Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский
Мордовский государственный университет им. Н.П. Огарева»

Кафедра прикладной математики,
дифференциальных уравнений и теоретической механики

На правах рукописи

Зинина Светлана Халиловна

Глобальная динамика регулярных гомеоморфизмов и топологических потоков на многообразиях

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель
доктор физико-математических наук
Починка Ольга Витальевна

Саранск 2022

Изучение многомерных динамических систем имеет свою специфику, связанную с тем, что многие методы исследования таких систем основаны на аппроксимации гладких инвариантных подмножеств системы кусочно-линейными объектами. Например, топологическую классификацию диффеоморфизмов Морса-Смейла на многомерной сфере [4] удалось получить с помощью рассмотрения их топологических аналогов – гомеоморфизмов Морса-Смейла, для которых был доказан аналог теоремы Смейла [43, theorem 2.3] (детальное доказательство теоремы Смейла можно найти, например, в монографии [8]).

Во многом переход в топологическую категорию связан с возможным существованием нескольких гладких структур на одном и том же многообразии, начиная с размерности 4. Первоначально это было обнаружено Дж. Милнором в виде экзотических 7-сфер [40]. Кроме того, замыкания инвариантных многообразий периодических точек гладкой системы зачастую не являются даже топологическими подмногообразиями, в силу чего динамика на таких подмножествах уже не является гладкой. Многочисленные примеры таких подмножеств были индуцированы работой Д. Пикстона [19] (см., например, [35], [13]), а также изучением систем с поверхностной динамикой (см., например, [30], [7]).

Начиная с размерности четыре, появляются так называемые экзотические многообразия, которые не допускают гладких структур; появляются многообразия, не допускающие триангуляции, и имеющие другие особенности, препятствующие использованию техники изучения гладких многообразий. Впервые несглаживаемое топологическое многообразие было продемонстрировано М. Кервером [11] в размерности 10. Благодаря С. Дональдсону и М. Фридману [2] стало понятно, что многие односвязные компактные топологические 4-многообразия не допускают гладких структур. Существуют примеры топологических многообразий, на которых нельзя ввести гладкую структуру, но в то же время на них существуют топологические потоки. Такая ситуация возникает, например, в случаях, когда несглаживаемые многообразия допускают существование непрерывной функции Морса, которая (см., например, [12]) порождает нем непрерывный поток. Хорошей иллюстрацией такой ситуации служат проективно-подобные многообразия размерностей 4, 8 и 16, в том числе и несглаживаемые, на которых Дж. Илсом и Н. Купером [3] построены топологические функции Морса в точности с тремя критическими точками.

В связи с вышесказанным, идея описания свойств динамических систем или функций на многомерных многообразиях исключительно в топологических терминах, совершенно естественна. При этом в отсутствии дифференцируемой структуры у фазового пространства эти свойства интерпретируются как топологическая калька поведения гладкого объекта. Зачастую топологические динамические системы и непрерывные функции сохраняют свойства своих гладких аналогов и остаются тесно связанными с топологией объемлющего многообразия. Так, понятие непрерывной функции Морса было введено еще в 1959 году в работе [17], тогда же была доказана справедливость для нее неравенств Морса. Однако, вопрос о существовании непрерывной функции Морса на произвольном топологическом многообразии до сих пор является открытым вопросом. Аналогично своему гладкому аналогу определяется непрерывная функция Морса-Ботта, которая также сохраняет тесную связь с топологией несущего пространства.

Классическое определение гиперболического множества гладкой динамической системы использует разложение касательного расслоения в прямую сумму подпространств, на которых дифференциал действует специальным образом (сжимает, растягивает). Динамические системы с гиперболическим цепно рекуррентным множеством, состоящим из конечного числа орбит с трансверсально пересекающимися инвариантными многообразиями, широко известны как системы Морса-Смейла, и названы так, поскольку С. Смейл доказал справедливость для таких потоков аналогов неравенств Морса [23]. Топологические аналоги гладких потоков и каскадов Морса-Смейла были введены в работах [6], [15], [4]. При этом вопрос о существовании таких систем на произвольном многообразии также является открытым в отличие от гладких аналогов.

В настоящей диссертационной работе вводится понятие регулярных гомеоморфизмов и топологических потоков на топологических многообразиях. Регулярные топологические динамическими системы определяются, как динамические системы, цепно рекуррентное множество которых топологически гиперболично и состоит из конечного числа неподвижных точек и периодических орбит. Для таких систем в диссертации получено исчерпывающее описание поведения инвариантных многообразий цепных компонент, как с точки зрения асимптотики, так и с точки зрения топологии их вложения в несущее многообразие.

Также в диссертации доказано, что для регулярного потока без периодических орбит, заданного на топологическом многообразии любой размерности, существует (непрерывная) энергетическая функция Морса. Полученный результат является идейным продолжением работы С. Смейла [24], в которой установлено существование гладкой энергетической функции Морса у любого градиентно-подобного потока на многообразии, и частичным решением проблемы Морса о существовании непрерывных функций Морса на любых топологических многообразиях. Именно топологическое многообразие допускает непрерывную функцию Морса, если и только если, оно допускает регулярный топологический поток без периодических орбит. Этот результат получен в настоящей работе в рамках построения непрерывной энергетической функции Морса-Ботта для произвольного непрерывного регулярного потока на топологическом многообразии, и является аналогом теоремы К. Мейера [16], построившего в 1968 году энергетическую функцию Морса-Ботта для произвольного потока Морса-Смейла на гладком замкнутом n-многообразии (см. также обзор [9] по построению энергетических функций для структурно-устойчивых систем).

Установленные в диссертации глобальные свойства регулярных гомеоморфизмов, позволили получить полную топологическую классификацию некоторых классов регулярных гомеоморфизмов, имеющих классические гладкие аналоги, изученные в работах Е.А. Леонтович, А.Г. Майера, М. Пейшото [38], [18], [39]. Именно на языке трехцветного графа с периодической подстановкой описан полный топологический инвариант градиентно-подобных гомеоморфизмов поверхностей. При этом получено исчерпывающее описание множества допустимых графов и решена проблема реализации. Также найден эффективный алгоритм (время работы алгоритма имеет полиномиальную зависимость от числа входных данных) различения классов изоморфности допустимых трехцветных графов. Классифицированы также n-мерные декартовы произведения регулярных гомеоморфизмов окружности.

