Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
“Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”
Факультет математики

На правах рукописи

Машанова-Голикова Инна Антоновна

Спектры подалгебр Бете в янгианах

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
Доктор математических наук, доцент
Рыбников Леонид Григорьевич

Москва-2022

Введение

Пусть $\mathfrak{g}$ — простая алгебра Ли. Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ — это алгебра Хопфа, исторически один из первых примеров квантовых групп. Он был определен В. Дринфельдом в [D85].

Простейшим случаем является $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$. Янгиан $Y(\mathfrak{sl}_n)$ может быть представлен как фактор расширенного Янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Таким образом, большая часть данной работы посвящена случаю $Y(\mathfrak{gl}_n)$. $Y(\mathfrak{gl}_n)$ в некотором смысле единственная алгебра Хопфа, деформирующая обертывающую алгебру $U(\mathfrak{gl}_n[t])$, где $\mathfrak{gl}_n[t]$ — алгебра Ли многочленов со значениями в $\mathfrak{gl}_n$.

Существует плоское семейство максимальных коммутативных подалгебр $B(C) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$, называющиеся подалгебрами Бете. Они параметризуются обратимыми диагональными матрицами $C \in GL_n$ с попарно различными собственными значениями. Подалгебры Бете стабильны относительно действия $\mathbb{C}$ автоморфизмами сдвига на $Y(\mathfrak{gl}_n)$. В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ эти алгебры появляются в работах Л. Фаддеева и санкт-петербургской школы при изучении обратной задачи рассеяния, см. [T84, TF]. В полной общности эти подалгебры впервые появляются в статье В. Дринфельда [D85]. Максимальность подалгебр Бете была изучена в [NO].

Данное семейство происходит из интегрируемых моделей в статистической механике и алгебраического анзаца Бете. Более точно, образ $B(C)$ в тензорном произведении представлений вычисления $Y(\mathfrak{gl}_n)$ образует полное множество Гамильтонианов для XXX магнитной цепочки Гейзенберга, см. [B, KBI].

Главная задача в XXX интегрируемых системах — это диагонализация операторов, которыми действуют элементы $B(C)$ в соответствующих представлениях Янгиана. Стандартный подход — это алгебраический анзатц Бете, который дает явную формулу для собственных векторов, зависящую от внешних параметров, удовлетворяющую некоторой системе уравнений, называемую уравнениями анзатца Бете, см., например, [KR86].

Вопросы, которыми мы занимаемся в данной работе непосредственно связаны с полнотой алгебраического анзатца Бете, а именно с вопросом, образуют ли собственные вектора, полученные с помощью анзатца Бете, базис в представлении Янгиана. Данная задача активно изучается много лет, см. [MV03, MTV07, MTV09, MTV14, T18, CLV, RV]. В качестве первого шага в направлении решения данной задачи необходимо показать, что совместные собственные значения не имеют кратностей. Последнее выполнено тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: во-первых, подалгебра Бете действует в представлении V с циклическим вектором (а именно существует вектор $v \in V$, такой что $B(C)v = V$) и, во-вторых, алгебра $B(C)$ действует на V полупросто.

В данной работе мы доказываем простоту спектра в нескольких новых случаях, включающих ручные представления Янгиана в типе A с общими значениями параметров и некоторые модули Кириллова-Решетихина в других типах.

1. Янгианы и их определения

1.1. **Янгиан для простой $\mathfrak{g}$.** Пусть $\mathfrak{g}$ — простая комплексная алгебра Ли, G — соответствующая связная односвязная группа Ли, T — максимальный тор и T^{reg} — регулярные элементы T, $\mathfrak{h}$ — соответствующая подалгебра Картана, $n = \operatorname{rk}\mathfrak{g} = \dim\mathfrak{h}$.

