Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Калмынин Александр Борисович

Значения арифметических функций в коротких интервалах и случайные мультипликативные функции

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук
Королёв Максим Александрович

Москва – 2022

Аннотация

Данная диссертация посвящена изучению статистических свойств некоторых множеств и арифметических функций, связанных с множеством квадратов целых чисел. В первой главе мы исследуем промежутки между числами, представимыми в виде суммы двух квадратов. А именно, изучается величина

$$\sum_{s_{n+1}\leq x}(s_{n+1}-s_n)^{\gamma},$$

где s_n — n-ное число, представимое в виде суммы двух квадратов. Для данной суммы при $\gamma \leq 2$ получается оценка, отличающаяся от оптимальной множителем $(\ln x)^{O(1)}$. Такие суммы изучались в работах К. Хооли [6] и В. Плаксина [10]. Мы представляем альтернативный подход к данному вопросу. Более точно, мы строим некоторую функцию $S(N,M)$, близкую к нулю в точках N, которые далеки от ближайшей суммы двух квадратов. Данная функция раскладывается в сумму осциллирующих функций Бесселя, что и приводит к требуемому результату при помощи соотношения «почти ортогональности». Основная формула преобразования $S(N,M)$ оказывается некоторой разновидностью автоморфности. Ряды, аналогичные $S(N,M)$, изучались в работах Н.В. Кузнецова [8] и А. Коэна [2]. Кроме того, в главе 1 установлена связь между распределением сумм двух квадратов в коротких интервалах и «малых» квадратичных вычетов $\bmod N$. В предположении случайности распределения таких квадратичных вычетов, данное наблюдение позволяет улучшить элементарную оценку Эйлера для расстояний между суммами двух квадратов.

Во второй главе мы показываем, что существует бесконечно много простых чисел p, для которых множество квадратичных вычетов в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ не обладает некоторыми свойствами случайного множества. А именно, нам удается доказать, что для всякого $A>0$ существует бесконечно много простых чисел p, для которых суммы символов Лежандра длины $(\ln p)^A$ не допускают нетривиальной по порядку верхней оценки. В доказательстве мы строим неотрицательный вес w_p на простых числах $p\in(x,2x]$, при суммировании с которым суммы характеров оказываются существенно положительно смещены. Вычисления соответствующих взвешенных сумм опираются на классические результаты о нулях L-функций Дирихле и гладких числах. Полученная нижняя оценка противоречит свойствам случайного подмножества $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, доказанным в работе С.В. Конягина и И.Д. Шкредова [7]. Таким образом, для таких простых чисел p квадратичные вычеты $\bmod p$ не являются типичной реализацией случайного множества в смысле данной модели.

Третья глава посвящена экстремальному случаю неслучайности квадратичных вычетов. В ней мы рассматриваем множество $\mathcal{L}^+$ всех таких простых чисел p, что суммы символов Лежандра по отрезкам вида $[0,N]$ неотрицательны для всех $N\geq 0$. В диссертации представлено доказательство явной верхней оценки для относительной плотности $\mathcal{L}^+$ во множестве всех простых чисел. Р. Бейкер и Х. Монтгомери [1] показали, что относительная плотность $\mathcal{L}^+$ стремится к 0, наш результат

является эффективной версией их теоремы. Два основных ингредиента доказательства — сведение оценки для плотности к оценке вероятности неотрицательности сумм случайной мультипликативной функции и результаты А. Харпера [5] о больших значениях случайной дзета-функции вблизи критической прямой. В качестве модели символа Лежандра по модулю p мы используем случайную вполне мультипликативную функцию, значения которой в простых числах являются независимыми случайными величинами, имеющими распределение Радемахера. Вероятность неотрицательности первых N частичных сумм в такой модели также равно пропорции префиксов Дика среди всех мультипликативных путей.

