

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования «Национальный
исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Анастасия Андреевна Шепелевцева
«Инварианты и модели
пространств параметров для
рациональных отображений»

Резюме диссертации на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, PhD
профессор
Тиморин Владлен Анатольевич

Москва – 2022

Основной областью исследований в данной диссертации является голоморфная динамика. В голоморфной динамике мы имеем дело с динамическими системами, заданными аналитическими функциями, и поэтому эти динамические системы могут быть «комплексифицированы». С комплексными числами работать проще, чем с вещественными числами. Это делает методы голоморфной динамики столь важными. В этой диссертации мы изучаем голоморфные рациональные функции от одной переменной. Мы фокусируемся на различных классах этих функций и методах их классификаций и параметризаций с помощью геометрических объектов, используя, в основном, топологический подход.

1 Инвариантные деревья для отображений Терстона

Мы рассматриваем 1-мерные голоморфные рациональные функции $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Напомним, что *критическими точками для них* являются точки, в которых производная равна нулю или не определена. Образы критических точек называются *критическими значениями*. Первый класс интересующих нас 1-мерных голоморфных рациональных функций — это класс *посткритически конечных* рациональных функций, которые также называются *отображениями Терстона*. Напомним, что *степенью рациональной функции* называется максимальная из степеней числителя и знаменателя.

Определение 1.1. Обозначим множество критических точек f как $C(f)$. Тогда следующее объединение $P(f) := \bigcup_{n=1}^{\infty} f^n(C(f))$ называется *посткритическим множеством f* . Если $P(f)$ конечное множество, то f называется *посткритически конечным* (или *отображениями Терстона*).

Данные отображения Терстона были введены У. Терстоном в его работе, посвященной изучению рациональных отображений. Главный знаменитый результат этой работы — *теорема о характеристизации Терстона* (см. [DN93]). Эта теорема позволяет изучать алгебраические объекты (рациональные функции) топологическими методами. Точнее, мы можем рассматривать рациональные отображения как чисто топологические объекты — разветвленные накрытия. Оказывается, на классе отображений Терстона существует естественное отношение эквивалентности,

которое называется эквивалентностью Терстона, такое, что различные рациональные функции почти никогда не эквивалентны. Формально:

Определение 1.2. Два отображения Терстона $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ и $g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ называются *эквивалентными по Терстону*, если существуют два сохраняющих ориентацию гомеоморфизма $h_0, h_1 : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ таких, что $h_0 \circ f = g \circ h_1$ и таких, что h_0 и h_1 гомотопны по модулю посткритического множества $P(f)$.

Неформально эквивалентность Терстона можно рассматривать как комбинацию *топологической сопряженности* (наличие гомеоморфизма $h : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$, такого, что $h \circ f = g \circ h$) на множестве закритических точек и «возмущенной» топологической сопряженности на остальной поверхности.

Из формального определения видно, что *топологическая сопряженность* является частным случаем эквивалентности Терстона.

Таким образом, теорема Терстона об эквивалентности — очень мощный инструмент, позволяющий понять, эквивалентно ли отображение Терстона рациональной функции. Критерий этой эквивалентности зависит от существования чисто топологического объекта: *комбинаторного препятствия*, представляющего собой некоторое особое объединение простых кривых вне множества *посткритических точек*.

Теорема Терстона показывает, что отображение Терстона эквивалентно рациональной функции тогда и только тогда, когда нет препятствий. Но показать «несуществование» препятствия — это очень сложная и нетривиальная проблема, поскольку она фактически означает, что мы должны проверять бесконечно много вариантов наборов кривых. Таким образом, даже при существовании теоремы о классификации, общая проблема классификации отображений Терстона с точностью до эквивалентности остается важной проблемой. Этой проблеме были посвящены такие недавние работы, как например [BN06, BD17, CG+15, KL18, Hlu17]. Нас будут интересовать отображения Терстона степени 2.

