

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Национальный
исследовательский университет «Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Семенов Дмитрий Павлович

**УСТОЙЧИВЫЕ ПРОЦЕДУРЫ ИДЕНТИФИКАЦИИ СЕТЕВЫХ
СТРУКТУР И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ**

РЕЗЮМЕ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата компьютерных наук

Нижний Новгород - 2022

Диссертационная работа выполнена в федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» в лаборатории алгоритмов и технологий анализа сетевых структур.

Научный руководитель: Колданов Петр Александрович, доктор физико-математических наук, профессор НИУ ВШЭ (Нижегородский филиал).

Обзор по теме исследования и актуальность В настоящее время сетевой анализ является бурно развивающейся областью анализа сложных систем. Под сложной системой понимается система, состоящая из большого количества взаимодействующих элементов. При исследовании сложных систем используются методы анализа, основанные на сетевых моделях. Под сетевой моделью в настоящей работе понимается простой полный взвешенный граф, вершины которого соответствуют элементам объекта, а веса ребер задаются мерой взаимодействия между элементами. Такие модели применяются при анализе фондовых рынков [34], [6], в генетике и биологии [21], при анализе климата [48] и т.д. С целью выделения основных связей в изучаемом объекте из сетевой модели извлекаются различные сетевые структуры, которые представляют собой подграфы сетевой модели. Одной из наиболее популярных сетевых структур является граф концентраций - граф без весов, полученный из сетевой модели удалением ребер с нулевыми весами. Такая сетевая структура изучается в задачах генетики [33]. Аналогичным образом ребро включается в отсеченный граф тогда и только тогда, когда его вес больше заданного порога. Клика в графе — это множество вершин, такое что каждые два узла в множестве соединяются ребром. Независимое множество — это множество вершин в графе без ребра между ними. Максимальное остовное дерево во взвешенном графе — это остовное дерево максимального суммарного веса. Планарный максимально отфильтрованный граф — это планарный подграф полного взвешенного графа максимального суммарного веса. Семейство отсеченных графов дает информацию об изменении топологии парных связей при различных порогах. Клики в отсеченном графе представляют собой множества тесно связанных элементов сложной системы. Независимые множества в отсеченном графе — это множества несвязанных элементов сложной системы. Максимальное остовное дерево и планарный максимально фильтрованный граф позволяют обнаружить иерархическую структуру кластеров в сложной систе-

ме.

Среди сложных объектов можно выделить класс объектов случайной природы, поведение элементов которых характеризуется случайными величинами. Примером такого объекта является фондовый рынок. При построении сетевой модели фондового рынка вершинам графа соответствуют акции рассматриваемого рынка, а веса ребер между вершинами определяются значением выбранной меры близости между доходностями акций. При этом цены и доходности акций описываются случайными величинами [3], [27], [1].

Сетевой подход является популярным средством анализа фондового рынка и предметом анализа являются различные сетевые структуры. Максимальное остовное дерево (MST) использовалось в [34] для описания иерархической структуры фондового рынка США. Этот подход получил дальнейшее развитие в [39] для портфельного анализа и в [40] для кластеризации на фондовом рынке. Планарный максимально отфильтрованный граф (PMFG) был введен в [49] и использован в [45] для разработки новой техники кластеризации акций фондового рынка. MST для различных фондовых рынков исследовались в [9], [10], [15], [29], [51], [36], [53]. Для исследования фондовых рынков используется также популярная сетевая структура, отсеченный или рыночный граф. Данный подход был предложен в [6] и развит в [7], [8]. В данных статьях было показано, что клики и независимые множества отсеченного графа содержат полезную информацию о фондовом рынке. Различные фондовые рынки были исследованы, используя отсеченный граф [12], [17], [22], [24], [19], [37], [50]. Другие сетевые характеристики фондового рынка также привлекли большое внимание в литературе. Наиболее влиятельные акции, связанные с индексом фондового рынка, исследованы в [13], [14], [20], [43], [47]. Связи с теорией случайных матриц изучались в [38], [41], [52]. Исследована кластеризация и динамика рыночной сети в большом количестве публикаций, см., например, [18], [23], [30], [31], [42], [46]. Различные меры связи для сети фондового рын-

ка рассматривались в [28], [44], [51], [54]. Обзор по теме и большая библиография представлена в [35]. Большинство публикаций связано с численными алгоритмами и экономическими интерпретациями полученных результатов. В то же время в этих исследованиях существует большой недостаток - анализ достоверности результатов.

