

Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«Национальный исследовательский университет  
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

*на правах рукописи*

Воорхаар Арина Андреевна

## **Многогранники Ньютона, разреженные результаты и перечисление особенностей**

Резюме диссертации  
на соискание учёной степени  
кандидата математических наук

Научный руководитель  
Доктор физико-математических наук, профессор  
Эстеров Александр Исаакович

Москва – 2022

## Введение

Данная работа посвящена следующим двум задачам, возникающим в контексте многогранников Ньютона. Первая из них – вычисление знаков старших коэффициентов смешанного разреженного результата. Вторая задача – изучение особенностей плоской проекции одномерного полного пересечения, заданного системой полиномиальных уравнений общего положения с данным носителем.

В более широком смысле, данная работа посвящена развитию новых методов перечисления особенностей, которые естественным образом возникают в контексте многогранников Ньютона и разреженных полиномов.

В качестве приложения полученных методов мы описываем многогранник Ньютона дискриминанта Морса – замыкания множества всех неморсовских многочленов в пространстве многочленов одной переменной данной степени.

Более подробный обзор вышеупомянутых задач и приложения приводится ниже.

## Старшие коэффициенты разреженного результата

Классический результат был изучен Сильвестром (1853), многомерный аналог для систем  $n$  однородных уравнений от  $n$  переменных был впоследствии изучен в работах Кэли (1948) и Маколея (1902).

В 1990х, успехи в таких областях, как символьная алгебра и теория многомерных гипергеометрических функций, возродили интерес к результатам. Разреженные результаты были определены и изучались И. Гельфандом, М. Капрановым, А. Зелевинским и Б. Штурмфельсом (см. [9]). В частности, в работе [17] Б. Штурмфельсом было получено комбинаторное описание многогранника Ньютона разреженного результата и было доказано, что его старший коэффициент относительно произвольного мономиального порядка равен  $\pm 1$ . Сами же знаки этих коэффициентов были явно вычислены только в некоторых частных случаях, хотя ответ в общем случае может быть полезен и применим в задачах вещественной алгебраической геометрии.

В данной работе построен так называемый *2-объём* со значениями в поле  $\mathbb{F}_2$  (см. Определение 3.14), являющийся аналогом классического смешанного объема выпуклых целочисленных многогранников. Кроме того, в терминах 2-объёма некоторого набора многогранников в работе вычислены старшие коэффициенты разреженного результата (Теорема 3.19).

Построенный смешанный 2-объём является симметричной и мультилинейной функцией на наборах многогранников (Утверждение 3.15). Однако его геометрическая природа не ясна, так как 2-объём нельзя построить с помощью поляризации какой-либо аддитивной меры или однозначно задать какими-либо свойствами монотонности.

В нашей явной формуле для подсчета смешанного 2-объёма используется так называемый *2-определитель*, единственная нетривиальная мультилинейная функция от  $n + 1$  векторов в  $n$ -мерном векторном пространстве над полем  $\mathbb{F}_2$  со значениями в поле  $\mathbb{F}_2$ , которая инвариантна относительно всех линейных преобразований и равна 0, когда ранг набора из  $n + 1$  векторов строго меньше  $n$ .

Данная функция в неявном виде возникала в работах А. Паршина и К. Като в контексте теории полей классов для многомерных локальных полей (см., например, [15], Глава 3.1, Замечание 1 – возможно, первое упоминание 2-определителя в литературе). Впоследствии 2-определитель был построен в явном виде А. Хованским в работе [10] в контексте многомерной версии формулы Виета (т.е. вычисления произведения в торе  $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$  всех корней системы  $n$  полиномиальных уравнений с данными многогранниками Ньютона).

Алгебро-геометрическая часть Главы 3 данной диссертации посвящена обобщению соответствующих результатов А. Хованского. В частности, наше определение смешанного 2-объёма мотивировано целью получить инвариантную интерпретацию знаков в многомерной формуле Виета и ослабить условия общности для многогранников Ньютона в этой формуле.

Выпукло-геометрическая часть работы использует методы тропической геометрии для доказательства существования 2-объёма (Теорема 3.13).

## Особые точки плоской проекции одномерного полного пересечения

Одним из главных инструментов в изучении особенностей отображений является теория полиномов Тома. Они выражают фундаментальные классы стратов мультиособенностей отображений общего положения между компактными гладкими многообразиями в терминах их характеристических классов. Однако данная теория не применима к довольно естественному классу отображений – отображений между многообразиями, заданными системами полиномов Лорана с фиксированными многогранниками Ньютона. Такие многообразия не компактны, а соответствующие отображения не собственны. В то же время, торические компактификации, ассоциированные с их многогранниками Ньютона не удовлетворяют условиям общности, гарантирующим применимость классических полиномов Тома (см. Пример 1.1 и Замечание 1.2 в работе [6]). Следовательно, для изучения стратов мультиособенностей вышеупомянутого класса отображений требуются альтернативные методы. Ниже мы приводим краткий обзор результатов, полученных в данном направлении.

Дискриминант (т.е. страт  $\mathcal{A}_1$ ) проекции гиперповерхности общего положения был изучен в работе [16]. Если  $H$  – гиперповерхность, заданная полиномом  $f(x_1, \dots, x_d, y)$  общего положения, а  $\pi$  – проекция, забывающая последнюю координату, то многогранник Ньютона полинома, задающего страт  $\mathcal{A}_1$ , равен расслоенному многограннику  $\mathcal{Q}_\pi(f) \subset \mathbb{R}^d$  многогранника  $\mathcal{N}(f)$ .

Образ (т.е. страт  $\mathcal{A}_0$ ) при проекции полного пересечения общего положения был изучен А. Хованским и А. Эстеровым в работе [4]. Ими было доказано, что образ полного пересечения  $\{f_1 = \dots = f_{k+1}\} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ , заданного многочленами общего положения с данными многогранниками Ньютона  $\mathcal{N}(f_i) = \Delta_i$ , при эпиморфизме  $\pi: (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\})^{n-k}$  является гиперповерхностью  $\{g = 0\} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^{n-k}$ , а многогранник Ньютона  $\mathcal{N}(g) \subset \mathbb{R}^{n-k}$  равен так называемому *смешанному расслоенному многограннику*  $\text{MP}_\pi(\Delta_1, \dots, \Delta_{k+1})$  набора многогранников  $\Delta_1, \dots, \Delta_{k+1}$ .

Подход к изучению стратов более высокой коразмерности, например, стратов  $\mathcal{A}_2$  (каспы) и  $2\mathcal{A}_1$  (двойные точки), был предложен в работе [6]. Однако данный подход работает только при дополнительных условиях на многогранники Ньютона и использует операции с тропическими веерами размерности, слишком большой для практических приложений (того же порядка, что количество мономов внутри данных многогранников Ньютона).

Для проекций и отображений малых размерностей вышеупомянутые страты нульмерны, и естественным образом возникает задача вычисления их мощностей в терминах данных многогранников Ньютона. Например, данная задача была решена в работе [7] для отображений  $\mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ , компоненты которых являются многочленами общего положения данных степеней. Более подробный обзор литературы, посвященной такого рода задачам, представлен в работе [6].

В данной же работе, насколько нам известно, впервые описанная выше задача решается для полиномов с произвольными многогранниками Ньютона.

Сформулируем основной результат Главы 4 данной диссертации.

**Теорема 1.** Пусть  $\Delta$  – целочисленный многогранник в  $\mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}^2$ . Если для многочленов  $f_1, \dots, f_{n+1}$  общего положения с носителем в  $\Delta$ , образ одномерного полного пересечения

$$\tilde{C} = \{f_1 = \dots = f_{n+1} = 0\} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$$

при проекции  $\pi: (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n \times (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2 \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$  является приведенной nodальной кривой, то число нодов этой кривой выражается формулой (5) в Теореме 4.9.

**Замечание 2.** Классификация многогранников Ньютона, для которых вышеупомянутая проекция не является нодальной кривой, является нетривиальной задачей (см. пример 4.2), которая выходит за рамки данной диссертации. Вместо этого мы доказываем некоторое обобщение Теоремы 1, применимое к произвольным целочисленным многогранникам  $\Delta$  (Теорема 4.9).

Для некоторых носителей  $A \subset \mathbb{Z}^{n+2}$ , довольно просто показать, что проекция полного пересечения, заданного многочленами общего положения с носителем  $A$ , является нодальной кривой. Например, это верно для  $A = dT \cap \mathbb{Z}^3$ , где  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$  и  $T \subset \mathbb{R}^3$  – стандартный симплекс.