Мы рассматриваем рациональную функцию как разветвленное накрытие сферы, поэтому мы пишем \mathbb{S}^2 для обозначения ориентированной топологической 2-сферы. Одна из целей нашей работы — свести динамику на сфере к динамике на чисто комбинаторном объекте: *графе на сфере*, который представляет собой в точности одномерный клеточный комплекс, вложенный в \mathbb{S}^2 . Под его *вершинами* и *ребрами* мы подразумеваем 0-клетки и 1-клетки соответственно. Тогда для графа G обозначим

множество его вершин как $V(G)$, а множество его ребер — как $E(G)$. *Дерево* — это односвязный граф. Будем говорить, что вершина дерева является *концевой*, если к ней примыкает ровно одно ребро. Для вершины x дерева $T \subset \mathbb{S}^2$ и ребра e дерева T , если x принадлежит замыканию e , то x называется *инцидентной* с e . В этом случае e также *инцидентна* с x . Вершина a является неконцевой, если и только если её дополнение $T \setminus \{a\}$ состоит из как минимум двух связных компонент. Вершины графа T , обладающие последним свойством, называются *точками ветвления*. Пусть $P \subset \mathbb{S}^2$ — некоторое конечное подмножество. Тогда дерево T в \mathbb{S}^2 , удовлетворяющее свойству $P \subset V(T)$, называется *остовным деревом* для P , если $V(T) - P$ состоит из точек ветвления.

Определение 1.3. Пусть $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ — отображение Терстона. Остовное дерево T для $P(f)$ называется *инвариантным остовным деревом* для f , если:

1. $f(T) \subset T$;
2. вершины T отображаются в вершины T .

Некоторые примеры инвариантных остовных деревьев (или близких подобных объектов) также рассматривались в некоторых других работах:

1. Первый пример для многочленов можно получить из так называемых *деревьев Хаббарда*, которые были представлены А. Дуади и Дж. Хаббардом. Эти деревья являются конечными плоскими деревьями, содержащими посткритическое множество. Мы можем соединить *деревья Хаббарда* с бесконечностью, чтобы сформировать инвариантные остовные деревья.
2. Если мы рассмотрим *формальные спаривания*, то мы можем получить инвариантные остовные деревья, соединив два дерева Хаббарда.
3. Мы можем получить инвариантные остовные деревья из геометрической конструкции классических *захватов* в контексте [Wit88, Ree92].

Нас также интересует некоторая дополнительная структура на графе. Мы хотим работать не только с вложенными графами, но и с абстрактными графами. Для этого мы должны определить *циклический граф*:

Определение 1.4 (Циклический граф). Абстрактный граф, в котором ребра, инцидентные каждой конкретной вершине, циклически упорядочены, называется *циклическим графом*.

На самом деле, согласно [MA41], циклические деревья можно рассматривать как классы изоморфизмов деревьев, вложенных в \mathbb{S}^2 .

Следующий результат показывает важность инвариантных остовных деревьев. Этот результат позволяет нам восстановить класс эквивалентности Терстона f из инвариантного остовного дерева f .

Для остовного дерева T_f для $P(f)$ обозначим через $C(T_f)$ множество критических точек f в T_f .

Теорема 1 (Theorem A в [ST19]). Пусть $f, g : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ — два отображения Терстона степени 2. Пусть T_f и T_g — инвариантные остовные деревья для f и g соответственно. Предположим, что существует клеточный гомеоморфизм $\tau : T_f \rightarrow T_g$ со следующими свойствами:

- (1) отображение τ является изоморфизмом циклических графов,
- (2) $\tau \circ f = g \circ \tau$ на $V(T_f) \cup C(T_f)$,
- (3) критические значения f отображаются в критические значения g посредством τ .

Предположим также, что τ можно продолжить на рёбра графа $f^{-1}(T_f)$, инцидентные точкам из $C(T_f)$ до изоморфизма нового графа (с присоединёнными вышеупомянутыми ребрами, в котором $C(T_f)$ являются вершинами) и аналогичного графа, построенного по отображению g таким образом, чтобы циклические порядки рёбер сохранялись и чтобы свойство (2) оставалось в силе на новом графе. Тогда f и g эквивалентны по Терстону.

Другими словами, чтобы определить класс эквивалентности Терстона f , достаточно знать следующие данные:

- 1) структуру циклического графа T_f ;
- 2) ограничение отображения f на множество $V(T_f) \cup C(T_f)$;
- 3) циклический порядок, в котором прообразы некоторых рёбер T_f расположены вокруг точки $C(T_f)$.