Чтобы изучить достоверность результатов анализа фондовых рынков, рыночная сеть рассматривается как сеть случайных величин и исследуется неопределенность статистических процедур идентификации сетевых структур. Сеть случайных величин - это пара (X, γ) , где $X = (X_1, \dots, X_N)$ - случайный вектор (вектор доходности акций), а γ - мера ассоциации (зависимости) между компонентами вектора X (мера связи между доходностями акций) [25], [26]. Наиболее популярной в литературе мерой зависимостей между доходностями акций является корреляция Пирсона. Эта мера является наиболее подходящей мерой зависимости между случайными величинами в предположении Гауссовых распределений в качестве совместного распределения доходности акций. Стоит отметить, что при разработке подхода к построению процедур идентификации сетевых структур, связанных с фондовым рынком, следует учитывать, что, как показывают многочисленные исследования, эмпирические распределения доходностей акций имеют более тяжелые хвосты по сравнению с нормальным распределением. В связи с этим более общей вероятностной моделью распределения доходностей акций фондового рынка является модель распределения с плотностью, постоянной на многомерных эллипсоидах (так называемые эллиптические распределения) [2], [5]. При этом адекватность использования данной модели для реальных данных исследовалась в литературе и есть результаты, как не отвергающие данную модель [32], так и отвергающие данную модель [11]. Актуальными, тем самым, становятся задача исследования более общей математической модели и задача построения процедур идентификации сетевых структур и их характеристик, устойчивых в широком классе моделей при конечном

объеме наблюдений.

Устойчивость в таком смысле исследовалась в [4], [25]. В [25] теоретически исследовались две модели рыночной сети (сеть сходства знаков и сеть корреляции Пирсона) с эллиптическим распределением вектора $X = (X_1, \dots, X_N)$. Согласно статье [25], сеть знакового сходства - это сеть случайных величин, где мера $\gamma_{i,j} = \gamma(X_i, X_j)$ - вероятность совпадения знаков случайных величин X_i, X_j , а сеть корреляции Пирсона - это сеть случайных величин, где мера $\gamma_{i,j} = \gamma(X_i, X_j)$ - это корреляция Пирсона между случайными величинами X_i, X_j . Было доказано, что сетевые модели и сетевые структуры (рыночный граф и MST), порожденные сетями знакового сходства и корреляционной сетью Пирсона, эквивалентны. Если вектор X имеет эллиптическое распределение, было доказано, что статистические процедуры идентификации рыночного графа и MST устойчивы в сети вероятности совпадения знаков. Данные результаты были получены при известном математическом ожидании вектора X . В [4] с помощью моделирования было показано, что процедуры идентификации графа рынка и максимального остовного дерева (MST) не являются устойчивыми в корреляционной сети Пирсона, в отличие от процедур идентификации графа рынка и MST по сети вероятности совпадения знаков. Для моделирования использовались смеси многомерных Гауссовых распределений и распределений Стьюдента. Устойчивость процедур идентификации для других характеристик сети ранее не исследовалась.

Таким образом, остаются открытыми следующие вопросы:

- Насколько неустойчивыми являются процедуры идентификации, основанные на других мерах?
- Сохранит ли устойчивость знаковая мера близости для других сетевых структур и сетевых характеристик?
- Сохранится ли устойчивость, если математическое ожидание вектора X неизвестно?

- В какой степени эллиптическая модель является приемлемой для рассматриваемого класса задач?

Аналитические решения поставленных вопросов неизвестны и сложны в получении. В диссертационной работе частично дается ответ на данные вопросы путем разработки программ и проведения численных экспериментов с помощью математического моделирования.

