Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Миронов Михаил Константинович

Лефшецевы исключительные наборы в S_k-эквивариантных категориях $(\mathbb{P}^n)^k$

**Резюме диссертации на соискание
ученой степени кандидата
математических наук**

Научный руководитель:
Доктор физико-математических наук,
Профессор Российской Академии Наук
Кузнецов Александр Геннадьевич

Москва – 2022

Ограниченные производные категории когерентных пучков являются главным гомологическим инвариантом алгебраического многообразия, который содержит наиболее важную информацию о его геометрии. Множество недавних исследовательских работ сосредоточены на этих объектах. Один из способов описания этого объекта - через исключительные наборы.

Напомним, что объект E из $\mathbb{C}$-линейной триангулированной категории $\mathcal{T}$ является *исключительным*, если $\mathrm{Ext}^0(E,E)=\mathbb{C}$ и $\mathrm{Ext}^i(E,E)=0$ при $i\neq 0$. Более того, набор $E_1,\ldots,E_r$ объектов из $\mathcal{T}$ является *исключительным набором* если каждый E_i это исключительный объект и $\mathrm{Ext}^\bullet(E_i,E_j)=0$ при $i>j$. Исключительный набор называется *полным*, если наименьшая полная триангулированная подкатегория $\mathcal{T}$, содержащая все E_i, совпадает с $\mathcal{T}$.

В последнее время особый класс исключительных наборов привлекает много внимания. Напомним, что исключительный набор $E_1,\ldots,E_r$ в ограниченной производной категории когерентных пучков $\mathcal{D}(X)$ гладкого проективного многообразия X является *Лефшецевым* по отношению к линейному расслоению $\mathcal{L}$ если найдётся разбиение $r=r_0+r_1+\cdots+r_d$, $r_0\geq r_1\geq\cdots\geq r_d$ такое, что

$$E_{r_0+r_1+\cdots+r_{i-1}+t}\cong E_t\otimes\mathcal{L}^i \qquad \text{для всех } 1\leq t\leq r_i \qquad \text{и } 1\leq i\leq d.$$

Как видно из определения, Лефшецев по отношению к заданному линейному расслоению $\mathcal{L}$ набор определяется его *стартовым блоком* $E_1,\ldots,E_{r_0}$ и разбиением $(r_0,r_1,\ldots,r_d)$. Менее очевидным, но при этом верным, является то, что, если Лефшецев набор полный, то тогда само разбиение определяется стартовым блоком набора [6, Лемма 4.5]. Таким образом, возможность быть дополненым до Лефшецева набора это просто свойство исключительного набора $E_1,\ldots,E_{r_0}$.

Отсюда следует, что существует естественный частичный порядок на множестве Лефшецевых наборов в $\mathcal{D}(X)$ по отношению к линейному расслоению $\mathcal{L}$ — Лефшецев набор со стартовым блоком $E_1,\ldots,E_{r_0}$ *меньше* Лефшецевого набора со стартовым блоком $E'_1,\ldots,E'_{s_0}$, если $E_1,\ldots,E_{r_0}$ является поднабором $E'_1,\ldots,E'_{s_0}$, см. [9, Определение 1.4].

Лефшецев набор $E_1,\ldots,E_r$ с разбиением $r_0,r_1,\ldots,r_d$ называется *прямоугольным длины* $d+1$, если $r_0=r_1=\cdots=r_d$ (или, что то же самое, если диаграмма Юнга, представляющая разбиение, это прямоугольник длины $d+1$). Конечно, необходимым условием существования прямоугольного Лефшецоевого набора в $\mathcal{D}(X)$ является факторизация

$$\mathrm{rk}\left(K_0(\mathcal{D}(X))\right)=r_0(d+1) \tag{1.1}$$

для ранга группы Гротендика X. С другой стороны, если существует разложение прямоугольного Лефшецевого набора в $\mathcal{D}(X)$, и если его длина $d+1$ удовлетворяет свойству, что $\mathcal{L}^{d+1} \cong \omega_X^{-1}$, где ω_X каноническое расслоение X, такое что $d+1$ равняется *индексу* X по отношению к $\mathcal{L}$, тогда этот набор автоматически является минимальным (это следует из двойственности Серра, см. [9, Раздел 2.1]).

