

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Трофимова Анастасия Алексеевна
**Стохастические интегрируемые процессы и
представления группы KO_3**

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор математических наук, профессор
Пятов Павел Николаевич

Москва - 2022

Аннотация

Интегрируемость – важное свойство моделей квантовой механики и статистической физики, которое делает возможным точное решение. Одним из основных методов, который используется для изучения интегрируемых систем является Бете анзац, в основе которого лежит уравнение Янга-Бакстера. Изучение и классификация существующих R -матриц, также как и поиск новых – одна из задач математической физики. Основным источником R -матричных представлений являются представления представления группы кос и её конечномерных фактор алгебр. Новые результаты были получены по двум направлениям.

Первое направление – это классификация низкоразмерных представлений группы кос на трех нитях. Мы рассматриваем семейства конечномерных фактор-алгебр групповой алгебры группы кос на трех нитях по общему полиномиальному соотношению на элементарные генераторы (также известных как Артиновы генераторы). Это случаи степенных полиномиальных соотношений степеней $p = 2, 3, 4, 5$ с соответствующими размерностями фактор-алгебр 6, 24, 96, и 600. Мы строим серии представлений размерностей ≤ 6 (Предложение 1.2) и находим условия, при которых они неприводимы (Предложение 1.3). Для рассматриваемых фактор-алгебр мы формулируем критерии полупростоты, и, если эти критерии выполняются, мы даем полную классификацию неприводимых представлений (Теорема 1.1). Наша классификация дополняет список всех неприводимых представлений группы кос на трех нитях размерностей ≤ 5 , найденных И. Тубой и Х. Венцлем (2001), добавляя в него неприводимые представления размерности 6. Изучение этих 6-мерных представлений дает новые критерии полупростоты.

Другая цель исследования – изучение стохастических интегрируемых систем взаимодействующих частиц. Нас интересуют статистики тока частиц в q -бозонном процессе с нулевым радиусом взаимодействия на кольце. Используя методы анзаца Бете и Т- Q -уравнения, мы вычисляем первые два кумулянта тока в модели. Точная формула для второго кумулянта получена в виде бесконечной суммы двойных контурных интегралов (Теорема 1.2). Такое представление оказывается удобным для асимптотического анализа в пределе большого размера системы. Мы также доказываем, что при общем значении параметра, управляющего межчастичным взаимодействием, второй кумулянт воспроизводит скейлинговый показатель, предсказанный для моделей в классе универсальности Кардара-Паризи-Жанга (Теорема 1.3). Другой результат – универсальная скейлинговая функция, описывающая переход между классами универсальности Кардара-Паризи-Жанга и Эдвардса-Уилкинсона. Она получена из точной формулы для второго кумулянта тока в скейлинговом пределе, соответствующем переходу между классами универсальности (Теорема 1.4). Этот результат согласуется с универсальной скейлинговой функцией перехода, первоначально найденной для асимметричного простого процесса с исключениями, и являющейся универсальной по предположению.

Введение

Интегрируемые модели квантовых систем, решеточные модели статистической физики и стохастические интегрируемые системы частиц играют важную роль в ма-

тематике и теоретической физике. Свойство интегрируемости - это специальная математическая структура, которая позволяет получать точные решения. В её основе лежит уравнение Янга-Бакстера, которое стало неотъемлемой частью квантового метода обратной задачи (алгебраический Бете анзац), (смотри [1, 2] и ссылки в них). Квантовый метод обратной задачи также дал начало теории квантовых групп, которая стала отдельной областью современной математики. Важной задачей в этой теории является классификация и изучение R-матриц, удовлетворяющих уравнению Янга-Бакстера, и связанных с ними квантовых матричных алгебр, таких как алгебра уравнения отражения и RTT алгебра. Одним из основных источников R-матриц служат R-матричные представления группы кос и конечномерных фактор-алгебр её групповой алгебры.

Фактор-алгебры групповой алгебра группы кос

Классическая теорема Г.С.М. Кокстера утверждает, что фактор-группа группы кос B_n на n -нитях по соотношению p -ой степени $b^p = 1$, наложенному на элементарное зацепление b , конечна тогда и только тогда, когда верно следующее неравенство

$$1/n + 1/p > 1/2. \quad (1)$$

В случае группы B_3 мы получим конечномерные фактор группы порядков 6, 24, 96 и 600 для $p = 2, 3, 4, 5$, соответственно. Обобщая эту постановку, можно рассматривать факторы групповой алгебры группы кос $\mathbb{C}[B_n]$, построенные наложением одночленного полиномиального соотношения p -ой степени на элементарные зацепления. При условии (1) полученные фактор-алгебры конечны и по теореме Тита о деформации ([4], §68, или [5], раздел 5) при общем положении параметров эти алгебры изоморфны групповым алгебрам соответствующих фактор групп Кокстера. В частности, они полупросты. В качестве следующего шага было бы интересно найти условия полупростоты и описать явно неприводимые представления этих конечномерных фактор алгебр.

Существенный вклад в классификацию неприводимых представлений B_3 внесли И. Туба и Х. Венцль в 2001 г. [9]. Они классифицировали все неприводимые представления размерностей $d \leq 5$ и их критерии полупростоты. Эта список включает в себя все неприводимые представления в случаях $n = 3$, $p = 2, 3, 4$, которые имеют размерность $d \leq 4$. В то же время фактор-алгебра $\mathbb{C}[B_3]$ для $p = 5$ имеет неприводимые представления размерностей до 6 и классификация в [9] не содержит их. В диссертации продолжается поиск и исследование неприводимых представлений группы кос B_3 . Построены все неприводимые представления для этих фактор алгебр, причем их размерности $d \leq 6$, и найдены критерии их полупростоты. В размерностях $d \leq 5$, мы воспроизводим классификацию неприводимых представлений B_3 из [9]. В размерности $d = 6$ наш список содержит все неприводимые представления B_3 , которые факторизуются через представления фактор алгебр $\mathbb{C}[B_3]$. Последняя факторизация для представлений размерности $d = 6$ означает, что их спектр содержит 5 различных значений, одно из которых имеет кратность 2. Мы работаем в диагональном базисе для первого элементарного генератора кос g_1 , и мы ограничиваем наши соображения случаем, когда все корни минимального многочлена различны. Для полноты картины мы приводим представления, найденные И. Туба и Х. Венцлем в выбранном базисе.

Опишем кратко другие методы, использованные для поиска неприводимых представлений группы кос B_3 , и связанные с ними результаты.

Б. Вестбери предложил подход к теории представлений B_3 который использует представления специально заданных колчанов [10]. Этот подход был в последствии был развит Л. Ле Бруйном и использован для построения плотных рациональные параметризации по Зарисскому для неприводимых представлений B_3 любой размерности [11, 12]. Метод был эффективен для решения проблемы обращения кос, однако он не дает критериев полупростоты для построенных представлений. Кстати, 5-мерное многообразие неприводимых 6-мерных представлений B_3 , которое мы представляем ниже, принадлежит 8-мерному семейству B_3 представлений типа 6b (см. Рис.1 в [11]).

Для более общего случая B_n , $n > 3$ хорошо исследованы серии неприводимых представлений, связанных с алгебрами Ивахори-Гекке $H_n(q)$ (случай $p = 2$). С изоморфизмом $H_n(q) \simeq \mathbb{C}[B_n]$ для общих значений параметра q они нумеруются диаграммами Юнга размера n . Другое семейство конечномерных факторных алгебр $\mathbb{C}[B_n]$ – это алгебры Бирмана-Мураками-Венцля. Они строятся путем наложения полиномиального соотношения $p = 3$ на элементарное зацепление и полиномиальных соотношений, содержащих несколько соседних образующих. Известна полная классификация неприводимых представлений и условия их неприводимости. Каждое неприводимое представление нумеруется последовательностью разбиений, в которой каждое разбиение отличается от предыдущего добавлением или удалением одной клетку. (для обзора см. [6]). Также были найдены некоторые другие конкретные семейства B_n -представлений [7, 8].

В другом направлении исследований М. Бруйэ, Г. Малле и Р. Рукье [13, 14] обобщили понятия группы кос и алгебры Гекке до алгебр связанных с произвольной конечной комплексной группой отражений W . Они определили общую алгебру Гекке над некоторым кольцом многочленов $R = \mathbb{Z}\{u_i\}$ и предположили, что это свободный модуль ранга $|W|$. Теперь эта гипотеза доказана [15, 16, 18, 19], [20] (теорема 3.5 и ссылки в ней). Фактор-алгебры $\mathbb{C}[B_3]$, с которыми мы имеем дело, являются специализациями общих алгебр Гекке групп S_3 и G_4, G_8, G_{16} (обозначения, использованные тут, соответствуют полной классификации конечных комплексных групп отражения и были введены Шепардом и Тоддом [17]) при гомоморфизме $R \rightarrow \mathbb{C}$, который присваивает определенные комплексные значения переменным u_i . Гипотеза о свободе в этих случаях доказана в [21, 22, 23], и, таким образом, размерности фактор-алгебр, которые мы будем изучать, совпадают с мощностями соответствующих им групп Кокстера.