Цели и задачи диссертационной работы. Целью диссертационной работы является исследование устойчивости процедур идентификации типовых сетевых структур и сетевых характеристик в сетях случайных величин с различными мерами близости и разработка программ, позволяющих исследовать такие процедуры и использовать их для анализа сетей случайных величин. Для достижения этих целей решаются следующие конкретные задачи:

1. Проектирование, реализация и тестирование программ, реализующих оценки устойчивости статистических процедур идентификации сетевых структур для построения сетевых структур и сетевых характеристик в сетях случайных величин.
2. Оценки степени неустойчивости процедур, основанных на мерах близости Пирсона и Кендалла, при отклонении от Гауссова распределения.
3. Разработка и применение численных алгоритмов проверки основных свойств эллиптической модели по реальным данным.
4. Разработка новых методов идентификации отсеченного графа с заданным уровнем достоверности.
5. Анализ динамики сетевых характеристик, в частности, анализ динамики распределения степеней вершин отсеченного графа.

Научная новизна. Все результаты являются новыми и заключаются в следующем:

1. Исследована устойчивость процедур идентификации для следующих характеристик рыночной сети: распределение весов ребер, распределение степеней вершин в графе рынка, клики и независимые множества графа рынка и распределение степеней вершин максимального остовного дерева. Определены истинные характеристики сети, потери от ошибки их идентификации по наблюдениям и неопределенность процедур идентификации как ожидаемую величину потерь. Распределения из класса эллиптических распределений использованы как модель многомерного распределения доходности акций. Показано, что статистические процедуры идентификации, основанные на сходстве знаков, статистически устойчивы, в отличие от процедур, основанных на классической корреляции Пирсона.
2. Предложена новая процедура проверки свойства эллиптической модели, основанная на условии симметрии хвостов двумерных маргинальных распределений. Предложена статистическая процедура множественной проверки гипотез для тестирования эллиптической модели. Процедура множественной проверки гипотез применена на реальных рыночных данных.
3. Разработаны методы построения доверительного множества ребер для отсеченного графа. Для построения таких множеств использованы процедуры множественной проверки гипотез. Исследованы одношаговые статистические процедуры, построенные с использованием трех типов индивидуальных тестов: Пирсона, Кендалла, Фехнера. Свойства таких процедур изучены методом статистического моделирования. Приведены результаты, показывающие устойчивость процедур, основанных на комбинировании индивидуальных тестов Кендалла и Фехнера. В то же

время показано, что одновременное применение тестов проверки гипотез о значении классического коэффициента корреляции Пирсона не приводит к устойчивости при отклонении распределения от нормального.

4. Разработаны методы проверки гипотезы об однородности распределений степеней вершин отсеченного графа.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическую значимость имеют следующие результаты:

1. Новая процедура проверки эллиптической модели на основе множественной проверки гипотез о свойстве симметрии хвостов распределений;
2. Методология проверки устойчивости процедур идентификации сетевых структур и их характеристик;
3. Подход к построению доверительного множества ребер для отсеченного графа.

Разработанные математические модели, алгоритмы и программы имеют практическую ценность при исследовании конкретных фондовых рынков. К результатам, имеющим практическое значение, относятся: проверка устойчивости процедур идентификации сетевых структур и их характеристик; проверка соответствия свойству симметрии эллиптической модели, использующейся для описания совместного распределения доходностей акций фондового рынка; анализ устойчивости процедур идентификации доверительных множеств; изучение динамики распределения степеней вершин графов рынка фондовых рынков различных стран.

Методология и методы исследования. В диссертационной работе используются методы математического моделирования сложных объектов случайной природы, методы сетевого анализа и теории

графов, методы теории вероятностей и математической статистики. При разработке и реализации численных методов применяются методы построения эффективных алгоритмов, объектно-ориентированное программирование. При разработке программ использовались пакеты MatLab и Python.

Результаты, выносимые на защиту.

1. Исследование устойчивости процедур идентификации для различных характеристик рыночной сети.
2. Новая процедура проверки эллиптической модели на основе множественной проверки гипотез о свойстве симметрии хвостов распределений.
3. Методы построения доверительного множества ребер для отсеченного графа.
4. Методы проверки гипотезы об однородности распределений степеней вершин отсеченного графа.

Достоверность результатов работы. Достоверность результатов работы обеспечивается строгим применением используемого математического аппарата, корректным выбором методик проведения статистического моделирования, а также согласованностью результатов диссертации с некоторыми известными результатами, опубликованными в работах [11], [25], [4], [16].