Эти данные являются чисто комбинаторными. Это означает, что их можно внести в компьютерную программу для анализа и сравнения разветвленных накрытий.

Существует также очень важный алгебраический инвариант отображений Терстона — *бисет*. Бисет — это алгебраический объект, который полностью кодирует класс эквивалентности Терстона. Для его описания зафиксируем некоторые объекты для отображения Терстона f и обозначения для них:

- фиксированная отмеченная точка $y \in \mathbb{S}^2 - P(f)$;
- множество $\mathcal{X}_f(y)$, являющееся множеством всех гомотопических классов путей из y в $f^{-1}(y)$ в $\mathbb{S}^2 - P(f)$;
- фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{S}^2 - P(f), y)$, обозначаемая как π_f .

Оказывается, существует структура *бисета над фундаментальной группой* π_f на $\mathcal{X}_f(y)$. Наиболее полное определение с алгебраическими обоснованиями можно найти в [Nek05] (бисеты там называются *бимодулями*, см. главу 2). *Итерированная группа монодромии* f может быть напрямую восстановлена из бисета, а бисет можно восстановить по инвариантному остовному дереву:

Теорема 2. [Theorem B в [ST19]] *Предположим, что f — отображение Терстона степени 2, а T — инвариантное остовное дерево для f . Существует явное представление бисета f , основанное исключительно на данных (1) — (2), перечисленных ниже.*

- (1) структура циклического графа на T ,
- (2) ограничение f на $V(T) \cup C(T)$.

1.1 Динамические пары деревьев

Нахождение инвариантного остовного дерева в общем случае является нетривиальной задачей. Оказывается, мы можем обобщить теорему 1. Нам нужно ввести еще один объект, чтобы иметь возможность это сделать:

Определение 1.5. Для отображения Терстона $f : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$ степени 2 два остовных дерева T^* и T для $P(f)$ таких, что $f(T^*) \subset T$, называются *динамической парой деревьев* для f , если вершины T^* отображаются в вершины T при f . Обозначим пару динамических деревьев как (T^*, T) .

Из определения видно, что понятие пары динамических деревьев обобщает понятие инвариантных остовных деревьев.

Таким образом, чтобы найти фактическое инвариантное остовное дерево, естественно рассматривать итерационный процесс переходов от T к T^* . Этот итерационный процесс будет называться *итерацией плюща*.

Кроме того, остовное дерево T для $P(f)$ порождает определенное множество образующих \mathcal{E}_T фундаментальной группы $\pi_1(\mathbb{S}^2 - P(f), y)$, где $y \in \mathbb{S}^2 - T$. Множество \mathcal{E}_T состоит из нейтрального элемента и гомотопических классов петель, начинающихся в y и пересекающих каждое из ребер T только один раз трансверсально.

Мы также показываем, что бисет для f определяется динамической парой деревьев (T^*, T) . Точнее, можно получить явное представление бисета, зная следующие дискретные данные:

- 1) структуры циклических графов на T^* и T ;
- 2) отображение $f : V(T^*) \cup C(T^*) \rightarrow V(T)$;
- 3) как элементы \mathcal{E}_{T^*} выражаются через элементы \mathcal{E}_T (или как оба \mathcal{E}_{T^*} , \mathcal{E}_T выражаются через некоторый другой порождающий набор для группы $\pi_1(\mathbb{S}^2 - P(f), y)$).

1.2 Итерация плюща

В качестве итогового результата мы представляем комбинаторный метод нахождения инвариантных остовных деревьев. «Комбинаторный» означает, что с помощью этого метода мы можем внести комбинаторную информацию о динамической паре деревьев для отображения Терстона f в компьютерную программу и, таким образом, найти инвариантные остовные деревья. Объект *плюща* определяется как гомотопический класс по модулю $P(f)$ остовных деревьев для $P(f)$. Затем мы вводим *отношение поднятия* $[T] \dashrightarrow [T^*]$ на множестве $Ivy(f)$ объектов плюща. Подобное соотношение для изотопических классов простых замкнутых кривых в $\mathbb{S}^2 - P(f)$ обсуждалось в [Pil03, KPS16]. Пусть $Ivy(f)$ обозначает множество всех объектов плюща для f . Пусть T — остовное дерево, а $[T]$ — соответствующий объект плюща. Символическое представление бисета f вместе с символическим кодированием циклической структуры дерева на T порождают несколько вариантов остовного дерева T^* , таких что (T^*, T) является динамической парой деревьев для f .