Пусть Φ — система корней алгебры Ли $\mathfrak{g}$, Φ^+ — положительные корни, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ — простые корни, $\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ — фундаментальные веса, $(,)$ — инвариантное скалярное произведение, такое что $(\alpha, \alpha) = 2$ для коротких простых корней, $\mathfrak{g}_\alpha$ — соответствующие корневые подпространства $\mathfrak{g}$, $x_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha, x_\alpha^- \in \mathfrak{g}_{-\alpha}$ такие, что $(x_\alpha, x_\alpha^-) = 1$, $t_{\omega_i} \in \mathfrak{h}$ — элемент, соответствующий $\omega_i \in \mathfrak{h}^*$ относительно инвариантного скалярного произведения. Таким же образом h_i — это элемент, соответствующий $\alpha_i^\vee = \frac{2\alpha_i}{(\alpha_i, \alpha_i)}$. Также определим элемент Казимира, соответствующий инвариантному скалярному произведению:

$$\Omega = \sum_{\alpha \in \Phi^+} (x_\alpha^+ \otimes x_\alpha^- + x_\alpha^- \otimes x_\alpha^+) + \sum_i t_{\omega_i} \otimes h_i \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$$

и
$$\omega = \sum_{\alpha\in\Phi^+}(x_\alpha^+x_\alpha^- + x_\alpha^-x_\alpha^+) + \sum_i t_{\omega_i}h_i \in U(\mathfrak{g}).$$

Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ — это ассоциативная алгебра с единицей над $\mathbb{C}$, порожденная элементами $\{x, J(x)\,|\,x\in\mathfrak{g}\}$, удовлетворяющими следующим соотношениям:
$$xy - yx = [x,y], \qquad J([x,y]) = [J(x),y]$$
$$J(cx+dy) = cJ(x) + dJ(y),$$
$$[J(x),[J(y),z]] - [x,[J(y),J(z)]] = \sum_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda}([x,x_\lambda],[[y,x_\mu],[z,x_\nu]])\{x_\lambda,x_\mu,x_\nu\},$$
$$[[J(x),J(y)],[z,J(w)]] + [[J(z),J(w)],[x,J(y)]] =$$
$$= \sum_{\lambda,\mu,\nu\in\Lambda}\left(([x,x_\lambda],[[y,x_\mu],[[z,w],x_\nu]]) + ([z,x_\lambda],[[w,x_\mu],[[x,y],x_\nu]])\right)\{x_\lambda,x_\mu,J(x_\nu)\}$$
для всех $x,y,z,w\in\mathfrak{g}$ и $c,d\in\mathbb{C}$, где $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — некоторый ортонормированный базис $\mathfrak{g}$, $\{x_1,x_2,x_3\} = \frac{1}{24}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_3}x_{\pi(1)}x_{\pi(2)}x_{\pi(3)}$ for all $x_1,x_2,x_3\in Y(\mathfrak{g})$.

Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ является алгеброй Хопфа с коумножением Δ, коединицей ϵ и антиподом S, заданными
$$\Delta(x) = x\otimes 1 + 1\otimes x,$$
$$\Delta(J(x)) = J(x)\otimes 1 + 1\otimes J(x) + \frac{1}{2}[x\otimes 1,\Omega],$$
$$S(x) = -x, \quad S(J(x)) = -J(x) + \frac{1}{4}c_{\mathfrak{g}}x \quad \forall x\in\mathfrak{g},$$
$$\epsilon(x) = 0, \quad \epsilon(J(x)) = 0,$$
где $c_{\mathfrak{g}}$ — собственное значение ω в присоединенном представлении.

Также мы будем обозначать как Δ^{op} обратное коумножение в $Y(\mathfrak{g})$; а именно, $\Delta^{op} = \sigma\circ\Delta$, где $\sigma = \sigma_{Y(\mathfrak{g}),Y(\mathfrak{g})}$.

Существует автоморфизм сдвига τ_c, действующий на $Y(\mathfrak{g})$, заданный
$$x\mapsto x, \quad J(x)\mapsto J(x) + cx, \quad \forall x\in\mathfrak{g}.$$
Мы обозначаем $\tau_{c,d} = \tau_c\otimes\tau_d$.

Теперь мы готовы ввести универсальную $\mathcal{R}$-матрицу Янгиана $Y(\mathfrak{g})$.

