Эколь Политехник Математический Центр Лорана Шварца
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
Факультет математики

на правах рукописи

Александра Александровна Кузнецова

Бирациональные автоморфизмы многообразий

Резюме диссертации на соискание ученой степени кандидата математических наук

Научные руководители:
Шарль Фавр, PhD
Константин Шрамов, д.ф.-м.н.

Париж - 2022

Пусть X это проективное многообразие определенное над некоторымполем k. Множество обратимых отображений в себя $f\colon X \to X$ образует группу $\mathrm{Aut}(X)$ регулярных автоморфизмов. Если $f\colon X \to X$ это регулярный автоморфизм, мы можем определить его граф:

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) |\ x \in X\} \subset X \times X.$$

Это подмногообразие в $X \times X$, такое что проекции $\mathrm{pr}_i\colon \Gamma_f \to X$ являются изоморфизмами при $i = 1$ и 2. Возможное обобощение понятия регулярного автоморфизма это бирациональный автоморфизм $f\colon X \dashrightarrow X$. Такой автоморфизм задается подмногообразием Γ_f в $X \times X$ таким что обе проекции $\mathrm{pr}_i\colon \Gamma_f \to X$ являются изоморфизмами из открытого по Зарискому подмножества в Γ_f на открытое по Зарискому подмножество в X. В этой ситуации для любой точки $x \in X$ мы можем определить её полный образ: это множество $f(x) = \mathrm{pr}_2\left(\Gamma_f \cap {\mathrm{pr}_1}^{-1}(x)\right)$. Бирациональные автоморфизмы имеют *множество неопределенности*: это алгебраическое подмногообразие $\mathrm{Ind}(f) \subset X$, такое что полный образ любой точки $p \in \mathrm{Ind}(f)$ имеет положительную размерность. Если X нормальное многообразие, то $\mathrm{codim}(\mathrm{Ind}(f)) \geqslant 2$. Объединение всех неприводимых подмногообразий $Z \subset X$ таких что $\dim(f(Z)) < \dim(Z)$ называется *исключительным множеством* fб мы обозначаем его $\mathrm{Exc}(f)$. Если X гладкое многообразие, то $\mathrm{Exc}(f)$ это подмногообразие чистой коразмерности 1. Заметим что композиция двух бирациональных автоморфизмов это также бирациональный автоморфизм, то есть на множестве всех бирациональных автоморфизмов $\mathrm{Bir}(X)$ есть структура группы.

В силу нашего определения группа $\mathrm{Aut}(X)$ является подгруппой в $\mathrm{Bir}(X)$. Более того, в силу [Han87] на обеих группах $\mathrm{Aut}(X)$ и $\mathrm{Bir}(X)$ имеется естественная структура k-схем. Точнее, как мы показали выше любой регулярный или бирациональный автоморфизм f многообразия X определяется подсхемой Γ_f в $X \times X$, то есть $\mathrm{Aut}(X)$ и $\mathrm{Bir}(X)$ это подмногообразия в схеме Гильберта $\mathrm{Hilb}(X \times X)$.

Композиция отображений задает естественную структуру групповой схемы на $\mathrm{Aut}(X)$. Обозначим за $\mathrm{Aut}(X)^0$ связную компоненту тождественного отображения $\mathrm{id}_X\colon X \to X$. Это групповая схема конечного типа, и таким образом, $\mathrm{Aut}(X)$ является расширением групп:

$$1 \to \mathrm{Aut}(X)^0 \to \mathrm{Aut}(X) \to \mathrm{Aut}(X)/\mathrm{Aut}(X)^0 \to 1.$$

Фактор-группа $\mathrm{Aut}(X)/\mathrm{Aut}(X)^0$ это постоянная групповая схема над k, она определяется действием группы Галуа поля k на абстрактной счетной группе. Таким образом изучение группы регулярных автоморфизмов X сводится к изучению групп $\mathrm{Aut}(X)^0$ и $\mathrm{Aut}(X)/\mathrm{Aut}(X)^0$.

Известно что в общем случае $\mathrm{Bir}(X)$ не является групповой схемой, см. [Han87, Remark 2.9]. Сложность групп $\mathrm{Aut}(X)$ и $\mathrm{Bir}(X)$ сильно зависит от геометрических свойств алгебраического многообразия X определенного над полем k.

Если X это гладкая кривая, то $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Bir}(X)$ и структура этой группы хорошо известна. Если род кривой X равен нулю, то $X = \mathbb{P}^1$ и $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{PGL}_2(k)$. Если род X равен 1, то это эллиптическая кривая и группа $\mathrm{Aut}(X)$ является конечным расширением групповой схемы $X(k)$, см. [HKT08, Theorem 11.94]. Если род X равен $g \geqslant 2$, то по теореме Гурвица группа $\mathrm{Aut}(X)$ конечна, см. [HKT08, Theorem 11.50], и ее порадок не превосходит $84(g-1)$ в случае когда характеристика поля k равна 0. В случае когда k поле положительной характеристики также существует оценка на порядок группы $\mathrm{Aut}(X)$ зависящая только от рода X, см. [HKT08, Theorem 11.127].

Если $\dim(X) \geqslant 2$ то группа $\mathrm{Aut}(X)$ в общем случае не совпадает с $\mathrm{Bir}(X)$. Например, если X это проективное пространство $\mathbb{P}^n_k$ над полем k и $n \geqslant 2$, то $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{PGL}_{n+1}(k)$. Груп-

па $\mathrm{Cr}_n(k)$ бирациональных автоморфизмов $\mathbb{P}^n_k$, так называемая *группа Кремоны ранга* n, гораздо больше чем $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n_k)$. В частности, количество неприводимых компонент $\mathrm{Cr}_n(k)$бесконечно и их размерности не ограничены в силу [BF13].

С другой стороны имеется немало многообразий X для которых группы $\mathrm{Aut}(X)$ и $\mathrm{Bir}(X)$ совпадают. Многообразия с таким свойством называются *бирационально сверхжесткими.* В силу [Man74] если мы предположим, что X это *минимальная модель*, то есть что канонический класс K_X многообразия X численно эффективен, и если не существует других минимальных моделей X, то верно равенство $\mathrm{Aut}(X) = \mathrm{Bir}(X)$. Абелевы многообразия и минимальные поверхности это примеры многообразий с таким свойством. Если X это комплексное многообразие общего типа, то в силу [BCHM10] существует модель X_0 в бирациональном классе X такая что $\mathrm{Bir}(X) = \mathrm{Bir}(X_0) = \mathrm{Aut}(X_0)$. В силу [HMX13] мощность группы $\mathrm{Bir}(X)$ может быть ограничена функцией, зависящей только от размерности и объема канонического класса, это утверждение обобщвет теорему Гурвица. Если размерность Кодаиры многообразия X отрицательна, то в его бирациональном классе нет минимальной модели. Однако такие многообразия тем не менее могут быть бирационально сверхжесткими. В силу [IM71] существует гладкая гиперповерхность степени 4 в $\mathbb{P}^4$, которая является бирационально сверхжесткими многообразием Фано. Дугие примеры таких многообразий были построены в статьях [Puk98], [dF13], [CP17] и т.д..

Если X это произвольное многообразие, минимальная модель X может быть построена, если применить к X *программы минимальных моделей* (*ПММ*). Идея этого метода состоит в том, чтобы рассматривать K_X-отрицательные кривые и затем стягивать их. Конечный результат применения ПММ это многообразие X_0 одного из следующих типов:

- X_0 это минимальная модель X то есть канонический класс K_{X_0} численно эффективен;
- существует расслоение $\pi\colon X_0 \to B$ где $\dim(B) < \dim(X)$, ранг относительной группы Пикара $\mathrm{Pic}(X_0)/\pi^*\,\mathrm{Pic}(B)$ равен 1 и относительный канонический класс $K_{X_0/B}$ антиобилен.