**Пример 3** (Подсчет нодов проекции одномерного полного пересечения, заданного многочленами общего положения данной степени). Применим формулу (5) для случая  $A = dT \cap \mathbb{Z}^3$ , где  $d \in \mathbb{Z}_{>0}$  и  $T \subset \mathbb{R}^3$  – стандартный симплекс. В обозначениях данной формулы,  $n = 1$ , площадь многоугольника  $P$  равна  $d^4$ , слагаемое  $d^2$  – площадь горизонтальной грани симплекса  $dT$ , а остальные грани не дают вклада в сумму, так как для любой грани  $\Gamma \in \mathcal{F}(dT) \setminus \mathcal{H}(dT)$  верно равенство  $\text{ind}_v(\Gamma \cap A) = 1$ . Таким образом, итоговый ответ имеет следующий вид:

$$D = \frac{d^4 - 2d^3 + d^2}{2} = \frac{d^2(d-1)^2}{2}.$$

**Замечание 4.** Тот же результат для кривой  $C$  из Примера 3 может быть получен с помощью формулы двойных точек (см. Теорему 9.3 в [8]). Переход к подходящей торической компактификации позволяет свести задачу к подсчету числа двойных точек соответствующего отображения  $F: X \rightarrow Y$ , где  $X \subset \mathbb{CP}^3$  – замыкание кривой  $C$ , а  $Y = \mathbb{CP}^2$ . Применяя формулу двойных точек

$$|2\mathcal{A}_1| = \frac{1}{2} \left( (F_*1)^2 - F_*c_1(F^*T_Y/T_X) \right) \in H^4(Y, \mathbb{C})$$

в рассматриваемом случае, получаем

$$|2\mathcal{A}_1| = \frac{1}{2}(d^4 - (2d^3 - d^2)) = \frac{d^2(d-1)^2}{2}.$$

Данный подход, к сожалению, не работает в общем случае. Он применим лишь для подсчета самопересечений образа отображений, мультиособенности которых устойчивы, в то время как в общем случае проекции компактифицированных кривых могут иметь сколь угодно сложные особенности на бесконечности.

Задача подсчета числа особенностей проекции одномерного полного пересечения может также быть интересна в контексте изучения алгебраических узлов, мотивированного работой О. Виро (см., например, [18]), а также работами Г. Михалкина и С. Оревкова (см. [14], [13], [12]), посвященными *комплексной закрученности* – инварианту жесткой изотопии алгебраических узлов. В частности, довольно естественно было бы оценить сложность алгебраического узла/-зацепления в терминах алгебраической сложности задающих его уравнений (т.е., в терминах размера их многогранников Ньютона).

Теорема 1 даёт, в частности, верхнюю оценку на число самопересечений плоской координатной проекции вещественного одномерного полного пересечения. Более того, нетрудно показать, что для полного пересечения, заданного многочленами фиксированной степени, данная оценка является строгой. Более трудные задачи, такие как вычисление строгой верхней оценки числа самопересечений для произвольных многогранников Ньютона и произвольных проекций (не только координатных), остаются открытыми.

Многогранники Ньютона таких объектов как образ  $M$  дискриминанта проекции полного пересечения, хорошо изучены (см. работы [5], [4], [16]). Следовательно, естественным первым шагом в изучении особенностей  $M$  был бы переход к торической компактификации  $\overline{M}$ . Если бы у  $\overline{M}$  не было дополнительных особенностей, то задача описания простейших стратов особенностей  $M$ , таких как  $\mathcal{A}_2$  и  $2\mathcal{A}_1$ , могла бы быть решена классическими методами. В общем случае дополнительные особенности у компактификации  $\overline{M}$  всё же имеются, более того,

эти особенности оказываются гораздо более сложными, чем изучаемые. Основная трудность в решении подобного рода задач заключается именно в работе с данными особенностями. Наш подход заключается в том, чтобы представить  $M$  в виде базы некоторого накрытия, тотальное пространство которого имеет гораздо более простые особенности на бесконечности – так называемые *особенности расходящихся тропок*.

## Многогранник Ньютона дискриминанта Морса

Для конечного множества  $A \subset \mathbb{Z}$ , пространство полиномов Лорана с носителем в  $A$  мы обозначаем  $\mathbb{C}^A$ . Иными словами,

$$\mathbb{C}^A = \left\{ \sum_{p \in A} \alpha_p x^p \mid \alpha_p \in \mathbb{C} \right\}.$$

**Определение 5.** *Каустикой* в пространстве  $\mathbb{C}^A$  называется множество всех полиномов Лорана  $f \in \mathbb{C}^A$ , таких что отображение  $f: (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}$  имеет вырожденную критическую точку.

**Определение 6.** *Стратом Максвелла* в  $\mathbb{C}^A$  называется множество всех полиномов Лорана  $f \in \mathbb{C}^A$ , таких что отображение  $f: (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{C}$  имеет пару совпадающих критических значений, достигаемых в двух различных точках.

**Определение 7.** Полином  $f \in \mathbb{C}^A$  называется *морсовским*, если не принадлежит ни каустике, ни страту Максвелла.

**Определение 8.** *Дискриминант Морса* – замыкание множества всех неморсовских многочленов  $f \in \mathbb{C}^A$ . Он задается многочленом  $h_m^2 h_c$ , где  $h_m$  и  $h_c$  – многочлены, задающие страт Максвелла и каустик соответственно, если эти страты являются гиперповерхностями. Иначе многочлен, задающий дискриминант Морса, полагается тождественно равным 1.

Задача описания многогранника Ньютона и прочих связанных с ним инвариантов дискриминанта Морса изучалась различными авторами. Степень дискриминанта Морса в пространстве многочленов одной переменной данной степени  $d$  была вычислена в [11]. Тропический веер многообразия многочленов одной переменной степени  $d$ , имеющих пару кратных корней был изучен в работах [3] и in [6] (в большей общности). При проекции вдоль прямой, натянутой на постоянный моном, максимальные конусы тропического веера, которые были вычислены в данных работах, задают направления всех рёбер многогранника Ньютона дискриминанта Морса. Однако, из-за нетривиальных пересечений образов конусов при такой проекции, результаты, полученные в работах [3] и [6] не могут быть напрямую использованы для описания рёбер искомого многогранника.

В Главе 5 диссертации, используя методы и результаты, полученные в главах 3 и 4, мы получим явную формулу для опорной функции многогранника Ньютона дискриминанта Морса в пространстве полиномов одной переменной данной степени, которая позволит комбинаторно описать вершины данного многогранника.

## 3 Знаки старших коэффициентов результата

Данная глава устроена следующим образом. В разделе 3.1 посвящён понятию смешанного 2-объёма. Мы напомним определение и основные свойства смешанного 2-определителя, а затем с его помощью построим так называемый 2-индекс пересечения тропических гиперповерхностей, который, на самом деле, зависит только от самих многогранников Ньютона гиперповерхностей, если эти многогранники удовлетворяют определённому условию общности. Это позволяет построить корректно определённую функцию на наборах целочисленных многогранников – так называемый *смешанный 2-объём*.

Раздел 3.2 посвящён многомерной формуле Виета, которая выражает произведение корней полиномиальной системы уравнений в терминах смешанного 2-объёма её многогранников Ньютона.

В разделе 3.3 мы вычислим знаки старших коэффициентов результата, сведя задачу к вычислению произведения корней некоторой системы уравнений (см. Теорему 3.19).

### 3.1 Смешанный 2-объём

**Определение 3.1.** Обозначим  $\det_2$  функцию от набора из  $n + 1$  векторов  $n$ -мерном линейном пространстве над полем  $\mathbb{F}_2$ , которая принимает значения в  $\mathbb{F}_2$  и удовлетворяет следующим условиям:

- $\det_2(k_1, \dots, k_{n+1}) = 0$ , если ранг набора векторов  $k_1, \dots, k_{n+1}$  строго меньше  $n$ ;
- $\det_2(k_1, \dots, k_{n+1}) = \lambda^1 + \dots + \lambda^{n+1} + 1$ , если векторы  $k_1, \dots, k_{n+1}$  связаны единственным соотношением  $\lambda^1 k_1 + \dots + \lambda^{n+1} k_{n+1} = 0$ .

**Лемма 3.2.** Функция  $\det_2$

1. is  $GL_n(\mathbb{F}_2)$ -инвариантна, т.е. для любого линейного преобразования  $A \in GL_n(\mathbb{F}_2)$  верно равенство  $\det_2(k_1, \dots, k_{n+1}) = \det_2(Ak_1, \dots, Ak_{n+1})$ ;
2. мультилинейна.

**Теорема 3.3.** [10] Существует единственная нетривиальная функция  $\det_2$ , удовлетворяющая условиям Леммы 3.2.

**Теорема 3.4.** [10] В координатах функция  $\det_2$  выражается формулой

$$\det_2(k_1, \dots, k_{n+1}) = \sum_{j>i} \Delta_{ij},$$

где  $\Delta_{ij}$  – определитель матрицы размера  $n \times n$ , первые  $n - 1$  столбцов которой составлены из набора векторов  $k_1, \dots, k_{n+1}$  из которого векторы с номерами  $i$  и  $j$  удалены, а последний столбец – покоординатное произведение векторов  $k_i$  и  $k_j$ .

**Определение 3.5.** Пусть  $H_1, \dots, H_n$  – тропические гиперповерхности. Мы говорим, что  $H_1, \dots, H_n$  пересекаются *транскверсально* (обозначается  $H_1 \pitchfork \dots \pitchfork H_n$ ), если  $|H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n| < \infty$  и все точки  $x \in H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n$  для всех гиперповерхностей  $H_i$  являются гладкими.

**Определение 3.6.** Пусть  $H_1 \pitchfork \dots \pitchfork H_n$  – набор транскверсально пересекающихся тропических гиперповерхностей. Их *индексом пересечения*  $\iota(H_1, \dots, H_n) \in \mathbb{Z}$  называется сумма

$$\iota(H_1, \dots, H_n) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n} \det(\mathcal{N}_x(H_1), \dots, \mathcal{N}_x(H_n)). \quad (1)$$

Хорошо известно, что индекс пересечения тропических гиперповерхностей зависит исключительно от их многогранников Ньютона (и совпадает со смешанным объёмом этих многогранников). Данный факт часто называют тропической теоремой Бернштейна–Кушниренко.