Теорема 1.1 ([D85])**.** *Существует единственный формальный ряд*
$$\mathcal{R}(u) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{R}_k u^{-k} \in (Y(\mathfrak{g})\otimes Y(\mathfrak{g}))[[u^{-1}]],$$
удовлетворяющий
$$(id\otimes\Delta)\mathcal{R}(u) = \mathcal{R}_{12}(u)\mathcal{R}_{13}(u),$$
$$\tau_{0,u}\Delta^{op}(y) = \mathcal{R}(u)^{-1}(\tau_{0,u}\Delta(y))\mathcal{R}(u) \quad \forall y\in Y(\mathfrak{g}).$$
Ряд $\mathcal{R}(u)$ называется универсальной $\mathcal{R}$-матрицей Янгиана $Y(\mathfrak{g})$, и также он удовлетворяет квантовому уравнению Янга-Бакстера
$$\mathcal{R}_{12}(u-v)\mathcal{R}_{13}(u)\mathcal{R}_{23}(v) = \mathcal{R}_{23}(v)\mathcal{R}_{13}(u)\mathcal{R}_{12}(u-v).$$

Здесь $\mathcal{R}_{12}(u) = \mathcal{R}(u)\otimes 1 \in Y(\mathfrak{g})\otimes Y(\mathfrak{g})\otimes Y(\mathfrak{g})[[u^{-1}]]$, а $\mathcal{R}_{13}(u)$ и $\mathcal{R}_{23}(u)$ определяются аналогично.

Мы можем рассмотреть образ $\mathcal{R}(-u)$ под действием $\rho_V\otimes 1$ для некоторого конечномерного представления (V,ρ_V) Янгиана $Y(\mathfrak{g})$. Будем обозначать $T_V(u) = \rho_V\otimes 1(\mathcal{R}(-u))$ и называть его T-оператором. Мы можем применить $\rho_V\otimes\rho_V\otimes 1$ и получить соотношения на коэффициенты T-оператора. Коэффициенты Фурье T-оператора можно рассматривать как другой набор образующих $Y(\mathfrak{g})$.

Теперь рассмотрим алгебру $X(\mathfrak{g})$ с такими образующими и следуя [W] мы получим сюръективный гомоморфизм $X(\mathfrak{g})\to Y(\mathfrak{g})$.

Зафиксируем конечномерное представление V Янгиана $Y(\mathfrak{g})$ с соответствующим гомоморфизмом ρ, такое что у V есть нетривиальный неприводимый подмодуль (не обязательно не равный V). Обозначим $R(u)$ образ универсальной R-матрицы $\mathcal{R}(-u)$ под действием $\rho\otimes\rho$:

$$R(u)=(\rho\otimes\rho)\mathcal{R}(-u)\in\operatorname{End}(V\otimes V)[[u^{-1}]].$$

Зафиксируем базис $\{e_1,\dots,e_N\}$ представления V и обозначим $\{E_{ij}\}_{1\leqslant i,j\leqslant N}$ обыкновенные элементарные матрицы относительно этого базиса.

Расширенный Янгиан $X(\mathfrak{g})$ — это ассоциативная $\mathbb{C}^n$-алгебра с единицей, порожденная элементами $\{t_{ij}^{(r)}\mid 1\leqslant i,j\leqslant N, r\geqslant 1\}$ с определяющими соотношениями, которые мы будем называть RTT-соотношениями,

$$R(u-v)T_1(u)T_2(v)=T_2(v)T_1(u)R(u-v)\quad in\quad (\operatorname{End}V)^{\otimes 2}\otimes X(\mathfrak{g})[[v^{-1},u^{-1}]],$$

где $T(u)=\sum_{i,j=1}^N E_{ij}\otimes t_{ij}(u)$, а $t_{ij}(u)=\delta_{ij}+\sum_{r\geqslant 1}t_{ij}^{(r)}u^{-r}$ для всех $1\leqslant i,j\leqslant N$, $T_a(u)=\sum_{i,j}1^{\otimes(a-1)}\otimes E_{ij}\otimes 1^{\otimes(n-a)}\otimes t_{ij}(u)$ и $R(u-v)$ отождествлено с $R(u-v)\otimes 1$.

Расширенный Янгиан — это алгебра Хопфа, где структура алгебры Хопфа задается

$$\Delta(T(u))=T_{[1]}(u)T_{[2]}(u),\quad S(T(u))=T(u)^{-1},\quad \epsilon(T(u))=Id,$$

где $T_{[1]}(u)=\sum_{i,j=1}^N E_{ij}\otimes t_{ij}(u)\otimes 1\in\operatorname{End}V\otimes(X(\mathfrak{g}))^{\otimes 2}$ и $T_{[2]}(u)=\sum_{i,j=1}^N E_{ij}\otimes 1\otimes t_{ij}(u)\in\operatorname{End}V\otimes(X(\mathfrak{g}))^{\otimes 2}$.