Напомними, что многообразие X_0, как во втором пункте, при условии ограничения на особенности называется *расслоение Мори* Расслоение Мори с $\dim(B) = 0$ называется *многообразием Фано.* Случай когда X_0 это расслоение Мори соответствует ситуации когда в бирациональном классе X нет минимальной модели. Тем не менее, ПММ выдает нам бирациональную модель X со многими полезными свойствами, которые могут быть использованы при изучении регулярных и бирациональных автоморфизмов X.

Мы приводим здесь краткий список тем этой диссертации.

В первой главе мы описываем конечные подгруппы в группе $\mathrm{Bir}(X)$ где X это комплексное рационально связное трехмерное многообразие. Также мы изучаем группы $\mathrm{Aut}(X)$ где X это квази-проективная поверхность определенная над полем k таким что $\mathrm{char}(k) > 0$. Главный инструмент при изучении этих вопросов это ПММ, которая позволяет сводить вопрос о конечных подгруппах $\mathrm{Bir}(X)$ к классификации групп автоморфизмов специальных многообразий, которые возникают в результате работы ПММ.

Во второй главе мы рассматриваем бирациональные автоморфизмы бесконечного порядка и изучаем, в какой ситации можно построить бирациональную модель на которой этот автоморфизм регуляризуется. Главный пример в этой главе это бирациональный автоморфизм рационального трифолда построенный в статье Бланка [Bla13]. Мы доказываем, что

этот автоморфизм не регуляризуется. Подход который мы используем в этой главе использует динамику автоморфизма и действие обратным образом автоморфизма на когомологиях многообразия.

Наконец, третья глава посвящена описанию групп автоморфизмов класса некэлеровых многообразий, построенных Гуаном [Gua94] и изученных Богомоловым [Bog96]. Эти многообразия являются некэлеровыми аналогами гиперкэлеровых многообразий. В силу конструкции Богомолова эти многообразия расслаиваются над проективными пространством и общий слой этого расслоения это абелево многообразие. В связи с этим, изучая эти многообразия мы можем использовать методы алгебраической геометрии.

1. Конечные группы автоморфизмов

В первой главе диссертации мы обсуждаем конечные группы автоморфизмов. Напомним, что группой Кремоны $\mathrm{Cr}_n(k)$ ранга n называется группа бирациональных автоморфизмов проективного пространства $\mathbb{P}^n_k$. В 2009 году были опубликованы два важных результата о группе Кремоны. Во-первых, И. Долгачёв и В. Исковских в статье [DI09] полностью классифицировали все конечные подгруппы в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. Во-вторых, Ж.-П. Серр в статье [Ser09] доказал, что группа $\mathrm{Cr}_2(k)$ жорданова для любого поля k характеристики 0.

Определение 1.1. Группа Γ называется *жордановой*, если существует константа $J > 0$ такая, что любая конечная подгруппа $G \subset \Gamma$ содержит нормальную абелеву подгруппу $A \subset G$ индекса не более J.

Впоследствии Серр выдвинул гипотезу, что группа Кремоны любого ранга над полем характеристики 0 жорданова. Эту гипотезу доказали Ю. Прохоров и К. Шрамов в статье [PS16]: они вывели жордановость из гипотезы Борисова–Алексеева–Борисова, позднее доказанной К. Биркаром в статье [Bir21]. Благодаря гипотезе Серра и её доказательству, вопрос жордановости групп автоморфизмов стал обсуждаться для разных классов многообразий. Так, В. Попов доказал следующее утверждение [Pop11, Theorem 2.32]: над полем характеристики ноль группа бирациональных автоморфизмов алгебраической поверхности жорданова для всех поверхностей, кроме нескольких явно описанных бирациональных классов. Далее С. Менг и Д. К. Жанг в статье [MZ18] показали, что группа регулярных автоморфизмов любого проективного многообразия над полем характеристики 0 обладает свойством Жордана. Позднее это было обобщено до групп регулярных автоморфизмов кэлеровых многообразий и многообразий класса Фуджики $\mathscr{C}$, см. [Kim18] и [MPZ20]. Группы бирациональных автоморфизмов некэлеровых поверхностей и трифолдов тоже обладают свойством Жордана, см. [PS21a], [PS20], [PS21b]. Помимо этого, Т. Бандман и Ю. Зархин в статье [BZ15] доказали, что группа регулярных автоморфизмов квазипроективной комплексной поверхности всегда обладает свойством Жордана.

Некоторые аналогичные результаты верна и над полем k конечной характеристики p. Например, Прохоров и Шрамов доказали, что группа Кремона $\mathrm{Cr}_2(k)$ жорданова, если поле k конечно. Однако в ситуации, когда k это алгебраически замкнутое поле конечной характеристики, всё сложнее. В этом случае даже многие группы Ли над таким полем не обладают свойством Жордана. Ввиду этого Ф. Ху предложил следующую замену свойства Жордана:

Определение 1.2 ([Hu20, Definition 1.6])**.** Группа Γ называется *p-жордановой*, если существуют константы $J(\Gamma)$ и $e(\Gamma)$ такие, что любая конечная подгруппа $G \subset \Gamma$ содержит нормальную

абелеву подгруппу $A \subset G$, удовлетворяющую неравенству

$$[G : A] \leqslant J(\Gamma) \cdot |G_p|^{e(\Gamma)},$$

где G_p это Силовская p-подгруппа G.

Это определение восходит к работе М. Д. Ларсена и Р. Пинка [LP11], где была доказана p-жордановость группы $\mathrm{GL}_n(\overline{\mathbb{F}}_p)$ для всех простых p и любого $n > 0$. Ху в статье [Hu20] показал, что этому определению удовлетворяют группы регулярных автоморфизмов любого проективного многообразия над полем характеристики $p > 0$. Затем Й. Чен и К. Шрамов [CS21] обобщили результат Попова: для любого алгебраически замкнутого поля характеристики $p > 0$, группа бирациональных автоморфизмов алгебраической поверхности p-жорданова, за исключением явного списка бирациональных типов поверхностей. А именно, для поверхности S группа $\mathrm{Bir}(S)$ не является p-жордановой только в случае, если S бирациональна произведению $\mathbb{P}^1 \times E$, где E — эллиптическая кривая, группа $\mathrm{Bir}(S)$ не является p-жордановой.

Мы изучили конечные подгруппы в группах регулярных автоморфизмов квазипроективных поверхностей и доказали аналог теоремы Бандман и Зархина в конечной характеристике. Это первое из главных утверждений, доказанных в диссертации:

Теорема 1.3. *Если S — квазипроективная поверхность над полем характеристики $p > 0$, то группа $\mathrm{Aut}(S)$ является p-жордановой.*

Идея доказательства такова: поскольку подгруппа p-жордановой группы тоже p-жорданова, в силу теоремы Чена и Шрамова достаточно изучить случай, когда S бирационально произведению $\mathbb{P}^1 \times E$, где E — эллиптическая кривая. Мы рассматривает компактификацию $\overline{S}$ поверхности S и отображение Альбанезе $\pi\colon \overline{S} \to E$. Если в дополнении $\overline{S} \setminus S$ существует неприводимая компонента, полностью лежащая в каком-нибудь слое отображения π, то из этого можно вывести, что $\mathrm{Aut}(S)$ жорданова. Если же $\overline{S} \setminus S$ состоит из мультисечений π, то мы доказываем, что каждый элемент группы $\mathrm{Aut}(S)$ продолжается до регулярного автоморфизма проективной поверхности $\overline{S}$ и используем теорему Ху. На этом шаге существенно важно, что любая унирациональная кривая рациональна. Для многообразий большей размерности это не обязательно так, и в конечной характеристике известно много примеров унирациональных, но не рациональных, поверхностей, см. [Shi74], [Kat81], [Miy76].

Перейдём к более точному описанию конечных подгрупп в группах бирациональных автоморфизмов некоторых проективных многообразий. Полная классификация конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_n(\mathbb{C})$ для $n \geqslant 3$ пока неизвестна. Мы сосредоточимся на ограничении числа порождающих элементов в p-подгруппах $\mathrm{Cr}_3(\mathbb{C})$. Напомним, что *$p$-группой* для простого числа p называется конечная подгруппа порядка p^m для некоторого $m \geqslant 0$.