В рамках настоящей диссертационной работы разработаны методы изучения динамики регулярных топологических динамических систем, а также подходы к решению проблемы их классификации и построению для них энергетических функций. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы.

В главе 1 формулируются основные результаты работы и приводится информация об апробации результатов исследования.

В главе 2 вводится понятие регулярной динамической системы. А именно: в разделе 2.1 вводятся регулярные гомеоморфизмы f на замкнутом топологическом n-многообразии M^n.

Напомним, что *ε-цепью длины $m \in \mathbb{N}$*, соединяющей точку x с точкой y, для гомеоморфизма f называется конечный набор точек $x = x_0, \dots, x_m = y$, такой что $d(f(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$ для $1 \leqslant i \leqslant m$ (см. Рис. 1).

ε-цепью длины T, соединяющей точку x с точкой y для потока f^t называется конечный набор точек $x = x_0, \dots, x_n = y$, которому соответствует набор времен $t_1, \dots, t_n$, такой что $d(f^{t_i}(x_{i-1}), x_i) < \varepsilon$, $t_i \geqslant 1$ для $1 \leqslant i \leqslant n$ и $t_1 + \dots + t_n = T$.

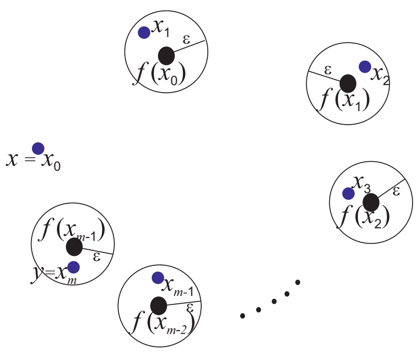

Рис. 1: ε-цепь длины $m \in \mathbb{N}$

Точка $x \in M^n$ называется *цепно рекуррентной* для гомеоморфизма f (потока f^t), если для любого $\varepsilon > 0$ существует m (T), зависящее от $\varepsilon > 0$, и ε-цепь длины m (T), соединяющая точку x с ней самой. Множество всех цепно рекуррентных точек называется *цепно рекуррентным множеством* и обозначается $\mathcal{R}_f$ $(\mathcal{R}_{f^t})$. На цепно рекуррентном множестве можно ввести отношение эквивалентности следующим правилом: $x \sim y$, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют ε-цепи, соединяющие x с y и y с x. Тогда цепно-рекуррентное множество разбивается на классы эквивалентности, называемые *цепными компонентами.*

Определение 1. *Неподвижная точка p гомеоморфизма $f : M^n \to M^n$ называется топологически гиперболической, если существует ее окрестность $U_p \subset M^n$, числа $\lambda_p \in \{0, 1, ..., n\}$, μ_p, $\nu_p \in \{-1, +1\}$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \to \mathbb{R}^n$, сопрягающий гомеоморфизм $f|_{U_p \cap f^{-1}(U_p)}$ с линейным диффеоморфизмом $a_{\lambda_p,\mu_p,\nu_p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданным формулой*

$$a_{\lambda_p,\mu_p,\nu_p}(x_1, ..., x_{\lambda_p}, x_{\lambda_p+1}, ..., x_n) = (\mu \cdot 2x_1, 2x_2, ..., 2x_{\lambda_p}, \nu \cdot 2^{-1}x_{\lambda_p+1}, 2^{-1}x_{\lambda_p+1}, ..., 2^{-1}x_n).$$

Число λ_p будем называть *индексом Морса* гиперболической точки p. Точки индексов n и 0 будем называть *источниковыми* и *стоковыми* соответственно; любую точку p такую, что $\lambda_p \in \{1, \cdots , n-1\}$ будем называть *седловой* (см. Рис. 2). Топологическая гиперболичность периодической точки p периода $per(p)$ определяется гиперболичностью точки p, как неподвижной точки гомеоморфизма $f^{per(p)}$.

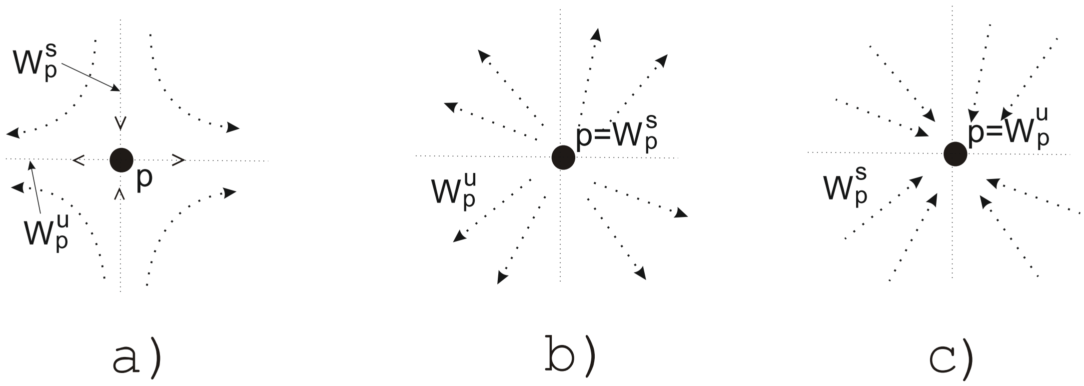

Рис. 2: Динамика в окрестности топологически гиперболической неподвижной точки: a) седловая точка, b) источниковая точка, c) стоковая точка

Определение 2. *Гомеоморфизм $f : M^n \to M^n$ называется регулярным, если его цепно рекуррентное множество конечно (следовательно состоит из конечного числа периодических орбит) и топологически гиперболично.*

Обозначим через G класс регулярных гомеоморфизмов.

