

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»
Факультет математики

На правах рукописи

Коновалов Андрей Анатольевич

Некоторые проблемы некоммутативной теории Ходжа

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
PhD
Брав Кристофер Ира

Москва - 2022

Одно из важнейших отличий алгебраической геометрии над полем комплексных чисел – наличие чистой структуры Ходжа на когомологиях де Рама гладких собственных многообразий. Некоммутативная геометрия изучает k -dg-категории, также иногда именуемые некоммутативными схемами. Оказывается, что в мире dg-категорий возможно определить многие важные свойства и инварианты многообразий, включая гладкость, собственность, когомологии Дольбо и когомологии де Рама, – при этом функтор, сопоставляющий схеме X/k k -dg-категорию совершенных комплексов $\text{Perf}(X)$, уважает эти свойства и структуры. Упомянутые когомологии (точнее, их прямые суммы) представлены в некоммутативном мире гомологиями Хохшильда и периодическими циклическими гомологиями; как и в геометрической ситуации, они приходят вместе со спектральной последовательностью от-Ходжа-к-де-Раму, которая вырождается для гладких собственных dg-категорий над полем характеристики 0 ([Ka], см. также [M] и [KKM]). В [KKP] авторы предположили существование аналога структур Ходжа в некоммутативном случае и сформулировали ряд связанных с ними гипотез. Открытым вопросом остаётся вопрос о существовании естественной рациональной (/целочисленной/вещественной) структуры на периодических гомологиях, то есть функтора $F : dgCat_{\mathbb{C}} \rightarrow Mod_{\mathbb{Q}}$ вместе с естественным преобразованием $F \rightarrow \text{HP}(\cdot/\mathbb{C})$, таких что на достаточно хорошей (например, гладкой собственной) dg-категории T индуцированный морфизм $F(T) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C} \rightarrow \text{HP}(T/\mathbb{C})$ – эквивалентность (то есть, квазиизоморфизм комплексов).

В диссертации, мы рассматриваем функтор топологической К-теории dg-категорий, предложенный Э. Бланком как хороший кандидат на роль целочисленной структуры ([Bla]). Мы доказываем, что топологическая К-теория доставляет целочисленную структуру в периодических гомологиях dg-категории T (мы будем в такой ситуации говорить, что T обладает *свойством решётки*) для нескольких важных классов dg-категорий, собранных в следующей теореме.

Theorem 0.1. Пусть $LC \subset dgCat_{\mathbb{C}}$ – полная подкатегория dg-категорий, удовлетворяющих свойству решётки. Тогда LC содержит следующие классы dg-категорий:

- a) $T = \text{Perf}(B)$, где B – связная собственная dg-алгебра;
- b) $T = \text{Perf}(B)$, где B – связная dga, такая что $H_0 B$ – нильрасширение коммутативной \mathbb{C} -алгебры конечного типа;
- c) $T = \text{Loc}(M, \mathbb{C})$, где M – связное локально стягиваемое топологическое пространство, для фундаментальной группы которого выполнены $KH_{\mathbb{Q}}$ -гипотеза Фаррелла-Джонсона и гипотеза Бургелеа (например, гиперболическая по Грому);
- d) $T = \text{Perf}(\mathfrak{X})$, где \mathfrak{X} – производная \mathbb{C} -схема, такая что её классический локус – отделяемая схема конечного типа;
- e) гладкие конечномерные \mathbb{C} -dga.

LC удовлетворяет свойству 2-из-3 относительно точных троек dg-категорий и замкнут относительно Морита-эквивалентностей и взятия ретрактов.

В секции 4.7, [Bla] автор рассматривает конечномерные классические алгебры и использует вариант топологической К-теории, названный псевдосвязной топологической К-теорией, чтобы получить целочисленную структуру в периодических гомологиях таких алгебр. Поскольку эти алгебры образуют подкласс в а), топологическая К-теория в этом случае работает так же хорошо. Как мы показываем, эквивалентность вариантов топологической К-теории в этом случае может быть показана напрямую. Класс e) – ещё одно обобщение конечномерных алгебр, и в этом случае свойство решётки прямо следует из Theorem 2.19, [Orl]); доказательство в остальных случаях использует Теорему 0.2.