Начало изучению p-подгрупп в группе Кремоны положили Л. Бэйл и А. Бовиль в статье [BB00], где они классифицировали все бирациональные инволюции $\mathbb{P}^2$. Позднее Т. де Фернекс в статье [dF04] изучил бирациональные автоморфизмы $\mathbb{P}^2$ простого порядка. Д. Бланк в статье [Bla09] описал все классы конечных абелевых подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ с точностью до сопряжения. Затем Бовиль в работе [Bea07] доказал точные оценки на ранги абелевых p-подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ для всех простых чисел p. Прохоров в статьях [Pro11] и [Pro14] обобщил оценки Бовиля в большую размерность и на более широкий класс многообразий: для любого рационально связного трёхмерного многообразия X были доказаны ограничения на ранг абелевых p-подгрупп в группе $\mathrm{Bir}(X)$ бирациональных автоморфизмов.

Прохоров и Шрамов в статье [PS18] доказали, что для любого простого $p \geqslant 17$ и любого рационально связного трифолда X, все p-подгруппы в $\mathrm{Bir}(X)$ автоматически абелевы, их ранг не превышает 3, и эта оценка точна. Позднее Дж. Ху [Xu20] показал, что для этого вывода достаточно требовать $p \geqslant 5$. Помимо этого, Прохоров в статье [Pro14] построил точную оценку на число порождающих любой 2-подгруппы в $\mathrm{Bir}(X)$ для рационально связного трифолда X. Объединив все эти результаты, получаем, что у рационально связных многообразий размерности 3 имеется точная оценка на число порождающих p-подгрупп в $\mathrm{Bir}(X)$ для любого простого числа p, кроме $p = 3$.

В этой работе мы изучили последний оставшийся случай $p = 3$. Прохоров в статье [Pro11] доказал, что любая абелева 3-подгруппа может быть порождена не более, чем пятью элементами. Мы обобщаем это утверждение на случай не обязательно абелевых групп:

Теорема 1.4. *Пусть X — проективное рационально связное комплексное трёхмерное многообразие, а $G \subset \mathrm{Bir}(X)$ это 3-подгруппа. Тогда верно следующее:*

1. *Группа G может быть порождена не более, чем пятью элементами.*
2. *Если G не может быть порождена четырьмя элементами, то G вкладывается в $\mathrm{Aut}(X_0)$, где X_0 это одно из следующих многообразий:*
   - (a) *X_0 это трёхмерное многообразие Фано с терминальными особенностями, у которого 9 не-Горенштейновых особых точек, каждая из которых является циклической особенностью типа $\frac{1}{2}(1,1,1)$.*
   - (b) *X_0 это трёхмерное многообразие Фано с терминальными Горенштейновыми особенностями, $\mathrm{Pic}(X_0) = \mathbb{Z}\, K_{X_0}$, род X_0 это 7 или 10, и число особых точек X_0 это 9 или 18.*

Вторая часть утверждения теоремы 1.4 опирается на G-эквивариантную версию программы минимальных моделей. Напомним, что G-эквивариантная ПММ использует в качестве исходных данных многообразие X с точным регулярным действием конечной группы G, и строит в качестве результата многообразие X_0 с регулярным действием G, которое G-бирационально изначальному X. Более того, X_0 это либо минимальная модель, либо *G-расслоение Мори*, т.е. эквивариантный аналог расслоения Мори. Отметим, что если X — рационально связное трёхмерное многообразие, то результат G-ПММ не может быть минимальной моделью по [KMM92].

Если X — рационально связный трифолд, а G — конечная подгруппа в $\mathrm{Bir}(X)$, то можно построить бирациональную модель $\widetilde{X}$ многообразия X, на которой действие G становится регулярным. Тогда можно применить G-эквивариантную ПММ к $\widetilde{X}$ и получить G-расслоение Мори X_0. Поэтому теорема 1.4 следует из такого утверждения:

Предложение 1.5. *Пусть G это 3-группа, и пусть X_0 — G-расслоение Мори размерности 3. Если X_0 не является многообразием, описанным в пунктах* (a) *или* (b) *теоремы 1.4, то G может быть порождено не более, чем четырьмя элементами.*

Эквивариантная ПММ работает в классе трёхмерных комплексных многообразий с терминальными особенностями, снабжённых действием конечной группы. Трёхмерные расслоения Мори с терминальными особенностями — хорошо изученный объект. Доказательство утверждения 1.5 опирается на множество результатов о геометрии трёхмерных многообразий Фано и о свойствах терминальных особенностей, в частности на полную классификацию гладких трёхмерных Фано [Isk79], [MM82].

Недавно Логинов в статье [Log21] более подробно изучил геометрию многообразий Фано, удовлетворяющих условиям из пунктов (a) и (b) в теореме 1.4. Ему удалось доказать, что для этих многообразий любая 3-подгруппа G в группе автоморфизмов тоже может быть порождена не более, чем четырьмя элементами. Значит, верно следующее общее утверждение:

Следствие 1.6. *Пусть G это 3-подгруппа в группе $\mathrm{Bir}(X)$, где X — комплексное рационально связное трёхмерное алгебраическое многообразие. Тогда G может быть порождена не более, чем четырьмя элементами, и эта оценка точна.*

2. Регуляризация бирациональных автоморфизмов

Во второй главе диссертации мы изучаем бирациональные автоморфизмы бесконечного порядка. Пусть X нормальное проективное многообразие определенное над алгебраически замкнутым полем характеристики 0. Бирациональный автоморфизм $f\colon X \dashrightarrow X$ называется *регуляризуемым* если существует бирациональное отображение $\alpha\colon X \dashrightarrow Y$ в проективное нормальное многообразие Y и $g \in \mathrm{Aut}(Y)$ так что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "f"] \arrow[d, dashed, "\alpha"'] & X \arrow[d, dashed, "\alpha"] \\ Y \arrow[r, "g"] & Y \end{tikzcd}$$

Вопрос, когда регуляризуется произвольный бирациональный автоморфизм $f\colon X \dashrightarrow X$ стремительно усложняется, когда размерность X растет. В случае когда X это кривая, вопрос тривиален: любой бирациональный автоморфизм кривой очевидно регуляризуется. Для того чтобы перечислить известные результаты в больших размерностях нам понадобятся следующие определения.

Пусть H это любой обильный дивизор на X и пусть $\dim(X) = d$. Мы можем определить класс $f^*(H^i)$ как представитель собственного прообраза относительно f^{-1} общего подмногообразия в классе H^i. Тогда *i-ая степень* f, где $0 \leqslant i \leqslant d$, определяется следующим образом:

$$\deg_i(f) = (f)^*(H^i) \cdot H^{d-i}.$$

В силу [DS05] рост последовательности $(\deg_i(f^n))_{n>0}$ это бирациональный инвариант пары (X, f). В частности, он не зависит от выбора обильного дивизора H, см. также [Tru20]. Более того, последовательность $(\deg_i(f^n))_{n>0}$ субмультипливативна по n; таким образом мы можем определить *i-ую динамическую степень* f:

$$\lambda_i(f) = \lim_{n\to\infty} \left(\deg_i(f^n)\right)^{\frac{1}{n}}.$$

В силу [DN11] и [Tru20] числа $\lambda_i(f)$ вещественны, удовлетворяют $\lambda_i(f) \geqslant 1$ и являются бирациональными инвариантами пары (X, f) для всех $0 \leqslant i \leqslant d$. В частности, динамические степени не зависят от выбора обильного дивизора H. Более того, $\lambda_1(f) = \lambda_d(f) = 1$ и динамические степени лог-вогнуты, то есть для всех $1 \leqslant i \leqslant d-1$ верно следующее неравенство:

$$\lambda_{i-1}(f) \cdot \lambda_{i+1}(f) \leqslant \lambda_i(f)^2.$$

Используя терминологию из [BV99] мы называем f бирациональным автоморфизмом с *положительной энтропией*, если для некоторого $0 \leqslant i \leqslant d$ выполняется $\lambda_i(f) > 1$. Этот термин обоснован тем, что топологическая энтропия автоморфизма f равна $\log\left(\max_{0\leqslant i\leqslant d}(\lambda_i(f))\right)$, если f регулярный автоморфизм компактного проективного комплексного многообразия. Это следует из теорем Громова и Иомдина [Gro03] и [Yom87], см. также [DS05]. Из лог-вогнутости динамических степеней следует, что f это автоморфизм с положительной энтропией, если и только если $\lambda_1(f) > 1$.