Глава 1

В первой главе мы изучаем свойства ряда $S(N,M)$, задаваемого формулой

$$S(N,M)=\sum_{n\geq 0} r_2(n)J_0(2\pi\sqrt{nN})e^{-\pi n/M},$$

где $r_2(n)=\#\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2 : a^2+b^2=n\}$ и $J_0(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка 0. Затем при помощи полученных свойств мы изучаем промежутки $s_{n+1}-s_n$. В первом разделе главы 1 представлены три различных доказательства следующей формулы преобразования для $S(N,M)$:

Теорема 1. *Для всех $N,M>0$ выполнено равенство*

$$S(N,M)=Me^{-\pi NM}\sum_{n\geq 0} r_2(n)I_0(2\pi M\sqrt{Nn})e^{-\pi nM},$$

где I_0 — модифицированная функция Бесселя первого рода порядка 0.

В первом доказательстве мы показываем, что функция $S(N,M)/M$ равна среднему значению произведения $\vartheta_M(x)\vartheta_M(y)$ на окружности $x^2+y^2=N$, где

$$\vartheta_M(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{2\pi inz-\pi n^2/M}.$$

Утверждение Теоремы 1 затем получается из формулы модулярного преобразования тета-функции. Второй способ установить истинность Теоремы 1 — проинтерпретировать $S(N,M)$ как ряд Кузнецова-Коэна для модулярной формы θ^2 и затем воспользоваться общим результатом работы [8]. Наконец, третий подход использует функциональное уравнение ряда Дирихле

$$Q(s)=\sum_{(a,b)\in\mathbb{Z}^2\setminus(0,0)}\frac{1}{(a^2+b^2)^s}$$

и соотношение Куммера для вырожденной гипергеометрической функции

$${}_1F_1(a,b;z)=e^z{}_1F_1(b-a,b;-z),\ \text{где}\ {}_1F_1(a,b;z)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{a^{(n)}z^n}{b^{(n)}n!}.$$

Данные соотношения оказываются полезными, поскольку преобразование Меллина функции $S(Nx, M/x) - 1$ равно

$$M^s \pi^{-s} Q(s)\Gamma(s) {}_1F_1(s, 1; -\pi MN).$$

Пусть $R(N)$ означает расстояние от N до ближайшей суммы двух квадратов. Во втором разделе первой главы мы доказываем, что при $R(N) \geq H \geq \sqrt{\ln N}$ для $M = \frac{N \ln N}{H^2}$ выполнена оценка

$$S(N, M) \ll N \exp\left(-\frac{\pi M R(N)^2}{4N}\right).$$

Отсюда следует, например, что значение $S(N, M)$ близко к нулю при $R(N) \geq \sqrt{2 \ln N}$ и $M \geq \frac{2N \ln N}{R(N)^2}$. Затем при помощи соотношения «почти ортогональности» для функций Бесселя мы показываем, что в квадратичном среднем функция $S(N, M)$ близка к 1. А именно, мы рассматриваем интеграл

$$J(N, M) = \int_0^N (S(x, M) - 1)^2 dx$$

и показываем, что при $\frac{N}{2 \ln^2 N} \geq M \geq 2 \ln N$ выполнена оценка

$$J(N, M) \ll \sqrt{NM} \ln N.$$

Отсюда легко получается неравенство

$$\mu(\{X < t \leq 2X : R(t) > 2^k (\ln X)^{3/2}\}) \ll \frac{X}{2^k},$$

которое приводит к такому окончательному результату:

Теорема 2. *Для всякого* $1 \leq \gamma \leq 2$ *выполнено соотношение*

$$\sum_{s_{n+1} \leq x} (s_{n+1} - s_n)^\gamma \ll x (\ln x)^{\frac{3}{2}(\gamma - 1)} \delta(x, \gamma),$$

где

$$\delta(x, \gamma) = \begin{cases} 1 & \text{для } \gamma < 2 \\ \ln x & \text{для } \gamma = 2. \end{cases}$$