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на следующих международных конференциях, симпозиумах и семинарах:

1. Доклад "Проверка гипотез однородности топологии сетевых структур фондовых рынков"; Третий Российский экономический конгресс (Москва, 2016).

2. Доклад "Rejection graph for multiple testing of elliptical model for market network"; XIX Апрельская международная научная конференция «Модернизация экономики и общества» (Москва, 2018).
3. Доклад "Characteristics of comparisons of stock market networks"; XX Апрельская международная научная конференция «Модернизация экономики и общества» (Москва, 2019).
4. Доклад "How to measure dynamics of stock market network?"; XXI Апрельская международная научная конференция «Модернизация экономики и общества» (Москва, 2020).
5. Доклад "Building a confidence set of connected stocks"; Международная научная конференция по сетевому анализу NET 2020.
6. Доклад "Investigation of influence dynamics in networks"; XXII Апрельская международная научная конференция «Модернизация экономики и общества» (Москва, 2021).
7. Доклад "Обнаружение динамики степеней вершин графа рынка"; VI Всероссийская научная студенческая конференция НИУ ВШЭ - Нижний Новгород, 2022.
8. Доклад "Building a set of connected stocks with given confidence"; Международная научная конференция по сетевому анализу NET 2022.

Отдельные результаты, представленные в диссертации, выполнены в рамках исследований, проводимых по грантам:

- Грант 19-31-90088 "Устойчивые процедуры идентификации групп зависимых узлов в сетях случайных величин"
- Грант 18-07-00524 "Методы принятия решений в задачах идентификации графовых моделей"

- Грант РГНФ 15-32-01052 "Применение устойчивых методов к анализу структурных характеристик фондовых рынков"

Публикации по теме. По материалам диссертации опубликовано 4 работы, получено 1 свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ.

Публикации повышенного уровня

- Semenov D. A robustness comparison of two market network models / D. Semenov, A. P. Koldanov, P. Koldanov, P. M. Pardalos // IMA Journal Management Mathematics. 2022. Vol. 33. No. 1, pp. 123-137 (WoS, Scopus, список «А» НИУ ВШЭ).

Публикации стандартного уровня

- Колданов А. П. Построение доверительного множества связанных акций фондового рынка / А. П. Колданов, П. А. Колданов, Д. П. Семенов // Журнал Новой экономической ассоциации. 2021. Т. 2. № 50. С. 12-34 (Scopus).
- Semenov D. Rejection Graph for Multiple Testing of Elliptical Model for Market Network / D. Semenov, P. Koldanov // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2018, Vol. 247, pp.221-234 (Scopus).
- Semenov D. Homogeneity hypothesis testing for degree distribution in the market graph / D. Semenov, P. Koldanov // Springer Proceedings in Mathematics and Statistics, 2017, Vol. 197, pp. 153-162 (Scopus).
- Колданов П.А. Оценка устойчивости процедур идентификации сетевых структур / П.А. Колданов, Д.П. Семенов // Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ. Правообладатель: федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования „Национальный ис-

следовательский университет „Высшая школа экономики“. Свидетельство № 2018660407. Заявка № 2018617498. Дата поступления 19.07.2018. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 22.08.2018.

Личное участие автора в получении результатов, изложенных в диссертации. Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Из работ, выполненных в соавторстве, в диссертацию включены результаты, которые соответствуют личному участию автора.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех разделов, заключения, библиографического списка используемой литературы (110 наименований) и приложения. Общий объем работы - 116 страниц.

Во введении приведен обзор публикаций по теме диссертации, показана актуальность, значимость работы, определены цели и задачи исследования, дано краткое изложение содержания диссертации по главам.

В первом разделе введены основные понятия и сформулированы задачи идентификации сетевых структур. В подразделе 1.1 введено понятие сети случайных величин; определены различные меры зависимости между парами случайных величин, а также различные сети случайных величин, порождаемые данными мерами зависимости; рассмотрена сетевая модель (полный взвешенный граф), как визуализации связей в сети случайных величин. В подразделе 1.2 определены различные подграфы сетевой модели - сетевые структуры и их характеристики, которые могут быть использованы для извлечения полезной информации о исследуемой сетевой модели. В подразделе 1.3 введены понятия истинной и выборочной сетевых структур и их характеристик. В подразделе 1.4 сформулирована за-

дача идентификации сетевых структур как статистическая задача выбора одной из многих гипотез (задача выбора одной из матриц смежности графа, описывающего сетевую структуру), задана функция потерь от ошибочного определения матрицы смежности идентифицируемой сетевой структуры и введена функция риска, а также дано понятие устойчивости статистической процедуры.