У Лефшецевых наборов есть множество полезных свойств и они важны для гомологической проективной двойственности и в разрешении особенностей [7]. Особенно хороши и важны прямоугольные (соответственно минимальные) Лефшецевы наборы. Поэтому следующая задача очень интересна.

Задача 1.1. *Дано гладкое проективное многообразие X и линейное расслоение $\mathcal{L}$, постройте полный прямоугольный Лефшецев набор в $\mathcal{D}(X)$ по отношению к $\mathcal{L}$ длины равной индексу X, или, если вышесказанное невозможно, минимальный Лефшецев набор.*

Для многих многообразий X задача выше решена, например для проективных пространств и грассманианов [2]. В диссертации мы рассматриваем Задачу 1.1 для многообразий вида

$$X = X_k^n := \underbrace{\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n \times \cdots \times \mathbb{P}^n}_{k \text{ повторений}},$$

но заменяем категорию $\mathcal{D}(X_k^n)$ эквивариантной производной категорией $\mathcal{D}_{S_k}(X_k^n)$ по отношению к естественному действию симметрических групп S_k (по перестановке множителей). Линейное расслоение $\mathcal{L}$ здесь, конечно, это обильное расслоение $\mathcal{O}(1,1,\ldots,1)$ группы Пикара $\mathrm{Pic}(X_k^n)^{S_k}$. Также заметим, что индекс X_k^n по отношению к $\mathcal{L}$ равен $n+1$, поэтому цель этой диссертации может быть сформулирована следующим образом.

Задача 1.2. *Найти полный прямоугольный Лефшецев набор длины $n+1$ в $\mathcal{D}_{S_k}(X_k^n)$ по отношению к линейному расслоению $\mathcal{O}(1,1,\ldots,1)$ или минимальный Лефшецев набор, если вышесказанное невозможно.*

Можно заметить, что без перехода к эквивариантной категории, эта задача становится тривиальной. Чтобы построить прямоугольный Лефшецев набор в $\mathcal{D}(X_k^n)$ можно выбрать любой полный исключительный набор в $\mathcal{D}(X_{k-1}^n)$ и рассмотреть его пулбэк на X_k^n как стартовый блок. Несложно проверить, что это произведение расширяется до прямоугольного Лефшецевого набора длины $n+1$. Однако, S_k-симметрия этой конструкции нарушается, и этот вариант не может быть реализован в эквивариантной категории.

При $k=1$ Задача 1.2 тривиальна (искомый набор это исключительный набор $\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \ldots, \mathcal{O}(n)$ линейных расслоений на $\mathbb{P}^n$). Более того, при $k=2$ Задача 1.2 была в полной мере рассмотрена и решена [11].

Главный результат этой диссертации это частное решение Задачи 1.2.

Для начала, мы построим прямоугольный S_k-инвариантный исключительный Лефшецев набор линейных расслоений $\mathcal{D}(X_k^n)$, мощность которых в случае взаимно простых чисел k и $n+1$ равна рангу группы Гротендика X_k^n (по теореме Елагина это даёт исключительный набор в эквивариантной категории, длина которого равна рангу группы Гротендика). Первый блок набора определяется как $\langle \mathcal{O}(e) \rangle_{e \in \mathbb{E}_k^n}$, где

$$\mathbb{E}_k^n = \left\{ S_k \cdot e \;\middle|\; e_1 \geq \cdots \geq e_k = 0 \text{ и } e_i \leq \frac{h(k-i)}{k} \right\} \subset \mathbb{Z}^k. \tag{1.2}$$

Таким образом, естественно ожидать, что этот набор полный и (в случае взаимно простых чисел) является решением Задачи 1.2. Однако, в общем случае мы доказываем его полноту.