Для топологически гиперболической неподвижной точки p гомеоморфизма f множества

$$W^s_p = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(h_p^{-1}(E^s_{\lambda_p})),\ W^u_p = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} f^k(h_p^{-1}(E^u_{\lambda_p})),$$

где $E^s_{\lambda_p} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \cdots = x_{\lambda_p} = 0\}$, $E^u_{\lambda_p} = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{\lambda_p+1} = = \cdots = x_n = 0\}$, будем называть *устойчивым и неустойчивым инвариантными многообразиями точки p.* Инвариантные многообразия $W^s_p(f)$, $W^u_p(f)$ периодической точки p относительно гомеоморфизма f совпадают с инвариантными многообразиями

$W^s_p(f^{per(p)})$, $W^u_p(f^{per(p)})$ неподвижной точки p относительно $f^{per(p)}$. Для любой периодической точки p гомеоморфизма f компоненты связности $W^s_p \setminus p$ ($W^u_p \setminus p$) называются ее устойчивыми (неустойчивыми) *сепаратрисами*. Для периодической орбиты $\mathcal{O}$ регулярного гомеоморфизма $f \in G$ положим

$$W^s_{\mathcal{O}} = \bigcup_{p \in \mathcal{O}} W^s_p,\ W^u_{\mathcal{O}} = \bigcup_{p \in \mathcal{O}} W^u_p,\ \lambda_{\mathcal{O}} = \lambda_p.$$

Для класса G регулярных гомеоморфизмов в разделе 2.1 устанавливаются основные динамические свойства. В частности, доказывается существование и единственность устойчивых и неустойчивых многообразий периодических точек, и отсутствие циклов у любого гомеоморфизма $f \in G$ в смысле нижеследующего определения.

На множестве периодических орбит гомеоморфизма $f \in G$ введем отношение С. Смейла условием

$$\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j \iff W^s_{\mathcal{O}_i} \cap W^u_{\mathcal{O}_j} \neq \emptyset.$$

k-циклом ($k \geqslant 1$) называется набор попарно различных периодических орбит $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2, \cdots, \mathcal{O}_k$, удовлетворяющих условию $\mathcal{O}_1 \prec \mathcal{O}_2 \prec \cdots \prec \mathcal{O}_k \prec \mathcal{O}_1$.

В силу отсутствия циклов у гомеоморфизмов класса G (см. Утверждение 2.2), отношение С. Смейла на множестве периодических орбит регулярного гомеоморфизма по транзитивности продолжается до отношения частичного порядка, а, следовательно, по Теореме Шпильрайна [25], может быть продолжено на множество всех периодических орбит до отношения полного порядка. В дальнейшем будем считать орбиты гомеоморфизма $f \in G$ пронумерованными, согласованно с некоторым фиксированным порядком:

$$\mathcal{O}_1 \prec \cdots \prec \mathcal{O}_k.$$

Полная упорядоченность орбит регулярного гомеоморфизма позволяет описать его глобальную динамику следующим образом.

Теорема 1. ([21]*[1], theorem 1). *Пусть $f \in G$. Тогда*

(1) $M^n = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^u_{\mathcal{O}_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^s_{\mathcal{O}_i}$*;*

(2) каждая компонента связности многообразия $W^u_{\mathcal{O}_i}$ ($W^s_{\mathcal{O}_i}$) является топологическим подмногообразием M^n, гомеоморфное $\mathbb{R}^{\lambda_{\mathcal{O}_i}}$ ($\mathbb{R}^{n-\lambda_{\mathcal{O}_i}}$);

(3) $cl(W^u_{\mathcal{O}_i}) \setminus W^u_{\mathcal{O}_i} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} W^u_{\mathcal{O}_j} \quad (cl(W^s_{\mathcal{O}_i}) \setminus W^s_{\mathcal{O}_i} \subset \bigcup\limits_{j=i+1}^{k} W^s_{\mathcal{O}_j})$.

В разделе 2.2 вводится понятие регулярного топологического потока.

Напомним, что *топологическим потоком* на многообразии M^n называется непрерывно зависящее от $t \in \mathbb{R}$ семейство гомеоморфизмов $f^t : M^n \to M^n$ с групповыми свойствами:

[1] Здесь и далее звездочкой отмечены работы, в которых одним из соавторов является диссертант.

1) $f^0(x) = x$ для любой точки $x \in M^n$;

2) $f^t(f^s(x)) = f^{t+s}(x)$ для любых $s, t \in \mathbb{R}$, $x \in M$.

Траекторией или орбитой точки $x \in M^n$ относительно потока f^t называется множество $\mathcal{O}_x = \{f^t(x), t \in \mathbb{R}\}$.

Определение 3. *Неподвижная точка p топологического потока f^t называется топологически гиперболической, если существует ее окрестность $U_p \subset M^n$, число $\lambda_p \in \{0, 1, ..., n\}$ и гомеоморфизм $h_p : U_p \to \mathbb{R}^n$, сопрягающий поток $f^t|_{U_p \cap (f^t)^{-1}(U_p)}$ с линейным потоком $a^t_{\lambda_p} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, заданным формулой*

$$a^t_{\lambda_p}(x_1, ..., x_{\lambda_p}, x_{\lambda_p+1}, ..., x_n) = (2^t x_1, ..., 2^t x_{\lambda_p}, 2^{-t} x_{\lambda_p+1}, ..., 2^{-t} x_n).$$

Определение 4. *Периодическая орбита ℓ периода T_ℓ топологического потока f^t называется топологически гиперболической, если существует ее окрестность $U_\ell \subset \subset M^n$, числа $\lambda_\ell \in \{0, 1, ..., n-1\}$, μ_ℓ, $\nu_\ell \in \{-1, +1\}$ и гомеоморфизм $h_\ell : U_\ell \to \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{S}^1$ для $\mu_\ell \nu_\ell = 1$ ($h_\ell : U_\ell \to \mathbb{R}^{n-1} \widetilde{\times} \mathbb{S}^1$ для $\mu_\ell \nu_\ell = -1$)[2], сопрягающий поток $f^t|_{U_p \cap (f^t)^{-1}(U_p)}$ с надстройкой $b^t_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell, T_\ell}$ над линейным диффеоморфизмом $a_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$, заданным формулой*

$$a_{\lambda_\ell, \mu_\ell, \nu_\ell}(x_1, ..., x_{\lambda_\ell}, x_{\lambda_\ell+1}, ..., x_{n-1}) = (\mu_\ell \cdot 2x_1, 2x_2, ..., 2x_{\lambda_\ell}, \nu_\ell \cdot 2^{-1} \cdot x_{\lambda_\ell+1}, 2^{-1} \cdot x_{\lambda_\ell+2}, ..., 2^{-1} \cdot x_{n-1}).$$