Отметим также, что Теорема 0.1 в том числе говорит о некоторых негладких или несобственных dg-категориях (в отличие от, например, Conjecture 4.25 в [Bla]). На самом деле, уже в коммутативном

случае, хотя гладкость и собственность требуются для вырождения спектральной последовательности от-Ходжа-к-де-Раму, для квазипроективного многообразия $X \in \text{Perf}(X)$ обладает свойством решётки без предположений о гладкости/собственности, поэтому в некоммутативном случае мы также ожидаем, что комплексификация топологического характера Черна – эквивалентность при довольно мягких предположениях о dg-категории; мы также ожидаем, что в этой ситуации возможно получить структуры, напоминающие смешанную теорию Ходжа, развитую П. Делинем.

Топологическая K-теория dg-категорий определяется при помощи промежуточного (и более тонкого) инварианта – полутопологической K-теории K^{st} (мы напоминаем определения обеих в разделе 3 диссертации). Главный технический ингредиент – функтор топологической реализации, который обобщает функтор подлежащего топологического пространства с \mathbb{C} -многообразий на произвольные инварианты схем конечного типа (со значениями в категории спектров). Для доказательства Теоремы 0.1, мы изучаем поведение функтора топологической реализации на вариантах циклических гомологий. Это позволяет нам доказать следующий ключевой результат.

Theorem 0.2. *Пусть $v : B \rightarrow A$ – нильрасширение связных \mathbb{C} -dga. Тогда индуцированное отображение $K^{\text{st}}(B) \rightarrow K^{\text{st}}(A)$ – эквивалентность.*

Большинство случаев Теоремы 0.1 довольно прямолинейно доказываются при помощи нильинвариантности; исключение составляет случай с) локальных систем на топологическом пространстве M . Теорема 0.2 позволяет свести вопрос к случаю групповых алгебр, топологическую K-теорию которых мы описываем в предположении, что группа $\pi_1 M$ относится к широкому классу групп, для которых выполнены гипотезы Бургелеа и (КН $_{\mathbb{Q}}$ -версия гипотезы) Фаррелла-Джонса. Мы также предлагаем стратегию, при помощи которой можно попробовать найти контрпример к гипотезе Фаррелла-Джонса.

Структура диссертации. Первая секция посвящена описанию двух вариантов функтора топологической реализации, которые позволяют продолжить функтор подлежащего топологического пространства с категории конечного типа схем на предшукки спектров на ней. Мы показываем, что два варианта дают эквивалентны результат, что позволяет нам свободно использовать свойства обоих.

Во второй секции мы напоминаем необходимые определения и свойства из [Bla]; в частности, напоминаем определение топологической K-теории dg-категорий.

Полутопологическая K-теория dg-категории T построена из алгебраических K-теорий подкруток T при помощи конечного типа аффинных схем. Алгебраическая K-теория может быть приближена с помощью гомологий Хохшильда и (различных версий) циклических гомологий. В третьей секции мы изучаем поведение функтора топологической реализации на этих инвариантах. В частности, мы показываем, что реализации HN и HC зануляются.

В четвёртой секции мы напоминаем определение производной нильинвариантности и доказываем Теорему 0.2, используя результаты предыдущего раздела.

Последняя секция посвящена доказательству Теоремы 0.1 и смежным вопросам.

Результаты диссертации отражены в следующих статьях:

- Д. Б. Каледин, А. А. Коновалов, К. О. Магидсон, *Спектральные алгебры и вырождение некоммутативной спектральной последовательности Ходжа–де Рама*, Алгебра, теория чисел и алгебраическая геометрия, Сборник статей. Посвящается памяти академика

Игоря Ростиславовича Шафаревича, Труды МИАН, 307, МИАН, М., 2019, 63–77; Proc. Steklov Inst. Math., 307 (2019), 51–64.

