Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Борзых Дмитрий Александрович

Совместные распределения обобщенных интегрируемых возрастающих процессов и их обобщенных компенсаторов

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель —
доктор физико–математических наук,
проф. Гущин Александр Александрович

Москва – 2022

Введение

Диссертация выполнена в международной лаборатории стохастического анализа и его приложений Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ).

Актуальность темы. Важное направление стохастического анализа состоит в поиске множества совместных распределений случайных процессов и их компонент. Центральными объектами данной диссертации являются возрастающие процессы и их компенсаторы. Основная задача, которую мы решаем, связана с характеризацией множества совместных распределений, которые принимают возрастающий процесс и его компенсатор в два последовательных момента времени. Поскольку аналогичные вопросы рассматривались в отдельности для возрастающих процессов и для мартингалов (мартингалом будет разность возрастающего процесса и его компенсатора), рассмотрим кратко предысторию решения этих задач, в которой существенную роль играют интегральные порядки.

По-видимому, одной из первых работ, в которой возникли идеи стохастического упорядочения является первое издание книги Харди, Литлвуда и Пойа «Неравенства», 1934 г. (см. [23]). Их идея мажорирования векторов в пространстве $\mathbb{R}^n$ не была сформулирована на языке стохастических порядков, но может быть естественным образом переформулирована на этом языке посредством интерпретации вектора $x = (x_1, \dots, x_n)$ как дискретной вероятностной меры $\sum_{j=1}^n \frac{1}{n}\delta_{\{x_j\}}$ на числовой прямой, сосредоточенной в точках $x_1, \dots, x_n$ и имеющей массу $1/n$ в каждой из этих точек. В параграфе 2.18 этой книги Харди, Литлвуд и Пойа на множестве неотрицательных n-мерных вещественных векторов вводят следующее отношение порядка. Говорят, что вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$ *мажорируется* вектором $y = (y_1, \dots, y_n)$, если $\sum_{j=1}^k x_{(j)} \leq \sum_{j=1}^k y_{(j)}$ для всех $k = 1, \dots, n$ и $\sum_{j=1}^n x_{(j)} = \sum_{j=1}^n y_{(j)}$, где $(x_{(1)}, \dots, x_{(n)})$ означает переупорядоченный по убыванию компонент вектор x. В параграфе 3.17 той же книги Харди, Литлвуда и Пойа получили любопытную характеризацию данного отношения порядка (см. утверждание 108). Там утверждается, что следующие утверждения эквивалентны:

(i) вектор x мажорируется вектором y,

(ii) найдется такая дважды стохастическая матрица Π, что $x = \Pi y$ (здесь векторы x и y считаются векторами-столбцами),

(iii) $\sum_{j=1}^{n} f(x_j) \le \sum_{j=1}^{n} f(y_j)$ для всякой выпуклой функции $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Подробнее с теорией мажоризации и историей развития этого направления можно ознакомиться по классической книге Маршалла и Олкина [7].

Теперь перейдем к более современным исследованиям в этом направлении. Напомним некоторые определения.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_d)$ и $y = (y_1, \dots, y_d)$ — векторы из пространства $\mathbb{R}^d$. В пространстве $\mathbb{R}^d$ введем *отношение частичного порядка* $\preceq$ стандартным образом. Скажем, что $x \preceq y$, если $x_i \le y_i$ для всех $i = 1, \dots, d$. При этом функцию $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ назовем *нестрого возрастающей*, если она нестрого возрастает по отношению к частичному порядку $\preceq$, т. е. $f(x) \le f(y)$, если $x \preceq y$.

В дальнейшем нам неоднократно понадобится определение *марковского ядра* (оно же — *переходное ядро* или *переходная вероятность*). Пусть заданы два измеримых пространства $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$ и $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$. Отображение $\mathrm{Q}\colon \Omega_1 \times \mathcal{F}_2 \to [0;1]$ называется марковским ядром из Ω_1 в Ω_2, если

1) для любого $\omega_1 \in \Omega_1$ функция $\mathrm{Q}(\omega_1; \cdot\,)$ является вероятностной мерой на $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$;

2) для любого $A_2 \in \mathcal{F}_2$ функция $\mathrm{Q}(\,\cdot\,; A_2)$ измерима на $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$.

Более подробную информацию о марковских ядрах, в том числе теорему Фубини для марковских ядер, можно найти, например, в [8] (гл. III, § III.2), [28] (гл. 8, § 8.3 и гл. 14, § 14.2) или [10] (гл. 2, § 2.6).

Как уже было отмечено в начале этого параграфа, изучаемая нами задача тесно связана со стохастическими порядками. Достаточно полный обзор по этой тематике содержится в фундаментальной монографии Мюллера и Штойяна [32]. В концентрированном виде необходимую информацию о стохастических порядках можно найти, например, в книге Фёльмера и Шида [9] (см. гл. 2, §§ 2.4, 2.6). Здесь мы остановимся только на двух стохастических порядках, которые имеют прямое отношение к нашему исследованию, — это обычный стохастический порядок и выпуклый стохастический порядок.

Итак, пусть μ_1 и μ_2 — две борелевские вероятностные меры на $\mathbb{R}^d$. Говорят, что *мера μ_2 стохастически доминирует меру μ_1 в смысле обычного стохастического порядка* (*usual stochastic order*), пишут $\mu_1 \preceq_{\mathrm{st}} \mu_2$, если для всех ограниченных борелевских нестрого возрастающих функций $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mu_1(dx) \le \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mu_2(dx). \tag{1}$$

По-видимому, стохастический порядок $\preceq_{\mathrm{st}}$ впервые возник в работе Манна и Уитни в 1947 г. (см. [31]) и статье Лемана в 1955 г. (см. [29]) в задачах тестирования гипотез. Свойства стохастического порядка $\preceq_{\mathrm{st}}$ подробно изучались в работах [25, 26, 36, 34]. Были получены различные характеризации порядка $\preceq_{\mathrm{st}}$. Ниже мы приведем одну из современных формулировок такой характеризации. Верна следующая теорема.