Нам же понадобится следующая версия индекса пересечения со значениями в  $\mathbb{F}_2$ .

**Определение 3.7.** Рассмотрим произвольную точку  $\zeta \in \mathbb{Z}^n$ . Пусть  $H_1 \pitchfork \dots \pitchfork H_n$  – набор транскверсально пересекающихся тропических гиперповерхностей. Определим *2-индекс пересечения*  $\iota_2(H_1, \dots, H_n; \zeta) \in \mathbb{F}_2$  следующим образом:

$$\iota_2(H_1, \dots, H_n; \zeta) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{x \in H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_n} \det_2(\mathcal{N}_x(H_1), \dots, \mathcal{N}_x(H_n), \zeta). \quad (2)$$

К сожалению, в общем случае 2-индекс пересечения зависит не только от многогранников Ньютона, но и от самих тропических гиперповерхностей. Однако эта зависимость пропадает, если сами многогранники Ньютона находятся в общем положении в следующем смысле.

**Определение 3.8.** Пусть  $P \subset \mathbb{R}^n$  – целочисленный многогранник или конечное множество. Определим *опорную грань* ковектора  $v \in (\mathbb{R}^n)^*$  как максимальное подмножество в  $P$ , на котором  $v|_P$  достигает максимального значения. Мы будем обозначать данную грань  $P^v$ .

**Определение 3.9.** Конечное множество  $P \subset \mathbb{Z}^n$  называется *2-вершиной*, если для любой пары точек  $p_1, p_2 \in P$ ,  $p_1 \equiv p_2 \pmod{2}$  (т.е., соответствующие координаты точек  $p_1, p_2$  одной чётности). Целочисленный многогранник называется *2-вершиной*, если множество его вершин является *2-вершиной*.

**Определение 3.10.** Пусть  $P_1, \dots, P_n$  – набор выпуклых целочисленных многогранников в  $\mathbb{R}^n$  или конечных множеств в  $\mathbb{Z}^n$ , а  $\zeta$  – точка в  $\mathbb{Z}^n$ . Набор  $P_1, \dots, P_n$  называется *2-развёрнутым относительно  $\zeta$*  если для любого ковектора  $v \in (\mathbb{Z}^n)^*$  такого что  $v(\zeta) \not\equiv 0 \pmod{2}$ , существует индекс  $i \in \{1, \dots, n\}$ , такой что опорная грань  $P_i^v$  является 2-вершиной.

**Определение 3.11.** Набор  $P = (P_1, \dots, P_n)$  выпуклых целочисленных многогранников называется  *$\zeta$ -колочим*, если для любого ковектора  $v \in (\mathbb{R}^n)^*$ , такого что  $v(\zeta) \not\equiv 0$  существует индекс  $i \in \{1, \dots, n\}$ , такой что опорная грань  $P_i^v$  является вершиной.

**Замечание 3.12.** Очевидно, что если набор является  $\zeta$ -колочим, то он 2-развёрнут относительно  $\zeta$ .

**Теорема 3.13.** Фиксируем точку  $\zeta \in \mathbb{Z}^n$  и набор конечных множеств  $P_1, \dots, P_n$ . Предположим, что  $P_1, \dots, P_n$  2-развёрнуты относительно  $\zeta$ . Тогда для любых двух наборов  $(H_1, \dots, H_n)$  и  $(H'_1, \dots, H'_n)$  трансверсально пересекающихся тропических гиперповерхностей с носителями  $P_1, \dots, P_n$ , 2-индексы пересечения  $\iota_2(H_1, \dots, H_n; \zeta)$  и  $\iota_2(H'_1, \dots, H'_n; \zeta)$  совпадают.

**Определение 3.14.** Для набора многогранников  $P_1, \dots, P_n$ , 2-развёрнутого относительно  $\zeta \in \mathbb{Z}^n$ , рассмотрим тропические гиперповерхности общего положения  $H_1, \dots, H_n$ , где гиперповерхности  $H_i$  заданы уравнениями с носителями в вершинах  $P_i$ . Тогда функция  $MV_2: (P_1, \dots, P_n; \zeta) \mapsto \iota_2(H_1, \dots, H_n; \zeta)$  корректно определена. Назовём ее *2-смешанным объёмом*.

**Утверждение 3.15.** Функция  $MV_2$  симметрична и мультилинейна относительно операции сложения по Минковскому.

## 3.2 Многомерная формула Виета

Фиксируем произвольную точку  $0 \neq a \in \mathbb{Z}^n$  и рассмотрим  $a$ -колочий набор  $P = (P_1, \dots, P_n)$  выпуклых целочисленных многогранников в  $\mathbb{R}^n$  (см. Определение 3.11). Обозначим  $\mathbb{C}_1^{P_i}$  множество всех полиномов  $f = \sum_{p \in P_i} c_p x^p$  таких что  $N(f) = P_i$  и для любой вершины  $p \in P_i$ , верно  $c_p \neq 0$ . Рассмотрим множество  $\mathbb{C}_1^P = \mathbb{C}_1^{P_1} \times \dots \times \mathbb{C}_1^{P_n}$ .

Многомерная формула Виета выражает произведение мономов  $x^a$  по всем корням  $x$  системы полиномиальных уравнений  $f_1(x) = \dots = f_n(x)$ , где  $F = (f_1, \dots, f_n) \in \mathbb{C}_1^P$  и коэффициенты уравнений  $f_i$  при вершинах их многогранников Ньютона равны 1, в терминах 2-смешанного объёма (см. Раздел 3.1) многогранников  $P_1, \dots, P_n$  и точки  $a$ .

Мы можем сформулировать следующий результат:

**Теорема 3.16.** В указанных выше предположениях, верно следующее равенство:

$$\prod_{f_1(x)=\dots=f_n(x), x \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n} x^a = (-1)^{MV_2(P_1, \dots, P_n; a)}. \quad (3)$$

### 3.3 Вычисление знаков старших коэффициентов результата

**Определение 3.17.** Рассмотрим набор  $A = (A_0, \dots, A_n)$  конечных подмножеств решетки  $\mathbb{Z}^n$  такой что  $\text{codim}(A) = -1$  и множества  $A_i$  совместно порождают всю решетку  $\mathbb{Z}^n$ . Тогда смешанный разреженный результат  $\mathcal{R}_A$  – единственный (с точностью до умножения на константу) неприводимый полином от  $|A| = \sum_0^n |A_i|$  переменных  $c_{i,a}$  обращающийся в нуль тогда, когда полиномы Лорана  $f_i(x) = \sum_{a \in A_i} c_{i,a} x^a$  имеют общий корень в  $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ .

Мощность множества  $A_i \subset \mathbb{Z}^n$  мы обозначаем  $|A_i|$ , а  $|A|$  определяется как сумма  $\sum_0^n |A_i|$ . Для краткости смешанный расслоенный результат  $\mathcal{R}(A)$  мы будем иногда обозначать буквой  $\mathcal{R}$ .

Рассмотрим многогранник Ньютона  $\mathcal{N}(\mathcal{R})$  результата  $\mathcal{R}(A)$ . Предположим, что нам даны две градуировки  $\gamma = (\alpha_{i,a} \mid i \in \{0, \dots, n\}, a \in A_i)$  и  $\sigma = (\beta_{j,b} \mid j \in \{0, \dots, n\}, b \in A_j) \in (\mathbb{Z}^*)^{|A|}$  со строго положительными координатами, такие что опорные грани  $\mathcal{N}(\mathcal{R})^\gamma$  и  $\mathcal{N}(\mathcal{R})^\sigma$  нульмерны. Мы вычислим отношение коэффициентов  $r_\gamma$  и  $r_\sigma$  многочлена  $\mathcal{R}$ , старших относительно градуировок  $\gamma$  и  $\sigma$  соответственно, сведя задачу к многомерной формуле Виета (см. Теорему 3.16).

Сопоставим паре ковекторов  $\gamma, \sigma$  набор  $P^{\gamma, \sigma} = (P_0^{\gamma, \sigma}, \dots, P_n^{\gamma, \sigma})$  многогранников в  $\mathbb{R}^{n+1}$  следующим образом:

$$P_i^{\gamma, \sigma} = \text{conv}(\{(a, \alpha_{i,a}) \mid a \in A_i\} \cup \{(a, -\beta_{i,a}) \mid a \in A_i\}).$$

**Пример 3.18.** Рассмотрим набор  $A = (A_0, A_1)$ , где  $A_0 = \{0, 1\}, A_1 = \{0, 1, 2\} \subset \mathbb{Z}$ . Многогранник Ньютона  $\mathcal{N}(\mathcal{R}(A))$  – треугольник с вершинами  $\bar{\gamma} = (2, 0, 0, 0, 1)$ ,  $\bar{\sigma} = (0, 2, 1, 0, 0)$  и  $\bar{\delta} = (1, 1, 0, 1, 0)$ . Рассмотрим ковекторы  $\gamma = (2, 1, 1, 1, 2)$ ,  $\sigma = (1, 2, 2, 1, 1)$ , и  $\delta = (2, 2, 1, 2, 1)$ , опорные грани которых – вершины  $\bar{\gamma}, \bar{\sigma}, \bar{\delta}$ . Им будут соответствовать многоугольники  $P_0^{\gamma, \sigma}$  и  $P_1^{\gamma, \sigma}$  (см. Рисунок 1а) и многоугольники  $P_0^{\gamma, \delta}$  и  $P_1^{\gamma, \delta}$  (см. Рисунок 1б).