RTT-Янгиан $Y(\mathfrak{g})$ является фактором $X(\mathfrak{g})$ по двухстороннему идеалу, порожденному элементами $z_{ij}^{(r)}$, $1\leqslant i,j\leqslant N$ и $r\geqslant 1$, заданными

$$Z(u)=\sum_{i,j=1}^N E_{ij}\otimes z_{ij}(u)=S^2(T(u))T(u+\frac{1}{2}c_{\mathfrak{g}})^{-1},$$

where $z_{ij}(u)=\delta_{ij}+\sum_{r\geqslant 1}z_{ij}^{(r)}u^{-r}$ для каждой пары индексов $1\leqslant i,j\leqslant N$.

Впервые эквивалентность этих двух определений утверждал В. Дринфельд в [D85] и доказал К. Вендландтом в [W].

1.2. **Янгиан от $\mathfrak{gl}_n$.** Определение расширенного Янгиана $X(\mathfrak{g})$ для $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n$, где V — стандартное представление $\mathfrak{gl}_n$ дает Янгиан $\mathfrak{gl}_n$.

Алгебра $Y(\mathfrak{gl}_n)$ порождена элементами $t_{ij}^{(r)}$, $1\leqslant i,j\leqslant n$, $r\in\mathbb{Z}_{\geqslant 0}$ и $t_{ij}^{(0)}=\delta_{ij}$ (элементы $t_{ij}^{(r)}$ соответствуют $E_{ij}z^r\in\mathfrak{gl}_n[z]$, где $E_{ij}\in\mathfrak{gl}_n$ — это стандартные матричные единицы) со следующими соотношениями:

$$[t_{ij}^{(r+1)},t_{kl}^{(s)}]-[t_{ij}^{(r)},t_{kl}^{(s+1)}]=t_{kj}^{(r)}t_{il}^{(s)}-t_{kj}^{(s)}t_{il}^{(r)}.$$

Рассмотрим формальные степенные ряды от u^{-1}, где u — это формальная переменная,

$$t_{ij}(u)=\sum_{r\geqslant 0}t_{ij}^{(r)}u^{-r}.$$

Из этих формальных степенных рядов можно составить матрицу с коэффициентами в формальных рядах с коэффициентами из $Y(\mathfrak{gl}_n)$

$$T(u)=\sum_{i,j}e_{ij}\otimes t_{ij}(u)\in\operatorname{End}(\mathbb{C}^n)\otimes Y(\mathfrak{gl}_n)[[u^{-1}]],$$

где e_{ij} — стандартная матричная единица. Таким образом соотношения можно переписать как:

$$R(u-v)T_1(u)T_2(v)=T_2(v)T_1(u)R(u-v),$$

где

$$R(u)=1\otimes 1-u^{-1}\sum_{i,j}e_{ij}\otimes e_{ji}$$

— это R-матрица.

Алгебра $Y(\mathfrak{g})$ для $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_n$ — это подалгебра $Y(\mathfrak{gl}_n)$, состоящая из всех элементов, стабильных относительно автоморфизмов $T(u)\to f(u)T(u)$ для всех $f(u)\in 1+u^{-1}\mathbb{C}[[u^{-1}]]$.

Для дальнейших деталей и ссылок, касающихся случая $\mathfrak{gl}_n$, мы отсылаем читателя к книге А. Молева [Mo].

2. Подалгебры Бете

2.1. **Подалгебры Бете в $Y(\mathfrak{g})$.** Подалгебры Бете — это семейство максимальных коммутативных подалгебр $B(C)$ в $Y(\mathfrak{g})$, зависящих от параметра $C \in T^{reg}$.

Для любого конечномерного представления (V, ρ_V) Янгиана $Y(\mathfrak{g})$ мы можем определеить T-оператор $T_V(u) = \rho_V \otimes 1(\mathcal{R}(-u))$ (как в определении Янгиана в Разделе 1.1). Тогда для любого элемента C группы G мы можем определить:

Определение 2.1. Подалгебра Бете $B(C)$ — это подалгебра $Y(\mathfrak{g})$ порожденная коэффициентами $\mathrm{tr}_V(\rho_V(C) \otimes 1)T_V(u)$ для всех конечномерных представлений $Y(\mathfrak{g})$.