Теорема 0.1. *Для двух борелевских вероятностных мер μ_1 и μ_2, заданных на $\mathbb{R}^d$, следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mu_1 \preceq_{st} \mu_2$;

(ii) *существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и такие случайные векторы $X_i\colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2$, что $\mathrm{Law}(X_i) = \mu_i$, $i = 1, 2$, и $X_1 \preceq X_2$ $\mathbb{P}$-п. н.;*

(iii) *существует такое марковское ядро $\mathrm{Q}(x; B)$, где $x \in \mathbb{R}^d$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, что $\mu_2(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Q}(x; B)\,\mu_1(dx)$ для всех $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ и $\mathrm{Q}\big(x; \{y\colon x \preceq y\}\big) = 1$ для любого $x \in \mathbb{R}^d$.*

Современное доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге Фёльмера и Шида [9] (см. гл. 2, § 2.6, теорема 2.95).

Теперь перейдем к выпуклому стохастическому порядку. Пусть μ_1 и μ_2 — две борелевские вероятностные меры на $\mathbb{R}^d$, имеющие конечные математические ожидания, т. е. $\int_{\mathbb{R}^d} ||x||\,\mu_i(dx) < \infty$ для $i = 1, 2$, где $||x||$ — евклидова норма вектора x. Говорят, что *мера μ_2 стохастически доминирует меру μ_1 в смысле выпуклого порядка* (*convex order*), пишут $\mu_1 \preceq_{\mathrm{cx}} \mu_2$, если неравенство (1) выполнено для всех выпуклых функций $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, для которых оба интеграла в (1) имеют смысл.

По-видимому, концепция выпуклого стохастического порядка впервые возникла в статье Блэкуэлла в 1953 г. (см. [14]) в задаче сравнения статистических экспериментов. Свойства выпуклого стохастического порядка подробно изучались в работах [19, 18, 37, 33]. Ниже мы приводим одну из современных формулировок теоремы, содержащую характеризацию выпуклого стохастического порядка. Имеет место следующая теорема.

Теорема 0.2. *Пусть μ_1 и μ_2 — две борелевские вероятностные меры на $\mathbb{R}^d$, имеющие конечные математические ожидания. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(i) $\mu_1 \preceq_{cx} \mu_2$;

(ii) *существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и такие случайные векторы $X_i \colon \Omega \to \mathbb{R}^d$, $i = 1, 2$, что $\mathrm{Law}(X_i) = \mu_i$, $i = 1, 2$, и $\mathbb{E}[X_2|X_1] = X_1$ $\mathbb{P}$-п. н.;*

(iii) *существует такое марковское ядро $\mathrm{Q}(x; B)$, где $x \in \mathbb{R}^d$ и $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, что $\mu_2(B) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{Q}(x; B)\, \mu_1(dx)$ для всех $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ и $\int_{\mathbb{R}^d} y\, \mathrm{Q}(x; dy) = x$ для любого $x \in \mathbb{R}^d$.*

Современное доказательство этой теоремы можно найти, например, в книге Фёльмера и Шида [9] (см. гл. 2, § 2.6, теорема 2.93 и следствие 2.94).

Отметим, что при доказательстве теорем 0.1 и 0.2 ключевую роль имеет теорема Штрассена [37], к формулировке которой мы переходим.

Пусть S — польское пространство. Рассмотрим произвольную непрерывную функцию $\psi \colon S \to [1; +\infty)$, которую в дальнейшем будем называть *калибровочной функцией* (*gauge function*). Определим *класс $C_\psi(S)$ непрерывных тестовых функций* $f \colon S \to \mathbb{R}$, таких, что

$$\forall f \in C_\psi(S) \;\; \exists c \in \mathbb{R} \;\; \forall x \in S \quad |f(x)| \le c \cdot \psi(x).$$

Обозначим через $\mathcal{M}_1^\psi(S)$ *множество всех борелевских вероятностных мер на* S, для которых $\int_S \psi(x)\, \mu(dx) < \infty$. Грубейшая топология на $\mathcal{M}_1^\psi(S)$, в которой все отображения

$$\mathcal{M}_1^\psi(S) \ni \mu \mapsto \int_S f(x)\, \mu(dx), \quad f \in C_\psi(S),$$

непрерывны, называется *ψ-слабой топологией* пространства $\mathcal{M}_1^\psi(S)$. Несложно видеть, что множества вида

$$U_\varepsilon^\psi(\mu; f_1, \ldots, f_m) := \bigcap_{i=1}^m \left\{ \nu \in \mathcal{M}_1^\psi(S) \colon \left| \int_S f_i \, d\nu - \int_S f_i \, d\mu \right| < \varepsilon \right\},$$

где $\mu \in \mathcal{M}_1^\psi(S)$, $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ и $f_1, \ldots, f_m \in C_\psi(S)$, образуют базу ψ-слабой топологии пространства $\mathcal{M}_1^\psi(S)$. Отметим, что пространство $\mathcal{M}_1^\psi(S)$ является метризуемым и сепарабельным (см. [9], следствие A.44). Подробнее о пространстве $\mathcal{M}_1^\psi(S)$ и его свойствах можно прочитать, например, в [9] (§A.6, стр. 442–445).

На произведении пространств $S \times S$ рассмотрим калибровочную функцию

$$\overline{\psi}(x_1, x_2) := \psi(x_1) + \psi(x_2).$$

Определим соответствующее множество непрерывных тестовых функций $C_{\overline{\psi}}(S \times S)$ и пространство вероятностных мер $\mathcal{M}_1^{\overline{\psi}}(S \times S)$ снабженное $\overline{\psi}$-слабой топологией. Справедлива следующая знаменитая теорема.