В силу [Wei55] (см. также [Dés21, Section 3.5]) если последовательность $(\deg_i(f^n))_{n>0}$ ограничена, то существует бирациональная модель X_0 многообразия X такая что f регуляризуется на X_0. В противном случае автоморфизм f имеет дополнительную структуру, которая позволяет лучше понять его свойства.

Если $\dim(X) = 2$ и последовательность $(\deg_1(f^n))_{n>0}$ неограничена, то в силу [BC16] динамическая степень $\lambda_1(f)$ это алгебраическое число со специальными свойствами, точнее это либо число Салема, либо число Пизо. Более того, в силу [DF01] если последовательность $(\deg_1(f^n))_{n>0}$ неограничена и $\lambda_1(f) = 1$, то $(\deg_1(f^n))_{n>0}$ растет как n или как n^2. Бирациональные типы комплексных поверхностей, допускающих бирациональные автоморфизмы с положительной энтропией, описаны в [Can99]; более того, известны многие примеры автоморфизмов с положительной энтропией на поверхностях, см., например, [McM07], [Bla08] and [BK09]. Кроме того, первая динамическая степень полунепрерывна снизу в семействах бирациональных автоморфизмов поверхностей в силу [Xie15].

Если $\dim(X) = 2$, то рост последовательности $(\deg_i(f^n))_{n>0}$ во многих ситуациях определяет регуляризуется ли f или нет. В силу [DF01] если $\lambda_1(f) = 1$, то f регуляризуется если и только если $(\deg_i(f^n))_{n>0}$ ограничена или растет как n^2. В силу [BC16] если $\lambda_1(f)$ это число Салема, то f регуляризуется. Кроме того, существует более сложный критерий описанный в [DF01]. В силу этого критерия если $\lambda_1(f) > 1$ и существует дивизориальный класс θ на X такой что $f^*\theta = \lambda_1(f)\theta$ и $\theta^2 = 0$, то f регуляризуется.

Автоморфизмы с положительной энтропией в старших размерностях устроены гораздо сложнее. В отличие от случая автоморфизмов с положительной энтропией на поверхностях, автоморфизм $f\colon X \dashrightarrow X$ с положительной энтропией на гладком проективном многообразии X размерности 3 или больше может *сохранять структуру расслоения*, то есть может существовать доминантное отображение $\pi\colon X \dashrightarrow B$ в некоторое многообразие B и $g \in \mathrm{Bir}(B)$ так что $1 \leqslant \dim(B) \leqslant \dim(X) - 1$ и $\pi \circ f = g \circ \pi$. Если f сохраняет структуру расслоения, мы называем его *непримитивным*. Из результата Дж. Лезётра [Les18] следует, что если X это гладкое комплексное трехмерное многообразие и $f\colon X \dashrightarrow X$ нерегулярный бирациональный автоморфизм с положительной энтропией, который регуляризуется на последовательном раздутии X в гладких подмногообразиях, то f непримитивно.

Заметим что канонический класс K_X многообразия X инвариантен относительно любого регулярного автоморфизма $f\colon X \to X$. Если K_X обилен или антиобилен, то с его помощью можно посчитать динамические степени f. Следовательно, если X это трехмерное многообразие Фано, то на X нет регулярных автоморфизмов с положительной энтропией. Более того, из результата Лезётра следует, что ни на какой последовательности раздутий в гладких подмногообразиях гладкого трехмерного комплексного многообразия Фано не существует регулярного примитивного автоморфизма с положительной энтропией. В связи с этим очень сложно построить пример регулярного примитивного автоморфизма с положительной энтропией на рациональном трехмерном многообразии. В настоящий момент известен лишь один пример такого автоморфизма, он описан в [OT15].

Попытки обобщить конструкции регулярных автоморфизмов с положительной энтропией на поверхностях в большие размерности приводят к построению бирациональных автоморфизмов [BK14], [PZ14], [Bla13], которые оказываются *псевдо-автоморфизмами*. Напомним, что бирациональный автоморфизм $f\colon X \dashrightarrow X$ гладкого многообразия X называется псевдо-автоморфизмом, если ни f, ни f^{-1} не стягивают дивизоров в X. Заметим что псевдо-автоморфизм поверхности это обязательно регулярный автоморфизм. Таким образом, псевдо-автоморфизмы образуют класс бирациональных автоморфизмов очень близких к регулярным автоморфизмам. Можно было бы предположить, что псевдо-автоморфизмы регуляризуются, и при некоторых условиях это в самом деле верно; однако, иногда это неверно. Здесь мы приводим список псевдо-автоморфизмов с положительной энтропией на рационально связных трехмерных многообразиях:

Пример 2.1 ([BK14])**.** Этот пример получен как обобщение автоморфизма поверхности, описанного в [BK09]. Зафиксируем $a \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ и примитивный кубический корень из единицы ζ и рассмотрим бирациональный автоморфизм $\mathbb{P}^3$:

$$f_{a,\zeta}\colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3; \qquad f_{a,\zeta}(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (x_0x_1 : x_1x_2 : x_1x_3 : ax_0^2 + \zeta x_0x_2 + x_0x_3).$$

Тогда $\lambda_1(f_{a,\zeta}) = \lambda_2(f_{a,\zeta}) > 1$ и $f_{a,\zeta}$ индуцируют псевдо-автоморфизм на раздутии $\mathbb{P}^3$ в нескольких точках и кривых. Более того, $f_{a,\zeta}$ непримитивен, и если $a \neq 1$, то $f_{a,\zeta}$ не регуляризуется.

Пример 2.2 ([BCK14])**.** Пусть a, c это комплексные числа, и пусть $f_{a,c}\colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ это бирациональный автоморфизм определенный как $f_{a,c} = L_{a,c} \circ J$, где

$$L_{a,c}(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (x_3 : x_0 + ax_3 : x_1 : x_2 + cx_3);$$
$$J(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (x_0^{-1} : x_1^{-1} : x_2^{-1} : x_3^{-1}).$$

Таким образом, $f_{a,c}$ это композиция рагулярного автоморфизма $L_{a,c}$ на $\mathbb{P}^3$ и инволюции Кремоны J. Если a и c удовлетворяют некоторому условию, то $\lambda_1(f_{a,c}) = \lambda_2(f_{a,c}) > 1$ и $f_{a,c}$ индуцирует псевдо-автоморфизм на раздутии $\mathbb{P}^3$ в нескольких точках. Более того, $f_{a,c}$ примитивен и не регуляризуется.

Пример 2.3 ([PZ14], [BDK], [DO88])**.** Этот пример получен как обобщение автоморфизма поверхности, описанного в [McM07]. Существует бирациональный морфизм $\delta\colon X \to \mathbb{P}^3$, который является раздутием $\mathbb{P}^3$ в нескольких точках $p_1, \ldots, p_k$ и билинейная форма $(,)$ на решетке $H^2(X, \mathbb{Z})$, которая индуцирует структуру корневой решетки. Тогда существует группа Вейля W с естественным представлением в $H^2(X, \mathbb{Z})$. Более того, для любого элемента $w \in W$ существует псевдо-автоморфизм

$$f_w\colon X \dashrightarrow X,$$

такой что f_w^* действует на $H^2(X, \mathbb{Z})$ как w. Обозначим за w_0 элемент Кокстера в W. Если W это бесконечная группа, то $\lambda_1(f_{w_0}) = \lambda_2(f_{w_0}) > 1$ и f_{w_0} непримитивен.

