса рациональных решений иерархии КП эволюционируют относительно времени КП t_m как частицы рациональной модели Калоджеро-Мозера, под действием Гамильтониана. $H_m = \mathrm{tr} L^m$ с матрицей L рационального Калоджеро-Мозера (1.26).

Позже этот результат был обобщен в работах (Haine [2007]) и (Zabrodin [2020]) на тригонометрические решения с гамильтонианами следующего вида, определяющими динамику по временам

$H_m = \dfrac{1}{2(m+1)\gamma} \mathrm{tr}\left((L+\gamma I)^{m+1} - (L-\gamma I)^{m+1}\right)$ где L – матрица Лакса для тригонометрической системы Калоджеро-Мозера (1.28).

Глава 4 (Prokofev and Zabrodin [2021b]) посвящена доказательству наиболее общей версии этого утверждения. В ней рассматривается эллиптическое решение иерархии в виде

$$\tau(x,\boldsymbol{t}) = \prod_{i=1}^{N} \sigma(x - x_i(\boldsymbol{t})). \tag{4.1}$$

Доказано, что (4.1) решает (2.11) только и если только эволюция x_i по времени t_m подчинена Гамильтонову потоку гамильтониана

$$H_m = \operatorname*{res}_{z=\infty} (z^m \lambda(z)) \tag{4.2}$$

где $\lambda(z)$ определяется уравнением

$$\det(L(\lambda) - (z + \zeta(\lambda)I) = 0 \tag{4.3}$$

с эллиптической матрицей Лакса

$$L_{jk} = -p_j \delta_{jk} - (1 - \delta_{jk}) \Phi(x_j - x_k, \lambda). \tag{4.4}$$

Оказывается, что существует единственное решение уравнения (4.3) когда $z \to \infty$ и это решение и определяет функцию $\lambda(z)$

Кроме этого с помощью нетривиальных вычислений показано, что данные решения вырождаются в рациональный и тригонометрический пределы с правильными формулами, полученными ранее.

4.2 Иерархия двумеризованной цепочки Тоды

Динамика полюсов эллиптических решений для двумеризованной цепочки Тоды и мКП изучалась в (Krichever and Zabrodin [1995]). Было показано, что полюса решений двигаются как частицы в интегрируемой модели Руйсенаарса-Шнайдера (Ruijsenaars and Schneider [1986]) которая представляет из себя релятивистское обобщением системы Калоджеро-Мозера. Первым результатом расширения этого соответствия до уровня иерархий (в рациональном случае) была работа (Iliev [2007]): как и с КП эволюция полюсов вдоль времени t_k иерархии мКП определяется старшим Гамильтонианом $-\mathrm{tr} L^k$ системы Руйсенаарса-

Шнайдера

В статье (Prokofev and Zabrodin [2019]) содержится обобщение этого результата. В нем изучается решение билинейного интегрального уравнения для двумеризованной цепочки Тоды (3.35) с тригонометрической тау-функцией вида

$$\tau(x, \boldsymbol{t}_+, \boldsymbol{t}_-) = \exp\left(-\sum_{k\geq 1} k t_k t_{-k}\right) \prod_{i=1}^{N} \left(e^{2\gamma x} - e^{2\gamma x_i(\boldsymbol{t}_+, \boldsymbol{t}_-)}\right). \tag{4.5}$$

Показано, что эволюция x_i по времени t_m определяется Гамильтонианом

$$H_m = -\frac{\sinh(m\gamma\eta)}{m\gamma\eta} \mathrm{tr}(L)^m \tag{4.6}$$

как для положительных так и для отрицательных m. Тут

$$L_{ij} = \frac{\gamma\eta e^{\eta p_i}}{\sinh(\gamma(x_i - x_j - \eta))} \prod_{l\neq i} \frac{\sinh(\gamma(x_i - x_l + \eta))}{\sinh(\gamma(x_i - x_l))} \tag{4.7}$$

Тригонометрическая матрица модели Руйсенаарса-Шнайдера.

Обобщение до эллиптического случая составляет главу 5 диссертации (Prokofev and Zabrodin [2021a]) в ней рассматривается решение всей иерархии в виде

$$\tau(x, \boldsymbol{t}_+, \boldsymbol{t}_-) = \exp\left(-\sum_{k\geq 1} k t_k t_{-k}\right) \prod_{i=1}^{N} \sigma\left(x - x_i(\boldsymbol{t}_+, \boldsymbol{t}_-)\right). \tag{4.8}$$

Для того что бы 4.8 было решением, надо что бы эволюция x_i по времени t_m определялась Гамильтонианом

$$H_m = \operatorname*{res}_{z=\infty}\left(z^{m-1}\lambda(z)\right) \tag{4.9}$$

для $m > 0$ или

$$H_m = \operatorname*{res}_{z=0}(z^{m-1}\lambda(z)) \tag{4.10}$$

для $m < 0$.