Множество $Ivy(f)$ можно снабдить структурой абстрактного ориентированного графа: мы соединяем две вершины, соответствующие двум

объектам плюща $[T_1]$ и $[T_2]$ направленной стрелкой из $[T_1]$ в $[T_2]$, если (T_2, T_1) — динамическая пара деревьев. Мы также показываем, что все данные, соответствующие этому графу, могут быть закодированы чисто комбинаторно. Каждой стрелке графа соответствует переход от T к T^* . Движение по этим стрелкам — это в точности *итерация плюща*.

В завершение мы приводим несколько примеров итераций плюща, которые были получены в результате работы компьютерной программы.

2 Параметризация срезов Заке́ри

Второй класс рациональных отображений, на котором мы будем сосредоточены — это класс комплексных кубических многочленов. Напомним, что если z_0 — неподвижная точка аналитической функции f , т. е. $f(z_0) = z_0$, то число $\lambda = f'(z_0)$ называется *мультипликатором* f в z_0 . Мы предполагаем, что неподвижная точка равна 0. Тогда нас интересует класс \mathbb{C}_λ линейной сопряженности многочленов, имеющих неподвижную точку с фиксированным мультипликатором λ , для которого $|\lambda| \leq 1$. Это пространство \mathbb{C}_λ называется *λ -срезом*. Для кубического многочлена P через $[P]$ мы обозначаем его класс аффинной сопряженности. В нашей работе есть дополнительные требования к λ .

Определение 2.1. Число θ является числом *ограниченного типа*, если коэффициенты цепной дроби числа θ ограничены.

Если предположить, что мультипликатор λ имеет единичный модуль, т. е. $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, и его число вращения θ имеет ограниченный тип, то для полиномов в соответствующем срезе ноль является неподвижной точкой типа Зигеля, т. е. росток многочлена в неподвижной точке конформно сопряжен его линейной части. Срезы с этим свойством изучались С. Заке́ри как пространства параметров, поэтому мы называем их *срезы Заке́ри*.

Существует классический и очень сильный метод изучения многочленов с фиксированными или периодическими точками, основанный на *линеаризациях*:

Определение 2.2. Функция $f(z)$ называется *линеаризуемой*, если существует голоморфная замена координат h (линеаризация f) такая, что $h^{-1} \circ f \circ h = \lambda z$, т. е. f сопряжена с λz . Область, в которой существует линеаризация, представляет собой *диск Зигеля* (область, сопряженную

диску) или *кольцо Эрмана* (область, сопряженную кольцу), или часть *притягивающей области*.

Предположим, что кубический многочлен P имеет неотталкивающую неподвижную точку a и рассмотрим множество всех классов аффинной сопряженности $[P]$ кубических многочленов P с $P(0) = 0$ и $|P'(0)| \leq 1$. Тогда центральной частью этого пространства параметров является *основная гиперболическая компонента*, которая состоит из классов $[P]$ для всех гиперболических многочленов P с $|P'(0)| < 1$, чьи множества Жюлиа являются Жордановыми кривыми.

Теперь рассмотрим многочлен f из нашего класса с притягивающей или нейтральной неподвижной точкой a . Тогда его линеаризация (если она существует) – это отображение ψ открытого диска $\mathbb{D}(r)$ радиуса $r > 0$ вокруг 0 такое, что $\psi(0) = a$ и $\psi(\lambda z) = f \circ \psi(z)$ для всех $z \in \mathbb{D}(r)$, где $\lambda = f'(a)$. Кроме того, мы предполагаем, что $r > 0$ является радиусом сходимости степенного ряда ψ в точке 0.

Тогда образ диска $\psi(\mathbb{D}(r))$, на котором линеаризация определена, называется *диск Зигеля* $\Delta(f, a)$ отображения f , отвечающим точке a , если $|\lambda| = 1$. Если $|\lambda| < 1$, то $\Delta(f, a)$ компактно содержится в бассейне притяжения a , и $\partial\Delta(f, a)$ содержит критическую точку. В случае $a = 0$ область $\Delta(f, a)$ обозначается через $\Delta(f)$.