Стохастические интегрируемые системы взаимодействующих частиц

Важным приложением интегрируемости является приложение к стохастическим системам взаимодействующих частиц. Мы рассматриваем стохастические диффузионные или управляемые диффузионные системы частиц в размерности $1 + 1$, которые являются системами частиц с локальным межчастичными взаимодействиями, на которые действует некоррелированная случайная сила. Распределение частиц в таких моделях можно связать с градиентом одномерной функции высоты растущего фронта. В обратную сторону, функция высоты одномерного растущего фронта представляет собой ни что иное, как интегрированный во времени ток частиц. Таким образом,

результаты для системы частиц могут быть переведены на язык одномерного интерфейса и наоборот. Интегрируемость моделей частиц, в свою очередь, предполагает получение точных результатов, которые становятся источником результатов о случайных растущих фронтах.

Выделяют два класса универсальности, Эдвардса-Уилкинсона (ЭУ) [24] и Кардар-Паризи-Жанга (КПЖ) [25], объединяющих большое количество математических моделей и естественных явлений, таких как поверхности случайного роста, например, границы бактериальных колоний, границы при процессе намочания, горения и кристаллизации, полимеры в случайных средах, транспортные потоки и т. д. [26]. Общей чертой этих случайных систем является универсальное поведение при больших масштабах системы, которое характеризуется универсальными скейлинговыми показателями и скейлинговыми функциями. Каждый из классов универсальности ЭУ и КПЖ содержит непрерывную модель роста фронта, определяемую одноименным стохастическим уравнением в частных производных на функцию высоты фронта. Анализ именно этих моделей стал первой аналитической попыткой охарактеризовать эти классы.

Стохастическое линейное уравнение в частных производных Эдварда-Уилкинсона было решено сразу после его определения [24]. Аналитическое решение предсказывает универсальное поведение интерфейса, определяемое двумя независимыми критическими показателями, а именно показателем шероховатости ζ и динамическим показателем z , и дает точное выражение для скейлинговых функций. В размерности $1 + 1$ критические показатели равны $\zeta = 1/2$ и $z = 2$. Они характеризуют крупномасштабное поведение ширины интерфейса, которая масштабируется как N^ζ в стационарном состоянии системы размера N и приходит к стационарному значению после времени релаксации порядка N^z . Первая экспонента означает, что отклонение функции высоты от среднего значения - гауссова случайная величина, а вторая экспонента показывает, что распространение флуктуаций является чисто диффузионным. Показатели ζ и z могут быть переведены в другую пару показателей $\alpha = \zeta/z$ и $\beta = 1/z$, отвечающих за масштаб флуктуаций и корреляций соответственно. Для класса универсальности ЭУ они равны $\alpha = 1/4$ и $\beta = 1/2$. В частности, ширина интерфейса увеличивается как t^α со временем t в нестационарном режиме, в то время как корреляционная длина масштабируется как t^β .

Стохастическое нелинейное уравнение КПЖ было введено в 1986 г. [25]. Отличительной чертой этого уравнения является нелинейность, которая потребовала гораздо больше анализа. Аналитическое решение не было найдено еще 25 лет, хотя скейлинговые показатели и скейлинговые гипотезы о форме констант, зависящих от модели, были предсказаны эвристически на основе анализа размерностей, теории взаимодействующих мод и ренорм группы [25, 27, 28]. В размерности $1 + 1$ показатель шероховатости равен $\zeta = 1/2$, а динамический показатель равен $z = 3/2$. Эти показатели могут быть переведены в $\alpha = 1/3$, $\beta = 2/3$. Однако более тонкие характеристики поведения на больших масштабах, например, универсальные скейлинговые функции оказались за рамками этих подходов. Вот тогда стохастические интегрируемые системы оказываются полезными, потому как скейлинговые функции могут быть получены, как пределы точных ответов.

Наиболее известными интегрируемыми моделями взаимодействующих частиц являются симметричные и асимметричные простые процессы с исключениями, сокращенно SSEP и ASEP [29] соответственно, которые представляют собой системы

частиц, совершающих случайное блуждание по одномерной решетке с учетом правила исключения, которое запрещает двум частицам оказываться в одном месте системы. Эти классические модели относятся к классам универсальности ЭУ и КПЖ соответственно. Результаты об этих моделях можно условно разделить на две группы.

Первая группа включает результаты о стационарном состоянии и поведении на больших временах конечных систем с периодическими граничными условиями или с резервуарами частиц, прикрепленными к концам. Известными являются плотность и ток в стационарном состоянии, [30, 31], корреляционные функции [32], функции больших отклонений для тока и плотности частиц на кольце [33, 34] и на отрезке [35, 36, 37, 38, 39, 40] и т.д.. В частности, были обнаружены два первых кумулянта интегрированного во времени тока частиц, на которые мы ссылаемся ниже, [41] (дополнительные ссылки см. в [42, 43, 44]).

Во вторую группу можно отнести результаты о динамике переходных процессов в бесконечной системе. Вычислены одноточечные распределения тока для нескольких типов начальных условий [45, 46, 47, 48]. В случае TASEP, полностью асимметричной версии ASEP, удалось найти все равновременные многоточечные распределения тока [49, 50] и равновременные [51, 52], а также пространственно-временные точки на пространственно-подобных путях [53, 54, 55]. Некоторого прогресса удалось достичь для временных корреляционных функций [56, 57].

Особое внимание заслуживает изучение трансформации переходного режима в стационарный. Многие результаты для моделей конечного размера с периодическими граничными условиями, рассчитанные вдали от равновесия, были проанализированы во время релаксации к стационарному состоянию [58, 59, 60, 61, 62, 63].

Несмотря на то, что упомянутые результаты для моделей взаимодействующих частиц вносят существенный вклад в теорию универсальности ЭУ и КПЖ в $1 + 1$ измерениях, мы всё ещё далеки от построения полной теории. Поэтому актуальным остается проверка полученных результатов и выдвинутых гипотез для систем взаимодействующих частиц с более богатой динамикой. В диссертации мы обращаемся к, вероятно, следующей простейшей интегрируемой системе взаимодействующих частиц, процессу с нулевым радиусом взаимодействия (ZRP) [29]. Это система частиц эволюционирует в непрерывном времени на одномерной решетке с интенсивностями прыжка частицы, зависящими только от количества частиц в узле расположения частицы. Как в SSEP и ASEP, стационарная мера имеет факторизованный вид [64] в бесконечном и периодическом случаях. Мы рассматриваем частный случай этой модели, известный как q -бозонный ZRP, частота скачков которого обеспечивает интегрируемость стохастического генератора модели с помощью Бете анзаца. Модель получила свое название из-за того, что алгебраически ее оператор эволюции может быть реализован в терминах представления алгебры q -бозонов. Первоначально он был введен Боголюбовым и Буллоу [65], а затем адаптирован Сасамото и Вадати [66] в виде стохастической взаимодействующей системы частиц. Он также был переоткрыт как ZRP, разрешимый с помощью координатного анзаца Бете [67]. Любопытным фактом является то, что двойственность при преобразовании частица-дырка между q -бозонным ZRP и моделью q -TASEP была обнаружена при вырождении процесса Макдональда [68] гораздо позже. С одной стороны, результатов для q -бозонного ZRP гораздо меньше, чем для ASEP и SSEP. С другой стороны, эта модель является хорошим кандидатом для проверки универсальности результатов, полученных с

помощью ASEP и SSEP.

Интенсивности прыжков в модели параметризуют действительной переменной $q \in \mathbb{R}$. Считается, что модель принадлежит классу универсальности КПЖ при $q \neq 1$ и классу универсальности ЭУ при $q = 1$. Некоторые результаты для q -бозонного ZRP были получены: средняя скорость и коэффициент диффузии для двух частиц на бесконечной решетке [66]. Для периодической решетки в пределе больших размеров системы при $q \neq 1$ получена скейлинговая форма функции больших уклонений для тока частиц [67].

Мы проводим дальнейшее исследование поведения q -бозонного ZRP на кольце размера N при больших временах, вычисляя коэффициент диффузии для потока частиц через один узел и соответственно для ассоциированной функции высоты. Задача нахождения кумулянтов тока в процессах с исключениями имеет давнюю историю. Впервые, коэффициент диффузии был получен для TASEP на кольце [69] и на отрезке [70] с помощью метода матричного анзаца [31]. Позже техника матричного анзаца была распространена на ASEP [41]. Вся функция больших уклонений расстояния пройденного частицей в TASEP, и в частности коэффициент диффузии, была получена с помощью анзаца Бете в [33]. В этом решении существенно использовалась особая структура уравнений Бете модели TASEP, которая не сохраняется в более общем случае ASEP. Функция больших уклонений для ASEP была построена в пределе большого размера системы при специальном скейлинге КПЖ с помощью метода асимптотического решения уравнений Бете, предложенным в [71, 72]. Что касается модели SSEP на кольце универсальные кумулянты тока были получены асимптотически как методом анзаца Бете, так и с помощью неустойчивой гидродинамики [34]. Метод, основанный на асимптотических решениях уравнений Бете, также применялся для получения функции больших уклонений для тока в модели ASEP на отрезке с открытыми концами [37]. Наконец, подход к нахождению точных выражений для кумулянтов тока, построенный на основе функционального анзаца Бете или T-Q-уравнения Бакстера был разработан для ASEP на конечном кольце Прольхаком и Малликом в [74]. Точная функция больших уклонения для ASEP на отрезке была также найдена с помощью обобщения метода матричного анзаца [38, 39] и использования уравнения T-Q Бакстера [40, 75].