Для $C = 1$ это определение появлилось в работе В. Дринфельда [D88].

Предложение 2.1 ([IR19]).
(1) *Подалгебра Бете $B(C)$ коммутативна для любого C.*
(2) *Для регулярного полупростого C подалгебра $B(C)$ является максимальной коммутативной.*
(3) *Для регулярного полупростого C подалгбера $B(C)$ свободно порождена коэффициентами $T_W(u)$, где W проблегает фундаментальные представления $\mathfrak{g}$.*

Подалгебры Бете определяются следующим свойством:

Теорема 2.2 ([I]). *Пусть $C \in T^{reg}$. Подалгебра $B(C)$ содержит $\mathfrak{h}$ и совпадает с централизатором подпространства $Q(C) \subset Y(\mathfrak{g})$, которое является линейной оболочкой элементов*

$$\sigma_i(C) = 2J(t_{\omega_i}) - \sum_{\alpha \in \Phi^+} \frac{e^{\alpha}(C) + 1}{e^{\alpha}(C) - 1}(\alpha, \alpha_i) x_\alpha x_\alpha^- \in Y(\mathfrak{g}),\ i = 1, \ldots, n.$$

2.2. **Подалгебры Бете в $Y(\mathfrak{gl}_n)$.** Мы заметили, что $Y(\mathfrak{gl}_n)$ — это расширенный Янгиан для $Y(\mathfrak{sl}_n)$, а T-оператор для $Y(\mathfrak{gl}_n)$ определяется с помощью стандартного представления. Мы можем определить подалгебры Бете используя только этот T-оператор.

Симметрическая группа S_n действует на $Y(\mathfrak{gl}_n)[[u^{-1}]] \otimes (\mathrm{End}\ \mathbb{C}^{\mathrm{n}})^{\otimes \mathrm{n}}$, переставляя тензорные сомножители. Данное действие факторизуется через вложение $S_n \hookrightarrow (\mathrm{End}\ \mathbb{C}^{\mathrm{n}})^{\otimes \mathrm{n}}$, а значит групповая алгебра $\mathbb{C}[S_n]$ является подалгеброй $Y(\mathfrak{gl}_n)[[u^{-1}]] \otimes (\mathrm{End}\ \mathbb{C}^n)^{\otimes n}$. Пусть S_m — это подгруппа S_n, переставляющая первые m тензорных сомножителей. Обозначим A_m антисимметризатор

$$\sum_{\sigma \in S_m} (-1)^{\sigma} \sigma \in \mathbb{C}[S_m] \subset Y(\mathfrak{gl}_n)[[u^{-1}]] \otimes (\mathrm{End}\ \mathbb{C}^{\mathrm{n}})^{\otimes \mathrm{n}}.$$

Заметим, что T-операторы, отвечающие фундаментальным представлениям, $\mathfrak{gl}_n$ равны $T_p(u) = A_p T_1(u) \ldots T_p(u - p + 1)$, так как фундаментальные представления являются внешними степенями стандартного представления.

Пусть $C \in GL_n$. Для любого $a \in \{1, \ldots, n\}$ обозначим C_a элемент $i_a(1 \otimes C) \in Y(\mathfrak{gl}_n)[[u^{-1}]] \otimes (\mathrm{End}\, \mathbb{C}^n)^{\otimes n}$. Для любого $1 \leqslant p \leqslant n$ введем ряд с коэффициентами в $Y(\mathfrak{gl}_n)$:

$$\tau_p(u, C) = \mathrm{tr}\, A_p C_1 \ldots C_p T_1(u) \ldots T_p(u - p + 1),$$

где мы берем след по всем p копиям $\mathrm{End}\ \mathbb{C}^{\mathrm{n}}$.

Определение 2.2. Подалгебра Бете $B(C) \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$ порождена всеми коэффициентами рядов $\tau_p(u, C)$, где $p = 1, \ldots, n$.