Теорема 0.3 (Штрассен)**.** *Пусть множество $\Lambda \subseteq \mathcal{M}_1^{\overline{\psi}}(S \times S)$ выпукло и замкнуто в $\overline{\psi}$-слабой топологии, и пусть μ_1 и μ_2 — вероятностные меры из $\mathcal{M}_1^\psi(S)$. Мера $\overline{\mu} \in \Lambda$ с маргинальными распределениями μ_1 и μ_2 существует тогда и только тогда, когда для любых тестовых функций $f_1, f_2 \in C_\psi(S)$ выполнено*

$$\int_S f_1(x_1)\, \mu_1(dx_1) + \int_S f_2(x_2)\, \mu_2(dx_2) \le \sup_{\lambda \in \Lambda} \int_{S \times S} \big(f_1(x_1) + f_2(x_2)\big)\, \lambda(dx_1, dx_2).$$

Идея доказательства теоремы Штрассена состоит в использовании теоремы Хана–Банаха в форме теоремы об отделимости множеств в локально выпуклом топологическом пространстве. Однако, для применения теоремы Хана–Банаха требуется правильная предварительная топологическая постановка задачи — в этом состоит трудная часть обоснования. Доказательство теоремы Штрассена можно найти в оригинальной статье Штрассена [37] или, например, в книге Фёльмера и Шида (см. [9], гл. 2, §2.6, теорема 2.88).

Подчеркнем, что теорема Штрассена имеет центральную роль не только в обосновании теорем 0.1 и 0.2, но и при доказательстве основного утверждения нашего диссертационного исследования — теоремы 1.3.

Замечание 0.1. Отметим, что теоремы 0.1 и 0.2 могут быть переформулированы в терминах существования d-мерного случайного процесса с определенными свойствами. В самом деле, зафиксируем два момента времени $0 \le a < b < \infty$. Пусть на $\mathbb{R}^d$ заданы две борелевские вероятностные меры μ_1 и μ_2. Теорема 0.1 (см. пункты (i) и (ii)) дает необходимые и достаточные условия на меры μ_1 и μ_2 для того, чтобы существовал d-мерный случайный процесс X_t, $t \in [a; b]$, имеющий нестрого возрастающие траектории, для которого $\mathrm{Law}(X_a) = \mu_1$ и $\mathrm{Law}(X_b) = \mu_2$. Если же борелевские меры μ_1 и μ_2 на $\mathbb{R}^d$ имеют конечные математические ожидания, то в теореме 0.2 (см. пункты (i) и (ii)) содержатся необходимые и достаточные условия на меры μ_1 и μ_2 для того, чтобы существовал d-мерный мартингал X_t, $t \in [a; b]$, такой, что $\mathrm{Law}(X_a) = \mu_1$ и $\mathrm{Law}(X_b) = \mu_2$.

Описанные выше две конструкции относятся к ситуации, когда все компоненты d-мерного процесса X имеют «одну и ту же природу». Это, в какой-то мере, более простая ситуация. Более сложная ситуация возникает, когда компоненты процесса X имеют «различную природу». Например, когда одна из компонент процесса X некоторым образом строится по другой его компоненте. Примером такой ситуации является случай, когда первая компонента двумерного процесса X — это неотрицательный субмартингал класса (D), выходящий из нуля, а вторая компонента — это его компенсатор, т. е. предсказуемый возрастающий процесс из разложения Дуба–Мейера. Такая конструкция была рассмотрена в недавней работе 2017 г. (см. [4]). Другие конструкции такого рода содержатся, например, в классической работе К. Роджерса [35] и ряде других работ [15, 21, 11, 12, 27, 38].

Перейдем теперь непосредственно к задачам нашего исследования. Пусть задан стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+})$. Согласованный случайный процесс $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ называется *возрастающим процессом*, если все его траектории непрерывны справа, выходят из нуля и являются нестрого возрастающими функциями. Возрастающий процесс $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ называется *интегрируемым возрастающим процессом*, если $\mathbb{E}[X_\infty] < \infty$. Класс всех интегрируемых возрастающих процессов обозначается через $\mathcal{A}^+$.

Заметим, что всякий интегрируемый возрастающий процесс $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ является субмартингалом класса (D) (см. [5], §1.46). Следовательно, для процесса X справедливо разложение Дуба–Мейера (см. [5], §3.15), согласно которому существует единственный (с точностью до неразличимости) возрастающий интегрируемый предсказуемый процесс A с $A_0 = 0$, такой, что процесс $X - A$ является равномерно интегрируемым мартингалом. При этом процесс A, участвующий в этом разложении, будем называть *компенсатором* процесса X.

В упомянутой выше работе [4] введен *класс* $\mathbb{W}$ *вероятностных мер*, определенных на $(\mathbb{R}^2_+,\, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2_+))$. Он включает в себя все вероятностные меры μ, удовлетворяющие следующим условиям:

1) $\int_{\mathbb{R}^2_+} (x+y)\, \mu(dx,\, dy) < \infty$,

2) $\int_{\mathbb{R}^2_+} x\, \mu(dx,\, dy) = \int_{\mathbb{R}^2_+} y\, \mu(dx,\, dy)$,

3) $\forall c \geq 0\ \int_{\{y\leq c\}} x\, \mu(dx,\, dy) \leq \int_{\mathbb{R}^2_+} (y \wedge c)\, \mu(dx,\, dy)$.

Пусть $T \in [0; \infty]$ — произвольный фиксированный момент времени. В [4] показано, что мера μ принадлежит классу $\mathbb{W}$ в том и только в том случае, когда на некотором стохастическом базисе существует интегрируемый возрастающий процесс $(X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ с компенсатором $(A_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$, такой, что $\mathrm{Law}(X_T,\, A_T) = \mu$.

В нашей работе мы обобщаем постановку задачи, рассмотренную в [4]. Для этого мы вводим понятие обобщенного интегрируемого возрастающего процесса и его обобщенного компенсатора. Согласованный процесс $X = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ будем называть *обобщенным интегрируемым возрастающим процессом*, если он представим в виде $X_t = \xi_0 + X_t^\circ$, $t \in \mathbb{R}_+$, где ξ_0 — $\mathcal{F}_0$-измеримая интегрируемая случайная величина, а $X^\circ = (X_t^\circ)_{t \in \mathbb{R}_+}$ — интегрируемый возрастающий процесс в обычном смысле. По теореме Дуба–Мейера процесс X° имеет компенсатор $A^\circ = (A_t^\circ)_{t \in \mathbb{R}_+}$. Тогда *обобщенным компенсатором* обобщенного интегрируемого возрастающего процесса X назовем случайный процесс $A = (A_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ вида $A_t = \eta_0 + A_t^\circ$, где η_0 — произвольная $\mathcal{F}_0$-измеримая интегрируемая случайная величина. Таким образом, согласно данному определению, обобщенный компенсатор обобщенного интегрируемого возрастающего процесса определен однозначно с точностью до прибавления $\mathcal{F}_0$-измеримой интегрируемой случайной величины. Отметим, что всякий обобщенный компенсатор интегрируемого обобщенного возрастающего процесса сам является интегрируемым обобщенным возрастающим процессом.