В диссертации мы применяем анзац Бете и метод T-Q уравнения Бакстера, разработанный Прольхаком и Малликом [74] к q -бозонному ZRP на кольце. У нас две цели. Во-первых, интересен технический аспект переформулирования уравнений Бете в форме полиномиального T-Q уравнения Бакстера, которое может быть решено порядок за порядком по степеням параметра производящей функции моментов для тока частиц в модели. В результате мы получаем точное представление коэффициента диффузии (Теорема 1.2). Если сравнить q -бозонный ZRP с ASEP, то можно заметить, что аналогичный анзац Бете приводит к разным T-Q-полиномиальным решениям. Это можно объяснить связью q -бозонного ZRP с бесконечномерным представлением q -бозонов, в то время как ASEP связан с двумерным представлением квантовой аффинной алгебры $U_q(\widehat{sl}_2)$. Оба T-Q-полиномиальных решения представляются в форме усечения полиномиальной производящей функции стационарных весов. Сложность самой функции, по-видимому, в решающей степени зависит от размерности лежащих в основе представлений. В то время как в ASEP веса одного узла модели задаются двучленом, а вес N узлов - это N -ая степень, в q -бозонном ZRP, мы показываем, что функция весов на один узел является бесконечной суммой,

представляющей целую или мероморфную q -экспоненциальную функцию. Следовательно, точное выражение коэффициента диффузии, полученное в [41] представляет собой явную сумму величин, построенную из биномиальных коэффициентов. В нашем случае мы смогли представить окончательный результат (Теорема 1.2) в виде бесконечной суммы двойных контурных интегралов, которая, будучи менее явной, подходит для асимптотического анализа.

Наша вторая цель - изучение скейлингового предела полученных формул и, как следствие, проверка скейлинговых гипотез, сформулированных ранее на основе анализа уравнений ЭУ и КПЖ, а также модели ASEP. Ожидается, что в бесконечных системах из классов универсальности КПЖ и ЭУ частицы движутся субдиффузионно, причем отклонение тока от среднего значения растет со временем t как t^α . Также ведет себя и ассоциированная функция высоты растущего фронта. Однако в конечной периодической системе размера N на больших временах $t \gg N^z$ частицы движутся диффузионно, т.е. дисперсия колебаний растет линейно со временем с коэффициентом пропорциональности, названным коэффициентом диффузии. Он стремится к нулю в пределе к бесконечной системе со скоростью $N^{2\zeta-z}$, то есть $1/N$ для ЭУ и как $1/\sqrt{N}$ для класса универсальности КПЖ (подробности см. в обзоре [27] и обсуждение в тексте диссертации). Этот степенной закон стал одним из первых индикаторов принадлежности модели к классу универсальности КПЖ, полученный из точного решения [69]. Универсальный степенной закон для кумулянтов функции высоты фронта для класса универсальности КПЖ был сформулирован в виде гипотезы ещё в [28, 73] на основе анализа размерностей и дополнительных скейлинговых аргументов. А именно были предсказаны размерные факторы, которые приходят из степенных законов и определяются моделью, в то время как универсальные безразмерные константы предполагалось находить из точных решений. Задача определения универсальных констант впервые была решена в рамках точного вычисления второго кумулянта тока [69, 41] и кумулянтов произвольного порядка [33, 72] в TASEP и ASEP. Асимптотическая скейлинговая формула для кумулянтов была также проверена на нескольких других моделях [67, 76, 77, 78]. Здесь, используя метод TQ-уравнения, мы воспроизводим более ранний результат [67] о масштабной форме коэффициента диффузии в q -бозонном ZRP. Мы получаем ожидаемый степенной закон $1/\sqrt{N}$ в теореме 1.3, который согласуется с гипотезой универсальности класса КПЖ.

Кроме того, ожидается, что скейлинговая форма кумулянтов тока и скейлинговые функции, описывающие переход между классами универсальности КПЖ и ЭУ, также будут универсальными. Первые попытки определить форму скейлинговых функций также были реализованы в рамках моделей TASEP [33] и ASEP [41] соответственно. В диссертации, мы выводим скейлинговую функцию, интерполирующую между классами ЭУ и КПЖ. Мы подтверждаем универсальность выражения, найденного из решения ASEP [41]. Это Теорема 1.4.

Результаты диссертации

В диссертации изучаются серии конечномерных фактор-алгебр $\mathcal{C}[B_3]$ построенные факторизацией по полиномиальному соотношению p -й степени (в общем положении) на элементарные зацепления и статистика потока частиц в q -бозонном процессе нулевого радиуса взаимодействия.

- В диагональном базисе для первого элементарного генератора мы строим семейства неприводимых представлений размерности до 6 и находим условия при которых они неприводимы. Для рассматриваемых фактор алгебр мы формулируем критерии полупростоты и в случае, когда эти критерии выполнены, мы приводим полную классификацию неприводимых представлений.
- Мы вычисляем точные выражения для первых двух кумулянтов тока в q -бозонном ZRP на кольце, представляя ответ в форме контурных интегралов. В пределе большой системы мы находим, что в общем положении параметра q , контролирующего межчастичное взаимодействие, второй кумулянт воспроизводит скейлинг, предсказанный для моделей из классов универсальности Кардара-Паризи-Жанга. Другой результат – универсальная скейлинговая функция, описывающую переход между моделями из классов универсальности Кардара-Паризи-Жанга и Эдвардса-Уилкинсона.

Ниже мы более подробно формулируем результаты работы. Обратите внимание, что введение в диссертации почти совпадает с введением в тексте диссертации, хотя и содержит больше ссылок на основную часть диссертации. Мы надеемся, что это поможет читателю сориентироваться.

1 Описание исследовательских задач и результаты

Далее мы приводим резюме первой главы диссертации, представляя конечномерные фактор алгебры и формулируя результаты.

1.1 Группа кос B_3 и её фактор-алгебры

В первом разделе мы определяем конечномерные фактор-алгебры групповой алгебры группы кос на трех нитях $\mathbb{C}[B_3]$.

Определение 1.1. *Группа кос B_3 на трех нитях - это абстрактная ассоциированная группа, заданная в терминах генераторов (элементарные зацепления) – g_1 и g_2 , которые удовлетворяют соотношению кос*

$$g_1 g_2 g_1 = g_2 g_1 g_2. \quad (2)$$

Альтернативно, можно выбрать другую пару генераторов для определения B_3

$$a = g_1 g_2, \quad b = g_1 g_2 g_1, \quad (3)$$

и соотношение кос тогда можно переписать

$$a^3 = b^2 = c, \quad (4)$$

где $c = (g_1 g_2)^3 = (g_1 g_2 g_1)^2$ – это центральный элемент B_3 который порождает центр $\mathbb{Z}(B_3)$ [80]. Следовательно, фактор-группа $B_3/\mathbb{Z}(B_3) = \langle a, b \mid a^3 = b^2 = 1 \rangle$ – это свободное произведение $\mathbb{Z}_3 * \mathbb{Z}_2$ двух циклических групп, которое как известно, изоморфно $PSL(2, \mathbb{Z})$.

Определение 1.2. Для конечного множества X попарно различных ненулевых комплексных чисел:

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad x_i \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad x_i \neq x_j \quad \forall i \neq j. \quad (5)$$

и полинома

$$P_X(g) := \prod_{i=1}^{n=|X|} (g - x_i 1), \quad \text{где } g \in \{g_1, g_2\}. \quad (6)$$

фактор-алгеброй групповой алгебры группы кос $\mathbb{C}[B_3]$ является

$$Q_X := \mathbb{C}[B_3] / \langle P_X(g) \rangle \quad (7)$$

Замечание 1.1. Достаточно наложить полиномиальное условие только на первое элементарное зацепление. Так как элементарные зацепления в группе кос сопряжены друг с другом, то полиномиальное условие наложенное на первое зацепление транслируется на все остальные.

Как уже упоминалось во введении, фактор-алгебры Q_X конечномерные тогда и только тогда, когда $|X| = n < 6$. В частном случае полинома $P_X(g) = g^n - 1$ они являются групповыми алгебрами фактор-групп $B_3 / \langle g^n \rangle$. Согласно деформационной теореме Тита при общем положении параметров фактор алгебры Q_X с $|X| \leq 5$ изоморфны $\mathbb{C}[B_3 / \langle g^{|X|} \rangle]$ и, следовательно, в общем положении полупросты.

1.2 Спектры в неприводимых представлениях

Наша цель состоит в том, чтобы построить достаточно неприводимых представлений для фактор алгебр Q_X и, используя теорему Веддербёрна — Артина, доказать, что мы получаем полную классификацию неприводимых представлений. Оказывается, их размерности не превышают 6. Мы показываем, что в этих неприводимых представлениях спектры центрального элемента c (2) и генераторов a и b (3) с точностью до дискретного множителя определяются собственными значениями x_i элементарных кос.

Обозначим V - конечномерное линейное пространство размерности d и пусть

$$\rho_{X,V} : Q_X \rightarrow \text{End}(V)$$

является неприводимым представлением Q_X .

Утверждение 1.1. Характеристический многочлен элементарных кос g_1, g_2 в представлении $\rho_{X,V}(g)$ имеет вид

$$P_\rho(g) := \prod_{i=1}^{n=|X|} (g - x_i)^{m_i}, \quad \text{где } m_i \in \mathbb{N}^+ \text{ такие что } \sum_{i=1}^n m_i = d. \quad (8)$$

Поскольку c является центральным, мы применяем лемму Шура и получаем, что c действует в неприводимом представлении $\rho_{X,V}$ как скалярный оператор. Обозначим

$$A := \rho_{X,V}(a), \quad B := \rho_{X,V}(b), \quad \rho_{X,V}(c) := C_\rho \text{Id}_V. \quad (9)$$

Следующее предложение явно описывает спектр операторов A и B в представлениях низкой размерности.