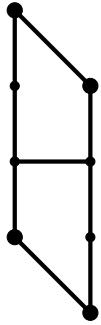


Рис. 1а.

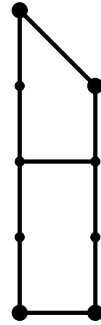
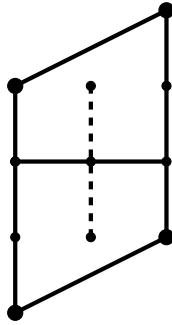


Рис. 1б.

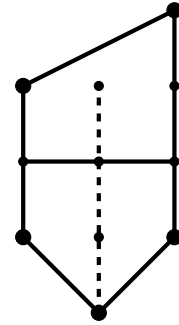


Рис. 1: Многоугольники  $P_0^{\gamma, \sigma}, P_1^{\gamma, \sigma}$  и многоугольники  $P_0^{\gamma, \delta}, P_1^{\gamma, \delta}$

**Теорема 3.19.** Пусть  $A = (A_0, \dots, A_n)$  набор конечных подмножеств в  $\mathbb{Z}^n$ , удовлетворяющий свойствам из Определения 3.17, а  $\gamma, \sigma \in (\mathbb{Z}^*)^{|A|}$  – пара градуировок со строго положительными координатами и нульмерными опорными гранями  $\mathcal{N}(\mathcal{R})_\gamma$  и  $\mathcal{N}(\mathcal{R})_\sigma$ . Тогда отношение старших коэффициентов  $r_\gamma$  и  $r_\sigma$  многочлена  $\mathcal{R}(A)$  относительно градуировок  $\gamma$  и  $\sigma$  соответственно, выражается формулой

$$\frac{r_\gamma}{r_\sigma} = (-1)^{\text{MV}(P_0^{\gamma, \sigma}, \dots, P_n^{\gamma, \sigma})} (-1)^{\text{MV}_2(P_0^{\gamma, \sigma}, \dots, P_n^{\gamma, \sigma}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})}. \quad (4)$$

**Пример 3.20.** С помощью Теоремы 3.19 вычислим отношение коэффициентов  $r_\gamma$  и  $r_\sigma$ , соответствующих вершинам  $\bar{\gamma}$  и  $\bar{\sigma}$ , рассмотренным в Примере 3.18:



$$\frac{r_\gamma}{r_\sigma} = 1 \cdot (-1)^{\det_2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \det_2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \det_2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = (-1)^0 = 1.$$

Для коэффициентов  $r_\gamma$  и  $r_\delta$  при вершинах  $\bar{\gamma}$  и  $\bar{\delta}$ , получим

$$\frac{r_\gamma}{r_\delta} = 1 \cdot (-1)^{\det_2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \det_2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \det_2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \det_2\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = (-1)^1 = -1.$$

Таким образом мы получаем хорошо известную формулу для результата  $\mathcal{R} = \mathcal{R}(f, g)$  многочленов  $f = a_0 + a_1x, g = b_0 + b_1x + b_2x^2$ :

$$\mathcal{R} = \pm(a_0^2b_2 + a_1^2b_0 - a_0a_1b_1),$$

, как и ожидалось.

**Определение 3.21.** Градуировкам  $\gamma, \sigma$  мы сопоставляем кривую Хованского  $\mathcal{C}^{\gamma, \sigma} \subset \mathbb{C}^{|A|}$ , параметризованную комплексным  $t \neq 0$  и заданную следующими соотношениями:  $z_{i,a} = t^{\alpha_{i,a}} + t^{-\beta_{i,a}}$ , где  $i \in \{0, \dots, n\}$  и  $a \in A_i$ .

Ограничением результата  $\mathcal{R}$  на кривую Хованского  $\mathcal{C}^{\gamma, \sigma}$  мы получаем полином Лорана от переменной  $t$ , который обозначаем  $\phi(t)$ .

**Утверждение 3.22.** Коэффициент при старшем (младшем) мономе  $\phi(t)$  равен  $r_\gamma$  ( $r_\sigma$ , соответственно).

**Утверждение 3.23.** Равенство  $\phi(t_0) = 0$  верно тогда и только тогда, когда  $(t_0^{\alpha_{i,a}} + t_0^{-\beta_{i,a}} \mid i \in \{0, \dots, n\}, a \in A_i)$  принадлежит множеству  $\{\mathcal{R} = 0\} \cap \mathcal{C}^{\gamma, \sigma}$ .

**Замечание 3.24.** Заметим что многогранники  $P_0^{\gamma, \sigma}, \dots, P_n^{\gamma, \sigma}$  – в точности многогранники Ньютона полиномов Лорана  $g_0(x, t), \dots, g_n(x, t)$ , где

$$g_i(x, t) = \sum_{a \in A_i} (t^{\alpha_{i,a}} + t^{-\beta_{i,a}})x^a.$$

*Доказательство Теоремы 3.19.* Из замечания 3.24 следует, что равенство (4) можно переписать следующим образом:

$$\frac{r_\gamma}{r_\sigma} = (-1)^{\text{MV}(\mathcal{N}(g_0), \dots, \mathcal{N}(g_n))} (-1)^{\text{MV}_2(\mathcal{N}(g_0), \dots, \mathcal{N}(g_n), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})}.$$

В то же время, используя классическую формулу Виета, получаем

$$\frac{r_\sigma}{r_\gamma} = \prod_{\phi(t)=0} t.$$

Из Утверждения 3.23 и теоремы Бернштейна–Кушниренко (см. [2]) следует равенство

$$\prod_{\phi(t)=0} t = (-1)^{|\{\mathcal{R}=0\} \cap \mathcal{C}^{\gamma, \sigma}|} \prod_{g_0(x,t)=\dots=g_n(x,t)=0} t = (-1)^{\text{MV}(\mathcal{N}(g_0), \dots, \mathcal{N}(g_n))} \prod_{g_0(x,t)=\dots=g_n(x,t)=0} t.$$

Применяя многомерную формулу Виета (см. Теорему 3.16), получаем

$$(-1)^{\text{MV}(\mathcal{N}(g_0), \dots, \mathcal{N}(g_n))} \prod_{g_0(x,t)=\dots=g_n(x,t)=0} t = (-1)^{\text{MV}(\mathcal{N}(g_0), \dots, \mathcal{N}(g_n))} (-1)^{\text{MV}_2(\mathcal{N}(g_0), \dots, \mathcal{N}(g_n), \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix})}.$$

Теорема доказана. □

## 4 Особенности проекции полного пересечения

В Главе 4 вычислена сумма  $\delta$ -инвариантов плоской проекции одномерного полного пересечения, заданного полиномиальной системой общего положения с данным носителем. Сначала мы введём необходимые обозначения и предположения, а затем сформулируем основной результат – Теорему 4.9. Результаты данной главы изложены в статье [19].

### 4.1 Действующие лица

- $(x_1, \dots, x_n, y, t)$  – система координат в  $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^{n+2}$ ,  $n \geq 1$ ;
- $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$  – стандартный базис решётки характеров  $\mathbb{Z}^{n+2}$ ;
- $A \subset \mathbb{Z}^{n+2}$  – конечное подмножество максимальной размерности;
- $\Delta = \text{conv}(A) \subset \mathbb{R}^{n+2}$  – выпуклая оболочка множества  $A$ ;
- $\mathcal{F}(\Delta)$  – множество гиперграней многогранника  $\Delta$ ;
- $X_\Delta$  – торическое многообразие, ассоциированное с многогранником  $\Delta$ ;
- $f_1, \dots, f_{n+1} \in \mathbb{C}^A$  – набор полиномов Лорана с носителем в  $A$ ;
- $\tilde{\mathcal{C}} = \{f_1 = \dots = f_{n+1} = 0\} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^{n+2}$  – полное пересечение, заданное полиномами  $f_1, \dots, f_{n+1}$ ;
- $\pi: (\mathbb{C} \setminus \{0\})^{n+2} \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$  – проекция, забывающая первые  $n$  координат;
- $\mathcal{C} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$  – замыкание образа  $\pi(\tilde{\mathcal{C}}) \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ ;
- $P \subset \mathbb{R}^2$  – многогранник Ньютона кривой  $\mathcal{C}$ ;
- $\mathcal{S}$  – множество особых точек кривой  $\mathcal{C}$ .

**Замечание 4.1.** Вообще говоря, образ  $\pi(\tilde{\mathcal{C}})$  является плоской кривой с выколотыми точками, образованными пересечениями замыкания кривой  $\tilde{\mathcal{C}}$  в торическом многообразии  $X_\Delta$  с орбитами, соответствующими горизонтальным гиперграням многогранника  $\Delta$  (см. Определение 4.8). Поэтому кривую  $\mathcal{C}$  мы определяем как замыкание по Зарисскому образа  $\pi(\tilde{\mathcal{C}})$ .