Зафиксируем на луче $[0; \infty]$ два момента времени a и b. Не ограничивая общности, можно считать, что $a = 1$ и $b = 2$. Рассмотрим *класс вероятностных мер* Λ , включающий в себя все совместные распределения $\lambda := \mathrm{Law}\left(\left[\begin{smallmatrix} X_1 \\ A_1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} X_2 \\ A_2 \end{smallmatrix}\right]\right)$, где $(X_t)_{t \in [1;2]}$ — обобщенный интегрируемый возрастающий процесс, а $(A_t)_{t \in [1;2]}$ — его обобщенный компенсатор. Мы интересуемся тем, как устроен класс мер Λ.

Более конкретно, в данной работе мы решаем следующие две основные задачи. Первая из них — получить необходимые и достаточные условия того, что некоторая вероятностная мера λ, заданная на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, принадлежит классу мер Λ. Если принять во внимание определение класса Λ, то первую задачу можно переформулировать так: требуется найти необходимые и достаточные условия на меру λ для того, чтобы существовал обобщенный интегрируемый возрастающий процесс $(X_t)_{t \in [1;2]}$, имеющий обобщенный компенсатор $(A_t)_{t \in [1;2]}$, такой, что $\mathrm{Law}\left(\left[\begin{smallmatrix} X_1 \\ A_1 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} X_2 \\ A_2 \end{smallmatrix}\right]\right) = \lambda$.

Вторая задача ставится следующим образом. Пусть на $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ заданы две вероятностные меры μ_1 и μ_2, удовлетворяющие условиям $\int(|x|+|y|)\,d\mu_i < \infty$, $i = 1, 2$. Требуется получить необходимые и достаточные условия на меры μ_1 и μ_2, чтобы множество Λ содержало некоторую меру λ, для которой μ_1 и μ_2 являлись бы маргинальными распределениями, т.е. $\lambda(B \times \mathbb{R}^2) = \mu_1(B)$ и $\lambda(\mathbb{R}^2 \times B) = \mu_2(B)$ для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$. Иными словами, требуется выделить необходимые и достаточные условия на меры μ_1 и μ_2, чтобы существовал обобщенный интегрируемый возрастающий процесс $(X_t)_{t\in[1;2]}$, имеющий обобщенный компенсатор $(A_t)_{t\in[1;2]}$, такой, что $\mathrm{Law}\left[\begin{smallmatrix} X_1 \\ A_1 \end{smallmatrix}\right] = \mu_1$ и $\mathrm{Law}\left[\begin{smallmatrix} X_2 \\ A_2 \end{smallmatrix}\right] = \mu_2$.

Изучение свойств возрастающих процессов и их компенсаторов является важным направлением стохастического анализа. В частности, это связано с тем обстоятельством, что возрастающими процессами являются квадратические характеристики мартингалов и случайные замены времени. Изучение свойств возрастающих процессов и их компенсаторов имеет не только сугубо теоретический интерес, продиктованный внутренними нуждами развития стохастического анализа (см., например, [20], [24], [30], [6]). Эти объекты также нередко возникают и в прикладных направлениях, таких как финансовая математика. Так, например, в работе [22] рассматриваются квадратично интегрируемые семимартингалы и исследуются отношения выпуклого порядка между их квадратической и предсказуемой квадратической вариацией, т.е. между возрастающим процессом и его компенсатором. Результаты данной работы находят применение в вопросах ценообразования опционов, в которых базисным активом является реализованная дисперсия (realized variance options). Другим примером является статья [13], связанная с моделям кредитного риска, в которой рассматривается возрастающий процесс, порожденный моментом наступления дефолта компании (или государства), и его компенсатор.

Следует отметить, что постановки задач, рассматриваемые в диссертации, на данный момент имеют во многом теоретический характер, а вопросы, связанные с конкретными приложениями полученных результатов, требуют отдельного рассмотрения. По-видимому, это может стать одним из направлений наших дальнейших исследований.

Цель исследования. Основная цель исследования — изучение свойств введенного выше множества мер Λ, а также получение необходимых и достаточных условий существования меры $\lambda \in \Lambda$, имеющей заданные маргинальные распределения μ_1 и μ_2.

Научная новизна. Все основные результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1. Рассмотрим множество Λ всех краевых совместных распределений $\mathrm{Law}([X_a, A_a], [X_b, A_b])$ в моменты $t = a$ и $t = b$ интегрируемых возрастающих процессов $(X_t)_{t\in[a;b]}$ и их компенсаторов $(A_t)_{t\in[a;b]}$, которые в начальный момент времени стартуют из произвольного интегрируемого начального условия $[X_a, A_a]$. Нами установлены выпуклость и замкнутость множества Λ в ψ-слабой топологии с калибровочной функцией ψ линейного роста. Получены необходимые и достаточные условия того, что некоторая вероятностная мера λ, заданная на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2)$, принадлежит классу мер Λ. Основным результатом диссертации является следующий: для двух мер μ_a и μ_b, заданных на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, получены необходимые и достаточные условия того, что множество Λ содержит меру λ, для которой μ_a и μ_b являются маргинальными распределениями.

2. В статье [4] был введен класс $\mathbb{W}$ терминальных распределений интегрируемых возрастающих процессов и их компенсаторов. Нами показано, что распределения с конечным носителем, лежащие в $\mathbb{W}$, образуют плотное подмножество в множестве $\mathbb{W}$ в ψ-слабой топологи с калибровочной функцией линейного роста.

3. Нами доказана теорема о том, что совместное распределение произвольного локально интегрируемого возрастающего процесса и его компенсатора в терминальный момент времени можно реализовать как совместное терминальное распределение некоторого другого локально интегрируемого возрастающего процесса и его компенсатора, но при этом компенсатор уже является непрерывным.