$\lambda(z)$ может быть найдена как решение уравнения

$$\det(L(\lambda) - z^{\eta\zeta(\lambda)}) = 0 \tag{4.11}$$

с эллиптической матрицей Лакса L

$$L_{ij}(\lambda) = e^{p_i}\Phi(x_i - x_j - \eta, \lambda)\prod_{l\neq i}\frac{\sigma(x_i - x_l + \eta)}{\sigma(x_i - x_l)}. \tag{4.12}$$

Уравнение (4.11) имеет единственное решение вблизи $z = \infty$.

Нетривиальные вычисления проведенные в этой статье доказывают, что предел в тригонометрическом и рациональных случаях совпадает с уже известными ответами.

4.3 Matrix KP

Сингулярные (в общем случае эллиптические) решения матричного КП изучались в работе (Krichever and Zabrodin [1995]). В ней было показано, что что временная зависимость параметров таких решений (параметров вроде координат полюсов и неких внутренних степеней свободы) от t_2 изоморфна динамике спинового обобщения системы Калоджеро-Мозера (Система Гиббонса-Хермсена (Gibbons and Hermsen [1984]). Обобщение этого результата на всю иерархию было получено в работе (Pashkov and Zabrodin [2018]) для рациональных решений. Как оказалось, динамика по времени t_m определяется Гамильтонианом $H_m = \mathrm{tr}L^m$.

Тригонометрическая версия этого результата рассматривается в статье (Prokofev and Zabrodin [2020]).В ней построены тригонометрические решения всей иерархии. Доказано, что

$$\tau = \prod_{i=1}^{N}(e^{2\gamma x} - e^{2\gamma x_i(\boldsymbol{t})}) \tag{4.13}$$

и

$$W_{1,\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \sum_i \frac{2\gamma e^{2\gamma x_i(\boldsymbol{t})} a_i^\alpha(\boldsymbol{t}) b_i^\beta(\boldsymbol{t})}{e^{2\gamma x} - e^{2\gamma x_i(\boldsymbol{t})}} \tag{4.14}$$

задают решения иерархии если динамика $x_i(\boldsymbol{t})$, $a_i^\alpha(\boldsymbol{t})$, $b_i^\alpha(\boldsymbol{t})$ по времени t_m задается Гамильтонианом

$$H_m = \frac{1}{2(m+1)\gamma}\mathrm{tr}\left((L+\gamma I)^{m+1} - (L-\gamma I)^{m+1}\right) \tag{4.15}$$

где

$$L_{jk} = -p_j\delta_{jk} - (1-\delta_{jk})\frac{\gamma\sum\limits_{\alpha} b_j^\alpha a_k^\alpha}{\sinh(\gamma(x_j-x_k))} \tag{4.16}$$

с ненулевыми скобками Пуассона $\{x_i, p_j\} = \delta_{ij}$ и $\{a_i^\alpha, b_j^\beta\} = \delta_{\alpha\beta}\delta_{ij}$.

Глава 6 (Prokofev and Zabrodin [2021c]) содержит дальнейшее обобщение на случай эллиптического решения.

$$\tau = \prod_{i=1}^{N}\sigma(x - x_i(\boldsymbol{t})) \tag{4.17}$$

и

$$W_{1,\alpha\beta} = S_{\alpha\beta} - \sum_i a_i^\alpha(\boldsymbol{t}) b_i^\beta(\boldsymbol{t})\zeta(x - x_i(\boldsymbol{t})) \tag{4.18}$$

Решение матричного КП, если динамика полюсов и спинов определяется Гамильтонианом

$$H_m = \operatorname*{res}_{z=\infty}(z^m\lambda(z)) \tag{4.19}$$

где $\lambda(z) = \sum\limits_\alpha \lambda_\alpha(z)$ и каждый $\lambda_\alpha(z)$ разное решение уравнения

$$\det(L(\lambda_\alpha) - (z + \zeta(\lambda_\alpha))I) = 0 \tag{4.20}$$

с эллиптической матрицей Лакса

$$L_{jk} = -p_j\delta_{jk} - (1-\delta_{jk})\Phi(x_j - x_k, \lambda)\sum_\nu b_\nu^j a_\nu^k. \tag{4.21}$$

Оказывается, что (4.20) обладает n различными решениями вблизи $z = \infty$ и каждое из этих решений $\lambda_\alpha(z)$ является производящей функцией для $H_{n\alpha}$-Гамильтонианов, отвечающих динамике по $t_{n\alpha}$. Таким образом мы получили не просто соответствие между решением Матричного КП и спиновым Калоджером-Мозером, но соответствие между многокомпонентным КП и спиновым Калоджеро-Мозером.