### 4.2 Формулировка задачи

В этом разделе мы дадим точную формулировку основной задачи, которая решается в главе 4 диссертации, и обсудим необходимые предположения. Для набора многочленов общего положения  $f_1, \dots, f_{n+1} \in \mathbb{C}^A$  полное пересечение  $\tilde{\mathcal{C}} = \{f_1 = \dots = f_{n+1} = 0\} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^{n+2}$  – плоская кривая, а замыкание  $\mathcal{C}$  её образа при проекции  $\pi$  – плоская кривая в  $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$  с конечным числом изолированных особых точек.

Довольно естественно ожидать, что для достаточно общих наборов полиномов  $f_1, \dots, f_{n+1} \in \mathbb{C}^A$  все особые точки кривой  $\mathcal{C}$  – ноды. Однако это верно не для всех носителей. Более того, как видно из примера ниже, если носители  $\text{supp}(f_j) = A_j$  различны, то даже для полиномов общего положения  $f_j \in \mathbb{C}^{A_j}$  проекция соответствующего полного пересечения может иметь и другие особенности.

Подставив точку  $(y_0, t_0) \in \pi(\mathcal{C})$  в систему многочленов, задающих полное пересечение  $\tilde{\mathcal{C}}$ , мы получим систему из  $n+1$  от  $n$  переменных. Число решений данной системы равно количеству прообразов точки  $(y_0, t_0)$ . Теперь рассмотрим следующий случай:  $n = 1$ , а кривая  $\tilde{\mathcal{C}} = \{f_1 = f_2 = 0\}$  задана многочленами вида

$$f_1(x_1, y, t) = g_0(y, t) + x_1 g_1(y, t) + x_1^3 g_3(y, t) \text{ и } f_2(x_1, y, t) = h_0(y, t) + x_1^3 h_3(y, t),$$

где  $g_i, h_j$  – некоторые полиномы Лорана от переменных  $y, t$ . Из примера ниже следует, что если точка  $(y_0, t_0)$  имеет более одного прообраза в  $\tilde{\mathcal{C}}$ , то этих прообразов 3, следовательно, эта точка не может быть двойным самопересечением. Если носители полиномов  $\text{supp}(f_1)$  и  $\text{supp}(f_2)$  достаточно большие, то кривая  $\mathcal{C}$  действительно будет содержать точки, имеющие 3 прообраза.

**Пример 4.2.** Рассмотрим  $A_1 = \{0, 1, 3\} \subset \mathbb{Z}^1$  и  $A_2 = \{0, 3\} \subset \mathbb{Z}^1$ . Пусть  $f_1(x)$  и  $f_2(x)$  – многочлены с носителями в  $A_1$  и  $A_2$  соответственно. Предположим, что система уравнений от одной переменной  $\{f_1(x) = f_2(x) = 0\}$  имеет 2 различных корня  $r_1, r_2 \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ . Докажем, что тогда эта система имеет ещё один корень  $r_3 \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})$ . Действительно, из предположений выше следует, что  $r_2 = \alpha \cdot r_1$ , где  $\alpha$  – корень из единицы. Подставив эти корни в первое уравнение, мы получаем, что коэффициент при мономе первой степени многочлена  $f_1$  должен быть равен 0. Но тогда ясно, что третий корень  $r_3 = \alpha \cdot r_2$  также является решением первого уравнения.

Из примера выше следует, что довольно естественно сформулировать более общую задачу: а именно, вместо числа самопересечений кривой  $\mathcal{C}$  вычислить общую сумму  $\delta$ -инвариантов её особенностей. С одной стороны, данная формулировка имеет смысл для всех носителей, с другой стороны, если кривая имеет только ноды, то полученный ответ будет равен их числу.

**Задача 4.3.** В тех же обозначениях, что и выше, вычислить  $D$  – сумму  $\delta$ -инвариантов особенностей кривой  $\mathcal{C}$  в терминах множества  $A$ .

**Определение 4.4.** Пусть  $B$  – произвольное конечное множество в  $\mathbb{Z}^{n+2}$ , и пусть  $\tilde{\Lambda}_B \subset \mathbb{Z}^{n+2}$  – подрешетка, аффинно порождённая множеством  $B$ . Обозначим  $\Lambda_B$  образ  $\tilde{\Lambda}_B$  при проекции  $\rho: \mathbb{Z}^{n+2} \rightarrow \mathbb{Z}^{n+2} / \langle e_{n+1}, e_{n+2} \rangle$ . Определим  $\text{ind}_v(B)$  как индекс подрешётки  $\Lambda_B$  в  $\mathbb{Z}^{n+2} / \langle e_{n+1}, e_{n+2} \rangle$ .

**Предположение 4.5.** Множество  $A$  содержит  $0 \in \mathbb{Z}^{n+2}$ .

Данное предположение можно сделать без ограничения общности, так как умножение полинома на моном не меняет множество его нулей внутри алгебраического тора и лишь параллельно сдвигает носитель полинома.

**Предположение 4.6.** Множество  $A$  удовлетворяет равенству  $\text{ind}_v(A) = 1$ .

**Замечание 4.7.** Данное предположение тоже можно сделать без ограничения общности по следующей причине. Существуют взаимные базисы решеток  $\Lambda_A$  и  $\Lambda = \mathbb{Z}^{n+2} / \langle e_{n+1}, e_{n+2} \rangle$ , такие что  $\Lambda = \bigoplus \mathbb{Z}w_i$  и  $\Lambda_A = \bigoplus \mathbb{Z}a_i w_i$  для некоторых  $a_i \in \mathbb{Z}$ . Мономиальной заменой переменных можно перейти от базиса  $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$  к  $(w_1, \dots, w_n, e_{n+1}, e_{n+2})$ , а затем другой заменой переменных вида  $\tilde{x}_i = x_i^{a_i}$  свести задачу к случаю  $\text{ind}_v(A) = 1$ .

Пусть  $Q = \rho(\Delta)$  образ многогранника  $\Delta$  при проекции  $\rho: \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}^{n+2} / \langle e_{n+1}, e_{n+2} \rangle$ .

**Определение 4.8.** Грань  $\tilde{\Gamma} \subset \Delta$  называется *горизонтальной*, если ее проекция содержится в границе  $Q$ . Множество всех горизонтальных гиперграней многогранника  $\Delta$  обозначается  $\mathcal{H}(\Delta)$ .

### 4.3 Формулировка главного результата

Обозначим  $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+2})$  систему координат, индуцированную выбором базиса  $\{e_1, \dots, e_{n+2}\}$  пространства  $\mathbb{R}^{n+2}$ . Пусть  $\Gamma \subset \Delta$  – негоризонтальная гипергрань, заданная уравнением вида  $\ell(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+2}) = c$ . Функция  $\ell$  единственна с точностью до умножения на скаляр, поэтому

можно считать, что коэффициенты  $\ell$  – взаимно просты и что для любого  $\alpha \in A \setminus \Gamma$  верно  $\ell(\alpha) < c$ .

Определим последовательность целых чисел  $i^\Gamma = (i_1^\Gamma, i_2^\Gamma, \dots)$  следующим образом. Положим  $B_1^\Gamma = A \cap \Gamma$ . Для любого  $r > 1$ , определим

$$B_r^\Gamma = B_{r-1}^\Gamma \cup (A \cap \{\ell(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{n+2}) = c - (r - 1)\}).$$

Наконец, для любого  $r \geq 1$ , положим

$$i_r^\Gamma = \text{ind}_v(B_r^\Gamma).$$

Ясно, что для любого  $r$ , элемент  $i_r^\Gamma$  делит  $i_{r-1}^\Gamma$ . Более того, так как множество  $A$  удовлетворяет  $\text{ind}_v(A) = 1$ , любая такая последовательность стабилизируется к числу 1.

**Теорема 4.9.** Пусть  $A \subset \mathbb{Z}^{n+2}$  – конечное множество полной размерности, удовлетворяющее Предположению 4.6, и пусть  $\Delta \subset \mathbb{R}^{n+2}$  – его выпуклая оболочка. В тех же обозначениях, что и выше, для набора многочленов  $f_1, \dots, f_{n+1} \in \mathbb{C}^A$  общего положения, замыкание  $\mathcal{C}$  образа кривой  $\tilde{\mathcal{C}} = \{f_1 = \dots = f_{n+1} = 0\}$  при проекции  $\pi: (\mathbb{C} \setminus \{0\})^{n+2} \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ , забывающей  $n$  координат, является плоской алгебраической кривой, а множество её особых точек  $\mathcal{S}$  состоит из конечного числа изолированных особенностей. Тогда число  $D = \sum_{s \in \mathcal{S}} \delta(s)$  выражается следующей формулой:

$$D = \frac{1}{2} \left( \text{Area}(P) - (n+1) \text{Vol}(\Delta) + \sum_{\Gamma \in \mathcal{H}(\Delta)} \text{Vol}(\Gamma) - \sum_{\Gamma \in \mathcal{F}(\Delta) \setminus \mathcal{H}(\Delta)} \text{Vol}(\Gamma) \sum_1^\infty (i_r^\Gamma - 1) \right), \quad (5)$$

где  $\delta(s)$  –  $\delta$ -инвариант особенности  $s$ ,  $P = \int_\pi(\Delta)$  – расслоенный многогранник  $\Delta$  относительно проекции  $\pi$ , а  $\mathcal{F}(\Delta)$  и  $\mathcal{H}(\Delta)$  – множество всех гиперграней и множество горизонтальных гиперграней многогранника  $\Delta$ , соответственно.