Методы исследования. В работе применяются методы теории вероятностей, методы общей теории случайных процессов и, в частности, теории мартингалов, а также методы действительного и функционального анализа.

Теоретическая и практическая ценность. Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть полезны в теории случайных процессов, стохастическом анализе, а также в задачах финансовой математики.

Апробация работы. Результаты, относящиеся к диссертации, излагались на следующих конференциях и научных семинарах:

1. «Пятая Международная конференция по стохастическим методам (МКСМ-5)», Москва, 2020. Доклад: «Locally integrable increasing processes with continuous compensators» («Локально интегрируемые возрастающие процессы с непрерывными компенсаторами»);

2. Международная научная конференция «Осенний коллоквиум ЛСА 2020», Москва, 2020. Доклад: «Locally integrable increasing processes with continuous compensators» («Локально интегрируемые возрастающие процессы с непрерывными компенсаторами»);

3. Международная научная конференция «Осенний коллоквиум ЛСА 2021», Москва, 2021. Доклад: «On the denseness of the subset of discrete distributions in a certain set of two-dimensional distributions» («О плотности подмножества дискретных распределений в некотором множестве двумерных распределений»);

4. Научный семинар ЦЭМИ «Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании» под руководством к.ф.-м.н. В. И. Аркина, к.ф.-м.н. Т. А. Белкиной, д.ф.-м.н. Э. Л. Пресмана. Доклад: «Совместные распределения возрастающих процессов и их компенсаторов», Москва, 2021.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [1, 17, 16]. Все статьи опубликованы в журналах, индексируемых в библиографической и реферативной базе «Scopus»:

1) работа [1] опубликована без соавторов в журнале «Теория вероятностей и ее применения» (Q3);

2) статья [17] опубликована в соавторстве с научным руководителем в журнале «Modern Stochastics: Theory and Applications» (Q2–Q3);

3) работа [16] опубликована без соавторов в журнале «Theory of Stochastic Processes» (Q4).

Структура и объем работы. Диссертация изложена на 95 страницах и состоит из оглавления, списка обозначений, введения, трех глав, заключения и списка литературы, включающего 47 наименований.

Содержание работы

Глава 1 содержит основные результаты диссертации. Прежде всего, это теоремы 1.1 и 1.3. В теореме 1.1 получены необходимые и достаточные условия того, что некоторая вероятностная мера λ, заданная на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$, принадлежит введенному выше классу мер Λ. Приведем точную формулировку этой теоремы.

Теорема 1.1. *Вероятностная мера λ, определенная на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2)$, принадлежит классу Λ в том и только в том случае, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

$$\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \big(|x_1|+|y_1|+|x_2|+|y_2|\big)\,\lambda\left(\left[\begin{smallmatrix} dx_1\\ dy_1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix} dx_2\\ dy_2\end{smallmatrix}\right]\right)<\infty;$$

для любого $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ справедливо равенство

$$\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}(x_2-x_1)\cdot\mathbb{1}_{\left\{\left[\begin{smallmatrix} x_1\\ y_1\end{smallmatrix}\right]\in B\right\}}\,\lambda\left(\left[\begin{smallmatrix} dx_1\\ dy_1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix} dx_2\\ dy_2\end{smallmatrix}\right]\right)=$$
$$=\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}(y_2-y_1)\cdot\mathbb{1}_{\left\{\left[\begin{smallmatrix} x_1\\ y_1\end{smallmatrix}\right]\in B\right\}}\,\lambda\left(\left[\begin{smallmatrix} dx_1\\ dy_1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix} dx_2\\ dy_2\end{smallmatrix}\right]\right);$$

для любого $B\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ и всех $c\geq 0$ имеет место неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}(x_2-x_1)\cdot\mathbb{1}_{\{y_2-y_1\leq c\}}\cdot\mathbb{1}_{\left\{\left[\begin{smallmatrix} x_1\\ y_1\end{smallmatrix}\right]\in B\right\}}\,\lambda\left(\left[\begin{smallmatrix} dx_1\\ dy_1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix} dx_2\\ dy_2\end{smallmatrix}\right]\right)\leq$$
$$\leq\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2}\big[(y_2-y_1)\wedge c\big]\cdot\mathbb{1}_{\left\{\left[\begin{smallmatrix} x_1\\ y_1\end{smallmatrix}\right]\in B\right\}}\,\lambda\left(\left[\begin{smallmatrix} dx_1\\ dy_1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix} dx_2\\ dy_2\end{smallmatrix}\right]\right).$$

Если принять во внимание определение класса Λ, то становится ясно, что теорема 1.1 дает необходимые и достаточные условия на меру λ для того, чтобы существовал обобщенный интегрируемый возрастающий процесс $(X_t)_{t\in[1;2]}$, имеющий обобщенный компенсатор $(A_t)_{t\in[1;2]}$, такой, что $\mathrm{Law}\left(\left[\begin{smallmatrix} X_1\\ A_1\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix} X_2\\ A_2\end{smallmatrix}\right]\right)=\lambda$.

Теперь перейдем к теореме 1.3. Пусть на $(\mathbb{R}^2,\mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ заданы две вероятностные меры μ_1 и μ_2, удовлетворяющие условиям $\int(|x|+|y|)\,d\mu_i<\infty$, $i=1,2$. Теорема 1.3 содержит необходимые и достаточные условия того, что множество

Λ содержит некоторую меру λ, для которой μ_1 и μ_2 являются маргинальными распределениями. Для того чтобы дать точную формулировку теоремы 1.3 определим следующий класс тестовых функций.