Предложение 1.1. Пусть $\rho_{X,V} : Q_X \rightarrow \text{End}(V)$ - семейство неприводимых представлений алгебр Q_X (7) такое, что

- a) их характеры являются непрерывными функциями от параметров $x_i \in X$;
- b) характеристические и минимальные многочлены матриц $\rho_{X,V}(g_1)$ и $\rho_{X,V}(g_2)$ имеют вид Π_ρ (8) и P_X (6) соответственно.

Пусть A, B, C_ρ определены в (9). Обозначим $\nu := e^{2\pi i/3}$ и введем обозначение $e_k(X)$ для k -го элементарного симметрического многочлена от множества переменных $X = \{x_i\}_{i=1,\dots,n}$.

Тогда для $n = |X| \leq 5$ и $d = \dim V \leq 6$ коэффициент C_ρ и собственные значения операторов A и B могут принимать следующие значения.

$$\begin{aligned} \text{Если } d = n = 2, \text{ то } \quad C_\rho &= -e_2(X)^3, \\ \text{Spec } A &= -e_2(X) \cdot \{\nu, \nu^{-1}\}, \quad \text{Spec } B = i e_2(X)^{\frac{3}{2}} \cdot \{1, -1\}; \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \text{Если } d = n = 3, \text{ то } \quad C_\rho &= e_3(X)^2, \\ \text{Spec } A &= e_3(X)^{\frac{2}{3}} \cdot \{1, \nu, \nu^{-1}\}, \quad \text{Spec } B = e_3(X) \cdot \{1, -1^{\#2}\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где $m^{\#n}$ обозначает собственное значение m кратности n ;

$$\begin{aligned} \text{Если } d = n = 4, \text{ то } \quad \text{для каждого корня } h(X) &:= \sqrt[2]{e_4(X)}: \quad C_\rho = h(X)^3, \\ \text{Spec } A &= h(X) \cdot \{1^{\#2}, \nu, \nu^{-1}\}, \quad \text{Spec } B = h(X)^{\frac{3}{2}} \cdot \{1^{\#2}, -1^{\#2}\}; \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \text{Если } d = n = 5, \text{ то } \quad \text{для каждого корня } f = f(X) &:= \sqrt[5]{e_5(X)}: \quad C_\rho = f(X)^6, \\ \text{Spec } A &= f(X)^2 \cdot \{1, \nu^{\#2}, (\nu^{-1})^{\#2}\}, \quad \text{Spec } B = f(X)^3 \cdot \{1^{\#3}, -1^{\#2}\}; \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \text{Если } d = 6, n = 5, m_i = 2, 1 \leq i \leq 5, \text{ то } \quad C_\rho &= -x_i e_5(X), \\ \text{Spec } A &= -\sqrt[3]{x_i e_5(X)} \cdot \{1^{\#2}, \nu^{\#2}, (\nu^{-1})^{\#2}\}, \quad \text{Spec } B = i \sqrt[2]{x_i e_5(X)} \cdot \{1^{\#3}, -1^{\#3}\}. \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно, спектры элементов a и b во всех неприводимых представлениях с точностью до множителя определяются собственными значениями x_i элементарных зацеплений. Это предложение - ключ к поиску всех неприводимых представлений.

1.2.1 Неприводимые представления фактор-алгебр Q_X

Мы используем Предложение 1.1 для явного построения неприводимых представлений Q_X размерности ≤ 6 . Мы представляем результат в базисе из собственных векторов представления первого элементарного зацепления.

Предложение 1.2. Фактор-алгебры Q_X при $|X| \leq 5$ имеют следующие представления размерностей $\dim V \leq 6$.

Если $|X| = \dim V = 1$, то существует единственное представление

$$\rho_X^{(1)}(g_1) = \rho_X^{(1)}(g_2) = x_1. \quad (15)$$

Если $|X| = \dim V = 2$, то существует единственное представление

$$\rho_X^{(2)}(g_1) = \text{diag}\{x_1, x_2\}, \quad \rho_X^{(2)}(g_2) = \frac{1}{x_1 - x_2} \begin{pmatrix} -x_2^2 & -x_1 x_2 \\ x_1^2 - x_1 x_2 + x_2^2 & x_1^2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Если $|X| = \dim V = 3$, то существует единственное представление

$$\rho_X^{(3)}(g_1) = \text{diag}\{x_1, x_2, x_3\}, \quad \rho_X^{(3)}(g_2) = \begin{pmatrix} \frac{x_2 x_3 (x_2 + x_3)}{\Delta_1(X)} & \frac{x_3 (x_1^2 + x_2 x_3)}{\Delta_1(X)} & \frac{x_2 (x_1^2 + x_2 x_3)}{\Delta_1(X)} \\ \frac{x_3 (x_2^2 + x_1 x_3)}{\Delta_2(X)} & \frac{x_1 x_3 (x_1 + x_3)}{\Delta_2(X)} & \frac{x_1 (x_2^2 + x_1 x_3)}{\Delta_2(X)} \\ \frac{x_2 (x_3^2 + x_1 x_2)}{\Delta_3(X)} & \frac{x_1 (x_3^2 + x_1 x_2)}{\Delta_3(X)} & \frac{x_1 x_2 (x_1 + x_2)}{\Delta_3(X)} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

где мы ввели обозначение

$$\Delta_i(X) := \prod_{j=1, j \neq i}^{|X|} (x_j - x_i). \quad (18)$$

Если $|X| = \dim V = 4$, то существуют два неэквивалентных представления, зависящих от выбора квадратного корня $h = \sqrt{e_4(X)}$:

$$\rho_{h,X}^{(4)}(g_1) = \text{diag}\{x_1, x_2, x_3, x_4\},$$

$$\rho_{h,X}^{(4)}(g_2) = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1}{\Delta_1(X)} & \frac{\beta_1 \gamma_3 \gamma_4}{\Delta_1(X)} & \frac{\beta_1 \gamma_2 \gamma_4}{\Delta_1(X)} & \frac{\beta_1 \gamma_2 \gamma_3}{\Delta_1(X)} \\ \frac{\beta_2}{\Delta_2(X)} & \frac{\alpha_2}{\Delta_2(X)} & \frac{\beta_2 \gamma_2}{\Delta_2(X)} & \frac{\beta_2 \gamma_2}{\Delta_2(X)} \\ \frac{\beta_3}{\Delta_3(X)} & \frac{\beta_3 \gamma_3}{\Delta_3(X)} & \frac{\alpha_3}{\Delta_3(X)} & \frac{\beta_3 \gamma_3}{\Delta_3(X)} \\ \frac{\beta_4}{\Delta_4(X)} & \frac{\beta_4 \gamma_4}{\Delta_4(X)} & \frac{\beta_4 \gamma_4}{\Delta_4(X)} & \frac{\alpha_4}{\Delta_4(X)} \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Здесь $\alpha_i(h, X) := e_3(X^{\setminus i}) e_1(X^{\setminus i}) - h e_2(X^{\setminus i})$, $X^{\setminus i} := X \setminus \{x_i\}$,

$$\beta_i(h, X) := e_4(X)/x_i^2 - h, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (20)$$

$$\gamma_a(h, X) := x_1 x_a + x_b x_c - h, \quad a, b, c \in \{x_2, x_3, x_4\} \text{ попарно различны.}$$

Если $|X| = \dim V = 5$, то существуют пять неэквивалентных представлений соответствующих различным значениям корня $f(X) := \sqrt[5]{e_5(X)}$:

$$\rho_{f,X}^{(5)}(g_1) = \text{diag}\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}, \quad \rho_{f,X}^{(5)}(g_2) = \|m_{ij}\|_{1 \leq i, j \leq 5}, \quad (21)$$

$$m_{ii}(f, X) := \frac{e_4(X^{\setminus i}) e_1(X^{\setminus i}) + f(X) x_i e_3(X^{\setminus i}) + f(X) \prod_{k=1, k \neq i}^5 (f(X) + x_k)}{\Delta_i(X)}, \quad (22)$$

$$m_{ij}(f, X) := \frac{(x_i^2 + f(X) x_i + f(X)^2) \prod_{k=1, k \neq i, j}^5 (f(X)^2 + x_i x_k)}{f(X) x_i x_j \Delta_i(X)}, \quad \forall i \neq j. \quad (23)$$

Если $|X| = 5$, $\dim V = 6$, то существуют пять неэквивалентных представлений $\rho_{i,X}^{(6)}$, $i = 1, \dots, 5$, соответствующих всем допустимым значениям $C_\rho = -x_i e_5(X)$ центрального элемента s . Формулы для $\rho_{5,X}^{(6)}$ заданы в таблице 1.2. Формулы всех остальных представлений могут быть получены перестановкой собственных значений x_5 и x_i : $\rho_{i,X}^{(6)} = \sigma_{i5} \circ \rho_{5,X}^{(6)}$, $i = 1 \dots 4$.

Замечание 1.2. Представление Q_X остается также представлением $Q_{X'}$ если $X \subset X'$.

Таблица 1: 6-мерное представление Q_X , $|X|=5$.