Из определения следует, что $B(C) = B(a \cdot C)$ для любого $a \in \mathbb{C}$. Зафиксируем максимальный тор $T \subset GL_n$ (а именно, подргуппу диагональных матриц) и обозначим T^{reg} множество регулярных элементов T. Обозначим GL_n^{reg} множество регулярных элементов группы Ли GL_n. Следующее предложение суммирует известные алгебраические свойства подалгебр Бете, см. например [NO], [IR19], [I].

Теорема 2.3 (Свойства подалгебр Бете).
(1) *Для любого $C \in GL_n$ подалгебра $B(C)$ коммутативна.*

(2) *Для любого $C \in T^{reg}$ подалгебра $B(C)$ является максимальной коммутативной подалгеброй.*
(3) *Для любого $C \in GL_n^{reg}$ подалгебра $B(C)$ свободно порождена коэффициентами $\tau_p(u, C)$, где $p = 1, \dots, n$.*
(4) *Пусть $C \in T^{reg}$ и пусть $\tilde{C}$ — любой представитель C в универсальном накрытии GL_n. Тогда подалгебра $B(C)$ порождена всеми*
$$\operatorname{tr}_V \rho(\tilde{C})(\rho \otimes 1)(\mathcal{R}(-u)),$$
где (ρ, V) пробегает все конечномерные представления $Y(\mathfrak{gl}_n)$ и $\mathcal{R}(u)$ — это универсальная R-матрица для $Y(\mathfrak{gl}_n)$.

На самом деле нет сомнений, что утверждение (2) верно для любого $C \in GL_n^{reg}$ и что утверждение (4) верно для любого $C \in GL_n$, но до сих пор в литературе нет строгих доказательств этих фактов.

Элемент максимального тора может быть представлен точкой в пространстве Делиня-Мамфорда $\overline{M_{0,n+2}}$ стабильных рациональных кривых с $n+2$ отмеченными точками: элемент тора C соответствует невырожденной рациональной кривой с отмеченными точками $0, \infty$ и собственные значения C. Согласно [IR18] семейство подалгебр Бете в $Y(\mathfrak{gl}_n)$ продолжается до большего семейства $B(X)$ коммутативных подалгебр $Y(\mathfrak{gl}_n)$, где X принимает значения в $\overline{M_{0,n+2}}$: подалгебра $B(C)$ соответствует невырожденной рациональной кривой, соответствующей элементу тора C, но также появляются некоторые новые подалгебры, соответствующие вырожденным кривым $X \in \overline{M_{0,n+2}}$.

В частности, подалгебра, соответствующая самой вырожденной кривой — гусенице — это подалгебра Картана $H \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$, также известная как подалгебра Гельфанда-Цетлина, порожденная центрами всех меньших Янгианов $Y(\mathfrak{gl}_1) \subset Y(\mathfrak{gl}_2) \subset \ldots \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$, вложенных стандартным образом.

Предложение 2.4 ([IMR])**.** *Подалгебра Бете $B(C)$ Янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$ — это тензорное произведение $B'(C) \otimes ZY(\mathfrak{gl}_n)$, где $B'(C)$ — это коммутативная подалгебра $Y(\mathfrak{sl}_n)$ и $ZY(\mathfrak{gl}_n)$ — это центр $Y(\mathfrak{gl}_n)$.*

$B'(C)$ является подалгеброй Бете $Y(\mathfrak{sl}_n)$. В данной работе мы ограничиваемся случаем $C \in T^{reg}$, а именно мы фиксируем максимальный тор и рассматриваем семейство подалгебр Бете, параметризованное его регулярными точками.

2.3. **Подалгебры Бете в $Y(\mathfrak{gl}_2)$.** В этом случае подалгебра $B(C)$ порождена всеми коэффициентами следующих двух формальных рядов:
$$\operatorname{qdet} T(u) = t_{11}(u)t_{22}(u-1) - t_{21}(u)t_{12}(u-1)$$
и
$$\operatorname{tr} CT(u) = c_{11}t_{11}(u) + c_{12}t_{21}(u) + c_{21}t_{12}(u) + c_{22}t_{22}(u).$$
Алгебра не меняется при растяжении параметра C, а значит семейство параметризовано точками $\mathbb{C}P^3 = \mathbb{P}(Mat_2)$.