Пример 2.4 ([BL15])**.** Пусть $Y \subset \mathbb{P}^4$ это гладкая кубическая гиперповерхность и пусть C_1 это гладкая кривая рода 2 и степени 6 на Y. Базисное множество общего пучка квадратичных гиперповерхностей в Y, содержащих C_1, это объединение $C_1 \cup C_2$, где C_2 это гладкая кривая рода 2 и степени 6 на Y. Тогда существует бирациональный автоморфизм:

$$f_{Y,C_1}\colon Y \dashrightarrow Y,$$

такой что $\lambda_1(f_{Y,C_1}) = \lambda_2(f_{Y,C_1}) > 1$ и f индуцирует псевдо-автоморфизм на последовательном раздутии кривых C_1 и C_2. Более того, f сохраняет пучок квадрик проходящих через $C_1 \cup C_2$; следовательно, f непримитивен.

Пример 2.5 ([Bla13])**.** Этот пример получен как обобщение автоморфизма поверхности, описанного в [Bla08]. Пусть $S \subset \mathbb{P}^3$ это гладкая кубическая поверхность. Каждой точке $p \in S$ можно сопоставить бирациональную инволюцию $\sigma_p \colon \mathbb{P}^3 \to \mathbb{P}^3$. Пусть $p_1, \dots p_k$ это набор из k точек на S, рассмотрим следующий бирациональный автоморфизм:

$$f_{p_1,\dots,p_k} = \sigma_{p_1} \circ \dots \circ \sigma_{p_k} \colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3.$$

Если точки $p_1, \dots, p_k$ достаточно общие и $k \geqslant 3$, то $\lambda_1(f_{p_1,\dots,p_k}) = \lambda_2(f_{p_1,\dots,p_k}) > 1$ и $f_{p_1,\dots,p_k}$ индуцирует псевдо-автоморфизм на раздутии $\mathbb{P}^3$ в нескольких точках и кривых.

Примеры 2.1 и 2.2 не регуляризуются. Примеры 2.3 и 2.4 непримитивны. Поэтому мы фокусируемся на последнем примере и доказываем, что он не регуляризуется при некоторых условиях. Это главный результат второй главы.

Теорема 2.6. *Предположим, $S \subset \mathbb{P}^3$ это очень общая комплексная кубическая поверхность и p_1, p_2, p_3 это общие точки на S. Тогда бирациональный автоморфизм $f_{p_1,p_2,p_3} \colon \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ описанный в Примере 2.5 не регуляризуется и не сохраняет структуры расслоения над поверхностью.*

Известно несколько критериев, позволяющих заключить что бирациональный автоморфизм трехмерного многообразия не регуляризуется. В силу [CDX21] если $\deg_1(f^n)$ растет как n^k, где k нечетное целое число, то f не регуляризуется; также если динамическая степень $\lambda_1(f) > 1$ это целое число, то f не регуляризуется. В силу [LB19] если X это трехмерное многообразие и если последовательность $(\deg(f^n))_{n>0}$ растет как n^k, где $k > 4$, то f не регуляризуется; также если число $\lambda_1(f)$ не удовлетворяет нескольким условиям описанным в [LB19, Proposition 4.6.7, 4.7.2, 5.0.1], то f не регуляризуется. Другой критерий, который не использует динамических свойств f был применен для доказательства нерегуляризуемости автоморфизмов из примеров 2.1 и 2.2. Он основан на уверждении [BK14, Corollary 1.6], в силу которого для любого бирационального автоморфизма $f \colon X \dashrightarrow X$ гладкого трехмерного многообразия X и любой f-инвариантной поверхности $Y \subset X$ бирациональный автоморфизм $f|_Y \colon Y \dashrightarrow Y$ регуляризуем, если f регуляризуем. В обоих примерах 2.1 и 2.2 была найдена f-инвариантная поверхность Y, такая что $\lambda_1(f|_Y)$ это неквадратичное число Пизо; следовательно, в силу [BC16] получаем, что $f|_Y$ не регуляризуется.

Все эти аргументы не могут быть применены к автоморфизму описанному в примере 2.5. Поэтому для того чтобы доказать теорему 2.6 мы доказываем новый критерий. Для его формулировки требуется напомнить,что если $f \colon X \to X$ это псевдо-автоморфизм и верно неравенство $\lambda_1(f)^2 > \lambda_2(f)$, то в силу [Tru14] существует единственный с точностью до пропорциональности псевдо-эффективный дивизориальный класс $\theta_1(f)$ такой что:

$$f^*\theta_1(f) = \lambda_1(f)\theta_1(f). \tag{2.7}$$

Подобный класс был успешно использован в [DF01] для доказательства критерия на существование регуляризации бирационального автоморфизма поверхности. Теперь мы формулируем наш критерий:

Теорема 2.8. *Пусть $f\colon X \dashrightarrow X$ это псевдо-автоморфизм гладкого проективного трехмерного многообразия X такой что:*

(1) $\lambda_1(f)^2 > \lambda_2(f)$; *то есть существует класс $\theta_1(f)$ как в* (2.7);

(2) *существует кривая C, такая что $\theta_1(f) \cdot [C] < 0$;*

(3) *существует бесконечно много целых чисел $m > 0$, таких что $C \not\subset \mathrm{Ind}(f^{-m})$.*

Тогда f нерегуляризуем и не сохраняет структуры расслоения над поверхностью.

Приводим некоторые комментарии. Из лог-вогнутости динамических степеней верно неравенство $\lambda_1(f)^2 \geqslant \lambda_2(f)$. Следовательно условие (1) всегда верно либо для f либо для f^{-1} поскольку $\lambda_2(f) = \lambda_1(f^{-1})$. Условие (2) требует чтобы класс $\theta_1(f)$ не был численно эффективен и последнее условие нужно, чтобы избежать некоторые ситуации, которые мы опишем позже.

Чтобы доказать теорему 2.6 мы показываем, что рациональное трехмерное многообразие X, на котором f_{p_1,p_2,p_3} индуцирует псевдо-автоморфизм $\widetilde{f}_{p_1,p_2,p_3}\colon X \dashrightarrow X$ и которое построено в [Bla13], удовлетворяет условиям теоремы 2.8. Первое условие очевидно верно. Чтобы показать второе условие мы рассматриваем некоторую кривую из множества неопределенности $\widetilde{f}_{p_1,p_2,p_3}$ и доказываем, что она пересекает класс $\theta_1(\widetilde{f}_{p_1,p_2,p_3})$ отрицательно. Эта кривая оказывается собственным прообразом прямой L из $\mathbb{P}^3$ в X. Проверка третьего условия довольно сложна; мы доказываем, что прямая L не лежит в множестве неопределенности $f^{-m}_{p_1,p_2,p_3}$, используя формулы инволюций σ_{p_i}. Большая часть вычислений сделана в Sage. Изучение композиции трех инфолюций уже весьма сложна. Мы ожидаем, что теорема верна для композиции любого большего 3 числа инволюций ассоциированных с общими точками на S.

3. Автоморфизмы многообразий Богомолова–Гуана

В третьей главе диссертации мы изучаем свойства специального класса некэлеровых компактных комплексных многообразий. Этот класс интересен своей схожестью с гиперкэлеровыми многообразиями. Напомним, что *гиперкэлерово многообразие* это риманово многообразие (M, g), снабжённое тремя кэлеровыми комплексными структурами $I, J, K : TM \to TM$, удовлетворяющими соотношению кватернионов:

$$I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\,\mathrm{id}\,.$$

Любое гиперкэлерово многообразие является голоморфно симплектическим, т.е., обладает невырожденной $(2,0)$-формой. И наоборот, любое компактное голоморфно симплектическое многообразие является гиперкэлеровым, если оно кэлерово. Это следует из теоремы Калаби-Яу, см. [Yau78] и [Bea83]. Гиперкэлерово многообразие M называется *неприводимым голоморфно симплектическим* (IHS), если оно оно односвязно и группа $H^{2,0}(M)$ одномерна.

Пример некэлерового многообразия, которое при этом голоморфно симплектическое и обладает другими свойствами, схожими с IHS-многообразиями, был построен в статьях Д. Гуана [Gua94],[Gua95a] и [Gua95b]. Позже Ф. Богомолов в статье [Bog96] построил этот пример более геометрическим методом. Обсудим основные шаги конструкции Богомолова.