$\rho_{5,X}^{(6)}(g_1) = \text{diag}\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_5\}, \quad \rho_{5,X}^{(6)}(g_2) = \ g_{ij}\ _{1 \leq i, j \leq 6},$	
$G := \ g_{ij}\ _{1 \leq i, j \leq 4} :$	$g_{ii} = \frac{e_4(X \setminus^i) e_1(X \setminus^i) - x_i x_5 e_3(X \setminus^i)}{\Delta_i(X)}, \quad X \setminus^i := X \setminus \{x_i\}, \quad i=1, \dots, 4;$ $g_{1a} = \frac{p_a q_b q_c}{x_1^2 \Delta_a(X)}, \quad g_{a1} = \frac{p_1}{x_a^2 \Delta_1(X)}, \quad g_{ab} = \frac{q_a p_b}{x_a^2 \Delta_b(X)},$ где индексы $a, b, c \in \{2, 3, 4\}$ попарно различны, и $q_a(X) := x_1 x_a + x_b x_c, \quad p_i(X) := e_5(X) - x_i^3 x_5^2;$
$G_{31} := \begin{pmatrix} g_{51} & g_{52} \\ g_{61} & g_{62} \end{pmatrix} :$	$\text{diag}\left\{\frac{1}{\Delta_1(X)}, \frac{1}{\Delta_2(X)}\right\};$
$G_{32} := \begin{pmatrix} g_{53} & g_{54} \\ g_{63} & g_{64} \end{pmatrix} :$	$\begin{pmatrix} q_4 r & q_3 (\sigma_{34} \circ r) \\ (\sigma_{12} \circ r) & (\sigma_{12} \sigma_{34} \circ r) \end{pmatrix},$ где $r(X) := \frac{x_3}{x_1(x_2 - x_1) \Delta_3(X \setminus^2)},$ и $\forall f(X) : \sigma_{ij} \circ f(\dots x_i \dots x_j \dots) := f(\dots x_j \dots x_i \dots);$
$G_{33} := \begin{pmatrix} g_{55} & g_{56} \\ g_{65} & g_{66} \end{pmatrix} :$	$\begin{pmatrix} u & q_3 q_4 v \\ (\sigma_{12} \circ v) & (\sigma_{12} \circ u) \end{pmatrix},$ где $v(X) := \frac{p_2(X)}{x_1 x_5 (x_2 - x_1) \Delta_5(X \setminus^2)},$ и $u(X) := \frac{x_1 x_2 (x_3 + x_4) (x_3 x_4 - x_1 x_5) + x_3 x_4 (x_2 - x_1) (x_1^2 + x_2 x_5)}{(x_2 - x_1) \Delta_5(X \setminus^2)};$
$G_{23} := \begin{pmatrix} g_{35} & g_{36} \\ g_{45} & g_{46} \end{pmatrix} :$	$\frac{1}{x_5 \Delta_5(X)} \begin{pmatrix} \frac{w}{x_3^2} & \frac{q_3 (\sigma_{12} \circ w)}{x_3^2} \\ \frac{(\sigma_{34} \circ w)}{x_4^2} & \frac{q_4 (\sigma_{12} \sigma_{34} \circ w)}{x_4^2} \end{pmatrix},$ $w(X) := p_1(X) (x_1 x_2 x_3 x_4 \{x_1 x_3 + x_5 (x_2 + x_4)\} - x_5^3 \{x_1 x_3 (x_2 + x_4) + x_5 x_2 x_4\});$
$G_{13} := \begin{pmatrix} g_{15} & g_{16} \\ g_{25} & g_{26} \end{pmatrix} :$	$\frac{1}{\Delta_5(X)} \begin{pmatrix} \frac{z}{x_1} & \frac{q_3 q_4 (\sigma_{12} \sigma_{23} \circ w)}{x_1^2 x_5} \\ \frac{(\sigma_{23} \circ w)}{x_2^2 x_5} & \frac{(\sigma_{12} \circ z)}{x_2} \end{pmatrix},$ $z(X) := (e_1 e_3 - x_1^2 e_2) (x_1 e_1 e_3 - e_2 x_5^3) x_1 x_5 +$ $e_3 (x_1 - x_5) (x_1^2 (e_1 - x_1) \{e_3 (x_1 - x_5) - e_1 x_5^3\} + (x_1 e_2 - e_3) \{x_1 e_2 + (x_1 - x_5) x_5^2\} x_5),$ где e_i - это элементарный симметрический полином от переменных x_2, x_3, x_4 .

1.2.2 Критерии полупростоты для алгебр Q_X

В этом разделе мы приводим условия приводимости для полученных представлений и формулируем критерии полупростоты для алгебр Q_X .

Предложение 1.3. *Для алгебр Q_X (7) определяемых набором параметров X (5) представления $\rho^{(d)}$, $d \leq 5$, описанные в Предложении 1.2 неприводимы тогда и только тогда, когда следующие условия на параметры выполнены.*

$$\text{Для } |X|=2, \rho_X^{(2)} \quad I_{ij}^{(2)} := x_i^2 - x_i x_j + x_j^2 \neq 0, \quad (24)$$

где $i, j \in \{1, 2\}$ различны;

$$\text{Для } |X|=3, \rho_X^{(3)} \quad I_{ijk}^{(3)} := x_i^2 + x_j x_k \neq 0, \quad (25)$$

где $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ попарно различны;

$$\text{Для } |X|=4, \rho_{h,X}^{(4)} \quad I_{h,i}^{(4)} := x_i^2 - h \neq 0, \quad J_{h,ijkl}^{(4)} := x_i x_j + x_k x_l - h \neq 0, \quad (26)$$

где $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$ попарно различны;

$$\text{Для } |X|=5, \rho_{f,X}^{(5)} \quad I_{f,i}^{(5)} := x_i^2 + x_i f + f^2 \neq 0, \quad J_{f,ij}^{(5)} := x_i x_j + f^2 \neq 0, \quad (27)$$

где $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ попарно различны;

В противном случае, представления будут приводимыми, но неразложимыми.

Для представлений $\rho_{s,X}^{(6)}$, $s = 1, \dots, 5$, также найденных в Предложении 1.2 мы представляем менее подробное утверждение, в котором описаны условия неприводимости:

Если $|X|=5$, $\rho_{s,X}^{(6)}$, $1 \leq s \leq 5$ неприводимы, если

$$I_i^{(6)} := e_5(X) + x_i^5 \neq 0, \quad J_{ij}^{(6)} := e_5(X) - x_i^3 x_j^2 \neq 0, \quad K_{i,jklm}^{(6)} := x_j x_k + x_l x_m \neq 0, \quad (28)$$

где $i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ попарно различны. Иначе, среди них есть приводимые, но неразложимые представления.

Доказательство этого результата основано на поиске инвариантных подпространств для полученных неприводимых представлений. Выбранный базис собственных векторов первого генератора g_1 очень удобен для этого. Как прямое следствие Предложения 1.2 и Предложения 1.3 мы формулируем наш основной результат.

Теорема 1.1. *Для $|X| \leq 5$ алгебра Q_X (7), определяемая множеством X (5) проста тогда и только когда одно из следующих условий выполнено.*

$$|X|=2 : \quad I_{12}^{(2)} \neq 0; \quad (29)$$

$$|X|=3 : \quad \{I_{ij}^{(2)}, I_{ijk}^{(3)}\} \cap \{0\} = \emptyset \quad (30)$$

и любых попарно различных индексов $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$;

$$|X|=4 : \quad \{I_{ij}^{(2)}, I_{ijk}^{(3)}, I_{h,i}^{(4)}, J_{h,ijkl}^{(4)}\} \cap \{0\} = \emptyset \quad (31)$$

$\forall h : h^2 = e_4(X)$, и любых попарно различных индексов $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4\}$;

$$|X|=5 : \quad \{I_{ij}^{(2)}, I_{ijk}^{(3)}, I_{h,i}^{(4)}, J_{h,ijkl}^{(4)}, I_{f,i}^{(5)}, J_{f,ij}^{(5)}, I_i^{(6)}, J_{ij}^{(6)}, K_{i,jklm}^{(6)}\} \cap \{0\} = \emptyset \quad (32)$$

для любого h такого, что $f^5 = e_5(X)$, $\forall h : h^2 = e_4(X^{\setminus i})$,
и для любых попарно различных индексов $i, j, k, l, m \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

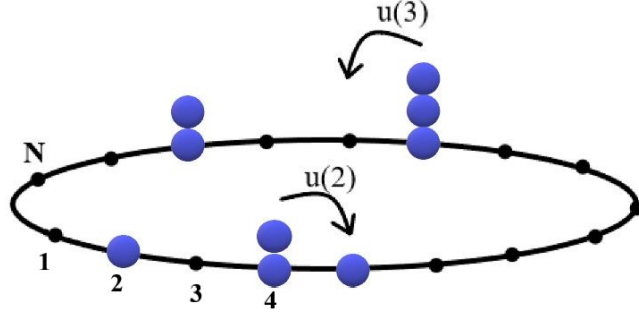


Рис. 1: q -бозонный процесс нулевого радиуса взаимодействия на решетке размера N и число частиц $p = 9$.

В полупростом случае все неприводимые представления этих алгебр описаны в Предложении 1.2.

1.3 q -бозонный процесс нулевого радиуса взаимодействия

Во второй главе диссертации мы представляем q -бозонный процесс нулевого диапазона и поток частиц в качестве наблюдаемой, приводим необходимую информацию о стационарном состоянии и кумулянтах тока и излагаем один из основных результатов, точное выражение для коэффициента диффузии. Затем мы анализируем асимптотику и предел масштабирования полученных точных формул, проверяя скейлинговые гипотезы, сформулированные для моделей в классах универсальности КПЖ и ЭУ.