Если C регулярная матрица, то $B(C)$ максимальная коммутативная подалгебра $Y(\mathfrak{gl}_2)$, как показано в [NO]. Более того, для регулярного C все коэффициенты $\operatorname{qdet} T(u)$ и $\operatorname{tr} CT(u)$ порождают $B(C)$ и являются алгебраически независимыми. Ряд Пуанкаре $B(C)$ относительно стандартной фильтрации равен
$$P_{B(C)}(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1-t^k)^2}.$$
Для нерегулярного C ряд Пуанкаре уменьшается. А именно, коэффициент при u^{-1} рядов $\operatorname{tr} CT(u)$ и $\operatorname{qdet} T(u)$ оба равны $t_{11}^{(1)} + t_{22}^{(1)}$, в то время как все другие коэффициенты остаются алгебраически независимыми, и ряд Пуанкаре становится равен
$$P_{B\left(\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)}(t) = \frac{1}{1-t} \prod_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(1-t^k)^2}.$$

Мы изучаем максимальные коммутативные подалгебры в смысле [NO], так что следуя [IR18] мы пополняем эту меньшую подалгебру, чтобы ее ряд Пуанкаре стал таким же, как при общем значении C. Это пополнение определяется как предел

$$\lim_{t\to 0} B\left(\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)+tC'\right)$$

и зависит от выбора направления в касательном пространстве к $\mathbb{C}P^3$ в точке, соответствующей единичной матрице, а именно от C'. Мы рассматриваем семейство подалгебр Бете $B(C)$ для регулярного $C\in Mat_2$ и определяем его замыкание. Мы доказываем следующее утверждение:

Теорема 2.5 ([Ma21]). *Замыкание $\mathcal{B}$ семейства подалгебр Бете в $Y(\mathfrak{gl}_2)$ параметризовано точками раздутия $\mathbb{C}P^3$ в точке, соответствующей $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$.*

Мы обозначаем это раздутие $\mathbb{C}P^3$ как Z, и это пространство параметров семейства $\mathcal{B}$.

Замечание. *Семейство $\mathcal{B}$ — это плоское семейство коммутативных подалгебр $Y(\mathfrak{gl}_2)$ над Z. В* [IR19] *определение $B(C)$ расширено на точки компактификации Де Кончини-Прочези присоединенной группы Ли алгебры Ли, для которой определен Янгиан. Ожидается, что предельное пространство, на которое можно расширить определение подалгебр Бете, — это некоторое разрешение компактификации Де Кончини-Прочези. В нашем случае алгебра Ли — это $\mathfrak{gl}_2$, а соответствующая группа —- это $PGL(2,\mathbb{C})$. Ее компактификация Де Кончини-Прочези — это $\mathbb{C}P^3$.*

3. Представления Янгианов

3.1. **Представления $Y(\mathfrak{g})$.** Так как $Y(\mathfrak{g})$ — это алгебра Хопфа, можно определить действие Янгиана на тензорных произведениях представлений.

Автоморфизм сдвига τ_u на $Y(\mathfrak{g})$ определяет действие сдвигами на представлениях $Y(\mathfrak{g})$, а именно

$$V\mapsto V(u),\qquad \rho\mapsto\rho\circ\tau_u,\qquad u\in\mathbb{C}.$$

Мы будем рассматривать представления Янгиана $Y(\mathfrak{g})$, которые имеют вид $\bigotimes_{j=1}^{N} W_j(u_j)$, где W_j — "маленькие" представления.

Определение 3.1. Модуль Кириллова-Решетихина $W_{k,r}$ — это неприводимое представлене $Y(\mathfrak{g})$, порожденное старшим вектором v со старшим весом $r\omega_k$ относительно $\mathfrak{g}$, такое что $J(\mathfrak{h})v=0$ и $J(x_\alpha^+)v=0$ для всех $\alpha\in\Phi^+$.

Модули Кириллова-Решетихина были определены в [KR87]. Известно, что

$$W_{k,r}|_{\mathfrak{g}}=V_{k\omega_r}\oplus\bigoplus_s V_{\lambda_s},$$

где λ_s — это веса, меньшие $k\omega_r$.