Определение 1.1. Введем *класс $\mathcal{K}$ полунепрерывных сверху тестовых функций* $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, которые удовлетворяют следующим двум условиям:

1) $\forall \varphi \in \mathcal{K}\ \ \exists c \in \mathbb{R}\ \ \forall x, y \in \mathbb{R}\quad \varphi(x, y) \le c \cdot \psi(x, y)$, где $\psi(x, y) := 1 + |x| + |y|$;

2) для любых $x, y \in \mathbb{R}$ и любой вероятностной меры $\mu \in \mathbb{W}$ имеет место

$$\varphi(x, y) \le \int_{\mathbb{R}^2_+} \varphi(x + u, y + v)\, \mu(du, dv).$$

Теорема 1.3. *Пусть на $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ заданы две вероятностные меры μ_1 и μ_2, удовлетворяющие условиям $\int(|x| + |y|)\, d\mu_i < \infty$, $i = 1, 2$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *на некотором стохастическом базисе найдется такой обобщенный интегрируемый возрастающий процесс $X = (X_t)_{t\in[1;2]}$ с обобщенным компенсатором $A = (A_t)_{t\in[1;2]}$, что $\operatorname{Law}\left[\begin{smallmatrix} X_1 \\ A_1 \end{smallmatrix}\right] = \mu_1$ и $\operatorname{Law}\left[\begin{smallmatrix} X_2 \\ A_2 \end{smallmatrix}\right] = \mu_2$;*

(b) *существует мера $\lambda \in \Lambda$, маргинальные распределения которой есть μ_1 и μ_2, т.е. $\lambda(B \times \mathbb{R}^2) = \mu_1(B)$ и $\lambda(\mathbb{R}^2 \times B) = \mu_2(B)$ для любого $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$;*

(c) *$\int \varphi(x, y)\, d\mu_1 \le \int \varphi(x, y)\, d\mu_2$ для любой тестовой функции $\varphi \in \mathcal{K}$.*

Следует отметить, что поскольку оба процесса $(X_t)_{t\in[1;2]}$ и $(A_t)_{t\in[1;2]}$ из теоремы 1.3 имеют нестрого возрастающие траектории, в силу первой части замечания 0.1, класс тестовых функций $\mathcal{K}$ должен содержать все ограниченные борелевские функции $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, такие, что $f(x_1, y_1) \le f(x_2, y_2)$, если $x_1 \le x_2$ и $y_1 \le y_2$. Более того, учитывая, что $X_t - A_t$, $t \in [1; 2]$, является мартингалом, согласно второй части замечания 0.1, класс $\mathcal{K}$ содержит все функции $g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ вида $g(x, y) = h(x - y)$, где $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — выпуклая функция. Таким образом, мы приходим к тому, что класс $\mathcal{K}$ содержит конус $\mathcal{C}$, порожденный всеми указанными выше функциями f и g. При этом, оказывается, что существует функция φ (см. пример из параграфа 1.6 главы 1 диссертации), которая принадлежит классу $\mathcal{K}$, но не принадлежит конусу $\mathcal{C}$. Значит, класс тестовых функций $\mathcal{K}$ шире, чем конус $\mathcal{C}$. Это замечание поясняет нетривиальность решаемой в диссертации задачи.

Несмотря на то, что определение 1.1 содержит весьма неконструктивное описание класса тестовых функций $\mathcal{K}$, оно оказалось очень удобным при доказательстве теоремы 1.3. Тем не менее, пользоваться этим определением при проверке конкретных функций на принадлежность классу $\mathcal{K}$ достаточно затруднительно. Поэтому хотелось бы иметь описание класса $\mathcal{K}$ с более легко проверяемыми характеризующими условиями. Следующая теорема дает такое описание.

Теорема 1.4. *Пусть полунепрерывная сверху функция $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию 1) из определения класса $\mathcal{K}$. Тогда следующие условия равносильны:*

(i) *функция φ удовлетворяет условию 2) из определения класса $\mathcal{K}$;*

(ii) *для любых точек $x, y \in \mathbb{R}$, любого действительного числа $k > 0$ и произвольного действительного числа $h \geq k$ выполнено неравенство*

$$0 \leq \frac{\varphi(x, y+k) - \varphi(x, y)}{k} + \frac{\varphi(x+h, y+k) - \varphi(x, y+k)}{h};$$

(iii) *для любых точек $x, y \in \mathbb{R}$, любого действительного числа $k > 0$, и произвольных $x_j \geq 0$, $p_j \geq 0$, таких, что $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$ и $\sum_{j=1}^{n} x_j p_j = k$, выполнено неравенство*

$$\varphi(x, y) \leq \sum_{j=1}^{n} p_j \varphi(x + x_j, y + k).$$

Иными словами, в определении класса $\mathcal{K}$ условие 2) можно заменить на любое из условий (ii) или (iii) из теоремы 1.4. Отметим, что условие (ii) означает, что сумма тангенсов углов в соответствующих прямоугольных треугольниках должна быть неотрицательна. В частности, из условия (ii) при $h = k$ следует, что функция φ растет «по диагоналям», т.е. для любых $x, y \in \mathbb{R}$ и любого действительного $k > 0$ справедливо неравенство $\varphi(x, y) \leq \varphi(x + k, y + k)$.

Главы 2 и 3 содержат вспомогательные утверждения, необходимые для обоснования основных результатов диссертации. Вместе с тем, следует отметить, что некоторые из этих вспомогательных утверждений имеют самостоятельную ценность.

Глава 2 содержит очень важное в техническом плане утверждение — теорему 2.1, которая необходима при доказательстве основной теоремы 1.3.

Прежде, чем привести точную формулировку теоремы 2.1 дадим некоторые определения. В множестве мер $\mathbb{W}$ выделим подмножество *простых мер* $\mathbb{W}_{\text{simp}}$ и подмножество *дискретных мер* $\mathbb{W}_{\text{disc}}$. Скажем, что $\mu \in \mathbb{W}_{\text{simp}}$ (соответственно $\mu \in \mathbb{W}_{\text{disc}}$), если $\mu \in \mathbb{W}$, мера μ имеет вид

$$\mu(dx,\, dy) = \sum_{j \in J} p_j \cdot \delta_{\left[\begin{smallmatrix} x_j \\ a_j \end{smallmatrix}\right]}(dx,\, dy),$$

а множество J — конечно (множество J не более чем счетно), где $p_j \geq 0$, $\sum_{j \in J} p_j = 1$, а $\delta_{\left[\begin{smallmatrix} x_j \\ a_j \end{smallmatrix}\right]}(dx,\, dy)$ — мера Дирака, сосредоточенная в точке $\left[\begin{smallmatrix} x_j \\ a_j \end{smallmatrix}\right] \in \mathbb{R}^2$.