Пусть S это *поверхность Кодаиры первого рода*, то есть гладкая комплексная компактная голоморфно симплектическая поверхность, имеющая структуру изотривиального эллиптического расслоения:

$$\pi\colon S \to E,$$

над эллиптической кривой E так, что любое алгебраическое подмногообразие в S содержится в каком-нибудь слое отображения π. Все слои π изоморфны некой эллиптической кривой F, и отображение π задаёт на S структуру F-торсора. Обозначим за $\pi^{[n]}\colon S^{[n]} \to E^{[n]}$ индуцированное отображение между пространствами Дуади n точек на S и E соответственно. Многообразие $E^{[n]}$ является алгебраическим и изоморфно симметрической степени $\mathrm{Sym}^n(E)$. Обозначим за $\mathrm{Alb}\colon E^{[n]} \to E$ морфизм Альбанезе, заданный суммированием точек. Определим многообразие W как прообраз:

$$W = (\pi^{[n]})^{-1}(\mathrm{Alb}^{-1}(0)).$$

Это комплексное многообразие с действием F, индуцированным с диагонального действия F на $S^{[n]}$. Согласно [Bog96, Corollary 4.10] при некоторых условиях на поверхность Кодаиры S существует гладкое компактное комплексное односвязное многообразие Q, у которого группа $H^{2,0}(Q)$ порождена невырожденной голоморфно симплектической формой, и являющееся конечным накрытием фактора W/F:

$$p\colon Q \to W/F.$$

Если $n = 2$, то Q это K3-поверхность, а при $n \geqslant 3$ многообразие Q является некэлеровым, размерности $(2n-2)$.

В третьей главе изучается многообразие Q при $n \geqslant 3$. Мы называем его *БГ-многообразием* в честь Богомолова и Гуана. Поскольку слой $\mathrm{Alb}^{-1}(0)$ изоморфен $(n-1)$-мерному проективному пространстве, отображение $\pi^{[n]}$ индуцирует отображение $\Pi\colon W/F \to \mathbb{P}^{n-1}$. Таким образом, БГ-многообразие Q сюръективно отображается в проективное пространство половинной размерности:

$$\Phi = \Pi \circ p\colon Q \to \mathbb{P}^{n-1}. \tag{3.1}$$

Многие свойства БГ-многообразий схожи со свойствами IHS многообразий. Мы ожидаем, что некоторые утверждения о гиперкэлеровых многообразиях должны иметь аналоги для БГ-многообразий. Напомним некоторые важные факты о гиперкэлеровых многообразиях. Во-первых, если M — гиперкэлерово многообразие, то согласно статье [Fuj87] на группе когомологий $H^2(M,\mathbb{Z})$ существует невырожденная симметричная квадратичная форма. Эта форма называется *формой Бовиля–Богомолова–Фуджики*, или *ББФ-формой*. Она очень полезна при изучении геометрии гиперкэлеровых многообразий и их пространств модулей. Во-вторых, теорема Богомолова–Тиана–Тодорова [Bog78] утверждает, что деформации кэлерова многообразия с тривиальным каноническим классом не имеют препятствий. Эта теорема была впоследствии использована для доказательства глобальной теоремы Торелли для гиперкэлеровых многообразий. В-третьих, группы биголоморфных и бимероморфных автоморфизмов, $\mathrm{Aut}(M)$ и $\mathrm{Bim}(M)$, для гиперкэлерова многообразия M изучались Н. Курносовым и Е. Ясинским в статье [KY19] и А. Каттанео и Л. Фу в статье [CF19]. Они в частности доказали, что порядки конечных подгрупп в $\mathrm{Aut}(M)$ и $\mathrm{Bim}(M)$ ограничены. Более того, с точностью до сопряжения существует лишь конечное число различных конечных подгрупп в $\mathrm{Aut}(M)$ и $\mathrm{Bim}(M)$.

Часть из этих результатов была обобщена на случай БГ-многообразий. В статье [KV19] Н. Курносов и М. Вербицкий доказали существование симметрической квадратичной формы на группе когомологий $H^2(Q, \mathbb{Z})$ БГ-многообразия, аналогичной ББФ-форме. Они выдвинули гипотезу, что построенная форма невырождена и обладает теми же свойствами, что и ББФ-форма. Изучение голоморфно симплектических деформаций позволило им применить эту квадратичную форму для обобщения теоремы Богомолова–Тиана–Тодорова для БГ-многообразий.

Мы изучим группы биголоморфных и бимероморфных автоморфизмов БГ-многообразий. Для этого обсудим некоторые канонические структуры на БГ-многообразии Q, сохраняемые любыми автоморфизмами. Поскольку многообразие Q не является алгебраическим, бывает полезно, что образ любого алгебраического подмногообразия Q при любом автоморфизме тоже будет алгебраическим. Ещё можно рассмотреть *алгебраическую редукцию* Q, т.е. мероморфное отображение $f\colon Q \dashrightarrow X$ в алгебраическое многообразие X, через которое пропускаются любые мероморфные отображения из Q в алгебраические многообразия. Такое отображение f существует и единственно с точностью до бирациональной замены X. Наш первый результат это описание алгебраической редукции для Q:

Теорема 3.2. *Пусть $n \geqslant 3$ целое число, и пусть Q это БГ-многообразие размерности $2n-2$. Тогда отображение $\Phi\colon Q \to \mathbb{P}^{n-1}$, описанное в* (3.1)*, это алгебраическая редукция Q.*

Затем мы изучим подмногообразия БГ-многообразий. Напомним, что многообразие X называется *мойшезоновым*, если его алгебраическая редукция это морфизм, конечный в общей точке. В частности, любое алгебраическое многообразие мойшезоново. Мы докажем следующее утверждение:

Теорема 3.3. *Пусть Q это БГ-многообразие размерности $2n-2$. Рассмотрим его алгебраическую редукцию $\Phi\colon Q \to \mathbb{P}^{n-1}$, как в* (3.1)*. Тогда существует дивизор $D \subset \mathbb{P}^{n-1}$ степени $2n$ такой, что для любой точки $x \in \mathbb{P}^{n-1}$ верно:*

(1) *Если $x \in \mathbb{P}^{n-1} \setminus D$, то слой $\Phi^{-1}(x)$ — абелево многообразие.*

(2) *Если $x \in D$, то слой $\Phi^{-1}(x)$ мойшезонов, причём для общей точки x в D слой $\Phi^{-1}(x)$ является унилинейчатым.*

Если $X \subset Q$ это подмногообразие для которого $\dim(\Phi(X)) \geqslant 2$, то X не мойшезоново.

Таким образом, если $X \subset Q$ это подмногообразие БГ-многообразия, и $\Phi(X)$ нульмерно, то X мойшезоново; если $\dim(\Phi(X)) \geqslant 2$, то X не мойшезоново. Мы также обсудим случай, когда $\dim(\Phi(X)) = 1$. В этой ситуации X может как быть мойшезоновым, так и не быть.

По определению алгебраической редукции любой бимероморфный или бирегулярный автоморфизм комплексного многообразия согласован с отображением алгебраической редукции. Значит, группа $\mathrm{Aut}(Q)$ вписывается в следующую короткую точную тройку:

$$1 \to G'' \to \mathrm{Aut}(Q) \to G' \to 1, \tag{3.4}$$

где G' это подгруппа в $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^{n-1})$, а G'' это подгруппа в $\mathrm{Aut}\,(A)$, где A это абелево многообразие $\Phi^{-1}(x)$ для общей точки $x \in \mathbb{P}^{n-1} \setminus D$. Чтобы лучше изучить структуру группы $\mathrm{Aut}(Q)$ мы используем описание слоёв отображения Φ.