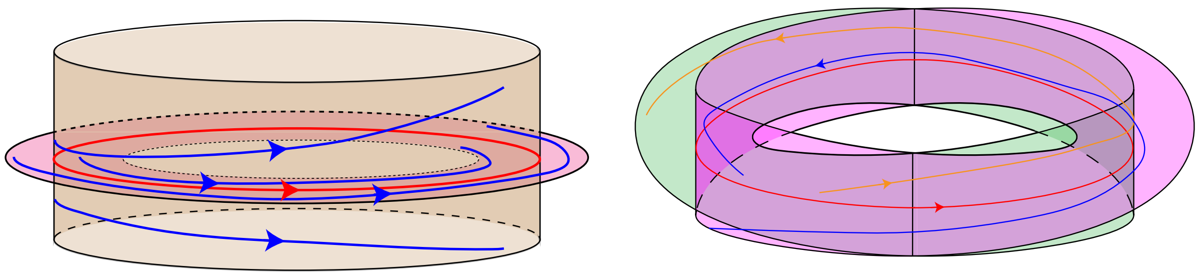

Рис. 3: Динамика в окрестности топологически гиперболической седловой периодической орбиты ℓ потока на трехмерном многообразии: (a) $\lambda_\ell = 1$, $\mu_\ell = \nu_\ell = +1$,
(b) $\lambda_\ell = 1$, $\mu_\ell = \nu_\ell = -1$

Определение 5. *Топологический поток $f^t : M^n \to M^n$ называется регулярным, если его цепно рекуррентное множество состоит из конечного числа топологически гиперболических периодических орбит и неподвижных точек.*

Обозначим через G^t класс регулярных потоков на замкнутом n-многообразии M^n. Динамика потоков класса G^t близка по своим свойствам к динамике потоков Морса-Смейла. А именно, если на множестве цепных компонент потока $f^t \in G^t$ ввести отно-

[2]Под обозначением $\mathbb{R}^{\lambda_\ell} \widetilde{\times} \mathbb{S}^1$ понимается косое произведение $\mathbb{R}^{\lambda_\ell}$ на $\mathbb{S}^1$.

шение С. Смейла условием

$$\mathcal{O}_i \prec \mathcal{O}_j \iff W^s_{\mathcal{O}_i} \cap W^u_{\mathcal{O}_j} \neq \emptyset,$$

то можно доказать отсутствие циклов и отношение С. Смейла на множестве периодических орбит регулярного гомеоморфизма по транзитивности продолжается до отношения частичного порядка, а, следовательно, по Теореме Шпильрайна [25], может быть продолжено на множество всех периодических орбит до отношения полного порядка. В дальнейшем будем считать орбиты потока f^t пронумерованными согласованно с некоторым фиксированным порядком: $\mathcal{O}_1 \prec \dots \prec \mathcal{O}_k$.

Аналогично теореме 1, устанавливаются следующие свойства регулярных потоков.

Теорема 2 ([20]*, theorem 1).

Пусть $f \in G^t$. Тогда

1. $M^n = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^u_{\mathcal{O}_i} = \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^s_{\mathcal{O}_i}$;
2. *неустойчивое (устойчивое) многообразие W^u_p (W^s_p) неподвижной точки $\mathcal{O}_i = p$ является топологическим подмногообразием многообразия M^n, гомеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_p}$ ($\mathbb{R}^{n-\lambda_p}$).*
3. *неустойчивое (устойчивое) многообразие W^u_ℓ (W^s_ℓ) периодической орбиты $\mathcal{O}_i = \ell$ является топологическим подмногообразием многообразия M^n, гомеоморфным $\mathbb{R}^{\lambda_\ell} \times \mathbb{S}^1$ ($\mathbb{R}^{n-\lambda_\ell-1} \times \mathbb{S}^1$) для $\mu_\ell = +1$ и $\mathbb{R}^{\lambda_\ell} \widetilde{\times} \mathbb{S}^1$ ($\mathbb{R}^{n-\lambda_\ell-1} \widetilde{\times} \mathbb{S}^1$) для $\mu_\ell = -1$.*
4. $cl(W^u_{\mathcal{O}_i}) \setminus W^u_{\mathcal{O}_i} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} W^u_{\mathcal{O}_j}$ $\left(cl(W^s_{\mathcal{O}_i}) \setminus W^s_{\mathcal{O}_i} \subset \bigcup\limits_{j=1}^{i-1} W^s_{\mathcal{O}_j}\right)$.

Полное изложение результатов данной главы опубликовано в статьях [21]* и [20]*.

В главе 3 доказывается существование непрерывной энергетической функции у любого регулярного потока. Результаты главы 3 являются идейным продолжением работ С. Смейла [24] и К. Мейера [16] о существовании энергетической функции Морса для градиентно-подобных потоков и энергетической функции Морса-Ботта для потоков Морса-Смейла, соответственно.

Напомним, что *функцией Ляпунова* для динамической системы называется непрерывная функция, которая убывает вдоль орбит вне цепно рекуррентного множества и является константой на каждой цепной компоненте[3]. В силу результатов Конли [1], такая функция существует для любой (непрерывной в том числе) динамической системы, а сам факт существования носит название «фундаментальная теорема динамических систем» (см., например, [22], Chapter IX, Theorem 1.1)). Из определения топологически гиперболической точки следует, что любая функция Ляпунова $\varphi : M^n \to \mathbb{R}$ для регулярного потока f^t имеет критические точки на цепно рекуррентном множестве в смысле следующего определения.

[3]Вне цепно-рекуррентного множества точки на траекториях упорядочены по времени.