## 5 Приложение: многогранник Ньютона дискриминанта Морса

В Главе 5, комбинируя методы, изложенные в предыдущих главах, мы вычислим многогранник Ньютона дискриминанта Морса в пространстве многочленов одной переменной данной степени. Иными словами, в обозначениях раздела , мы фиксируем  $A = \mathbb{Z} \cap [1, n] \subset \mathbb{Z}$ , и вычисляем многогранник Ньютона  $\mathcal{M}_A$  полинома  $h_c h_m^2$ , где полиномы  $h_c$  и  $h_m$  задают каустику и страт Максвелла в  $\mathbb{C}^A$ , соответственно.

**Замечание 5.1.** Так как масштабирование переменной и умножение коэффициентов на ненулевую константу не влияет на принадлежность многочлена дискриминанту Морса, многогранник  $\mathcal{M}_A$  лежит в пересечении двух аффинных гиперплоскостей в  $\mathbb{R}^{|A|}$ : а именно, гиперплоскостей  $\{e_1 + \dots + e_n = d_1\}$  и  $\{1 \cdot e_1 + 2e_1 + \dots + n \cdot e_n = d_2\}$  для некоторых  $d_1, d_2$ .

**Пример 5.2.** Для множества  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  пространство  $\mathbb{C}^A$  состоит из многочленов вида  $\alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \alpha_4 x^4$  с комплексными коэффициентами  $\alpha_i$ , и верны равенства

$$h_c = \alpha_2^2 \alpha_3^2 - 4\alpha_1 \alpha_3^3 - 4\alpha_2^3 \alpha_4 + 18\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 - 27\alpha_1^2 \alpha_4^2,$$

$$h_m = \alpha_3^3 + 8\alpha_1 \alpha_4^2 - 4\alpha_2 \alpha_3 \alpha_4.$$

**Пример 5.3.** Для множества  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  многогранник Ньютона дискриминанта Морса – пятиугольник:

$$\mathcal{M}_A = \text{conv}(\{(4, 0, 0, 6), (0, 2, 8, 0), (1, 0, 9, 0), (0, 5, 2, 3), (2, 3, 0, 5)\}) \subset \mathbb{R}^4.$$

**Задача 5.4.** Получить комбинаторное описание вершин многогранника Ньютона  $\mathcal{M}_A$  дискриминанта Морса в терминах носителя  $A$ .

## 5.1 Геометрическая интерпретация задачи

Вершины многогранника  $\mathcal{M}_A$  биективно соответствуют конусам полной размерности его двойственного веера. Опорная функция  $\mu_A$  линейна на каждом из этих конусов, а коэффициенты её ограничения на каждый из этих конусов равны координатам соответствующей вершины искомого многогранника.

В Замечании 5.1 объяснялось, почему искомым многогранник лежит в пересечении гиперплоскостей  $\{e_1 + \dots + e_n = d_1\}$  и  $\{1 \cdot e_1 + \dots + n \cdot e_n = d_2\}$  в  $\mathbb{R}^{|A|}$  для некоторых  $d_1, d_2$ . Из данного наблюдения следует, что достаточно вычислить  $\mu_A$  исключительно на ко векторах  $\gamma \in (\mathbb{R}^{|A|})^*$  с неотрицательными координатами.

Более того, чтобы вычислить коэффициенты опорной функции  $\mu_A$  в ее областях линейности, достаточно вычислить искомую опорную функцию на рациональных, или, что эквивалентно, на целочисленных ко векторах, опорные грани которых – вершины многогранника. Данное наблюдение позволяет получить следующую интерпретацию задачи.

А именно, мы можем использовать те же идеи, что в работе [1] (см. Главу 3) или в работах [4] и [6].

Пусть  $\gamma$  – целочисленный ко вектор с неотрицательными коэффициентами, опорная грань которого – вершина многогранника  $\mathcal{M}_A$ . Данный ко вектор можно рассматривать как функцию  $\gamma: A \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Заменяя коэффициенты при мономах  $x^p$ ,  $p \in A$  многочлена  $f(x)$ ,  $\text{supp}(f) = A$ , полиномами степеней  $\gamma(p)$  от новой переменной  $t$ , мы получим из дискриминанта Морса многочлен от переменной  $t$ . И так как значение опорной функции  $\mu_A(\gamma)$  можно интерпретировать как число корней полученного многочлена от переменной  $t$ , интересующую нас задачу можно сформулировать следующим образом:

**ЗАДАЧА 5.5.** Пусть  $\gamma: A \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  произвольная функция, а  $q_p, v_p$ ,  $p \in A$  – наборы комплексных чисел общего положения. Для скольких значений параметра  $t \in \mathbb{C}$  полином  $f_t(x) = \sum_{p \in A} (q_p + v_p t^{\gamma(p)}) x^p$  не является морсовским?

Данный вопрос был изучен в Примере 1.1 работы [6], и ответ на него был получен в частном случае строго выпуклой вверх функции  $\gamma: \{1, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ . Методами, полученными в Главе 4, мы получим ответ для произвольной функции  $\gamma: A \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ .

Для фиксированной функции  $\gamma: A \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ , рассмотрим гиперповерхность  $\mathcal{H} = \{f_t(x) - y\} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^3$ . Пусть  $\pi$  – проекция  $\pi: (\mathbb{C} \setminus \{0\})^3 \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$ ,  $(x, y, t) \mapsto (y, t)$ , а  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  и  $2\mathcal{A}_1$  – открытые страты мультиособенностей ограничения  $\pi|_{\mathcal{H}}$  проекции на гиперповерхность  $\mathcal{H}$ . Множества  $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$  и  $2\mathcal{A}_1$  состоят из точек  $(y, t) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$  таких что уравнение  $f_t(x) = y$  имеет ровно один корень кратности 2, ровно один корень кратности 3 и ровно два корня кратности 2, соответственно. Для выбранного носителя  $A$  (напомним, что мы работаем с  $A = \mathbb{Z} \cap [1, n]$ ), никаких других стратов коразмерности 2, кроме  $\mathcal{A}_2$  и  $2\mathcal{A}_1$ , не возникает.

Обозначим  $\Delta$  многогранник Ньютона полинома  $f_t(x) - y$ . Иными словами,  $\Delta$  – выпуклая оболочка множества

$$\tilde{A} = \{(0, 1, 0)\} \cup \{(a_0, 0, 0)\} \cup \{(a_{|A|-1}, 0, 0)\} \cup \{(p, 0, \gamma(p)) \mid p \in A\} \subset \mathbb{Z}^3.$$

На Рисунке 2 показано, как могут выглядеть многогранники  $N$  и  $\Delta$ .

Все выпуклые разбиения отрезка  $\text{conv}(A)$  находятся во взаимно однозначном соответствии с подмножествами вида  $W = \{w_0 < w_1 < \dots < w_{k-1} < w_k\} \subset A$ , где  $w_0 = 1$  и  $w_k = n$ . Более того, каждая функция  $\gamma: A \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$  задает выпуклое разбиение отрезка  $\text{conv}(A)$ . Действительно, пусть  $N$  – многогранник Ньютона полинома  $f_t(x) = \sum_{p \in A} (q_p + v_p t^{\gamma(p)}) x^p$ . Тогда соответствующее подмножество  $W$  состоит из точек  $p \in A$ , таких что  $(p, \gamma(p))$  – вершина многоугольника  $N$ .

Чтобы получить искомую формулу, мы рассматриваем множество  $\mathcal{D} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^2$  критических значений проекции  $\pi$  как плоскую проекцию пространственной кривой  $\mathcal{C} = \{f(x, t) - y =$

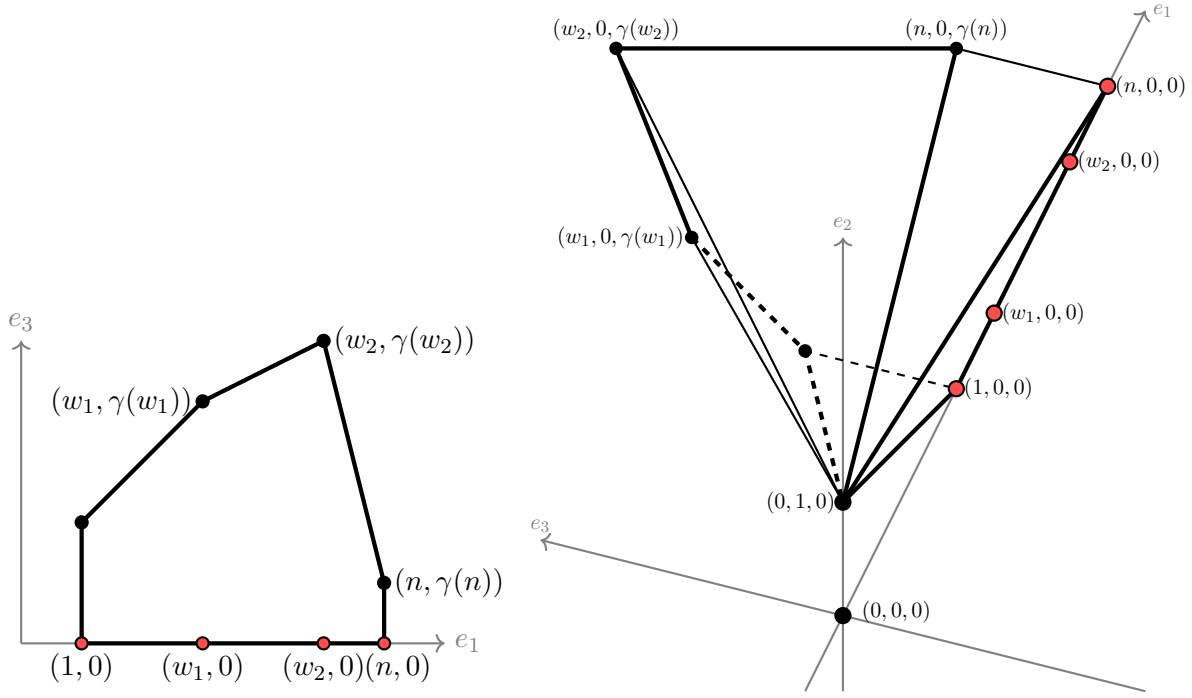


Рис. 2: Многогранники  $N$  и  $\Delta$ .