- А.А. Коновалов *О свойстве нильинвариантности полутопологической K -теории dg -категорий и его приложениях*, принято к печати в журнале «Математические заметки» и будет опубликовано в томе 112, вып. 2 в 2022

REFERENCES

- [Ab] M. Abouzaid, *A cotangent fibre generates the Fukaya category*, Adv. Math. 228 (2011), no. 2, 894–939.
- [AH] B. Antieau, J. Heller, *Some remarks on topological K -theory of dg categories*, arXiv preprint 1709.01587.
- [AV] B. Antieau, G. Vezzosi, *A remark on the Hochschild-Kostant-Rosenberg theorem in characteristic p* , arXiv preprint 1710.06039.
- [BB] A. Bartels, M. Bestvina, *The Farrell-Jones conjecture for mapping class groups*. Preprint, available at arXiv:1606.02844, 2016.
- [BGT] A. Blumberg, D. Gepner, and G. Tabuada, *A universal characterization of higher algebraic K -theory*, Geom. Topol. 17 (2013), no. 2, pp. 733–838.
- [Bla] A. Blanc, *Topological K -theory of complex noncommutative spaces*, Compositio Math. 152 (2016), 489–555.
- [BL] A. Bartels, W. Lück, *The Borel Conjecture for hyperbolic and $CAT(0)$ -groups*. Ann. of Math. (2), 175(2):631–689, 2012.
- [BLR] A. Bartels, W. Lück, H. Reich, *The K -theoretic Farrell-Jones Conjecture for hyperbolic groups*. Invent. Math., 172(1):29–70, 2008.
- [Bur] D. Burghelca, *The cyclic homology of the group rings*. Commentarii Mathematici Helvetici. 60. 354-365. 10.1007/BF02567420 (1985).
- [CMNN] D. Clausen, A. Mathew, N. Naumann, J. Noel, *Descent in algebraic K -theory and a conjecture of Ausoni-Rognes*, arXiv preprint 1606.03328 (2017).
- [Cohn] L. Cohn, *Differential graded categories are k -linear stable infinity categories*, arXiv: 1308.2587, 2013.
- [DGM] Bjørn Ian Dundas, Thomas Goodwillie, and Randy McCarthy. *The local structure of algebraic K -theory*, volume 18. Springer Science & Business Media, 2012.
- [DJ] M. W. Davis, T. Januszkiewicz, *Right-angled Artin groups are commensurable with right-angled Coxeter groups*. J. Pure Appl. Algebra, 153(3):229–235, 2000.
- [EM] A. Engel, M. Marcinkowski. *Burghelca conjecture and asymptotic dimension of groups*, Journal of Topology and Analysis 12 (02), 321-356
- [ES] Elden Elmanto, Vladimir Sosnilo, *On Nilpotent Extensions of ∞ -Categories and the Cyclotomic Trace*, International Mathematics Research Notices, 2021; rnab179, <https://doi.org/10.1093/imrn/rnab179> .
- [FW01] E. Friedlander, M. Walker. *Comparing K -theories for complex varieties*. Amer. J. Math., 123(5):779–810, 2001.
- [FW03] E. Friedlander, M. Walker. *Rational isomorphisms between K -theories and cohomology theories*, Inventiones mathematicae 154 (2003), no. 1, 1–61.
- [FW05] E. Friedlander, M. Walker, *Semi-topological K -theory*, Handbook of K -theory (2005), 877–924.
- [G85] T.G. Goodwillie, *Cyclic homology, derivations, and the free loop space*. Topology 24 (1985), no. 2, 187215.
- [GPS] S. Ganatra, J. Pardon, V. Shende, *Microlocal Morse theory of wrapped Fukaya categories*, arXiv:1809.08807, 2020.
- [GR] D. Gaitsgory, N. Rozenblyum, *A Study in Derived Algebraic Geometry Vol. I. Correspondences and duality*, volume 221 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017.
- [HLP] Daniel Halpern-Leistner, Daniel Pomerleano. *Equivariant Hodge theory and noncommutative geometry*. Geom. Topol. 24 (5) 2361 - 2433, 2020. <https://doi.org/10.2140/gt.2020.24.2361> pp. 1–26.
- [Ji] R. Ji, *Nilpotency of Connes’ Periodicity Operator and the Idempotent Conjectures*, K-Theory 9 (1995), 59–76.
- [Kal] D. Kaledin, *Spectral sequences for cyclic homology*. In Algebra, geometry, and physics in the 21st century, volume 324 of Progr. Math., pages 99–129. Birkhauser/Springer, Cham, 2017.
- [KKM] D. Kaledin, A. Konovalov, and K. Magidson. *Spectral algebras and non-commutative Hodge-to-de Rham degeneration*. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, 307(1):51–64, Nov 2019.