По теореме 3.3 любой биголоморфный автоморфизм Q индуцирует регулярный автоморфизм проективного пространства $\mathbb{P}^{n-1}$, сохраняющий дивизор D. Мы даём геометрическое

описание дивизора $D \subset \mathbb{P}^{n-1}$ и с помощью него доказываем, что $\mathrm{Aut}(Q)$ — жорданова группа (смотри определение 1.1). Вот главный результат третьей главы:

Теорема 3.5. *Пусть Q это БГ-многообразие размерности $2n-2$, и пусть $\Phi\colon Q \to \mathbb{P}^{n-1}$ это его алгебраическая редукция, как в* (3.1)*. Тогда группа* $\mathrm{Aut}(Q)$ *вписывается в короткую точную тройку* (3.4)*, где группа G' конечна, а $G'' \subset \mathrm{Aut}(A)$ где A это $(n-1)$-мерное абелево многообразие. В частности,* $\mathrm{Aut}(Q)$ *жорданова.*

Это утверждение следует из описания дивизора D и его особых точек. Мы покажем, что множество особых точек кратности $n-1$ в D состоит из n^2 изолированных точек, не лежащих в гиперплоскости в $\mathbb{P}^{n-1}$. Группа автоморфизмов $\mathbb{P}^{n-1}$, сохраняющих D, сохраняет и это множество, а следовательно, является конечной.

Было бы чрезвычайно интересно доказать аналогичный результат и для групп бимероморфных автоморфизмов БГ-многообразий. Для группы $\mathrm{Bim}(Q)$ по универсальному свойству алгебраической редукции тоже существует короткая точная тройка:

$$1 \to H'' \to \mathrm{Bim}(Q) \to H' \to 1,$$

где $H'' \subset \mathrm{Aut}(A)$ для $(n-1)$-мерного абелева многообразия A, изоморфного общему слою отображения Φ, а H' это подгруппа в группе Кремоны $\mathrm{Cr}_{n-1}(\mathbb{C})$, состоящая из бирациональных автоморфизмов $g \in \mathrm{Cr}_{n-1}(\mathbb{C})$ для которых D либо лежит в множестве $\mathrm{Exc}(g)$, либо D является g-инвариантным дивизором.

В простейшем нетривиальном случае $n = 3$, то есть $\dim(Q) = 4$, мы смогли доказать жордановость группы $\mathrm{Bim}(Q)$. Однако в больших размерностях жордановость этой группы неизвестна.

4. Публикации, в которых отражены основные научные результаты диссертации

(1) *Конечные* 3*-подгруппы в группе Кремоны ранга* 3, Математические заметки, 108:5 (2020), 697–715.

(2) *Автоморфизмы квази-проективных поверхностей над полями конечной характеристики*, J. Algebra, 595 (2022), 271–278.

(3) *Геометрия и автоморфизмы некэлеровых голоморфно симплектических многообразий*, совместная работа с Ф. Богомоловым, Н. Курносовым и Е. Ясинским, опубликована онлайн в International Mathematics Research Notices, https://doi.org/10.1093/imrn/rnab043.

Список литературы

[BB00] L. Bayle and A. Beauville. Birational involutions of $\mathbf{P}^2$. volume 4, pages 11–17. 2000. Kodaira's issue.

[BC16] J. Blanc and S. Cantat. Dynamical degrees of birational transformations of projective surfaces. *J. Amer. Math. Soc.*, 29(2):415–471, 2016.

[BCHM10] C. Birkar, P. Cascini, C. D. Hacon, and J. McKernan. Existence of minimal models for varieties of log general type. *J. Amer. Math. Soc.*, 23(2):405–468, 2010.

[BCK14] E. Bedford, S. Cantat, and K. Kim. Pseudo-automorphisms with no invariant foliation. *J. Mod. Dyn.*, 8(2):221–250, 2014.

[BDK] E. Bedford, J. Diller, and K. Kim. Pseudoautomorphisms with invariant curves. In *Complex geometry and dynamics*, volume 10 of *Abel Symp.*, pages 1–27.

[Bea83] A. Beauville. Variétés Kähleriennes dont la première classe de Chern est nulle. *J. Differential Geom.*, 18(4):755–782 (1984), 1983.

[Bea07] Arnaud Beauville. p-elementary subgroups of the Cremona group. *J. Algebra*, 314(2):553–564, 2007.

[BF13] J. Blanc and J.-P. Furter. Topologies and structures of the Cremona groups. *Ann. of Math. (2)*, 178(3):1173–1198, 2013.

[Bir21] C. Birkar. Singularities of linear systems and boundedness of Fano varieties. *Ann. of Math. (2)*, 193(2):347–405, 2021.

[BK09] E. Bedford and K. Kim. Dynamics of rational surface automorphisms: linear fractional recurrences. *J. Geom. Anal.*, 19(3):553–583, 2009.

[BK14] E. Bedford and K. Kim. Dynamics of (pseudo) automorphisms of 3-space: periodicity versus positive entropy. *Publ. Mat.*, 58(1):65–119, 2014.

[BL15] J. Blanc and S. Lamy. On birational maps from cubic threefolds. *North-West. Eur. J. Math.*, 1:55–84, 2015.

[Bla08] J. Blanc. On the inertia group of elliptic curves in the Cremona group of the plane. *Michigan Math. J.*, 56(2):315–330, 2008.

[Bla09] J. Blanc. Linearisation of finite abelian subgroups of the Cremona group of the plane. *Groups Geom. Dyn.*, 3(2):215–266, 2009.

[Bla13] J. Blanc. Dynamical degrees of (pseudo)-automorphisms fixing cubic hypersurfaces. *Indiana Univ. Math. J.*, 62(4):1143–1164, 2013.

[Bog78] F. Bogomolov. Hamiltonian Kählerian manifolds. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 243(5):1101–1104, 1978.

[Bog96] F. Bogomolov. On Guan's examples of simply connected non-Kähler compact complex manifolds. *Amer. J. Math.*, 118(5):1037–1046, 1996.

[BV99] M. P. Bellon and C.-M. Viallet. Algebraic entropy. *Comm. Math. Phys.*, 204(2):425–437, 1999.

[BZ15] T. Bandman and Yu. Zarhin. Jordan groups and algebraic surfaces. *Transform. Groups*, 20(2):327–334, 2015.

[Can99] S. Cantat. Dynamique des automorphismes des surfaces projectives complexes. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 328(10):901–906, 1999.

[CDX21] S. Cantat, J. Déserti, and J. Xie. Three chapters on Cremona groups. *Indiana Univ. Math. J.*, 70(5):2011–2064, 2021.

[CF19] A. Cattaneo and L. Fu. Finiteness of klein actions and real structures on compact hyperkähler manifolds. *Math. Ann.*, 375(3-4):1783–1822, 2019.

[CP17] I. Cheltsov and J. Park. Birationally rigid Fano threefold hypersurfaces. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 246(1167):v+117, 2017.

[CS21] Y. Chen and C. Shramov. Automorphisms of surfaces over fields of finite characteristic, 2021. `arXiv:2106.15906`.

[Dés21] J. Déserti. *The Cremona group and its subgroups*, volume 252 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, [2021] ©2021.

[DF01] J. Diller and C. Favre. Dynamics of bimeromorphic maps of surfaces. *Amer. J. Math.*, 123(6):1135–1169, 2001.

[dF04] T. de Fernex. On planar Cremona maps of prime order. *Nagoya Math. J.*, 174:1–28, 2004.

[dF13] T. de Fernex. Birationally rigid hypersurfaces. *Invent. Math.*, 192(3):533–566, 2013.

[DI09] I. Dolgachev and V. Iskovskikh. Finite subgroups of the plane Cremona group. In *Algebra, arithmetic, and geometry: in honor of Yu. I. Manin. Vol. I*, volume 269 of *Progr. Math.*, pages 443–548. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2009.

[DN11] T.-C. Dinh and V.-A. Nguyên. Comparison of dynamical degrees for semi-conjugate meromorphic maps. *Comment. Math. Helv.*, 86(4):817–840, 2011.

[DO88] I. Dolgachev and D. Ortland. Point sets in projective spaces and theta functions. *Astérisque*, (165):210 pp. (1989), 1988.