В разделе 2 предложена методология сравнения устойчивости процедур идентификации сетевых структур и характеристик, проведен анализ устойчивости данных на реальных данных доходностей акций фондового рынка и показано как устойчивость анализа рыночной сети связана с выбранной сетевой моделью. В подразделе 2.1 приведены примеры истинных сетевых моделей и характеристик, посчитанных на реальных данных рынка Великобритании, а также описан алгоритм расчета функции риска процедуры идентификации сетевой структуры. В подразделе 2.2 представлены результаты исследования устойчивости двух типов процедур идентификации сетевых структур и характеристик сетевых моделей. Процедуры первого типа основаны на выборочной корреляции Пирсона, а процедуры второго типа основаны на частоте совпадения знаков. Исследование устойчивости основано на моделировании наблюдений из распределения смеси Гауссова распределения и распределения Стьюдента. Анализ результатов исследования устойчивости процедур идентификации сетевых структур и их характеристик показывает устойчивость процедур, основанных на частоте совпадения знаков, и неустойчивость процедур, основанных на выборочной корреляции Пирсона, причем данный результат не зависит от выбора сетевой структуры.

В разделе 3 предложены процедуры построения множества пар акций, которое с вероятностью не менее заданной содержит все сильносвязанные пары акций, изучены свойства таких процедур методом статистического моделирования. В подразделе 3.1 показана общая схема построения доверительных множеств - множеств пар акций, которые с вероятностью не менее заданной содержат все пары ак-

ций, значение меры связи между которыми выше заданного порога. В подразделе 3.2 приведена математическая постановка задачи построения доверительного множества. В подразделе 3.3 показана общая схема построения доверительного множества и процедура построения доверительного множества рассмотрена как задача множественной проверки гипотез. В подразделе 3.4 описаны процедуры построения доверительных множеств в различных сетях случайных величин. В подразделе 3.5 приведены результаты, показывающие устойчивость процедур, основанных на комбинировании индивидуальных тестов Кендалла и Фехнера и в то же время показано, что одновременное применение тестов проверки гипотез о значении классического коэффициента корреляции Пирсона не приводит к устойчивости при отклонении распределения от нормального. В подразделе 3.6 обсуждаются различия отсеченных графов, построенных на различных мерах близости, и приведены результаты проверки согласия с эллиптической моделью.

В разделе 4 проверено соответствие реальных данных свойству симметрии эллиптической модели, использующейся для описания совместного распределения доходностей акций фондового рынка, а также показаны результаты практического применения устойчивых процедур для проверки гипотез однородности на реальных данных с фондовых рынков различных стран. В подразделе 4.1 исследован вопрос адекватности использования эллиптического распределения в качестве вероятностной модели доходности фондового рынка. Известны результаты, отвергающие такую модель, и в то же время есть результаты, подтверждающие такую модель, причем полученные результаты относятся к проверке некоторых свойств эллиптической модели. В подразделе рассмотрено еще одно свойство эллиптической модели, а именно свойство условия симметрии хвостов двумерного распределения. Предложена процедура множественной проверки гипотез для проверки гипотезы об эллиптической модели распределения доходности акций. Условия знаковой симметрии распределе-