- [KKP] L. Katzarkov, M. Kontsevich, and T. Pantev, *Hodge theoretic aspects of mirror symmetry*, arXiv preprint arxiv:0806.0107 (2008).
- [Kon] A. Konovalov, *About nilinvariance property of semi-topological K-theory of dg-categories and its applications*, will be published in *Mathematical Notes*, vol. 112, 2, 2022.
- [Lod] J.-L. Loday, *Cyclic homology*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 301. Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [LR05] W. Lück, H. Reich. *The Baum-Connes and the Farrell-Jones Conjectures in K- and L-theory*. In *Handbook of K-theory*. Vol. 2, pages 703–842. Springer, Berlin, 2005.
- [LR06] W. Lück and H. Reich. *Detecting K-theory by cyclic homology*. *Proc. London Math. Soc.* (3), 93(3):593–634, 2006.
- [Lück] Wolfgang Lück. *Isomorphism Conjectures in K- and L-Theory*. In preparation, preliminary version available at him.uni-bonn.de/lueck/.
- [LurHTT] J. Lurie, *Higher topos theory*
- [LurHA] J. Lurie, *Higher algebra*, 2017.
- [LurKM] J. Lurie, *Lecture 20, 21, Algebraic K-Theory and Manifold Topology (Math 281)*, lecture notes, <https://www.math.ias.edu/~lurie/281notes/Lecture20-Lower.pdf>
- [M] Akhil Mathew, *Kaledin's degeneration theorem and topological Hochschild homology*, *Geometry and Topology* 24, 2675–2708, 2020.
- [Orl] D. Orlov, *Finite-dimensional differential graded algebras and their geometric realizations*, arXiv preprint arxiv:1907.08162 (2019)
- [Ras] S. Raskin, *On the Dundas-Goodwillie-McCarthy theorem*, arXiv preprint arxiv:1807.06709 (2018)
- [Rou] S. K. Roushon, *The Farrell-Jones isomorphism conjecture for 3-manifold groups*. *J. K-Theory*, 1(1):49–82, 2008.
- [RV] H. Reich, M. Varisco. *Algebraic K-theory, assembly maps, controlled algebra, and trace methods*. In *Space–time–matter*, pages 1–50. De Gruyter, Berlin, 2018.
- [Sch] M. Schlichting. *Higher Algebraic K-Theory (After Quillen, Thomason and Others)*. In: *Topics in Algebraic and Topological K-Theory*. *Lecture Notes in Mathematics*(), vol 2008. Springer, Berlin, Heidelberg, 2011.
- [SP] The Stacks Project Authors. *Stacks Project*. <http://stacks.math.columbia.edu>, 2020.
- [Tab] G. Tabuada, *Invariants additifs de dg-catgories*. *Internat. Math. Res. Notices* 53 (2005), 33093339.
- [Toën] B. Toën, *Vers une interpretation Galoisienne de la theorie de l'homotopie*, *Cahiers de topologie et geometrie differentielle categoriques*, Volume XLIII (2002), 257-312.
- [TT] R. W. Thomason and Thomas Trobaugh. *Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories*. In *The Grothendieck Festschrift*, Vol. III, volume 88 of *Progr. Math.*, pages 247–435. Birkhauser Boston, Boston, MA, 1990
- [W] Christian Wegner. *The Farrell-Jones conjecture for virtually solvable groups*. *J. Topol.*, 8(4):975–1016, 2015.

NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS, RUSSIAN FEDERATION
 Email address: kon_an_litsey@list.ru, akonovalov@hse.ru