В этой работе также получены рациональные и тригонометрические пределы.

Результаты диссертации опубликованы в пяти статьях

1. V. Prokofev and A. Zabrodin. *Toda lattice hierarchy and trigonometric Ruijsenaars–Schneider hierarchy.* ("Иерархия решетки Тоды и тригонометрическая иерархия Руйсенарса-Шнайдера") Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical , 2019. doi:10.1088/1751-8121/ab520c

2. V. Prokofev and A. Zabrodin. *Matrix Kadomtsev Petviashvili Hierarchy and Spin Generalization of Trigonometric Calogero Moser Hierarchy.*("Матричная иерархия Кадомцева-Петвиашвили и спиновое обобщение тригонометрической иерархии Калоджеро-Мозера") Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics , 2020. doi:10.1134/S0081543820030177

3. V. Prokofev and A. Zabrodin. *Elliptic solutions to the KP hierarchy and elliptic Calogero–Moser model.* ("Эллиптические решения иерархии КП и эллиптическая модель Калоджеро-Мозера") Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 2021b. doi:10.1088/1751-8121/ac0a3

4. V. Prokofev and A. Zabrodin. *Elliptic solutions to Toda lattice hierarchy and elliptic Ruijsenaars-Schneider model* . ("Эллиптические решения иерархии решетки Тоды и эллиптическая модель Руйсенарса–Шнайдераа") Theoretical and Mathematical Physics , 2021a. doi:10.1134/S0040577921080080

5. V. Prokofev and A. Zabrodin. *Elliptic solutions to matrix KP hierarchy and spin generalization of elliptic Calogero-Moser model.* ("Эллиптические решения матричной иерархии КП и спиновое обобщение эллиптической

модели Калоджеро-Мозера") Journal of Mathematical Physics, 2021c. doi:10.1063/5.0051713

Литература

H. Airault, P. McKean, and J. Moser. Rational and elliptic solutions of the Korteweg-de Vries equation and a related many-body problem. *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1977. URL https://doi.org/10.1002/cpa.3160300106.

J. Boussinesq. Essai sur la theorie des eaux courantes. *‘ l’Acad. des Sci. Inst. Nat. France*, 1877. URL https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k56673076.texteImage.

H. W. Braden, A. Marshakov, A. Mironov, and A. Morozov. On Double-Elliptic Integrable Systems. 1. A Duality Argument for the case of SU(2). *Nuclear Physics B*, 2000. URL https://arxiv.org/abs/hep-th/9906240.

F. Calogero. Solution of the one-dimensional N-body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials . *Journal of Mathematical Physics*, 1971. URL https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1665604.

F. Calogero. Exactly solvable one-dimensional many-body problems. *Lettere al Nuovo Cimento*, 1975. URL https://doi.org/10.1007/BF02790495.

F. Calogero and C. Marchioro. Exact solution of a one-dimensional three-body scattering problem with two-body and/or three-body inverse-square potentials. *Journal of Mathematical Physics*, 1974. URL https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.1666827.

E. d’Hoker and D. H. Phong. Order parameters, free fermions, and conservation laws for Calogero–Moser systems. *Asian Journal of Mathematics*, 1998. URL https://arxiv.org/abs/hep-th/9808156.

L A Dickey. *Soliton Equations and Hamiltonian Systems*. WORLD SCIENTIFIC, 2nd edition, 2003. doi:10.1142/5108. URL https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/5108.

L.A. Dickey. *Algebraic Aspects of Integrable Systems. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications*, volume 26, chapter On τ-Functions of Zakharov—Shabat and Other Matrix Hierarchies of Integrable Equations. 1997. URL https://arxiv.org/pdf/hep-th/9502063.pdf.

V. S. Dryoma. Analytic solution of the two-dimensional Korteweg-de Vries (KdV) equation. *Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters*, 1974. URL http://jetpletters.ru/ps/1782/article_27139.shtml.

J. Gibbons and T. Hermsen. A generalisation of the Calogero–Moser system. *Physica D: Nonlinear Phenomena* , 1984. URL https://doi.org/10.1016/0167-2789(84)90015-0.

L. Haine. KP Trigonometric Solitons and an Adelic Flag Manifold. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 2007. URL https://www.emis.de/journals/SIGMA/2007/015/.

P. Iliev. Rational Ruijsenaars–Schneider hierarchy and bispectral difference operators. *Physica D Nonlinear Phenomena* , 2007. URL https://arxiv.org/abs/math-ph/0609011.

B. B. Kadomtsev and V. I. Petviashvili. On the stability of solitary waves in weakly dispersing media. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1970. URL http://mi.mathnet.ru/dan35447.

Korteveg, D.J. and de Vries, G. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal and on a new type of long stationary wave . *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 1895. URL https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/14786449508620739.