ния хвостов использованы в качестве индивидуальных гипотез для множественной проверки и для проверки индивидуальных гипотез построены равномерно наиболее мощные тесты структуры Неймана. Для реальных рыночных данных применена соответствующая пошаговая процедура множественной проверки гипотез. Основным результатом состоит в том, что при некоторых условиях гипотеза симметрии хвостов не отвергается. В подразделе 4.2 исследована задача проверки гипотезы об однородности распределения степеней вершин в отсеченном графе. Предложена и применена процедура множественной проверки гипотез для фондовых рынков Китая и Индии. Процедура построена с использованием бутстрэп метода для индивидуальных гипотез и поправки Бонферрони для множественной проверки. Показано, что гипотеза об однородности распределения степеней для фондовых рынков за период 2003-2014 гг. не принимается. В подразделе 4.3 использован тест суммы рангов Вилкоксона для обнаружения динамики степеней вершин графа рынка, так как для применения такого теста не требуется предположений о модели распределения изучаемых случайных величин и модели распределения степеней вершин графа рынка. Основным результатом является вывод о наличии динамики фондового рынка США, свидетельствующий о процессе глобализации. В то же время для рынка России такой вывод не верен.

В заключении перечислены основные результаты, полученные в ходе выполнения диссертационной работы.

Литература

- [1] Ширяев, А.Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 1. Факты. Модели./А.Н. Ширяев // Москва: ФАЗИС, 1998. —512 С.
- [2] Anderson, T.W. An introduction to multivariate statistical analysis. 3-d edition / T.W. Anderson. — New York: Wiley-Interscience, 2003. —721 pp.
- [3] Bachelier, L. Theorie de la speculation/L. Bachelier // Annales de l'Ecole Normale Superieure. —1900. —Vol.17. —Pp. 21–86.
- [4] Bautin, G.A. Bautin, G.A., Koldanov, A.P., Pardalos, P.M., 2014. Robustness of sign correlation in market network analysis. In: Network Models in Economics and Finance.In: Springer Optimization and Its Applications, vol. 100. pp. 25–33.
- [5] Bodnar, T. Elliptically Contoured Models in Statistics and Portfolio Theory/T. Bodnar, F.K. Gupta, T. Varga. — New York:Springer,2013. —321 pp.
- [6] Boginski, V. On structural properties of the market graph/V. Boginski, S.Butenko, P.M. Pardalos //Innovations in financial and economic networks. —2003. —Pp. 29–45.
- [7] Boginski, V. Statistical analysis of financial networks/V. Boginski, S.Butenko, P.M. Pardalos //Computational Statistics & Data Analysis. —2005. —Vol.48, issue 2. —Pp. 431–443.

- [8] Boginski, V. Mining market data: a network approach/V. Boginski, S. Butenko, P.M. Pardalos //Computers & Operations Research. — 2006. —Vol.33, issue 11. —Pp. 3171–3184.
- [9] Bonanno, G. Topology of correlation-based minimal spanning trees in real and model markets/G. Bonanno et al // Physical Review E. —2003. —Vol. 68, issue 4. —Pp. 046130.
- [10] Bonanno, G. Networks of equities in financial markets/ G. Bonanno et al //The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems. —2004. —Vol.38, issue 2. —Pp. 363–371.
- [11] Chicheportiche, R. The joint distribution of stock returns is not elliptical/R. Chicheportiche, J-P. Bouchaud //International Journal of Theoretical and Applied Finance. —2012. —Vol.15, issue 3. —Pp. 12500
- [12] Chu, J. A statistical analysis of UK financial network. / J. Chu , S. Nadarajah // Phys. A Stat. Mech. Appl. 471:445–459 (2017)
- [13] Emmert-Streib, F. Identifying critical financial networks of the DJIA: towards a network based index. / F. Emmert-Streib, M. Dehmer // Complexity 16(1):24–33 (2010)
- [14] Emmert-Streib, F. Influence of the time scale on the construction of financial networks. / F. Emmert-Streib, M. Dehmer // PLoS One 5(9):e12884 (2010)
- [15] Eoma, C. Topological properties of stock networks based on minimal spanning tree and random matrix theory in financial time series/C. Eoma et al //Physica A. —2009. —Vol.388. —Pp. 900–906.