Как и выше пусть \mathbb{C}_λ – комплексное пространство классов линейной сопряженности комплексных кубических многочленов с неподвижной точкой 0 и фиксированным мультипликатором λ , таким, что $|\lambda| \leq 1$. Для кубического многочлена $P(z) = \lambda z + \dots$ пусть $[P]_0$ – его класс в \mathbb{C}_λ . Мы будем писать $\mathcal{C}_\lambda \subset \mathbb{C}_\lambda$ для обозначения *локуса связности* в \mathbb{C}_λ . То есть $[P]_0 \in \mathcal{C}_\lambda$, если множество Жюлиа $J(P)$ многочлена P связно. Центральной частью \mathcal{C}_λ является множество \mathcal{P}_λ всех $[P]_0 \in \mathcal{C}_\lambda$, лежащих в замыкании основной гиперболической компоненты. Основной результат второй части диссертации связан с пониманием топологии и комбинаторики \mathcal{P}_λ через сравнение с подходящим динамическим объектом.

Для этого сравнения рассмотрим пространство квадратичных многочленов $Q(z) = Q_\lambda(z) = \lambda z(1 - z/2)$. Тогда λ – мультипликатор неподвижной точки 0 многочлена Q . Тогда предположим, что либо $|\lambda| < 1$, либо $\lambda = e^{2\pi i\theta}$, где $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ограниченного типа. Пусть $\psi = \psi_Q : \mathbb{D} \rightarrow \Delta(Q)$ – соответствующая линеаризация (здесь $\mathbb{D} = \mathbb{D}(1)$). Множество $\overline{\Delta}(Q)$ является Жордановым диском – это классический результат Дуади–Гиса–Эрмана–Шишикуры, см. [Dou87, Her87, ?]. Таким образом, отображение

Римана можно продолжить до гомеоморфизма $\bar{\psi} : \bar{\mathbb{D}} \rightarrow \bar{\Delta}(Q)$. Конечная критическая точка Q равна 1, поэтому область линеаризации $\Delta(Q)$ вокруг 0 содержит 1 на своей границе. Мы выбираем нормализацию ψ такую, что $\bar{\psi}(1) = 1$. Если $|\lambda| = 1$, то отображение $\bar{\psi}$ сопрягает поворот на угол θ с ограничением Q на $\bar{\Delta}(Q)$. Рассмотрим факторизацию пространства $\tilde{K}(Q)$ множества $K(Q) - \Delta(Q)$ по отношению эквивалентности \sim , определяемому следующим образом. Две различные точки z, w эквивалентны, если они обе принадлежат $\partial\Delta(Q)$ и $Re(\bar{\psi}^{-1}(z)) = Re(\bar{\psi}^{-1}(w))$.

Частично определенное соответствие между динамическими плоскостями P и Q можно описать следующим свойством:

Свойство. *Для любого кубического многочлена P с $[P]_0 \in \mathcal{P}_\lambda$ существует вполне P -инвариантный континуум $X(P)$ (т.е. такой, что $P^{-1}(X(P)) = P(X(P)) = X(P)$), содержащий обе критические точки многочлена P и непрерывное отображение $\eta_P : X(P) \rightarrow K(Q)$, которое полусопрягает $P|_{X(P)}$ с $Q|_{\eta_P(X(P))}$. Если обе критические точки P принадлежат множеству Жюлиа, то отображение η_P монотонно.*

Теперь мы можем сформулировать основной результат в виде следующей теоремы (проиллюстрированной на Рис. 1).

Теорема 3 (Main Theorem в [BOST22]). *Предположим, что $\theta \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ограниченного типа и $\lambda = e^{2\pi i\theta}$. Пусть $Q(z) = Q_\lambda(z) = \lambda z(1 - z/2) -$ квадратичный многочлен с неподвижной точкой с мультипликатором λ . Тогда существует непрерывное отображение $\Phi_\lambda : \mathcal{P}_\lambda \rightarrow \tilde{K}(Q)$, переводящее $[P]_0$ в η_P — образ некоторой критической точки P .*