Оставшийся раздел Главы 1 посвящен изучению связи между распределением «малых» квадратичных вычетов $\bmod N$ и распределением сумм двух квадратов в коротких промежутках. А именно, пусть N — большое число и $\sqrt{N} \leq R \leq N$ — параметр. Рассмотрим множество $\mathcal{R}(N, R) = \{r^2 \mod N : r \leq R\}$. Пусть $g(N, R)$ — наибольший интервал в $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ между элементами $\mathcal{R}(N, R)$. Имеет место следующее соотношение

Теорема 3. *Для любого R выполнено неравенство*

$$R(x) \ll g(2[\sqrt{x}], R) + R^4 x^{-1}.$$

Естественно предположить, что $\mathcal{R}(N, R)$ проявляет свойства случайного подмножества $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ плотности

$$\frac{|\mathcal{R}(N, R)|}{N} = \frac{R}{N^{1+o(1)}}.$$

Тогда из леммы Бореля-Кантелли получилось бы соотношение $g(N, R) \ll \frac{N^{1+o(1)}}{R}$. Мы предополагаем, что для нашего диапазона значений R это соотношение всегда верно

Гипотеза 1. *Для всякого $\varepsilon > 0$ и всех $\sqrt{N} \le R \le N$ выполнено неравенство*

$$g(N, R) \ll \frac{N^{1+\varepsilon}}{R}.$$

В частности, из Гипотезы 1 следует оценка $R(x) \ll x^{1/5+o(1)}$, усиливающая наилучшую известную оценку $R(x) \ll x^{1/4}$.

Глава 2

Основной результат Главы 2 — теорема о существовании бесконечного множества простых чисел, для которых суммы характеров логарифмической длины не допускают нетривиальной верхней оценки. Более точно, мы доказываем следующее утверждение

Теорема 4. *Пусть $A > 0$ — произвольное вещественное число, $x \ge x_0(A)$. Тогда существует по крайней мере одно простое число $x < p \le 2x$ такое, что*

$$\sum_{n \le (\ln p)^A} \left(\frac{n}{p}\right) \gg_A (\ln p)^A.$$

Первый раздел данной главы представляет собой обсуждение некоторых аналогий между гипотезами теории чисел и предельными теоремами теории вероятностей. В частности, обсуждается аналогия между законом повторного логарифма и гипотезой Римана, а также модель Крамера [3],[4], которая устанавливает эту взаимосвязь более строго. Также мы формулируем следующий результат С.В. Конягина и И.Д. Шкредова [7], который играет роль модели Крамера для множества квадратичных вычетов

Теорема 5. *Пусть $\mathbf{G}$ — абелева группа порядка $N \to +\infty$ и $w : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — произвольная функция, стремящаяся к бесконечности при $N \to +\infty$. Зададим случайное подмножество $A \subset \mathbf{G}$ плотности $1/2$ так: для любого $g \in \mathbf{G}$ вероятность события $g \in A$ равна $1/2$, причем для всех g данные события независимы в совокупности. Пусть также*

$A : \mathbf{G} \to \{0,1\}$ — индикаторная функция множества A. Тогда с вероятностью $1-o(1)$ для любых двух подмножеств $X, Y \subset \mathbf{G}$ с условиями

$$|X| \geq w(N)\ln N(\ln\ln N)^2 \text{ и } |Y| \geq w(N)\ln N(\ln\ln N)^{10}$$

выполнено равенство

$$\sum_{x\in X, y\in Y} A(x+y) = \frac{1}{2}|X||Y| + o(|X||Y|).$$

В этом контексте Теорема 4 является аналогом теоремы Майера [9], то есть указывает на некоторую разницу между вероятностной моделью и детерминированным арифметическим множеством. Во втором разделе мы доказываем Теорему 4 при помощи результатов о нулях L-функций и гладких числах. А именно, мы задаем вес на простых числах $x < p \leq 2x$ формулой

$$w_p = \prod_{q\leq M}\left(1+\left(\frac{q}{p}\right)\right),$$

где произведение берется по простым $q \leq M = (\ln x)^{1/3}$. Затем рассматриваются две суммы

$$S_0(x) = \sum_{x<p\leq 2x} w_p \ln p \text{ и } S_1(x) = \sum_{x<p\leq 2x} w_p S(p,N)\ln p.$$