- [16] Finner, H. Closed subset selection procedures for selecting good populations. / H. Finner, G. Giani // Journal of Statistical Planning and Inference 38 (1994) 179-200.
- [17] Garas, A. Correlation study of the athens stock exchange/A. Garas, P. Argyrakis // Physica. —2007. —Vol.380. —Pp. 399–410.
- [18] Goldengorin, B. A pseudo-boolean approach to the market graph analysis by means of the p-median model./ B. Goldengorin, A. Kocheturov, P.M. Pardalos // In: Aleskerov, F., et al. (eds.) Clusters, Orders and Trees: Methods and Applications. In: Honor of Boris Mirkin's 70th Birthday, Springer Optimization and Its Applications, Vol. 92, pp. 77–89 (2014)
- [19] Gunawardena, A.D.A. Optimal selection of an independent set of cliques in a market graph/A.D.A. Gunawardena et al // International Proceedings of Economics Development and Research. —2012. —Vol. 29. —Pp. 281–285.
- [20] Hub discovery in partial correlation graphs. / A. Hero, B. Rajaratnam //IEEE Trans. Inf. Theory 58(9):6064–6078 (2012)
- [21] Horvath, S. Weighted Network Analysis. Applications in Genomics and Systems Biology/S. Horvath Springer Book, 2011, ISBN 978-1-4419-8818-8. —421 Pp.
- [22] Huang, W-Q. A network analysis of the chinese stock market/W-Q. Huang, X-T. Zhuang, S. Yao //Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. —2009. —Vol. 388, issue 14. —Pp. 2956–2964.
- [23] Jallo, D. Network-based representation of stock market dynamics: an application to American and Swedish stock markets. / D. Jallo // In: Goldengorin, B., Kalyagin, V., Pardalos, P.M., (eds.) Models, Algorithms and Technologies for Network Analysis. In:

- Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 32:93–106 (2013)
- [24] Jung, W-S. Characteristics of the korean stock market correlations / W-S. Jung et al // Physica A. —2006. —Vol. 361. —Pp. 263–271.
- [25] Kalyagin, V.A. Robust identification in random variables networks/V.A. Kalyagin, A.P. Koldanov, P.A. Koldanov // Journal of Statistical Planning and Inference. —2017. —Vol. 181. —Pp. 30–40.
- [26] Kalyagin, V.A. Statistical Analysis of Graph Structures in Random Variable Networks. / V. A. Kalyagin, A. P. Koldanov, P. Koldanov, P. M. Pardalos // Springer, 2020.
- [27] Kendall, M.G. The analysis of economic time-series. part 1. prices/M.G. Kendall //Journal of the Royal Statistical Society. —1953. —Vol.96. —Pp. 11–25.
- [28] Kenett, D.Y. Dominating clasp of the financial sector revealed by partial correlation analysis of the stock market. / D.Y. Kenett // PLoS One 5(12):e15032 (2010)
- [29] Keskin, V. Topology of the correlation networks among major currencies using hierarchical structure methods/V. Keskin, B. Deviren, Y. Kocakaplan // Physica A. —2011. —Vol.390. —Pp. 719–730.
- [30] Kocheturov, A. Dynamics of cluster structures in a financial market network. / A. Kocheturov, M. Batsyn, P.M. Pardalos // Phys. A Stat. Mech. Appl. 413:523–533 (2014)
- [31] Kocheturov, A. Dynamics of cluster structures in stock market networks. / A. Kocheturov, M. Batsyn, P.M. Pardalos // J. New Econ. Assoc. 28(4):12–30 (2015)

- [32] Koldanov, P. A. Multiple testing of sign symmetry for stock return distributions/P. A. Koldanov, N. N. Lozgacheva // International Journal of Theoretical and Applied Finance —2016 —Vol.19, issue 8 —Pp. 1650049–1–1650049–14.
- [33] Lauritzen, S.L. Graphical models for genetic analyses/S.L. Lauritzen, N.A. Sheehan // Statistical Science. —2003. —Vol.18, issue 3. —Pp. 489–514.
- [34] Mantegna, R.N. Hierarchical structure in financial markets/R.N. Mantegna //The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems. —1999. —Vol.11, issue 1. —Pp. 193–197.
- [35] Marti, G. Marti, G., Nielsen, F., Binkowski, M. & Donnat, P. (2019) A review of two decades of correlations, hierarchies networks and clustering in financial markets.
- [36] Micciche, S. Degree stability of a minimum spanning tree of price return and volatility/S. Micciche, G. Bonanno, F. Lillo, R.N. Mantegna // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. —2003. —Vol.324, issue 1-2. —Pp. 66–73.
- [37] Namaki, A. Network analysis of a financial market based on genuine correlation and threshold method. / A. Namaki, A.H. Shirazi, G.R. Jafari, R. Raei // Phys. A Stat. Mech. Appl. 390(17):3835–3841 (2011)
- [38] Nguyen, Q. One-factor model for cross-correlation matrix in the Vietnamese stock market./Q. Nguyen // Phys. A Stat. Mech. Appl. 392(13):2915–2923 (2013)
- [39] Onnela, J.-P. Dynamics of market correlations: taxonomy and portfolio analysis./J.-P. Onnela // Phys. Rev. E68(5):56–110 (2003)