Наш второй главный результат это доказательство полноты набора, о котором говорилось выше, при $k=3$ и $n=3p$ или $n=3p+1$ (это обеспечивает тот факт, что k и $n+1$ взаимно простые).

Мы также сделаем шаг в направлении для случая не взаимно простых k и $n+1$, построив минимальный S_3-инвариантный исключительный Лефшецев набор в $\mathcal{D}(X_3^2)$ (включая доказательство его полноты).

Помимо этого, мы также решаем Задачу 1.2 для $n=1$, те есть, строим прямоугольное S_k-инвариантный Лефшецев набор длины 2 в $\mathcal{D}(X_k^1)$ в случае, когда k нечётное, и минимальный Лефшецев набор, когда k чётное. Однако, этот случай намного легче, чем случай $k=3$ рассмотренный выше.

Интересная особенность Лефшецевых наборов, которые мы строим, заключается в том, что они сильно напоминают минимальные Лефшецевые наборы в производных категориях грассманианов $\mathrm{Gr}(k, n+1+k)$, построенных Антоном Фонарёвым, см. [2]. Может быть интересно понять взаимосвязь между ними, с одной стороны, потому что это предлагает возможное решение Задачи 1.2 для других значениях k (через рассмотрение аналогичных наборов Фонарёва), и с другой стороны, решение Задачи 1.2 может помочь в решении задачи с грассманианами $\mathrm{Gr}(k, n)$ в случае, когда k и n не являются взаимно простыми (в этом случае нет прямоугольного набора на грассманианах, и минимальный набор не известен).

Результаты диссертации опубликованы в двух статьях

1. M. Mironov, *Lefschetz exceptional collections in S_k-equivariant categories of* $(\mathbb{P}^n)^k$ (Лефшецевы исключительные наборы в S_k-эквивариантных категориях $(\mathbb{P}^n)^k$), European Journal of Mathematics 7 (2021), pages 1182–1208

2. M. Mironov, *S_2-invariant exceptional collections on* $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$ (S_2-инвариантные исключительные наборы на $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^n$), Mathemaical Notes 111 (2022), pages 316–319

Список литературы

[1] A. Elagin, *Semiorthogonal decompositions of derived categories of equivariant coherent sheaves*, Izv Ross. Akad. Nauk: Mathematics, 73:5 (2009), 893–920.

[2] A. Fonarev, *Minimal Lefschetz decompositions of the derived categories for Grassmannians*, Izvestiya: Mathematics 77:5 (2013), 203–224.

[3] W. Fulton. *Young tableaux*, Cambridge University Press. Lond. Math. Soc. Student Texts 35. 1997.

[4] W. Fulton, J. Harris. *Representation theory*, Grad. Texts in Math. Springer-Verlag. 1991.

[5] M. Kapranov, *On the derived category of coherent sheaves on Grassmann manifolds*, (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat., 48:1 (1984), 192–202.

[6] A. Kuznetsov, *Homological projective duality*, Publications Mathématiques de l'IHES 105 (2007), 157–220.

[7] A. Kuznetsov, *Lefschetz decompositions and categorical resolutions of singularities*, Sel. Math., New Ser., 13 (2007), no. 4 , 661–696.

[8] A. Kuznetsov, *Exceptional collections for Grassmannians of isotropic lines*, Proceedings of the London Mathematical Society, V. 97 (2008), N. 1, 155–182.

[9] A. Kuznetsov, M. Smirnov, *On residual categories for Grassmannians*, https://arxiv.org/abs/1802.08097.

[10] M. Mironov, *Lefschetz exceptional collections in S_k-equivariant categories of $(\mathbb{P}^n)^k$*, European Journal of Mathematics (2021)

[11] J. V. Rennemo, "The homological projective dual of $Sym^2(P)(V)$", PhD Thesis (2015), https://arxiv.org/abs/1509.04107.

[12] A. Samokhin. *Some remarks on the derived categories of coherent sheaves on homogeneous spaces*, J. Lond. Math. Soc. 2007. Vol. 76, 122–134.