1.3.1 Модель и её наблюдаемые

ZRP - это стохастическая система взаимодействующих частиц. Мы определяем её на периодической одномерной решетке из N узлов (узлы i и $N + i$ идентичны) и p частиц. Каждый узел решетки может быть занят целым числом частиц $n_i \geq 0$. Конфигурация частицы задается набором чисел заполнения $\mathbf{n} = \{n_1, \dots, n_N\}$. Общее количество конфигураций составляет $\binom{N+p-1}{p}$.

Мы рассматриваем непрерывный марковский процесс на пространстве конфигураций. Каждый узел системы оснащен пуассоновским будильником, который звонит с интенсивностью $u(n_i)$. Когда часы звонят, частица из узла i прыгает в соседний узел $i + 1$ (подразумевается, что $u(0) = 0$).

Пусть $P_t(\mathbf{n})$ - вероятность того, что система находится в конфигурации \mathbf{n} в момент времени t . Вероятность удовлетворяет прямому уравнению Колмогорова

$$\partial_t P_t(\mathbf{n}) = \mathcal{L}P_t(\mathbf{n}), \quad (33)$$

где \mathcal{L} - это оператор, который действует на вероятность следующей формулой

$$\mathcal{L}P_t(\mathbf{n}) = \sum_{\mathbf{n}'} (u(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n})P_t(\mathbf{n}') - u(\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}')P_t(\mathbf{n})),$$

где интенсивность перехода $u(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n})$ из конфигурации \mathbf{n}' в \mathbf{n} равна $u(n'_i)$, если конфигурация \mathbf{n} получена из \mathbf{n}' прыжком одной частицы из узла i в узел $i + 1$ и нуль иначе. В дальнейшем мы имеем дело с конкретным одно-параметрическим семейством интенсивностей

$$u(n) = [n]_q = \frac{1 - q^n}{1 - q},$$

которое, как было показано, является необходимым для того, чтобы модель была интегрируема с помощью Бете анзаца. [67]. Интенсивности положительны, когда $q > -1$. Такие значения мы и будем рассматривать.

Как только получено решение главного уравнения (уравнение Колмогорова), соответствующее конкретному начальному условию, можно вычислить математическое ожидание любой функции от конфигурации в заданный момент времени. Зачастую нам хочется изучать статистику аддитивного функционала на траекториях процесса, под которой мы понимаем величину Y_t , изменяющую свое значение на фиксированное $\delta Y_{\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}}$ каждые раз, когда система перескакивает из \mathbf{n}' в \mathbf{n} . Для этого рассматривается совместная вероятность $P_t(\mathbf{n}, Y)$ системы быть в конфигурации \mathbf{n} и достичь значения Y_t равного Y в момент t . Её производящая функция

$$G_t(\mathbf{n}, \gamma) = \sum_{Y=0}^{\infty} P_t(\mathbf{n}, Y) e^{\gamma Y}$$

удовлетворяет нестохастической деформации уравнения (33)

$$\partial_t G_t(\mathbf{n}, \gamma) = \mathcal{L}_\gamma G_t(\mathbf{n}, \gamma),$$

где матрица деформированного оператора \mathcal{L}_γ получается из \mathcal{L} умножением всех недиагональных элементов, соответствующих переходу из \mathbf{n}' в \mathbf{n} на $e^{\gamma \delta Y_{\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}}}$. Мы рассматриваем конкретный пример Y_t , общее пройденное расстояние всеми частицами к моменту t . В этом случае возрастание Y_t из-за прыжка одной частицы всегда равно $\delta Y_{\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}} = 1$, тогда действие оператора \mathcal{L}_γ будет следующим

$$\mathcal{L}_\gamma G_t(\mathbf{n}, \gamma) = \sum_{\mathbf{n}'} (e^\gamma u(\mathbf{n}' \rightarrow \mathbf{n}, \gamma) G_t(\mathbf{n}', \gamma) - u(\mathbf{n} \rightarrow \mathbf{n}', \gamma) G_t(\mathbf{n}, \gamma)). \quad (34)$$

Производящая функция моментов случайной величины Y_t выражается через $G_t(\mathbf{n}, \gamma)$

$$\mathbb{E} e^{\gamma Y_t} = \sum_{\mathbf{n}} G_t(\mathbf{n}, \gamma).$$

Преимущество использования производящей функции $G_t(\mathbf{n}, \gamma)$ заключается в наблюдении, что больших временах её поведение определяется наибольшим собственным значением $\lambda(\gamma)$ матрицы оператора \mathcal{L}_γ ,

$$\lambda(\gamma) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \mathbb{E} e^{\gamma Y_t}}{t} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\gamma^n}{n!},$$

то есть функция $\lambda(\gamma)$ играет роль производящей функции моментов для масштабированных кумулянтов

$$c_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\langle Y_t^n \rangle_c}{t}$$

случайной величины Y_t , где мы используем обозначение $\langle \xi^n \rangle_c$ для n -ого кумулянта случайной величины ξ . В частности, первые два кумулянта тока, с которыми мы имеем дело, имеют простой физический смысл. Первый

$$J = J(N, p) := c_1 = \lambda'(0)$$

- ожидаемое число прыжков частиц в системе в единицу времени, он же средний интегральный ток частиц, полученный усреднением по времени общего ожидаемого количества прыжков, сделанных всеми частицами за бесконечно большое время t . Второй масштабированный кумулянт - это групповой коэффициент диффузии

$$\Delta = \Delta(N, p) := c_2 = \lambda''(0)$$

определяемый движением всех частиц.

1.4 Стационарная мера и масштабированные кумулянты

Особенностью ZRP является факторизованная форма для стационарного распределения вероятности [64], облегчающая анализ стационарного состояния. Вероятность нахождения системы в конфигурации \mathbf{n} задается формулой произведение одноузельных весов

$$\mathbf{P}_{st}(\mathbf{n}) = \frac{\prod_{i=1}^N f(n_i)}{Z(N, p)}, \quad (35)$$

где одноузельный вес задается

$$f(m) = \begin{cases} \prod_{j=1}^m \frac{1}{u(j)}, & m > 0 \\ 1, & m = 0 \end{cases}, \quad (36)$$

и

$$Z(N, p) = \sum_{\{\mathbf{n}: n_1 + \dots + n_N = p\}} \prod_{i=1}^N f(n_i). \quad (37)$$

- нормировочный коэффициент, называемый статистической суммой. Её интегральное представление может быть определено с использованием производящей функции одноузельных весов

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n.$$

В случае q -бозонного ZRP ряд $F(z)$ сходится при z в диске $|z| < 1/(1-q)$ при $|q| \leq 1$ и на всей комплексной плоскости при $|q| > 1$ к бесконечным произведениям, которые определяют две разные q -экспоненциальные функции

$$F(z) = \begin{cases} e_q(z) := (z(1-q); q)_{\infty}^{-1}, & |q| < 1, \\ E_{1/q}(z) := (z(q^{-1}-1); q^{-1})_{\infty}, & |q| > 1, \end{cases} \quad (38)$$

где $(z; q)_{\infty} = \prod_{i=0}^{\infty} (1 - zq^i)$. Каноническая статистическая сумма $Z(N, p)$ имеет интегральное представление

$$Z(N, p) = \oint \frac{F^N(z) dz}{z^{p+1} 2\pi i}, \quad (39)$$

и появляется в результатах. Например, интегральный ток частиц, рассчитанный на основе анализа стационарного состояния

Предложение 1.4.

$$J = \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^N u(n_i) \right) = N \frac{Z(N, p-1)}{Z(N, p)}. \quad (40)$$

Второй масштабированный кумулянт, он же коэффициент диффузии, уже не может быть получен из простого анализа стационарного состояния, потому как он неявно содержит разновременные корреляции. А значит нам нужно сначала решить динамическую задачу, что мы и делаем. Мы приводим финальное выражение для коэффициента диффузии, что является одним из основных результатов диссертации.

Теорема 1.2. *Коэффициент диффузии Δ имеет следующее представление*

$$\begin{aligned} \Delta &= pJ + \frac{2N^2}{Z(N, p)^2} \oint \frac{dy}{2\pi i} \frac{F^N(y)}{y^p} \oint_{|y| < |t|} \frac{dt}{2\pi i} \frac{F^N(t)}{t^p} \frac{\phi(y)}{t-y} \\ &+ \frac{2N^2}{Z(N, p)^2} \sum_{i=1}^{\infty} \oint \frac{dt}{2\pi i} \frac{F^N(t)}{t^p} \oint_{|y| < |t|} \frac{dy}{2\pi i} \frac{F^N(y)}{y^p} \frac{q^{\pm i} \phi(yq^{\pm i}) + \phi(y)}{t-yq^{\pm i}}, \end{aligned} \quad (41)$$

где знаки плюс и минус в степенях q соответствуют $|q| < 1$ и $q > 1$, а контуры интегрирования представляют собой две вложенных простых петли против часовой стрелки вокруг начала координат, которые не содержат любые другие полюса. Также мы определили функцию

$$\phi(z) = \frac{J}{p} (\ln F(z))' - 1. \quad (42)$$

где мы использовали обозначение $(\ln F(z))' = \partial_z (\ln F(z))$ для производной функции $\ln F(z)$.

Формула (41) верна для $-1 < q \neq 1$. Конечно, физический интерес представляет поведение кумулянтов в термодинамическом пределе, когда понятие универсальности становится применимо.