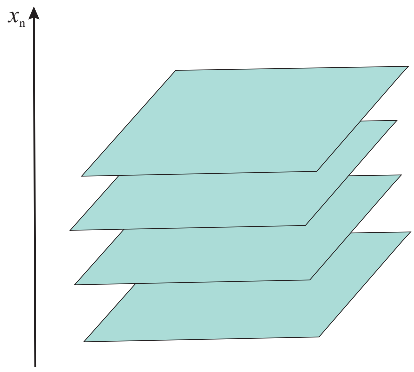

Рис. 4: Линии уровня функции φ в окрестности регулярной точки

Пусть $\varphi : M \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция. Точка $p \in M$ называется *регулярной точкой* функции φ, если в точке p существует локальная карта $(V_p, \phi_p : y \in V_p \mapsto$ $\mapsto (x_1(y), \ldots, x_n(y)) \in \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\varphi(y) = \varphi(p) + x_n(y).$$

В противном случае p называется *критической точкой*. Обозначим через Cr_φ множество критических точек функции φ. Естественно ожидать, что свойство строгого убывания функции Ляпунова вне цепно рекуррентного множества приводит к отсутствию там критических точек. Однако это не верно для произвольных динамических систем. Поэтому функцию Ляпунова, чье множество критических точек совпадает с цепно рекуррентным множеством динамической системы, называют *энергетической функцией*.

В силу конечности и гиперболичности цепно рекуррентного множества регулярного потока естественно предполагать существование у них энергетической функции с невырожденными критическими точками. Напомним, что точка $p \in Cr_\varphi$ называется *невырожденной критической точкой индекса* $\lambda_p \in \{0, \cdots, n\}$, если в точке p существует локальная карта (V_p, ϕ_p) такая, что

$$\varphi(y) = \varphi(p) - \sum_{i=1}^{\lambda_p} x_i^2(y) + \sum_{i=\lambda_p+1}^{n} x_i^2(y).$$

Функция φ называется *непрерывной функцией Морса*, если множество Cr_φ состоит из невырожденных критических точек.

Связное топологическое подмногообразие $C \subset Cr_\varphi$ размерности $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ многообразия M^n называется *невырожденным критическим k-многообразием индекса* $\lambda_p \in \{0, \cdots, n-k\}$, если в любой точке $p \in C$ существует локальная карта (V_p, ϕ_p)

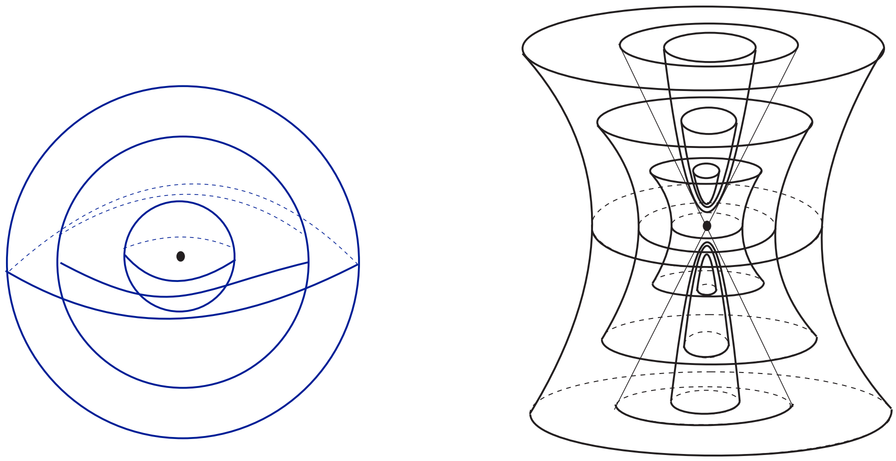

Рис. 5: Линии уровня функции φ в окрестности невырожденной критической точки

такая, что $\phi_p(V_p \cap C) \subset \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 = \cdots = x_{n-k} = 0\}$ и

$$\varphi(y) = \varphi(p) - \sum_{i=1}^{\lambda_p} x_i^2(y) + \sum_{i=\lambda_p+1}^{n-k} x_i^2(y).$$

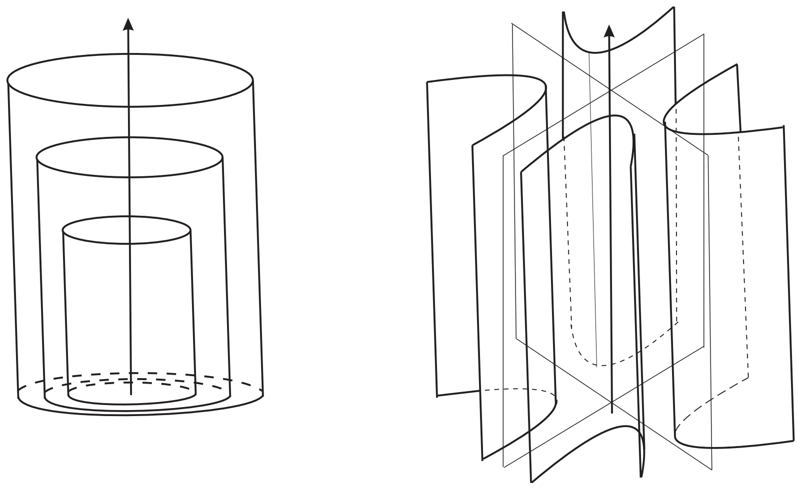

Рис. 6: Линии уровня функции φ в окрестности невырожденного критического многообразия

Функция φ называется *непрерывной функцией Морса-Ботта*, если любая компонента связности множества Cr_φ является либо невырожденной критической точкой, либо принадлежит невырожденному критическому подмногообразию.

Утверждение 3.1 ([14]*, theorem). *Любой регулярный топологический поток $f^t : M^n \to M^n$ без периодических орбит обладает непрерывной энергетической функцией Морса*[4].

Понятие непрерывной функции Морса было введено Морсом еще в 1959 году в работе [17], тогда же была доказана справедливость для нее неравенств Морса, а позже

[4] Для $n = 2$ результат следует из работы [36]*.

(в работе [12]) – ряд свойств, аналогичных свойствам гладкой функции Морса. Однако, вопрос о существовании непрерывной функции Морса на произвольном топологическом многообразии до сих пор является открытым вопросом. Поскольку непрерывная функция Морса порождает топологический градиентно-подобный поток на многообразии [12], то Утверждение 3.1 является частичным решением проблемы Морса: топологическое многообразие допускает непрерывную функцию Морса тогда и только тогда, когда оно допускает топологический поток с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством.

Утверждение 3.1 непосредственно следует из более общего результата главы 3.