Здесь

$$S(p,N) = \sum_{n\leq N}\left(\frac{n}{p}\right), N = (\ln x)^A.$$

Так как возникающие при вычислении $S_i(x)$ ряды Дирихле могут иметь исключительные нули, найти асимптотические формулы для $S_0(x)$ и $S_1(x)$ не удается. Однако, оказывается, что для их отношения выполнена нижняя оценка

$$\frac{S_1(x)}{S_0(x)} \gg \Psi(N,M) \gg_A N,$$

откуда и получается требуемый результат. Данное соотношение следует из равенства между коэффициентами в разложении S_0 и S_1 по характерам, а $\Psi(N,M)$ означает количество M-гладких чисел, не превосходящих N. Напомним, что число называется M-гладким, если все его простые делители не превосходят M. В заключительном разделе второй главы мы несколько обобщаем результат Теоремы 4, получая такую оценку

Теорема 6. *Для всякого $\varepsilon > 0$ существует $x_0(\varepsilon) > 0$ такое, что при $x > x_0(\varepsilon)$ для любого $N \leq \exp\left(\left(\frac{1}{4}-\varepsilon\right)\frac{\ln\ln^2 x}{\ln\ln\ln x}\right)$ существует простое число $p \in (x, 2x]$ такое, что*

$$S(p,N) \geq (1+o(1))\Psi(N, 0.2c_4\sqrt{\ln x}).$$

Из Теоремы 6 можно вывести такие следствия:

Следствие 1. *Для* $N = \exp\left(\left(\frac{1}{4} - \varepsilon\right) \frac{\ln\ln^2 x}{\ln\ln\ln x}\right)$ *при больших* x *между* x *и* $2x$ *существует простое число* p *такое, что*

$$S(p, N) \gg \frac{N}{(\ln x)^{1/2-\varepsilon}}.$$

Следствие 2. *Пусть* $C > 0$ *— произвольная постоянная. Для* $N = \exp\left(\frac{C}{2} \frac{\ln\ln x \ln\ln\ln x}{\ln\ln\ln\ln x}\right)$ *и* $x \to +\infty$ *существует простое* $p \in (x, 2x]$ *такое, что*

$$S(p, N) \gg \frac{N}{(\ln\ln x)^{C-o(1)}}.$$

Глава 3

В последней главе данной диссертации изучено распределение множества простых чисел $\mathcal{L}^+$ — таких p, что для всех натуральных N выполнено неравенство

$$\left(\frac{1}{p}\right) + \ldots + \left(\frac{N}{p}\right) \geq 0.$$

В первом разделе представлена мотивация для изучения множества $\mathcal{L}^+$. А именно, несложно показать, что для всякого $p \in \mathcal{L}^+$ многочлен Фекете

$$f_p(t) = \sum_{n=0}^{p-1} \left(\frac{n}{p}\right) t^n$$

положителен на интервале $(0, 1)$. Отсюда следует, в частности, что для каждого такого простого числа соответствующая L-функция $L\left(s, \left(\frac{\cdot}{p}\right)\right)$ не имеет вещественных нулей, а также что относительная плотность $\mathcal{L}^+$ равна 0. Последнее утверждение содержится в работе [1] и более формально означает следующее

Теорема 7 (Р. Бейкер, Х. Монтгомери)**.** *При* $x \to +\infty$ *справедливо соотношение*

$$|\mathcal{L}^+ \cap [1, x]| = o(\pi(x)).$$

Кроме того, в свете недавнего решения Т. Тао [11] задачи Эрдёша о расходимости, модификации символов Лежандра $\widetilde{\chi_p}(n)$ оказываются наиболее положительно смещенными «почти контрпримерами» к данной задаче.