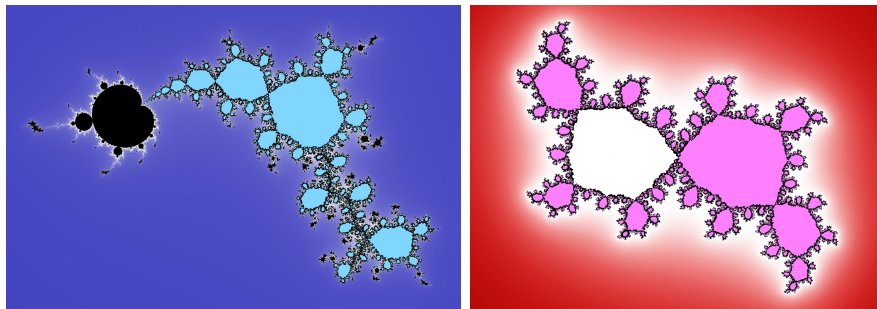


Рис. 1: Слева: плоскость параметра \mathbb{C}_λ с $\lambda = \exp(\pi i \sqrt{2})$. Мы используем параметризацию, при которой каждый класс линейной сопряженности из \mathbb{C}_λ представляется многочленом вида $f(z) = \lambda z + \sqrt{a}z^2 + z^3$, где a — параметр (то есть на рисунке показана a -плоскость). Класс сопряженности f не зависит от выбора между двумя значениями квадратного корня. Области со светлым равномерным затенением являются внутренними компонентами \mathcal{P}_λ . Существуют также различные “декорации” \mathcal{P}_λ (то есть компоненты $\mathbb{C}_\lambda - \mathcal{P}_\lambda$), показанные черным цветом; эти декорации содержат копии множества Мандельброта. Справа: динамическая плоскость $Q = Q_\lambda$. Ограниченная белая область вблизи центра — это диск Зигеля $\Delta(Q)$. Предполагаемая модель \mathcal{P}_λ получается из $K(Q)$ удалением этой белой области и склейки его границы в простую кривую. Наша основная теорема обеспечивает непрерывное отображение из \mathcal{P}_λ в эту предполагаемую модель.

Заключение

Первым результатом этой работы является полученная классификация отображений Терстона с точностью до эквивалентности Терстона, на основании только лишь их ограничения на инвариантные остовные деревья.

Затем показано, что, зная инвариантное остовное дерево, мы можем полностью описать другой важный инвариант — бисет.

Наконец, в этой работе представлен новый алгоритм поиска инвариантных остовных деревьев для посткритически конечных разветвленных накрытий.

Во второй части мы имеем дело со срезами кубических полиномов, полученных фиксированием мультипликатора неподвижной точки. Мы параметризуем их части \mathcal{P}_λ , принадлежащие замыканию главной гиперболической компоненты. Эта параметризация использует квадратичную переклееную модель $\bar{K}(Q)$ множества Жюлиа $K(Q)$. Мы показываем, что параметризующее отображение Φ_λ непрерывно.

По результатам исследований опубликованы две статьи

- A. Shepelevtseva, V. Timorin, *Invariant spanning trees for quadratic rational maps* (Инвариантные остовные деревья для квадратичных рациональных отображений), Arnold Mathematical Journal.2019. №5, p.435–481

- A. Blokh, L. Oversteegen, A. Shepelevtseva, V. Timorin, *Modeling core parts of Zakeri slices I* (Моделирование центральных частей срезов Закери I), Moscow Mathematical Journal.2022. №2 p.265–294