Теорема 3. ([20]*, theorem 2). *Любой регулярный поток $f^t \in G^t$ обладает непрерывной энергетической функцией Морса-Ботта, критические точки которой либо не вырождены, либо образуют невырожденные одномерные многообразия.*

Факт существования энергетической функции принципиально отличает потоки от каскадов. Для последних препятствием к построению энергетической функции служит возможное наличие диких седловых сепаратрис, обнаруженное Д. Пикстоном [19] в 1977 году в размерности три. Известны примеры и регулярных потоков с дикими сепаратрисами, такие потоки сконструированы, например, в недавних работах В. Медведева и Е. Жужомы [15]. Однако из результатов настоящей работы следует, что для регулярных потоков дикость сепаратрис не является препятствием к существованию энергетической функции Морса.

Полное изложение результатов данной главы опубликовано в статьях [20]*, [14]*, [36]*.

В главе 4 получена топологическая классификация некоторых содержательных классов регулярных гомеоморфизмов. А именно: в разделе 4.1. вводятся градиентно-подобные гомеоморфизмы – регулярные гомеоморфизмы $f : M^2 \to M^2$, инвариантные многообразия различных седловых точек которых не пересекаются. Обозначим через Q класс таких гомеоморфизмов.

Динамика градиентно-подобного диффеоморфизма поверхности тесно связана с динамикой градиентно-подобного потока, поскольку отличается от него домножением на периодическое преобразование (см., например, [29], [8]). Динамика градиентно-подобных потоков исторически изучалась методом выделения *ячеек* – областей с одинаковым асимптотическим поведением траекторий [18], [26], [38], [27], [28].

В главе 4 доказывается, что ячейки градиентно-подобных гомеоморфизмов имеют те же типы, что и ячейки Леонтович-Майера-Пейшото [38], [18]. Далее эти ячейки подразбиваются на треугольные области с однородным динамическим поведением, подобно атомам Ошемкова-Шарко [41]. Каждому гомеоморфизму $f \in Q$ ставится в соответствие трехцветный граф T_f (см. Рис.7), множество вершин которого изоморфно множеству треугольных областей, а множество ребер – множеству границ этих областей. Граф оснащается автоморфизмом P_f, индуцированным динамикой гомеоморфизма на ячейках. Доказывается следующая теорема.

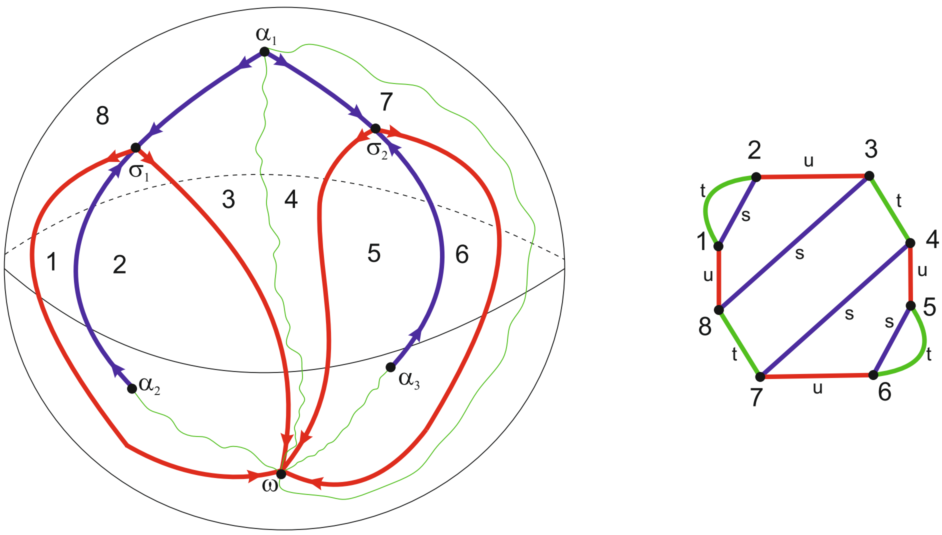

Рис. 7: Гомеоморфизм класса Q и соответствующий ему трехцветный граф

Теорема 4. ([31]*, теорема 1). *Гомеоморфизмы f, f' из класса Q топологически сопряжены тогда и только тогда, когда графы $(T_f; P_f)$, $(T_{f'}; P_{f'})$ изоморфны.*

Для решения проблемы реализации выделено множество допустимых трехцветных графов (T, P), для каждого из которых описана процедура реализации по нему градиентно-подобного гомеоморфизма.

Теорема 5. ([31]*, предложение 3). *Для любого допустимого графа (T, P) существует гомеоморфизм $f : M^2 \to M^2$ из класса Q, граф (T_f, P_f) которого изоморфен графу (T, P).*

Также найден эффективный алгоритм (время работы алгоритма имеет полиномиальную зависимость от числа входных данных) различения классов изоморфности допустимых трехцветных графов.

Теорема 6. ([5]*, theorem 7). *Изоморфизм двух трехцветных n-вершинных графов T_f, $T_{f'}$ гомеоморфизмов $f, f' \in Q$ можно распознать за время*

$$O(n^3 log(n)).$$

Кроме того, ориентируемость и род несущей поверхности M^2 можно определить за линейное время по количеству вершин трехцветного графа T_f.

Также в главе 4 рассмотрен класс $\mathcal{H}_n$ гомеоморфизмов ϕ, являющихся декартовыми произведениями n регулярных гомеоморфизмов окружности

$$\phi = \phi_1 \times \cdots \times \phi_n, \ \phi_i : S^1 \to S^1.$$

Регулярные гомеоморфизмы окружности являются топологическим обобщением грубых преобразований окружности, исчерпывающим образом изученных А. Г. Майером в работе [39]. Так, сохраняющие ориентацию преобразования являются композицией регулярных гомеоморфизмов с неподвижными точками и поворотов на рациональный угол, а меняющие – регулярных гомеоморфизмов и меняющих ориентацию инволюций.

Гомеоморфизмы рассматриваемого класса $\mathcal{H}_n$ являются регулярными гомеоморфизмами n-мерного тора $\mathbb{T}^n$. Одним из основных результатов главы 3 является нахождение необходимых и достаточных условий топологической сопряжённости гомеоморфизмов $\phi,\ \phi' \in \mathcal{H}_n$.