[DS05] T.-C. Dinh and N. Sibony. Une borne supérieure pour l'entropie topologique d'une application rationnelle. *Ann. of Math. (2)*, 161(3):1637–1644, 2005.

[Fuj87] A. Fujiki. On the de Rham cohomology group of a compact Kähler symplectic manifold. In *Algebraic geometry, Sendai, 1985*, volume 10 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 105–165. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[Gro03] M. Gromov. On the entropy of holomorphic maps. *Enseign. Math. (2)*, 49(3-4):217–235, 2003.

[Gua94] D. Guan. Examples of compact holomorphic symplectic manifolds which admit no Kähler structure. In *Geometry and analysis on complex manifolds*, pages 63–74. World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1994.

[Gua95a] D. Guan. Examples of compact holomorphic symplectic manifolds which are not Kählerian. II. *Invent. Math.*, 121(1):135–145, 1995.

[Gua95b] D. Guan. Examples of compact holomorphic symplectic manifolds which are not Kählerian. III. *Internat. J. Math.*, 6(5):709–718, 1995.

[Han87] M. Hanamura. On the birational automorphism groups of algebraic varieties. *Compositio Math.*, 63(1):123–142, 1987.

[HKT08] J. W. P. Hirschfeld, G. Korchmáros, and F. Torres. *Algebraic curves over a finite field.* Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2008.

[HMX13] C. D. Hacon, J. McKernan, and C. Xu. On the birational automorphisms of varieties of general type. *Ann. of Math. (2)*, 177(3):1077–1111, 2013.

[Hu20] F. Hu. Jordan property for algebraic groups and automorphism groups of projective varieties in arbitrary characteristic. *Indiana Univ. Math. J.*, 69(7), 2020.

[IM71] V. A. Iskovskih and Ju. I. Manin. Three-dimensional quartics and counterexamples to the Lüroth problem. *Mat. Sb. (N.S.)*, 86(128):140–166, 1971.

[Isk79] V. A. Iskovskih. Anticanonical models of three-dimensional algebraic varieties. In *Current problems in mathematics, Vol. 12 (Russian)*, pages 59–157, 239 (loose errata). VINITI, Moscow, 1979.

[Kat81] T. Katsura. Unirational elliptic surfaces in characteristic p. *Tohoku Math. J. (2)*, 33(4):521–553, 1981.

[Kim18] J. H. Kim. Jordan property and automorphism groups of normal compact Kähler varieties. *Commun. Contemp. Math.*, 20(3):1750024, 9, 2018.

[KMM92] J. Kollár, Yo. Miyaoka, and Sh. Mori. Rationally connected varieties. *J. Algebraic Geom.*, 1(3):429–448, 1992.

[KV19] N. Kurnosov and M. Verbitsky. Deformations and BBF-form on non-Kähler holomorphically symplectic manifolds., 2019. `arXiv:1908.05258`.

[KY19] N. Kurnosov and E. Yasinsky. Automorphisms of hyperkähler manifolds and groups acting on CAT(0) spaces, 2019. `arXiv:1810.09730`.

[LB19] F. Lo Bianco. On the cohomological action of automorphisms of compact Kähler threefolds. *Bull. Soc. Math. France*, 147(3):469–514, 2019.

[Les18] J. Lesieutre. Some constraints of positive entropy automorphisms of smooth threefolds. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 51(6):1507–1547, 2018.

[Log21] K. Loginov. A note on 3-subgroups in the space cremona group, 2021. `arXiv:2102.04522v2`.

[LP11] M. J. Larsen and R. Pink. Finite subgroups of algebraic groups. *J. Amer. Math. Soc.*, 24(4):1105–1158, 2011.

[Man74] Yu. I. Manin. *Cubic forms: algebra, geometry, arithmetic.* North-Holland Mathematical Library, Vol. 4. North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1974. Translated from the Russian by M. Hazewinkel.

[McM07] C. T. McMullen. Dynamics on blowups of the projective plane. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (105):49–89, 2007.

[Miy76] M. Miyanishi. Unirational quasi-elliptic surfaces in characteristic 3. *Osaka Math. J.*, 13(3):513–522, 1976.

[MM82] Sh. Mori and Sh. Mukai. Classification of Fano 3-folds with $B_2 \geq 2$. *Manuscripta Math.*, 36(2):147–162, 1981/82.

[MPZ20] Sh. Meng, F. Perroni, and D.-Q. Zhang. Jordan property for automorphism groups of compact spacesin fujiki's class $\mathcal{C}$, 2020. `arXiv:2011.09381`.

[MZ18] S. Meng and D.-Q. Zhang. Jordan property for non-linear algebraic groups and projective varieties. *Amer. J. Math.*, 140(4):1133–1145, 2018.

[OT15] K. Oguiso and T. T. Truong. Explicit examples of rational and Calabi-Yau threefolds with primitive automorphisms of positive entropy. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo*, 22(1):361–385, 2015.

[Pop11] V. Popov. On the Makar-Limanov, Derksen invariants, and finite automorphism groups of algebraic varieties. In *Affine algebraic geometry*, volume 54 of *CRM Proc. Lecture Notes*, pages 289–311. 2011.

[Pro11] Yu. Prokhorov. p-elementary subgroups of the Cremona group of rank 3. In *Classification of algebraic varieties*, EMS Ser. Congr. Rep., pages 327–338. Eur. Math. Soc., Zürich, 2011.

[Pro14] Yu. Prokhorov. 2-elementary subgroups of the space Cremona group. In *Automorphisms in birational and affine geometry*, volume 79 of *Springer Proc. Math. Stat.*, pages 215–229. 2014.

[PS16] Yu. Prokhorov and C. Shramov. Jordan property for Cremona groups. *Amer. J. Math.*, 138(2):403–418, 2016.

[PS18] Yu. Prokhorov and C. Shramov. p-subgroups in the space Cremona group. *Math. Nachr.*, 291(8-9):1374–1389, 2018.

[PS20] Yu. Prokhorov and C. Shramov. Finite groups of bimeromorphic selfmaps of uniruled kähler threefolds. *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.*, 84(5):169–196, 2020.

[PS21a] Yu. Prokhorov and C. Shramov. Automorphism groups of compact complex surfaces. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, (14):10490–10520, 2021.

[PS21b] Yu. Prokhorov and C. Shramov. Finite groups of bimeromorphic selfmaps of non-uniruled Kähler threefolds, 2021. `arXiv:2110.05825`.

[Puk98] A. Pukhlikov. Birational automorphisms of Fano hypersurfaces. *Invent. Math.*, 134(2):401–426, 1998.

[PZ14] F. Perroni and D.-Q. Zhang. Pseudo-automorphisms of positive entropy on the blowups of products of projective spaces. *Math. Ann.*, 359(1-2):189–209, 2014.

[Ser09] J.-P. Serre. A Minkowski-style bound for the orders of the finite subgroups of the Cremona group of rank 2 over an arbitrary field. *Mosc. Math. J.*, 9(1):193–208, back matter, 2009.

[Shi74] T. Shioda. An example of unirational surfaces in characteristic p. *Math. Ann.*, 211:233–236, 1974.

[Tru14] T. T. Truong. The simplicity of the first spectral radius of a meromorphic map. *Michigan Math. J.*, 63(3):623–633, 2014.

[Tru20] T. T. Truong. Relative dynamical degrees of correspondences over a field of arbitrary characteristic. *J. Reine Angew. Math.*, 758:139–182, 2020.

[Wei55] A. Weil. On algebraic groups of transformations. *Amer. J. Math.*, 77:355–391, 1955.

[Xie15] J. Xie. Periodic points of birational transformations on projective surfaces. *Duke Math. J.*, 164(5):903–932, 2015.

[Xu20] J. Xu. A remark on the rank of finite p-groups of birational automorphisms. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 358(7):827–829, 2020.

[Yau78] S. T. Yau. On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge-Ampere equation I. *Comm. on Pure and Appl. Math*, 31:339–411, 1978.

[Yom87] Y. Yomdin. Volume growth and entropy. *Israel J. Math.*, 57(3):285–300, 1987.