1.5 Рост фронтов и КПЖ-ЭУ универсальность

В этом разделе мы устанавливаем связь q -бозонного ZRP с моделью растущего фронта и обсуждаем асимптотический предел анонсированной точной формулы в контексте универсальности КПЖ-ЭУ. Мы сформулируем скейлинговые гипотезы, которые можно извлечь из уравнения КПЖ. Затем сопоставим их с асимптотическими результатами, полученными для интерфейса, ассоциированного с q -бозонным ZRP.

Переведем состояние q -бозонного процесса нулевого радиуса взаимодействия в функцию высоты $\mathbb{R} \times [0, N]$. Для $x \in [0, N]$ и времени t определим кусочно-постоянную функцию высоты $h(x, t)$, которая совершает прыжок

$$h(x+0, t) - h(x-0, t) = n_x(t) \quad (43)$$

в каждой целочисленной координате $x = 1, \dots, N$, а в противном случае остается постоянной. Периодичность системы частиц подразумевает цилиндрические граничные условия на функцию высоты (см. рис. 2)

$$h(x+N, t) = \rho N + h(x, t), \quad (44)$$

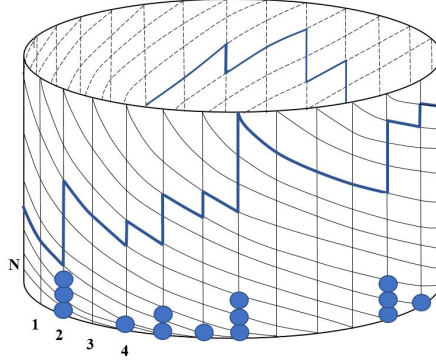


Рис. 2: Отображение конфигурации $\mathbf{n} = (0, 3, 0, 1, 2, 1, 3, 0, 0, 0, 3, 1, 0, \dots, 0)$ в растущий фронт.

где плотность частиц $\rho = p/N$ играет роль среднего наклона фронта. Мы интересуемся поведением больших систем на больших временах, подразумевая, что предел $t \rightarrow \infty$ берется первым. Статистики функции высоты описывающей фронт предсказаны универсальностью КПЖ-ЭУ.

КПЖ уравнение и скейлинговые гипотезы

Цель, которую мы преследуем в приведенном ниже обсуждении, состоит в том, чтобы описать несколько предположений, сделанных на основе эвристического анализа уравнения КПЖ [27], [28], а также точного решения ASEP [41].

Рассмотрим уравнение Кардара-Паризи-Жанга на функцию высоты $h(x, t)$

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\lambda}{2} \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \eta(x, t), \quad (45)$$

$\eta(x, t)$ - гауссовский белый шум с нулевым средним значением и ковариацией

$$\mathbb{E}\eta(x, t), \eta(x', t') = D\delta(x - x')\delta(t - t'), \quad (46)$$

где ν , λ и D - три параметра модели. В частном случае $\lambda = 0$ это уравнение называется уравнением Эдвардса-Уилкинсона. Мы выбираем цилиндрические граничные условия $h(x + N, t) = h(x, t) + \rho N$ с наклоном ρ , чтобы добиться согласованности с отображением (43). Нас интересуют статистики функции высоты на больших временах. В этом пределе зависимость от начального условия пропадает. Величина описывающая колебания функции высоты на цилиндре - это её дисперсия

$$W^2(N, t) = \langle h^2(x, t) \rangle_c, \quad (47)$$

которая в частном случае плоских начальных условий, не зависит от координаты x в любой момент.

В диссертации мы воспроизводим аргументы размерного анализа о поведении отклонений функции высоты от среднего значения в асимптотических пределах, приводим масштабные аргументы об интерполяции этой величины между независимым от размера режимом малых времен и диффузионным поздним режимом и используем анзац Фамили-Вишека [83]. Эти аргументы приводят нас к следующей скейлинговой гипотезе для классов универсальности КПЖ и ЭУ.

Скейлинговая гипотеза 1. Поведение дисперсии $W^2(N, t)$ функции высоты на больших временах в пределе большого размера системы (предел $t \rightarrow \infty$ берется первым) в классе универсальности КПЖ

$$W^2(N, t) \simeq \kappa_{KPZ} (D/2\nu)^{\frac{3}{2}} |\lambda| N^{-\frac{1}{2}} t, \quad t \gg N^{3/2}, \quad N \rightarrow \infty, \quad (48)$$

а в классе универсальности ЭУ

$$W^2(N, t) \simeq \kappa_{EW} \frac{Dt}{N}, \quad t \gg N^2, \quad N \rightarrow \infty, \quad (49)$$

где κ_{KPZ} и κ_{EW} - универсальные безразмерные константы, специфичные для каждого класса универсальности.

Эти константы могут быть получены из точных решений. Последняя

$$\kappa_{EW} = 1 \quad (50)$$

следует непосредственно из уравнения ЭУ, а первая

$$\kappa_{KPZ} = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \quad (51)$$

была впервые получена из точного решения задачи TASEP [33] и предполагается универсальной для всего класса универсальности КПЖ.

Обращаем внимание на то, что в скейлинговых аргументах для классов универсальности ЭУ и КПЖ используются две разные скейлинговые функции осуществляющие склейку раннего и позднего режимов. Переход между поздними асимптотиками этих двух функций дается в терминах ещё одной скейлинговой функции.

Скейлинговая гипотеза 2. Поздняя стадия эволюции в диффузионном скейлинге $t/N^2 \rightarrow \infty$ при $\lambda \asymp 1/\sqrt{N}$, $N \rightarrow \infty$ дисперсия функции высоты задается

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{W^2(N, t)}{t} = \frac{D}{N} \mathcal{F}(g, \infty), \quad g = \frac{\lambda^2 DN}{\nu^3}. \quad (52)$$

где $\mathcal{F}(g, \infty)$, по предположению является универсальной функцией перехода. Кандидатом такой функции стала

$$\mathcal{F}(g, \infty) = \frac{\sqrt{g}}{2\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \frac{y^2 e^{-y^2}}{\tanh((\sqrt{g}/\sqrt{32})y)} dy. \quad (53)$$

впервые полученная [41] как скейлинговый предел точного выражения для коэффициента диффузии в условиях слабой асимметрии.

1.5.1 Размерные инварианты и асимптотические результаты.

Мы объясняем, как отождествить параметры модели с параметрами уравнения КПЖ, а затем проверить сформулированные гипотезы на асимптотических результатах, полученных для q -бозонного ZRP.

Способ идентификации констант, определяемых моделью, в классе универсальности КПЖ был предложен в [28, 73]. Он основывается на наблюдении, что параметры $A = D/2\nu$ и λ устойчивы относительно масштабного преобразования

$$x \rightarrow bx, t \rightarrow b^z t, h \rightarrow b^\zeta h, \quad (54)$$

с $z = 3/2$ и $\zeta = 1/2$, которые при соответствующих преобразованиях D, λ и ν не изменяют уравнение КПЖ. Затем было высказано предположение, что размерные зависящие от модели константы в универсальных функциях должны появляться в виде комбинации этих двух параметров. Это действительно так в (49)

$$W^2(N, t) \simeq \kappa_{KPZ} A^{\frac{3}{2}} |\lambda| N^{-\frac{1}{2}} t, \quad (55)$$

и по предположение верно для всех систем КПЖ класса.

Утверждение 1.2. *Для ассоциированного интерфейса, соответствующего q - бозонному ZRP, идентификация для коэффициента нелинейности дает*

$$\lambda = \frac{z^*}{h_2} \left(\frac{1}{|h_2|} - \frac{h_3}{h_2^2} \right), \quad (56)$$

заданного в терминах производных $h_k = (z\partial_z)^k h(z)|_{z=z^*}$ функции $h(z) = \ln F(z) - \rho \ln(z)$ вычисленных в критической точке z^* , наименьшем положительном решении уравнения $z^*(\ln F(z^*))' = \rho$. Константа A при идентификации

$$A = h_2. \quad (57)$$

Это утверждение является результатом процедуры идентификации, которая включает в себя оценку контурных интегралов методом седловой точки. Первая часть асимптотического анализа, который мы проводим в диссертации, направлена на вычисление коэффициента диффузии в термодинамическом пределе.

Теорема 1.3. *Коэффициент диффузии в пределе большого размера системы*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta}{N^{\frac{3}{2}}} = \frac{\sqrt{\pi}}{8\sqrt{h_2}} \left(\frac{\phi_1 h_3}{|h_2|} - \phi_2 \right), \quad (58)$$

где $\phi_k = (z\partial_z)^k \phi(z)|_{z=z^*}$ с $\phi(z)$ определенной в (42).

Вторая часть асимптотического анализа посвящена режиму кроссовера. Он достигается при скейлинге, в котором безразмерная переменная $g = \lambda^2 D N \nu^{-3}$ из (52) остается постоянной при $N \rightarrow \infty$. Это достигается при

$$q = e^{-\frac{\alpha}{\sqrt{N}}}.$$

Тогда вычисление приводит к

$$\lambda \simeq -\frac{\alpha}{\sqrt{N}}.$$

Таким образом, α меняясь от нуля до бесконечности переводит систему из класса универсальности ЭУ в КПЖ. Вычисляя размерные параметры в обоих классах универсальности мы проверяем вторую скелинговую гипотезу.

Теорема 1.4.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\Delta}{N} = \rho \mathcal{F}(g, \infty),$$

что в точности совпадает с предполагаемым выражением (52) универсальной скейлинговой функции $\mathcal{F}(g, \infty)$ из (53).

Утверждение 1.3. Скейлинговые гипотезы 1 и 2 верны для растущего фронта, соответствующего q -бозонному ZRP.