Теорема 7. ([32]*, теорема 1). *Гомеоморфизмы* $\phi = \phi_1 \times \cdots \times \phi_n,\ \phi' = \phi'_1 \times \cdots \times \phi'_n \in \mathcal{H}_n$ *топологически сопряжены тогда и только тогда, когда существует подстановка* $\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n \end{pmatrix}$ *на множестве индексов* $\{1,\ 2, \dots,\ n\}$, $\eta(i) = \eta_i$, *такая, что гомеоморфизмы* ϕ_i *и* ϕ'_{η_i} *топологически сопряжены для* $i = 1, \dots, n$.[5]

Заметим, что если рассматривать n-кратные декартовы произведения поворотов на рациональное число на окружности, как это было сделано в работе [37], то полным инвариантом при топологическом сопряжении таких гомеоморфизмов является период их периодических точек. Случай топологической классификации произведений регулярных гомеоморфизмов окружности существенно отличается от результатов, представленных в вышеупомянутой работе.

Полное изложение результатов данной главы опубликовано в статьях [34]*, [32]*, [31]*, [5]*.

Заключение. Настоящая диссертационная работа посвящена изучению динамики регулярных гомеоморфизмов и топологических потоков, а также топологической классификации и построению энергетических функций для таких систем. Все полученные в диссертации результаты являются новыми и автору диссертации принадлежат доказательства всех основных результатов работы, выносимых на защиту.

- Введен класс регулярных динамических систем, изучена динамика регулярных гомеоморфизмов (теорема 1) и топологических потоков (теорема 2), включающая

  - представление объемлющего многообразия как объединение инвариантных многообразий неподвижных точек и периодических орбит;

  - описание топологии вложения инвариантных многообразий неподвижных точек и периодических орбит в объемлющее многообразие;

  - описание асимптотического поведения инвариантных многообразий неподвижных точек и периодических орбит.

- Для регулярных топологических потоков без периодических орбит получено конструктивное доказательство существования непрерывной энергетической функции Морса (утверждение 3.1).

- Для произвольных регулярных топологических потоков доказано существование непрерывной энергетической функции Морса-Ботта, критические точки которой

[5]Для $n = 2$ результат следует из работы [34]*.

либо не вырождены, либо образуют невырожденные одномерные многообразия. (теорема 3).

- Получена полная топологическая классификация следующих содержательных классов регулярных гомеоморфизмов

  - градиентно-подобных гомеоморфизмов поверхностей, включающая построение комбинаторного инварианта, являющегося трехцветным графом с периодической подстановкой и доказательство критерия топологической сопряженности посредством изоморфизма графов (теорема 4); выделение класса допустимых трехцветных графов с периодическими подстановками с помощью которого решена проблема реализации (теорема 5); нахождение эффективного алгоритма различия классов изоморфности допустимых трехцветных графов (теорема 6).

  - n-кратных декартовых произведений регулярных гомеоморфизмов окружности (теорема 7).

Результаты исследований содержатся в 6 статьях, опубликованных в изданиях, входящих в МБД Scopus и Web of Science:

1. Гринес В. З., Капкаева (Зинина) С. Х., Починка О. В. Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей // Математический сборник. - 2014. - Т. 205. - № 10. - С. 19-46.

2. Grines V. Z., Malyshev D. S., Pochinka O. V., Zinina S. Kh. Efficient Algorithms for the Recognition of Topologically Conjugate Gradient-like Diffeomorhisms // Regular and Chaotic Dynamics. - 2016. - V. 21:2. - P. 189–203. (Гринес В. З., Малышев Д. С., Починка О. В., Зинина С. Х. Эффективные алгоритмы распознавания топологически сопряженных градиенто-подобных диффеоморфизмов // Регулярная и хаотическая динамика. - 2016. - Т. 21:2. - С. 189–203.)

3. Починка О. В., Зинина С. Х. Энергетическая функция Морса для топологических потоков с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством на поверхностях // Математические заметки. - 2020. - Т. 107. - № 2. - С. 276-285.

4. Medvedev T. V., Pochinka O., Zinina S. K. On existence of Morse energy function for topological flow // Advances in Mathematics. - 2021. - V. 378. - 107518. (Медведев Т. В., Починка О., Зинина С. К. Существование энергетической функции Морса у топологических потоков // Успехи математики. - 2021. - Т. 378. - 107518.)

5. Pochinka O. V., Zinina S. Kh. Construction of the Morse –Bott Energy Function for Regular Topological Flows // Regular and Chaotic Dynamics. - 2021. - V. 26. - No. 4. - P. 350–369. (Починка О. В., Зинина С. Х. Построение энергетической функции Морса–Ботта для регулярных топологических потоков // Регулярная и хаотическая динамика. - 2021. - Т. 26. - № 4. - С. 350–369.)

6. Голикова И. В., Зинина С. Х. Топологическая сопряжённость n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. - 2021. - Т. 29. - № 6. - С. 851–862.

Список литературы

[1] Conley C. Isolated invariant sets and the Morse index. Providence, RI: AMS, 1978. (CBMS Regional Conference Series in Math.; V. 38). - 89 p.

[2] Donaldson S.An application of gauge theory to four-dimensional topology // Journal of Differential Geometry. - 1983. - V. 18. - № 2. - P. 279–315.

[3] Eells J., Kuiper N. Manifolds which are like projective planes, Publ. Math. IHES 14. - 1962. - P. 5–46.

[4] Grines V., Gurevich E., Malyshev D., Pochinka O. On topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on the sphere S^n (n > 3) // Nonlinearity. - 2020. - V. 33. - No. 12. - P. 7088-7113.

[5] Grines V. Z., Malyshev D. S., Pochinka O. V., Zinina S. Kh. Efficient Algorithms for the Recognition of Topologically Conjugate Gradient-like Diffeomorhisms // Regular Chaotic Dynymic. - 2016. - 21:2. - P. 189–203.

[6] Grines V., Gurevich E., Medvedev V., Pochinka O. An analog of Smale's theorem for homeomorphisms with regular dynamics // Math. Notes.- 2017. - V. 102. - No. 3-4. - P. 569–574.

[7] Grines V., Gurevich E., Pochinka O. On the number of heteroclinic curves of diffeomorphisms with surface dynamics // Regular and Chaotic Dynamics. - 2017. - Vol. 22. No. 2. - P. 122–135.