- [40] Onnela, J.-P. Clustering and information in correlation based financial networks. / J.-P. Onnela, K. Kaski, J. Kertesz // Eur. Phys. J. B Condens. Matter Complex Syst. 38(2):353–362 (2004)
- [41] Plerou, V. Universal and nonuniversal properties of cross correlations in financial time series./ V. Plerou // Phys. Rev. 83:1471–1474 (1999)
- [42] Sensoya, A. Dynamic spanning trees in stock market networks: the case of AsiaPacific. / A. Sensoya, B.M. Tabak // Phys. A Stat. Mech. Appl. 414:387–402 (2014)
- [43] Shapira, Y. The index cohesive effect of stock market correlations. / Y. Shapira, D.Y. Kenett, E. Ben-Jacob // J. Phys. B 72(4):657–669 (2009)
- [44] Shirokikh, O. Computational study of the us stock market evolution: a rank correlation-based network model/O. Shirokikh, G. Pastukhov, V. Boginski, S. Butenko // Computational Management Science. —2013. —Vol. 10, issue 2-3. —Pp. 81–103.
- [45] Song, W.-M. Hierarchical information clustering by means of topologically embedded graphs. / W.-M. Song, T. Di Matteo, A. Tomaso // PLoS One 1–16 (2002)
- [46] Tabak, B.M. Topological properties of stock market networks: the case of Brazil. / B.M. Tabak, R.S. Thiago, D.O. Cajueiro // Phys. A Stat. Mech. Appl. 389:3240–3249 (2010)
- [47] Tse, C.K. A network perspective of the stock market. / C.K. Tse, J. Liu, F.C.M. Lau // J. Emp. Fin. 17:659–667 (2010)
- [48] Tsonis, A.A. The architecture of the climate network. / A.A. Tsonis, P.G. Roebber // Phys. A Stat. Mech. Appl. 333:497(504) (2004)

- [49] Tumminello, M. A tool for filtering information in complex systems/M.Tumminello, T. Aste, T. Di Matteo, R.N. Mantegna // Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America. —2005. —Vol. 102, issue 30. —Pp. 10421–10426.
- [50] Vizgunov, A.N. Network approach for the Russian stock market. / A.N. Vizgunov, B. Goldengorin, V.A. Kalyagin, A.P. Koldanov, P. Koldanov, P.M. Pardalos // Comput. Manag. Sci. 11:45–55 (2014)
- [51] Wang, G-J. Similarity measure and topology evolution of foreign exchange markets using dynamic time warping method: Evidence from minimal spanning tree/G-J. Wang, X. Chi, F. Han, B. Sun // Physica A: Statistical Mechanics and its Applications. —2012. —Vol. 391, issue 16. —Pp. 4136–4146.
- [52] Wang, G.-J. Random matrix theory analysis of cross-correlations in the us stock market: evidence from Pearson correlation coefficient and detrended cross-correlation coefficient. / G.-J. Wang, C. Xie, C. Shou, J.-J. Yang, M.-Y. Yang // Phys. A Stat. Mech. Appl. 392:3715–3730 (2013)
- [53] Wang, G-J. Statistical properties of the foreign exchange network at different time scales: Evidence from detrended cross-correlation coefficient and minimum spanning tree/G-J. Wang, C. Xie, Y-J. Chen, S. Chen // Entropy. —2013. —Vol. 15, issue 5. —Pp. 1643–1662.
- [54] Zebende, G.F. DCCA cross-correlation coefficient: quantifying level of cross-correlation./G.F. Zebende // Phys. A Stat. Mech. Appl. 390:614–618 (2011)