На множестве $S = \mathbb{R}^2$ зададим калибровочную функцию $\psi(x, y) = 1 + |x| + |y|$ и рассмотрим пространство мер $\mathcal{M}_1^{\psi}(\mathbb{R}^2)$, определение которого приведено выше перед формулировкой теоремы Штрассена. Мы установили следующий факт.

Теорема 2.1. (a) *Для любой вероятностной меры $\mu \in \mathbb{W}$ найдется последовательность дискретных вероятностных мер $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{W}_{\text{disc}}$, которая сходится к мере μ в ψ-слабой топологии пространства $\mathcal{M}_1^{\psi}(\mathbb{R}^2)$, т. е. для любой тестовой функции $f \in C_{\psi}(\mathbb{R}^2)$ имеет место*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f d\mu_n \to \int_{\mathbb{R}^2} f d\mu \quad \textit{при } n \to \infty.$$

(b) *Для любой вероятностной меры $\mu \in \mathbb{W}$ найдется последовательность простых вероятностных мер $(\mu_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{W}_{\text{simp}}$, которая сходится к мере μ в ψ-слабой топологии пространства $\mathcal{M}_1^{\psi}(\mathbb{R}^2)$.*

Поясним, почему теорема 2.1 не является тривиальной. Из рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы 2.1, видно, что случай, когда соотношение 3) (из определения класса $\mathbb{W}$) выполнено как равенство не для всех $c \geq 0$, может быть сведен к ситуации, когда в 3) имеет место равенство для всех $c \geq 0$. Однако дискретизация мер из $\mathbb{W}$, для которых в 3) имеет место равенство для всех $c \geq 0$, может вывести из класса $\mathbb{W}$. Более того, легко видеть непосредственно, что в классе мер из $\mathbb{W}$, для которых в 3) имеет место равенство для всех $c \geq 0$, не может быть дискретных мер за исключением меры $\delta_{(0,0)}$. Например, пусть $V = 1$. Тогда из равенства в 3) для всех $c \geq 0$ следует, что W имеет экспоненциальное распределие параметром 1. Однако уже простейшая дискретизация W в виде

$$\hat{W} := \mathbb{E}[W | W \leq a] \mathbb{1}\{W \leq a\} + \mathbb{E}[W | W > a] \mathbb{1}\{W > a\},$$

где $a > 0$, приводит к тому, что распределение $\mathrm{Law}(V, \hat{W})$ не принадлежит классу $\mathbb{W}$. Это замечание объясняет, почему утверждение теоремы 2.1 не является тривиальным.

В **главе 3** нами доказана теорема о том, что совместное распределение произвольного локально интегрируемого возрастающего процесса и его компенсатора в терминальный момент времени можно реализовать как совместное терминальное распределение некоторого другого локально интегрируемого возрастающего процесса и его компенсатора, но при этом компенсатор уже является непрерывным. Приведем точную формулировку этого результата.

Теорема 3.1. *Для любого локально интегрируемого возрастающего процесса $X^\circ = (X_t^\circ)_{t\in[0;\infty)}$ с компенсатором $A^\circ = (A_t^\circ)_{t\in[0;\infty)}$ на некотором стохастическом базисе найдется другой локально интегрируемый возрастающий процесс $X^\star = (X_t^\star)_{t\in[0;\infty)}$ с компенсатором $A^\star = (A_t^\star)_{t\in[0;\infty)}$, такой, что выполнено условие*

$$\mathrm{Law}\begin{bmatrix} X_\infty^\star \\ A_\infty^\star \end{bmatrix} = \mathrm{Law}\begin{bmatrix} X_\infty^\circ \\ A_\infty^\circ \end{bmatrix},$$

и при этом компенсатор $A^\star$ является непрерывным.

Следует отметить, что сама теорема 3.1 не используется при доказательстве основных теорем диссертации, — теорем 1.1 и 1.3. Тем не менее, эта теорема представляет самостоятельный интерес, о чем будет сказано ниже. Кроме этого, при обосновании теоремы 3.1 нами была получена важная лемма 3.3, которая, в свою очередь, используется при доказательстве теоремы 1.1.

Теперь скажем несколько слов о теореме 3.1. Отметим, что на данный момент описание класса $\mathbb{W}_{\mathrm{loc}}$ возможных распределений случайного вектора $(X_\infty^\circ, A_\infty^\circ)$ из теоремы 3.1 неизвестно. В интегрируемом случае такое описание содержится в работе [4], и оно сводится к классу распределений $\mathbb{W}$. Условие 3) из определения класса $\mathbb{W}$, как и в интегрируемом случае, остается необходимым для принадлежности меры μ классу $\mathbb{W}_{\mathrm{loc}}$. Достаточность условия 3) доказана при дополнительном предположении (см. условие (3.10) из утверждения 3.6 в [4]), которое заменяет условия 1) и 2) из определения класса $\mathbb{W}$. При этом оказывается, что это дополнительное предположение не является необходимым (см. теорема 1 [2]). Мы надеемся, что наша теорема 3.1 помогает приблизиться к решению задачи описания класса возможных распределений случайного вектора $(X_\infty^\circ, A_\infty^\circ)$ в локально интегрируемом случае, или, по крайней мере, помогает упростить это решение.

Благодарности. Работа выполнена под руководством доктора физико-математических наук Александра Александровича Гущина, которому автор выражает искреннюю благодарность за постановку задачи и постоянную поддержку в ходе написания диссертации. Автор также хотел бы поблагодарить Валентина Дмитриевича Конакова и других сотрудников международной лаборатории стохастического анализа и его приложений НИУ ВШЭ за полезные обсуждения промежуточных результатов диссертационного исследования на научных семинарах и конференциях, проводимых лабораторией.

Литература

[1] Борзых Д. А. Совместные распределения обобщенных интегрируемых возрастающих процессов и их обобщенных компенсаторов. *Теория вероятностей и ее применения.* (2022) (в печати).