$x \frac{\partial f(x,t)}{\partial x} = 0\} \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^3$ , являющейся множеством критических точек проекции  $\pi$ . Многогранник Ньютона кривой  $\mathcal{D}$  – расслоенный многогранник  $P = \int_{\pi} \Delta$ . Прямым вычислением получается формула для его площади.

**Утверждение 5.6.** Для  $A = \mathbb{Z} \cap [1, n]$  и ковектора  $\gamma \in (\mathbb{R}^{|A|})^*$ , задающего разбиение  $W \subset A$ , верно следующее равенство:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(\int_{\pi} \Delta) &= w_1(w_1 - 1)\gamma(1) + (n - w_{k-1})(2n + w_{k-1} - 2)\gamma(n) + \\ &+ \sum_{j=1}^{j=k-1} (w_{j+1} - w_{j-1})(w_{j-1} + w_j + w_{j+1} - 2)\gamma(w_j). \end{aligned}$$

Особые точки кривой  $\mathcal{D}$  в алгебраическом торе – ноды и каспы (а именно, всего  $|2\mathcal{A}_1|$  нодов и  $|\mathcal{A}_2|$  каспов). Теорема 4.9 позволяет вычислить общую сумму  $\delta$ -инвариантов особенностей кривой  $\mathcal{D}$  в торе, учитывая особенности кривой  $\mathcal{D}$  на бесконечности. Как и в контексте Теоремы 4.9, ответ зависит не только от выпуклой оболочки носителя  $\tilde{A} = \text{supp}(f(t, x) - y)$ , но и от последовательностей  $i^{\Gamma}$  для всех негоризонтальных гиперграней  $\Gamma \subset \Delta$ .

Вклады негоризонтальных граней в формулу для искомой опорной функции вычисляются следующим образом: для любого  $j = 0, \dots, k-1$ , построим последовательность  $M^j = (m_1^j, m_2^j, \dots)$  из элементов  $A \setminus \{w_j, w_{j+1}\}$ , записанных в определённом порядке. Пусть  $\ell$  – прямая, проходящая через точки  $(w_j, \gamma(w_j))$  и  $(w_{j+1}, \gamma(w_{j+1}))$ . Построим копии прямой  $\ell$ , сдвинутые на векторы  $(0, -r)$ , где  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ . Если ковектор  $\gamma$  общего положения, тогда точки  $(m, \gamma(m)) \in \text{supp}(f(t, x))$  встречаются копиями прямой  $\ell$  при увеличении  $r$  одна за одной. Порядок, в котором это происходит, определяет порядок элементов в последовательности  $M^j$ .

Вместе с каждой из последовательностей  $M^j$ , определим вспомогательную последовательность  $B^j = (b_0^j, b_1^j, \dots)$ : положим  $b_0^j = \text{gcd}(w_j, w_{j+1})$  и для любого  $l \geq 1$ , определим  $b_l^j = \text{gcd}(b_{l-1}^j, m_l^j)$ .

Наконец, для каждого  $j = 0, \dots, k-1$ , определим выражения  $C^j$  следующим образом.

$$C_{\gamma}^j = \sum_{l \geq 1} \left( (w_{j+1} - w_j)\gamma(m_l^j) + (m_l^j - w_{j+1})\gamma(w_j) + (w_j - m_l^j)\gamma(w_{j+1}) \right) (b_{l-1}^j - b_l^j). \quad (6)$$

С помощью Теоремы 4.9 мы можем вычислить удвоенное число узлов и каспов кривой  $\mathcal{D}$ , а известная формула для опорной функции многогранника Ньютона дискриминанта позволяет вычислить  $2|2\mathcal{A}_1| + |\mathcal{A}_2|$  – значение искомой опорной функции  $\mu_A$  на ковекторе  $\gamma \in (\mathbb{R}^{|\mathcal{A}|})^*$ , что и даёт искомую формулу для опорной функции  $\mu_A$ .

## 5.2 Вершины многогранника Ньютона дискриминанта Морса

Ковектор общего положения  $\gamma: A \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$  задаёт разбиение  $W = \{1 < w_1 \dots < w_{k-1} < n\} \subset [1, n]$  и для любого  $j = 0, \dots, k-1$ , данный ковектор задаёт последовательности  $M^j, b^j$  и линейные выражения  $C^j$ , как было объяснено в предыдущем разделе.

**Теорема 5.7.** *Для  $A = \mathbb{Z} \cap [1, n]$ , значение опорной функции  $\mu_A$  многогранника  $\mathcal{M}_A$  на ковекторе  $\gamma$  выражается следующей формулой:*

$$\begin{aligned} \mu_A(\gamma) = (w_1 - 2)^2 \gamma(w_0) + \sum_{j=1}^{k-1} (w_{j+1} - w_{j-1})(w_{j-1} + w_j + w_{j+1} - 5) \gamma(w_j) + \\ + (n - 1 - w_{k-1})(2n + w_{k-1} - 6) \gamma(w_k) + \sum_{j=0}^{j=k-1} C_\gamma^j. \quad (7) \end{aligned}$$

**Замечание 5.8.** Легко заметить, что ковекторы  $\gamma$ , определяющие один и тот же набор комбинаторных данных, то есть, разбиение  $W = \{w_0, \dots, w_k\}$  и последовательности  $M^j$ ,  $j = 0, \dots, k-1$ , образуют конус полной размерности в  $(\mathbb{R}^A)^*$ . Формула выше задает сюръекцию между такими конусами и областями линейности искомой опорной функции. Таким образом, она позволяет перечислить все вершины многогранника  $\mathcal{M}_A$ , вычислив наборы коэффициентов опорной функции  $\mu_A$  в каждой из областей её линейности

**Замечание 5.9.** Формула (7) позволяет вычислить многогранник  $\mathcal{M}_A$  с точностью до сдвига. В частном случае  $A = \mathbb{Z} \cap [1, n]$ , мы подобрали сдвиг, максимально уменьшающий расстояние между полученным многогранником и началом координат, но оставляющий при этом данный многогранник в положительном октанте.

### 5.2.1 Пример: полиномы степени 4

С помощью Теоремы 5.7 вычислим вершины многогранника Ньютона дискриминанта Морса в пространстве полиномов с носителем  $A = \{1, 2, 3, 4\}$ .

Для этого нужно перечислить всевозможные наборы комбинаторных данных, которые реализуются ковекторами общего положения в  $(\mathbb{R}^A)^*$  и вычислить на них опорную функцию искомого многогранника.

Всего различных случаев 5, рассмотрим их по отдельности. Графы представителей соответствующих конусов – ковекторов в  $\gamma \in (\mathbb{R}^A)^*$  (рассматриваемых в качестве функций  $\gamma: A \rightarrow \mathbb{R}$ ) показаны на Рисунке 3. Элементы разбиений  $W$  помечены красным цветом. Случаи 4 и 5 различаются наклонами отрезков  $[(1, \gamma(1)), (3, \gamma(3))]$  и  $[(2, \gamma(2)), (4, \gamma(4))]$ .

- $W = \{1, 4\}$ . В данном случае, получаем  $\gcd(w_0, w_1) = 1$ , поэтому слагаемое  $C^0$  равно 0 вне зависимости от последовательности  $M^0$ . Соответствующая вершина –  $(4, 0, 0, 6)$ .
- $W = \{1, 2, 3, 4\}$ . Аналогично предыдущему случаю, слагаемые  $C^j$  не зависят от  $M^j$  и равны 0. Получаем вершину  $(0, 2, 8, 0)$ .
- $W = \{1, 3, 4\}$ . В данном случае,  $\gcd(w_0, w_1) = 1$ ,  $\gcd(w_1, w_2) = 1$ , поэтому слагаемые  $C^0$  и  $C^1$  не зависят от последовательностей  $M^0$  и  $M^1$  и равны 0. Соответствующая вершина –  $(1, 0, 9, 0)$ .