Второй раздел сводит задачу об оценке $\mathcal{L}^+$ к оценке некоторой вероятностной величины $m(x)$. Для этого вводится понятие мультипликативного префикса Дика: такого пути $\{(1, \varepsilon_n)\}_{n \leq N}$, что $\varepsilon_{nm} = \varepsilon_n \varepsilon_m$ при $nm \leq N$ и $\varepsilon_1 + \ldots + \varepsilon_n \geq 0$ для всех $n \leq N$. Пусть теперь $m(x)$ — доля мультипликативных префиксов Дика среди всех $2^{\pi(x)}$ мультипликативных путей длины $[x]$. Неравенство Бруна-Титчмарша и квадратичный закон взаимности позволяют доказать такое соотношение

Теорема 8. *Для всех $x \geq 8$ выполнена оценка*

$$|\mathcal{L}^+ \cap [1, x]| \ll \pi(x) m(0.5 \ln x).$$

Кроме того, величина $m(x)$ может быть определена в вероятностных терминах. Пусть $f(n)$ — случайная вполне мультипликативная функция, для которой $f(p)$ — независимые случайные величины, имеющие распределение Радемахера. Случайная величина имеет распределение Радемахера, если

$$\mathbb{P}(X = -1) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}.$$

Легко видеть, что $m(x)$ есть вероятность события

$$f(1) + \ldots + f(n) \geq 0 \text{ для всех } n \leq x.$$

В завершающем разделе Главы 3 данное событие изучается в терминах случайной дзета-функции

$$\zeta_f(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

и её поведения в окрестности критической прямой $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$. Оказывается, что если частичные суммы $f(1) + \ldots + f(n)$ неотрицательны при $n \leq x$, то с высокой вероятностью выполнено неравенство

$$\max_{|t| \leq \tau} |\zeta_f(\sigma + it)| \leq (\ln x)^{1/2 + o(1)}.$$

Здесь

$$\tau = \frac{1}{2}(\ln \ln N)^3 - 1, \sigma = \frac{1}{2} + 3\frac{\ln \ln N}{\ln N}.$$

С другой стороны, результаты А. Харпера [5] о поведении максимума в левой части вышенаписанного неравенства показывают, что с высокой вероятностью справедлива оценка

$$\max_{|t| \leq \tau} |\zeta_f(\sigma + it)| \geq (\ln x)^{1 - o(1)}.$$

Количественные формы данных рассуждений приводят к такой теореме

Теорема 9. *Для $c = 2 + \sqrt{2} - \frac{\sqrt{23 + 16\sqrt{2}}}{2} \approx 0.0368$ выполнена верхняя оценка*

$$m(N) \ll \frac{1}{(\ln N)^{c - o(1)}}$$

и, следовательно, оценка

$$|\mathcal{L}^+ \cap [1, x]| \ll \frac{\pi(x)}{(\ln \ln x)^{c - o(1)}}.$$

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

1. Доклад «Положительность сумм характеров и случайные мультипликативные функции», Мемориальная конференция по аналитической теории чисел и приложениям, посвященная 130-летию со дня рождения И. М. Виноградова (Москва, Россия), сентябрь 2021

2. Доклад «Положительность сумм характеров и случайные мультипликативные функции», Конференция Международных Математических Центров Мирового Уровня, (Сириус, Россия), август 2021

3. Доклад «Случайные мультипликативные функции и нули L-функций Дирихле», семинар «Геометрические структуры на многообразиях», (Москва, Россия), май 2021

4. Доклад «Квадратичные характеры с неотрицательными частичными суммами», XIX Международная конференция «Алгебра, теория чисел, дискретная геометрия и многомасштабное моделирование: современные проблемы, приложения и проблемы истории», посвященная двухсотлетию со дня рождения академика П. Л. Чебышева (Тула, Россия), май 2021

5. Доклад «Квадратичные характеры с положительными частичными суммами», семинар «Современные проблемы теории чисел», (Москва, Россия), апрель 2021

6. «Конструкция Коэна-Кузнецова и арифметические функции в коротких интервалах», Семинар «Автоморфные формы и их приложения», (Москва, Россия), март 2019