[2] Гущин А. А. О возможных соотношениях между возрастающим процессом и его компенсатором в неинтегрируемом случае. *УМН* **73** (5) (2018).

[3] Гущин А. А. Совместное распределение макс-непрерывного локального субмартингала и его максимума. *Теория вероятностей и ее применения.* **65** (4), 693–709 (2020).

[4] Гущин А. А. Совместное распределение терминальных значений неотрицательного субмартингала и его компенсатора. *Теория вероятностей и ее применения.* **62** (2), 267–291 (2017).

[5] Жакод Ж., Ширяев А. Н. *Предельные теоремы для случайных процессов,* т. 1. М., Физматлит (1994).

[6] Кабанов Ю. М., Липцер Р. Ш., Ширяев А. Н. Слабая и сильная сходимость распределений считающих процессов. *Теория вероятностей и ее применения.* **28** (2), 288–319 (1983).

[7] Маршалл А., Олкин И. *Неравенства: теория мажоризации и ее приложения.* М., Мир (1983).

[8] Невё Ж. *Математические основы теории вероятностей.* М., Мир (1969).

[9] Фёльмер Г., Шид А. *Введение в стохастические финансы. Дискретное время.* М., МЦНМО (2008).

[10] Ash R. B., Doléans-Dade C. A. *Probability & Measure Theory.* Academic Press (1999).

[11] Azema J., Yor M. Une solution simple au problème de Skorokhod. *Séminaire des Probabilités, v. XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/1978), Lecture Notes in Math.* **721**, Springer, Berlin, 90–115 (1979).

[12] Azema J., Yor. M. Le problème de Skorokhod: compléments à "Une solution simple au problème de Skorokhod". *Séminaire des Probabilités, v. XIII (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1977/1978), Lecture Notes in Math.* **721**, Springer, Berlin, 625–633 (1979).

[13] Bedini M. L., Buckdahn R., Engelbert H.-J. On the compensator of the default process in an information-based model. *Probability, Uncertainty and Quantitative Risk.* **2** (2017).

[14] Blackwell D. Equivalent comparisons of experiments. *Ann. Math. Statist.* **24**, 265–272 (1953).

[15] Blackwell D., Dubins L. E. A converse to the dominated convergence theorem. *Illinois J. Math.* **7**, 508–514 (1963).

[16] Borzykh D. A. On a property of joint terminal distributions of locally integrable increasing processes and their compensators. *Theory of Stochastic Processes.* **23(39)**:2, 7–20 (2018).

[17] Borzykh D. A., Gushchin A. A. On the denseness of the subset of discrete distributions in a certain set of two-dimensional distributions. *Modern Stochastics: Theory and Applications.* **9** (3), (2022).

[18] Cartier P., Fell J. M. G., Meyer P-A. Comparaison des mesures portées par un ensemble convexe compact. Bulletin de la Société Mathématique de France, T. 92, 435–445 (1964).

[19] Choquet G. Les cônes convexes faiblement complets dans l'analyse. In: Proc. Internat. Congr. Mathematicians (Stockholm 1962) 317–330. Inst. Mittag-Leffler 1963.

[20] Dellacherie C. Un exemple de la théorie générale des processus. In: Séminaire de Probabilités, IV. Lecture Notes in Math., vol. 124, pp. 60–70. Springer (1970).

[21] Dubins L. E., Gilat D. On the distribution of maxima of martingales. *Proc. Amer. Math. Soc.* **68** (3), 337–338 (1978).

[22] Griessler C., Keller-Ressel M. Convex order of discrete, continuous, and predictable quadratic variation and Applications to Options on Variance. *SIAM J. Financial Math.* **5**, 1–19 (2014).

[23] Hardy G. H., Littlewood J. E., Pólya G. *Inequalities.* Cambridge, Cambridge University Press (1934).

[24] Jacod J. Multivariate point processes: predictable projection, Radon-Nikodým derivatives, representation of martingales. Z. Wahrscheinlichkeitstheor. Verw. Geb. **31**, 235–253 (1975).

[25] Kamae T., Krengel U., O'Brien G. L. Stochastic Inequalities on Partially Ordered Spaces. *Ann. Probab.* **5** (6), 899–912 (1977).

[26] Kellerer H. G. Duality theorems for marginal problems. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **67**, 399–432 (1984).

[27] Kertz R. P., Rösler U. Martingales with given maxima and terminal distributions. *Israel J. Math.* **69** (2), 173–192 (1990).

[28] Klenke A. *Probability Theory: A Comprehensive Course.* Springer (2014).

[29] Lehmann E. L. Ordered Families of Distributions. *Ann. Math. Statist.* **26** (3), 399–419 (1955).

[30] Lenglart É., Lépingle D., Pratelli M. "Présentation unifiée de certaines inégalités de la théorie des martingales", Séminaire des probabilités, v. XIV (Paris, 1978/1979), Lecture Notes in Math., **784**, Springer, Berlin, 1980, 26–48.

[31] Mann H. B., Whitney D. R. On a test of whether one of two random variables is stochastically larger than the other. *Ann. Math. Statist.* **18**, 50–60 (1947).

[32] Müller A., Stoyan D. *Comparison Methods for Stochastic Models and Risks.* Wiley (2002).

[33] Müller A., Rüschendorf L. On the optimal stopping values induced by general dependence structures. *J. Appl. Probab.* **38**, 672–684 (2001).

[34] Ramachandran D., Rüschendorf L. A general duality theorem for marginal problems. *Probab. Theory Related Fields* **101**, 311–319 (1995).

[35] Rogers L. C. G. The joint law of the maximum and terminal value of a martingale. *Probab. Theory Related Fields* **95** (4), 451–466 (1993).

[36] Skala H. J. The existence of probability measures with given marginals. *Ann. Probab.* **21**, 136–142 (1993).

[37] Strassen V. The existence of probability measures with given marginals. *Ann. Math. Statist.* **36**, 423–439 (1965).

[38] Vallois P. Sur la loi du maximum et du temps local d'une martingale continue uniformément intégrable. *Proc. London Math. Soc. (3)* **69** (2), 399–427 (1994).