- $W = \{1, 2, 4\}$ ,  $M^1 = (3, 1)$ . В данном случае  $\gcd(1, 2) = 1$ , поэтому  $C^0 = 0$ . Так как  $b^1 = (2, 1, 1)$ , получаем  $C^1 = 2\gamma(3) - \gamma(2) - \gamma(4)$ , поэтому соответствующая вершина многогранника  $\mathcal{M}_A$  такова:  $(0, 6, 0, 4) + (0, -1, 2, -1) = (0, 5, 2, 3)$ .
- $W = \{1, 2, 4\}$ ,  $M^1 = (1, 3)$ . Следовательно,  $C^0 = 0$ , а  $C^1 = 2\gamma(1) - 3\gamma(2) + \gamma(4)$ , и соответствующая вершина  $(0, 6, 0, 4) + (2, -3, 0, 1) = (2, 3, 0, 5)$ .

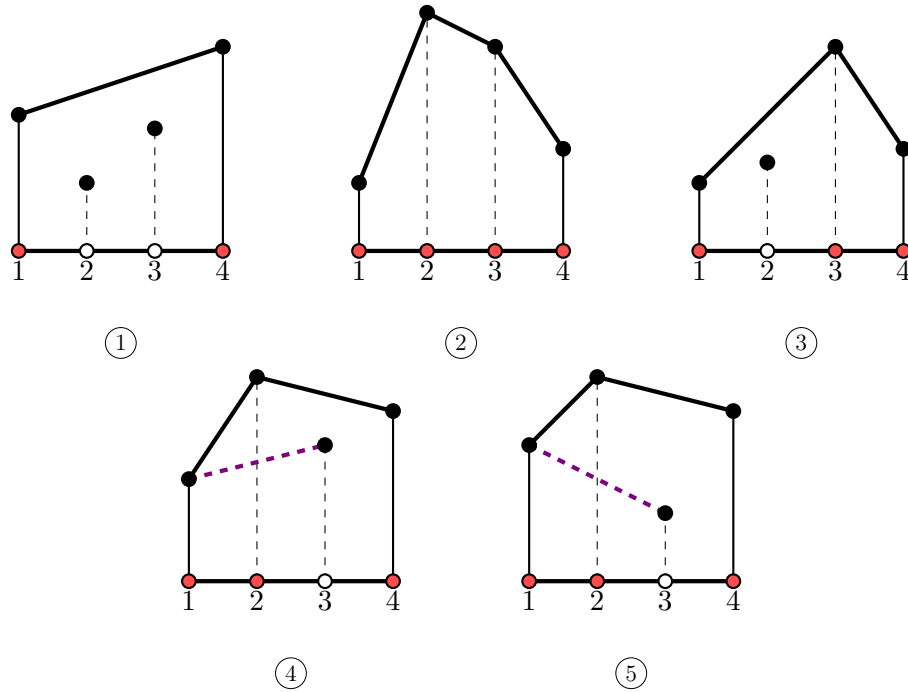


Рис. 3: Вершины пятиугольника  $\mathcal{M}_A$ .

Многогранник  $\mathcal{M}_A$  – пятиугольник в  $\mathbb{R}^4$  (см. Рисунок 4 ниже).

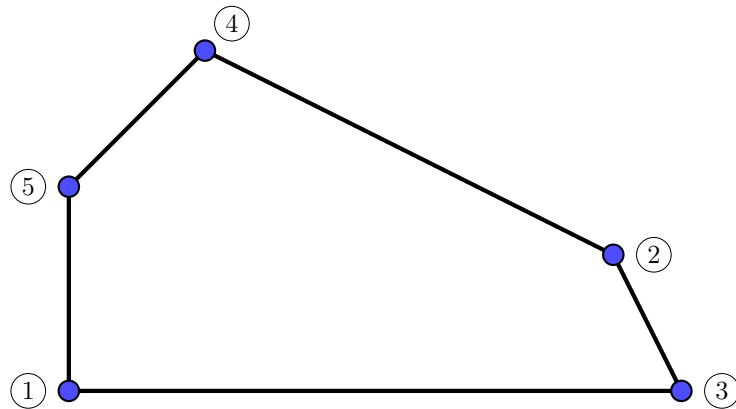


Рис. 4: Проекция многогранника  $\mathcal{M}_A$ .



## Основные результаты диссертации опубликованы в двух статьях:

- A. Arkhipova and A. Esterov, “*Signs of the Leading Coefficients of the Resultant*” («Знаки старших коэффициентов результанта»), *Geom.Funct. Anal.*, vol. 27, no. 1, pp. 33–66, Feb. 2017, issn: 1420-8970. doi: 10.1007/s00039-017-0393-z.
- A. Voorhaar, “*On the singular locus of a plane projection of a complete intersection*” («Об особых точках плоской проекции полного пересечения»), *Math.Z.*, Apr. 2022, issn: 1432-1823. doi: 10.1007/s00209-022-03014-7.

## Список литературы

- [1] A. Arkhipova and A. Esterov, «Signs of the Leading Coefficients of the Resultant», *Geom. Funct. Anal.*, vol. 27, no. 1, pp. 33–66, Feb. 2017, ISSN: 1420-8970. DOI: 10.1007/s00039-017-0393-z.
- [2] D. N. Bernshtein, «The number of roots of a system of equations», *Funct Anal Its Appl*, vol. 9, no. 3, pp. 183–185, Jul. 1975, ISSN: 1573-8485. DOI: 10.1007/BF01075595.
- [3] A. Dickenstein, M. I. Herrero, and L. F. Tabera, «Arithmetics and combinatorics of tropical Severi varieties of univariate polynomials», *Isr. J. Math.*, vol. 221, no. 2, pp. 741–777, Sep. 2017, ISSN: 1565-8511. DOI: 10.1007/s11856-017-1573-0.
- [4] A. Esterov and A. Khovanskii, «Elimination theory and Newton polytopes», *Funct. Anal. Other Math.*, vol. 2, no. 1, pp. 45–71, Dec. 2008, ISSN: 1863-7914. DOI: 10.1007/s11853-008-0015-2.
- [5] A. Esterov, «Newton Polyhedra of Discriminants of Projections», *Discrete Comput Geom*, vol. 44, no. 1, pp. 96–148, Jul. 2010, ISSN: 1432-0444. DOI: 10.1007/s00454-010-9242-7.
- [6] —, «Characteristic classes of affine varieties and Plücker formulas for affine morphisms», *J. Eur. Math. Soc.*, vol. 20, no. 1, pp. 15–59, Dec. 2017, ISSN: 1435-9855. DOI: 10.4171/JEMS/758.
- [7] M. Farnik, Z. Jelonek, and M. A. S. Ruas, «Whitney theorem for complex polynomial mappings», *Math. Z.*, vol. 295, no. 3, pp. 1039–1065, Aug. 2020, ISSN: 1432-1823. DOI: 10.1007/s00209-019-02370-1.
- [8] W. Fulton, *Intersection theory*, 2nd ed., ser. *Ergeb. Math. Grenzgeb. (3)*. Springer-Verlag, Berlin, 1998, vol. 2.
- [9] I. Gelfand, M. Kapranov, and A. V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants and multidimensional determinants*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008.
- [10] A. G. Khovanskii, «Newton polyhedra, a new formula for mixed volume, product of roots of a system of equations», in *The Arnoldfest: Proceedings of a Conference in Honour of VI Arnold for His Sixtieth Birthday*, American Mathematical Soc., vol. 24, 1999, p. 325.
- [11] S. K. Lando, A. K. Zvonkin, and D. B. Zagier, *Graphs on surfaces and their applications*. Springer, 2004, vol. 75.
- [12] G. Mikhalkin and S. Orevkov, «Maximally writhed real algebraic links», *Inventiones mathematicae*, 2018. DOI: 10.1007/s00222-018-0844-7.
- [13] G. B. Mikhalkin and S. Y. Orevkov, «Topology of Maximally Writhed Real Algebraic Knots», *Dokl. Math.*, vol. 97, no. 1, pp. 28–31, Jan. 2018, ISSN: 1531-8362. DOI: 10.1134/S106456241801009X.

- [14] G. Mikhalkin and S. Orevkov, «Real algebraic knots and links of small degree», *J. Knot Theory Ramifications*, vol. 25, no. 12, p. 1642010, Oct. 2016, ISSN: 0218-2165. DOI: 10.1142/S0218216516420104.
- [15] A. N. Parshin, «Local class field theory», *Proc. Steklov Inst. Math.*, vol. 165, pp. 157–185, 1985, ISSN: 0081-5438.
- [16] P. G. Pérez, «Singularités quasi-ordinaires toriques et polyedre de Newton du discriminant», *Canadian Journal of Mathematics*, vol. 52, no. 2, pp. 348–368, 2000.
- [17] B. Sturmfels, «On the Newton Polytope of the Resultant», *Journal of Algebraic Combinatorics*, vol. 3, no. 2, pp. 207–236, Apr. 1994, ISSN: 1572-9192. DOI: 10.1023/A:1022497624378.
- [18] O. Viro, «Encomplexing the writhe», *Translations of the American Mathematical Society-Series 2*, vol. 202, pp. 241–256, 2001.
- [19] A. Voorhaar, «On the singular locus of a plane projection of a complete intersection», *Math. Z.*, Apr. 2022, ISSN: 1432-1823. DOI: 10.1007/s00209-022-03014-7.