7. Доклад «On the distribution of gaps between consecutive sums of two squares» («О распределении промежутков между соседними суммами двух квадратов»), Number Theory Seminar, TU Graz (Семинар по теории чисел, Грацкий технический университет) (Грац, Австрия), март 2019

8. Доклад «Large values of short character sums» («Большие значения коротких сумм характров»), Конференция Uniform Distribution Theory-2018 (Теория Равномерного Распределения-2018), (Люмини, Марсель, Франция), ноябрь 2018

9. Доклад «Большие значения коротких сумм характеров», Вторая мемориальная миниконференция памяти Алексея Зыкина, (Москва, Россия), июнь 2018

10. Доклад «Large values of short character sums» («Большие значения коротких сумм характеров»), Международная конференция «Алгебра, алгебраическая геометрия и теория чисел» памяти академика Игоря Ростиславовича Шафаревича, (Москва, Россия), июнь 2018

11. «Интервалы между числами, представимыми в виде суммы двух квадратов», XV Международная конференция «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы и приложения», посвященная столетию со дня рождения профессора Николая Михайловича Коробова, (Тула, Россия), мая 2018

12. Доклад «Cohen-Kuznetsov series and intervals between numbers that are sums of two squares» («Ряды Коэна-Кузнецова и интервалы между числами, представимыми в виде суммы двух квадратов», School and research conference «Modular forms and beyond» (Школа и конференция «Модулярные формы и не только»), (Санкт-Петербург, Россия), май 2018

13. Доклад «Большие значения сумм характеров», семинар «Современные проблемы теории чисел», (Москва, Россия), декабрь 2017

14. Доклад «Intervals between numbers that are sums of two squares and Jacobi-type forms» («Интервалы между числами, представимыми суммой двух квадратов, и формы типа Якоби»), «Workshop:Motives, Periods and L-functions» («Семинар: Мотивы, Периоды и L-функции»), (Москва, Россия), апрель 2017

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в двух статьях:

1. A. Kalmynin, «Intervals between consecutive numbers which are sums of two squares» («Интервалы между соседними числами, представимыми в виде суммы двух квадратов»), Mathematika, 65(4), 1018-1032, 2019

2. A.B. Kalmynin, «Large values of short character sums» («Большие значения коротких сумм характеров»), Journal of Number Theory, Volume 198, 200-210, 2019

References

[1] R.C. Baker, H.L. Montgomery, Oscillations of Quadratic L-Functions, Analytic Number Theory. Progress in Mathematics (ed. B.C. Berndt et al.), vol 85. Birkhäuser Boston, 23-40, 1990.

[2] H. Cohen, Sums involving the values at negative integers of L-functions of quadratic characters, Math. Ann. 217, 271–285, 1975

[3] H. Cramér, On the order of magnitude of the difference between consecutive prime numbers, Acta Arith., 2: 23–46, 1936.

[4] H. Cramér, Prime numbers and probability, Skand. Math. Kongr. 8, 107–115, 1935.

[5] A.J. Harper, Bounds on the suprema of Gaussian processes, and omega results for the sum of a random multiplicative function, Ann. Appl. Probab. 23 (2) 584 - 616, 2013

[6] C. Hooley, On the intervals between numbers that are sums of two squares I, Acta Math., 127, 279-297, 1971

[7] S.V. Konyagin, I.D. Shkredov, On subgraphs of random Cayley sum graphs, Eur. J. Comb. 70, 61–74, 2017.

[8] Н.В. Кузнецов, Новый класс тождеств для коэффициентов Фурье модулярных форм, Acta Arith. 27, 1975, 505-519

[9] H. Maier, Primes in short intervals, Mich. Math. J., 32 (2), 221–225, 1985

[10] В. А. Плаксин, Распределение чисел, представимых суммой двух квадратов, Изв. АН СССР. Сер. матем., 51:4, 1987

[11] T. Tao, The Erdős discrepancy problem, Discrete Anal.: 1-29, 2016