[8] Grines V., Medvedev T., Pochinka O. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. - 2016. - Switzerland: Springer. - 313 p.

[9] Grines V., Pochinka O. The Constructing of Energy Functions for Ω-stable Diffeomorphisms on 2- and 3-Manifolds// Journal of Mathematical Sciences. - 2020. - V. 250. - P. 537-568.

[10] Irwin M. C. A classification of elementary cycles // Topology. - 1970. - V. 9. - P. 35–47.

[11] Kervaire M. A manifold which does not admit any differentiable structure // Commentarii Mathematici Helvetici. - 1960. - V. 34. - № 1. - P. 257–270.

[12] Kirby R.C., Siebenmann L.C.. Foundational Essays on Topological Manifolds, Smoothings, and Triangulations // (AM-88), V. 88. - Princeton University Press. - 2016.

[13] Medvedev T., Pochinka O. The wild Fox-Artin arc in invariant sets of dynamical systems // Dynamical Systems. - 2018. - V. 33.- № 4. - P. 660-666.

[14] Medvedev T., Pochinka O., Zinina S. On existence of Morse energy function for topological flows // Advances in Mathematics. - 2021. - V. 378. - 107518.

[15] Medvedev V. S., Zhuzhoma E. V. Morse-Smale systems with few nonwandering points // Topology Appl. - 2013. - 3 (160). - P. 498–507.

[16] Meyer K. R. Energy functions for Morse Smale systems // Amer. J. Math. - 1968. - V. 90. - P. 1031–1040.

[17] Morse M. Topologically non-degenerate functions on a compact n-manifold // J. Analyse Math. - 1959. - V. 7. - P. 189–208.

[18] Peixoto M. M. On the classification of flows on two-manifolds // Dynamical systems. - 1973. - Acad. press N.Y. London. - P. 389–419.

[19] Pixton D. Wild unstable manifolds // Topology. - 1977. - V. 16. - N. 2. - P. 167–172.

[20] Pochinka O. V., Zinina S. Kh. Construction of the Morse–Bott Energy Function for Regular Topological Flows // Regular and Chaotic Dynamics. - 2021. - Vol. 26 - No. 4. - P. 350–369.

[21] Pochinka O., Zinina S. Dynamics of topological flows and homeomorphisms with a finite hyperbolic chain recurrent set on n-dimensional manifolds // Dynamical systems. - 2019. - Vol. 9(37). - No. 3. - P. 289-296

[22] Robinson C. Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. - 1999. - V. 28. CRC press Boca Raton. - 520 p.

[23] Smale S. Morse inequalities for a dynamical systems // Bull. Am. math. Soc. - 1960. - V. 66 - p.43–49

[24] Smale S. On gradient dynamical systems. // Ann. of Math. (2). 1961. - V. 74. - P. 199–206.

[25] Szpilrajn E. Sur l'extension de l'ordre partiel // Fundamenta mathematicae. - 1930. - Vol. 1, No 16. - P. 386–389.

[26] Андронов А. А., Понтрягин Л. С. Грубые системы // Доклады АН СССР. - 1937. - Т. 14. - № 5. - С. 247-250.

[27] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях // Часть 1. Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е.А. Лентович-Андроновой. - 1985. - ГГУ. - Горький. - С. 22–38.

[28] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентно-подобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях // Часть 2. Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е. А. Лентович-Андроновой. - 1987. - ГГУ. - Горький. - С. 24–32.

[29] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий // Дифференциальные и интегральные уравнения. Сб. науч. тр. под ред. Н.Ф. Отрокова. - 1985. - ГГУ. Горький. - С. 33–37.

[30] Гринес В. З., Гуревич Е. Я., Куренков Е. Д. О топологической классификации градиентно-подобных потоков с поверхностной динамикой на 3-многообразиях // Математические заметки. - 2020. - Т. 107. № 1. - С. 145–148.

[31] Гринес В. З., Капкаева (Зинина) С. Х., Починка О. В. Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей // Математический сборник. - 2014. - Т. 205. - № 10. - С. 19–46.

[32] Голикова И. В., Зинина С. Х. Топологическая сопряжённость n-кратных декартовых произведений грубых преобразований окружности // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. - 2021. - Т. 29. - № 6. - С. 851–862.

[33] Гробман Д. М. Топологическая классификация окрестностей особой точки в n-мерном пространстве // Математический сборник. - 1962. - Т. 58. - № 1. - С. 77–94.

[34] Гуревич Е. Я., Зинина С. Х. О топологической классификации градиентно-подобных систем на поверхностях, являющихся локально прямыми произведениями // Журнал Средневолжского математического общества. - 2015. - Т. 17. - № 1. - С. 37–45.

[35] Жужома Е. В., Медведев В. С. Поверхностные базисные множества с дико вложенными несущими поверхностями // Математические заметки. - 2009. - Т. 85. - № 2. - С. 356–372.

[36] Зинина С. Х., Починка О. В. Энергетическая функция Морса для топологических потоков с конечным гиперболическим цепно рекуррентным множеством на поверхностях // Математические заметки. - 2020. - Т. 107. - № 2. - С. 276–285.

[37] Куренков Е. Д., Рязанова К. А. On periodic translations on torus // Динамические системы. - 2017. - Т. 7(35). - № 2. - С. 113-118.

[38] Леонтович Е., Майер А. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории. Доклады академии наук СССР. - 1955. -Т. 103. - № 4. - С. 557–560.

[39] Майер А. Г. Грубое преобразование окружности в окружность. - Учён. зап. ГГУ. - 1939. - No 12. - С. 215–229.

[40] Милнор Дж. О многообразиях гомеоморфных семимерной сфере // Сб. Математика. - 1957. - Т. 1. - № 3. - С. 35–42.

[41] Ошемков А. А., Шарко В. В. О классификации потоков Морса-Смейла на двумерных многообразиях // Математический сборник. - 1998. - Т. 189. - № 8. - С. 93–140.

[42] Палис Ж., Ди Мелу В. Геометрическая теория динамических систем: Введение: Пер. с англ. - 1986. - М. Мир. - 301 с.

[43] Смейл С. Дифференцируемые динамические системы // УМН. - 1970. - Т. 25 1(151). - С. 113–185.