Направления возможных применений результатов

Укажем несколько направлений, в которых результаты этой диссертации актуальны и востребованы:

- теория узлов,
- теория представлений,
- теория квантовых групп,
- стохастические интегрируемые процессы.

Публикации:

Основные результаты диссертации опубликованы в двух статьях:

1. Pyatov P., Trofimova A., *Representations of finite-dimensional quotient algebras of the 3-string braid group* ("Представления конечномерных фактор алгебр группы кос на трех нитях"), Moscow Math. J., 2021, **21**, 427-442.

2. A. Trofimova, A. Povolotsky, *Current statistics in the q -boson zero range process* ("Статистики тока в q -бозонном процессе нулевого радиуса взаимодействия"), J. Phys. A: Math. Theor. 2020, **53**, 283003-1–283003-35.

Список литературы

- [1] Korepin V E Bogoliubov N M and Izergin A G 1993 *Quantum inverse scattering method and correlation functions* (Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press)
- [2] Baxter R J 1982 *Exactly solved models in statistical mechanics* (London, Academic Press)
- [3] Coxeter H S M 1957 *Factor groups of the braid group* (University of Toronto Press) 95–122
- [4] Curtis C and Reiner I *Methods of representation theory – with applications to finite groups and orders II* (Pure and applied mathematics John Wiley & Sons, Inc., New York)
- [5] Halverson T and Ram A 2005 *European J. Comb.* **26** 869-921
- [6] Leduc R and Ram A 1997 *Adv. Math.* **125** 1-94
- [7] Formanek E, Lee W, Sysoeva I and Vazirani M 2003 *J. Algebra and Appl.* **2** 3 317-333
- [8] Albeverio S and Kosyak A 2008 *q-Pasqal's triangle and irreducible representations of the braid group B_3 in arbitrary dimension* (arXiv:0800.2778)
- [9] Tuba I and Wenzl H 2001 *Pacific J. Math.* **197** 2 491-510
- [10] Westbury B 1995 *'On the character varieties of the modular group, preprint,* (University of Nottingham)
- [11] Le Bruyn L, 2011 *J. Pure Appl. Algebra* **215** 1003–1014
- [12] Le Bruyn 2013 *Most irreducible representations of the 3-string braid group* (arXiv:1303.4907)
- [13] Broué M, Malle G and Rouquier R, 1995 *On complex reflection groups and their associated braid groups* (CMS Conf. Proc. 16, Amer. Math. Soc., Providence) 1-13
- [14] Broué M, Malle G and Rouquier R 1998 *J. Reine Angew. Math.* **500** 127-190
- [15] Malle G and Michel J 2010 *LMS J. Comput. Math.* **13** 426-450
- [16] Marin I 2014 *J. Pure Appl. Algebra* **218** 704-720
- [17] Shephard G C and Todd J A 1954 *Canad. J. Math.* **6** 274
- [18] Marin I 2017 *Report on the Broué-Malle-Rouquier conjectures,* (Perspectives in Lie Theory, Springer INdAM Series **19**) 359-368
- [19] Etingof P 2017 *Arnold Math. J.* **3** 3 445-449
- [20] Boura C, Chavli E, Chlouveraki M and Karvounis K 2020 *J. Symb. Comp.* **96** 62-84
- [21] Losev I 2015 *Algebra Number Theory* **9** 493-502

- [22] Chavli E 2016 *J. Algebra* **159** 238-271
- [23] Chavli E 2018 *Comm. in Algebra* **46** 1 2018 386-464
- [24] Edwards S F and Wilkinson D R 1982 *Proc. Roy. Soc. of London A: Math. and Phys. Sci.* **381** 17
- [25] Kardar M, Parisi G and Zhang Y-C 1986 *Phys. Rev. Lett.* **56** 889
- [26] Halpin-Healy T and Zhang Y-C 1995 *Phys. rep.* **254** 215
- [27] Krug J 1997 *Adv. Phys.* **46** 139
- [28] Krug J, Meakin P and Halpin-Healy T 1992 *Phys. Rev. A* **45** 638
- [29] Liggett T M 2005 *Interacting particle systems* (Springer)
- [30] Derrida B, Domany E and Mukamel D 1992 *J. Stat Phys.* **69** 667
- [31] Derrida B, Evans M R, Hakim V and Pasquier V 1993 *J Phys A: Math and Gen* **26** 1493
- [32] Derrida B and Evans M R 1993 *J. Phys. I France* **3** (2) 311
- [33] Derrida B and Lebowitz J L 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 209
- [34] Appert-Rolland C, Derrida B, Lecomte V and Van Wijland F 2008 *Phys. Rev. E* **78** 021122
- [35] Derrida B, Lebowitz J L and Speer E R 2001 *Phys.Rev. Lett.* **87** 150601
- [36] Derrida B, Lebowitz J L and Speer E R 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 030601
- [37] de Gier J and Essler F H 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 010602
- [38] Lazarescu A and Mallick K 2011 *J. Phys. A: Math. Theor.* **44** 315001
- [39] Gorissen M, Lazarescu A, Mallick K and Vanderzande C 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 170601
- [40] Lazarescu A and Pasquier V 2014 *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** 295202
- [41] Derrida B and Mallick K 1997 *J Phys A: Math Gen* **30** 1031-46
- [42] Derrida B. 1998 *Phys Rep* **301** 65
- [43] Derrida B J 2007 *J Stat Mech.* **2007** P07023
- [44] Lazarescu A 2015 *J. Phys. A: Math. Theor.* **48** 503001
- [45] Johansson K 2000 *Comm. Math. Phys.* **209**(2) 437
- [46] Nagao T and Sasamoto T 2004 *Nucl. Phys. B* **699** 487

- [47] Prähofer, M and Spohn H. 2002 *Current fluctuations for the totally asymmetric simple exclusion process. In and out of equilibrium* (Mambucaba, Progress in Probability, 51 Birkhäuser Boston), 185-204
- [48] Ferrari P and Spohn H 2006 *Comm. Math. Phys.* **265** 1
- [49] Sasamoto T 2005 *J. Phys. A* **38**(33) L549
- [50] Borodin A, Ferrari PL, Prähofer M and Sasamoto T 2007 *J. Stat. Phys.* **129** 1055
- [51] Imamura T and Sasamoto T 2007 *J. Stat. Phys.* **128** 799
- [52] Povolotsky A M, Priezzhev V B and Schütz G M 2011 *J. Stat. Phys.* **142** 754
- [53] Borodin A and Ferrari P 2008 *El. J. Prob.* **13** 1380
- [54] Borodin A, Ferrari P L and Sasamoto T 2008 *Comm. Math. Phys.* **283** 417
- [55] Poghosyan S S, Povolotsky A M and Priezzhev V B 2012 *J. Stat. Mech.: Theor. Exp.* **2012** P08013
- [56] Johansson K 2019 *Prob. Theor. Rel. Fields* **175** 849
- [57] Johansson K and Rahman M 2021 *Pure and Appl. Math.* **74** 12 2561
- [58] Prolhac S 2015 *J. Phys. A* **48**(6) 06FT02
- [59] Prolhac S 2015 *Journal of Stat. Mech.: Theor. Exp.* **2015** P11028
- [60] Prolhac S 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 090601
- [61] Baik J and Liu Z 2016 *J. Stat. Phys.* **165** 1051
- [62] Baik J and Liu Z 2018 *Comm. Pure Appl. Math.* **71** 747
- [63] Baik J and Liu Z 2019 *J. Amer. Math. Soc.* **32** 609
- [64] Evans M R 2000 *Braz. J. Phys.* **30**, 42
- [65] Bogoliubov N M and Bullough R K 1992 *J. Phys. A: Math. Gen.* **25** 4057
- [66] Sasamoto T and Wadati M 1998 *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** 6057
- [67] Povolotsky A M 2004 *Phys. Rev. E* **69** 061109
- [68] Borodin A and Corwin I 2014 *Prob. Theor. Rel. Fields* **158** 225
- [69] Derrida B, Evans MR and Mukamel D 1993 *J. Phys. A: Math. Gen.* **26** 4911
- [70] Derrida B, Evans MR and Mallick 1995 *J. Stat. Phys.* **79** 833
- [71] Kim D 1995 *Phys. Rev. E* **52** 3512
- [72] Lee D S and Kim D 1999 *Phys. Rev. E* **59** 6476

- [73] Amar J G and Family F 1992 *Phys. Rev. A* **45** R3373
- [74] Prolhac S and Mallick K 2008 *J. Phys. A: Math. Theor.* **41** 175002
- [75] Crampe N and Nepomechie R I 2018 *J. Stat. Mech.: Theor. Exp.* 103105
- [76] Povolotsky A M and Mendes J F F 2006 *J. Stat. Phys.* **123** 125
- [77] Povolotsky A M, Priezzhev V B and Hu C K 2003 *J. Stat. Phys.* **111** 1149
- [78] Derbyshev A E, Povolotsky A M and Priezzhev V B 2015 *Phys. Rev. E* **91(2)**022125.
- [79] Prolhac S and Mallick K 2009 *J. Phys. A: Math. Theor.* **42** 175001
- [80] Chow W-L 1948 *Ann. of Math.(2)* **49** 654-658
- [81] Chavli E 2020 *Algebr. Represent. Theor.* **23** 1001-1030
- [82] Marin I 2012 *J. Pure Appl. Algebra* **216** 2754-2782
- [83] Family F and Viseck T 1985 *J. Phys. A: Math. Gen.* **18** L75