I. Krichever and A. Zabrodin. Spin generalization of the Ruijsenaars–Schneider model, non- abelian 2D Toda chain and representations of Sklyanin algebra. *Russian Mathematical Surveys* , 1995. URL http://mi.mathnet.ru/eng/umn1121.

I. M. Krichever. Rational solutions of the Kadomtsev — Petviashvili equation and integrable systems of N particles on a line. *Functional Analysis and Its Applications*, 1978. URL https://doi.org/10.1007/BF01077570.

I. M. Krichever. Elliptic solutions of the Kadomtsev–Petviashvili equation and integrable systems of particles. *Functional Analysis and Its Applications*, 1980. URL https://doi.org/10.1007/BF01078304.

P.D. Lax. Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves . *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 1968. URL https://doi.org/10.1002/cpa.3160210503.

R. M. Miura, C.S. Gardner, and M.D. Kruscal. Korteweg-de Vries Equation and Generalizations. II. Existence of Conservation Laws and Constants of Motion. *Journal of Mathematical Physics*, 1968. URL https://doi.org/10.1063/1.1664701.

Moser, J. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations. *Advances in Mathematics*, 1974. URL https://doi.org/10.1016/0001-8708(75)90151-6.

V. Pashkov and A. Zabrodin. Spin generalization of the Calogero–Moser hierarchy and the matrix KP hierarchy. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* , 2018. URL https://iopscience.iop.org/article/10.1088/1751-8121/aabd9c.

V. Prokofev and A. Zabrodin. Toda lattice hierarchy and trigonometric Ruijsenaars–Schneider hierarchy . *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* , 2019. doi:10.1088/1751-8121/ab520c.

V. Prokofev and A. Zabrodin. Matrix Kadomtsev Petviashvili Hierarchy and Spin Generalization of Trigonometric Calogero Moser Hierarchy. *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics* , 2020. doi:10.1134/S0081543820030177.

V. Prokofev and A. Zabrodin. Elliptic solutions to Toda lattice hierarchy and elliptic Ruijsenaars-Schneider model . *Theoretical and Mathematical Physics* , 2021a. doi:10.1134/S0040577921080080.

V. Prokofev and A. Zabrodin. Elliptic solutions to the KP hierarchy and elliptic Calogero–Moser model . *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* , 2021b. doi:10.1088/1751-8121/ac0a3.

V. Prokofev and A. Zabrodin. Elliptic solutions to matrix KP hierarchy and spin generalization of elliptic Calogero-Moser model . *Journal of Mathematical Physics* , 2021c. doi:10.1063/5.0051713.

D. Rudneva and A. Zabrodin. Dynamics of poles of elliptic solutions to the BKP equation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 2020. URL https://arxiv.org/abs/1903.00968.

S. N. M. Ruijsenaars and H. Schneider. A new class of integrable systems and its relation to solitons. *Annals of Physics* , 1986. URL https://www1.maths.leeds.ac.uk/~siru/papers/p27.pdf.

J. S. Russel. Report on Waves. *Report of the 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science*, 1844.

Mikio Sato. Soliton equations as dynamical systems on infinite dimensional grassmann manifold. In Hiroshi Fujita, Peter D. Lax, and Gilbert Strang, editors, *Nonlinear Partial Differential Equations in Applied Science; Proceedings of The U.S.-Japan Seminar, Tokyo, 1982*, volume 81 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 259–271. North-Holland, 1983. URL https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0304020808720966.

T. Shiota. Calogero–Moser hierarchy and KP hierarchy. *Journal of Mathematical Physics*, 1994. URL https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.530713.

B. Sutherland. Exact Results for a Quantum Many-Body Problem in One Dimension. II. *Physical review A* , 1972. URL https://journals.aps.org/pra/abstract/10.1103/PhysRevA.5.1372.

I. M. Toda. Vibration of a Chain with Nonlinear Interaction. *Journal of the Physical Society of Japan* , 1967a. URL https://journals.jps.jp/doi/10.1143/JPSJ.22.431.

I. M. Toda. Wave Propagation in Anharmonic Lattices. *Journal of the Physical Society of Japan*, 1967b. URL https://journals.jps.jp/doi/10.1143/JPSJ.23.501.

K. Ueno and K. Takasaki. Toda Lattice Hierarchy . *Advanced Studies in Pure Mathematics*, 1984. URL https://doi.org/10.2969/aspm/00410001.

A. Zabrodin. KP hierarchy and trigonometric Calogero–Moser hierarchy. *Journal of Mathematical Physics*, 2020. URL https://aip.scitation.org/doi/10.1063/1.5120344.

V.E. Zakharov and L.D. Fadeev. Korteweg–de Vries equation: A completely integrable Hamiltonian system . *Functional Analysis and Its Applications*, 1971. URL http://mi.mathnet.ru/eng/faa2612.