Список литературы

- [BD17] L. Bartholdi, D. Dudko, *Algorithmic aspects of branched coverings*, Ann. Fac. Sci. Toulouse **5** (2017), 1219–1296.
- [BN06] L. Bartholdi, V. Nekrashevych, *Thurston equivalence of topological polynomials*, Acta Math. **197** (2006), 1–51
- [BOST22] A. Blokh, L. Oversteegen, A. Shepelevtseva, V. Timorin, *Modeling core parts of Zakeri slices I*, Moscow Mathematical Journal.2022. №2 p. 265–294
- [Br72] A. Brjuno, *Analytic form of differential equations*, Tr. Mosk. Mat. Obs., **26** (1972), 199–239.
- [CG+15] K. Cordwell, S. Gilbertson, N. Nuechterlein, K. Pilgrim, S. Pinella, *The classification of critically fixed rational maps*, Conform. Geom. Dyn. **19** (2015), 51–94.
- [Dou87] A. Douady, *Disques de Siegel et anneaux de Herman*, Astérisque, **152-153**, exp. 677 (1987), 151–172.
- [DH93] A. Douady, J. Hubbard, *A proof of Thurston’s topological characterization of rational functions*, Acta Math., 171(2):263–297, 1993.
- [GM93] L.R. Goldberg, J. Milnor, “Fixed points of polynomial maps. Part II. Fixed point portraits”, Annal. sci. de l’École Normale Supérieure, 4^e série, **26**, n° 1 (1993), 51–98
- [Her87] M. Herman, *Conjugaison quasi symétrique des homéomorphismes du cercle à des rotations*, preliminary manuscript, <https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~mitsu/Herman/qsconj1/>
- [Hlu17] M. Hlushchanka, *Invariant graphs, tilings, and iterated monodromy groups*, Ph.D. Thesis, Jacobs University Bremen (2017).
- [Hub06] J.H. Hubbard, *Teichmüller theory and applications to geometry, topology, and dynamics*. Volume 1. Matrix Editions 2006.

- [Kiw00] J. Kiwi, *Non-accessible critical points of Cremer polynomials*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, **20** (2000), no. 5, 1391–1403.
- [KL18] G. Kelsey, R. Lodge, *Quadratic Thurston maps with few postcritical points*, Geom. Dedicata (2018).
<https://doi.org/10.1007/s10711-018-0387-5>
- [KPS16] S. Koch, K. Pilgrim, N. Selinger, *Pullback invariants of Thurston maps*. Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 7, 4621–4655.
- [MA41] S. MacLane, V. W. Adkisson, *Extensions of homeomorphisms on the sphere*. Lectures in Topology, University of Michigan Press, Ann Arbor, Mich. 1941, 223–236.
- [Ma] S. Marmi, *An Introduction to Small Divisors Problems*, arXiv:math/0009232
- [Ma90] S. Marmi, *Critical functions for complex analytic maps*, J. Phys. A: Math. Gen. **23** (1990), 3447–3474
- [MSS83] R. Mañé, P. Sad, D. Sullivan, *On the dynamics of rational maps*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **16** (1983), no. 2, 193–217.
- [Mil09] J. Milnor, *Cubic polynomial maps with periodic critical orbit I*, in: “Complex Dynamics: Families and Friends”, ed. D. Schleicher, A.K. Peters (2009), 333–411.
- [Nek05] V. Nekrashevych, *Self-similar groups*, Mathematical Surveys and Monographs, Volume: **117** (2005), AMS.
- [Pet96] C. Petersen, *Local connectivity of some Julia sets containing a circle with an irrational rotation*, Acta Math., 177 (1996), 163–224
- [Pil03] K. Pilgrim, *An algebraic formulation of Thurston’s combinatorial equivalence*, Proc. Amer. Math. Soc. **131** (2003), no. 11, 3527–3534.
- [Ree92] M. Rees, *A partial description of the Parameter Space of Rational Maps of Degree Two: Part 1* Acta Math. **168** (1992), 11–87

- [Si] C. Siegel, *Iteration of analytic functions*, Ann. of Math. **43**(2) (1942), 607–612.
- [ST19] A. Shepelevtseva, V. Timorin, Invariant spanning trees for quadratic rational maps, Arnold Math J. **5**, (2019), 435–481
- [Sul] D. Sullivan, *Quasiconformal homeomorphisms and dynamics III: Topological conjugacy classes of analytic endomorphisms*, manuscript.
- [SW20] W. Shen, Y. Wang, *Primitive tuning via quasiconformal surgery*, preprint arXiv:2010.05199, to appear in Israel Journal of Mathematics.
- [Wit88] B. Wittner, “On the bifurcation loci of rational maps of degree two”, PhD Thesis, Cornell University, 1988
- [Yoc95] J.C. Yoccoz, *Petits Diviseurs en Dimension 1*, Astérisque **231** (1995)
- [Zak99] S. Zakeri, *Dynamics of cubic siegel polynomials*, Commun. Math. Phys. **206** (1999), 185–233.
- [Zak16] S. Zakeri, *Conformal fitness and uniformization of holomorphically moving disks*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), 1023–1049.