3.2. **Представления $Y(\mathfrak{gl}_n)$.** Можно получить представления Янгиана из представлений $\mathfrak{gl}_n$, используя гомоморфизм вычисления

$$\mathrm{ev}: Y(\mathfrak{gl}_n)\to U(\mathfrak{gl}_n),$$

который дает структуру представления $Y(\mathfrak{gl}_n)$ на каждом представлении $\mathfrak{gl}_n$. Такие представления называются представлениями вычисления. Модули Кириллова-Решетихина, определенные в общем случае, могут быть получены этим способом.

В случае $Y(\mathfrak{gl}_n)$ автоморфизм сдвига можно рассматривать как деформацию действия $\mathbb{C}$ на $U(\mathfrak{gl}_n[t])$, которое сдвигает переменную t.

Можно обобщить конструкцию $Y(\mathfrak{gl}_n)$-модулей, используя централизаторную конструкцию Янгиана, придуманную Ольшанским [O]. А именно, рассмотрим вложение $\mathfrak{gl}_k\subset\mathfrak{gl}_{n+k}$ как подалгебру $k\times k$-матриц в правом нижнем углу, тогда для каждого $k\geq 0$ существует гомоморфизм

$$\eta_k: Y(\mathfrak{gl}_n)\to U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k},$$

который сюръективен по модулю центра $U(\mathfrak{gl}_{n+k})$ (в частности, $\eta_0 = \mathrm{ev}$). Пусть V_λ — неприводимое представление $\mathfrak{gl}_{n+k}$ со старшим весом λ. Рассмотрим ограничение V_λ на $\mathfrak{gl}_k$:

$$V_\lambda = \bigoplus_\mu M_{\lambda\mu} \otimes V_\mu,$$

где $M_{\lambda\mu} := \mathrm{Hom}(V_\mu, V_\lambda)$ — пространство кратностей, на котором действует $U(\mathfrak{gl}_{n+k})^{\mathfrak{gl}_k}$, и таким образом оно является неприводимым представлением $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Представления данного вида называются косыми представлениями $Y(\mathfrak{gl}_n)$, потому что они зависят от косой диаграммы Юнга $\lambda \setminus \mu$. Пусть $M_{\lambda\mu}$ — любое косое представление $Y(\mathfrak{gl}_n)$, тогда мы будем обозначать $V_{\lambda\setminus\mu}(z)$ (неприводимое) представление, на котором действие $Y(\mathfrak{gl}_n)$ задается с помощью $\eta_k \circ \tau_z$. Мы также называем такие представления косыми представлениями $Y(\mathfrak{gl}_n)$.

В [NT], Назаров и Тарасов вводят класс ручных представлений, то есть представлений вида $\bigotimes_{i=1}^k V_{\lambda_i\setminus\mu_i}(z_i)$, таких что $z_i - z_j \notin \mathbb{Z}$ для всех $i \neq j$. Это класс неприводимых представлений $Y(\mathfrak{gl}_n)$, таких что подалгебра Картана $H \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$ действует без крастностей. Таким образом естественно ожидать аналогичных свойств от действия подалгебр Бете на этом классе представлений $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Собственный базис подалгебры Картана $H \subset Y(\mathfrak{gl}_n)$, известный как базис Гельфанда-Цетлина, естественно нумеруется полустандартными косыми таблицами Юнга и может быть описан явно. Собственный базис для общей подалгебры Бете $B(X)$ таким образом является деформацией базиса Гельфанда-Цетлина (будучи при этом гораздо менее явным).

3.3. **Представления** $Y(\mathfrak{gl}_2)$**.** Обозначим $L(a,b)$ представление вычисления $Y(\mathfrak{gl}_2)$, которое получается из конечномерного представления $\mathfrak{gl}_n$ со старшим весом (a,b). Тогда $\mathcal{B}(x)$ действует на $L(\underline{a},\underline{b}) = L(a_1,b_1) \otimes \ldots \otimes L(a_N,b_N)$ для любого $x \in Z$.

Любое конечномерное неприводимое представление $Y(\mathfrak{gl}_2)$ изоморфно $L(\underline{a},\underline{b})$ для некоторого набора весов $\{(a_i,b_i)\}_{i=1}^N$.

4. Свойство эрмитовости

Мы рассматриваем две разных эрмитовых формы на представлениях Янгианов. Одна будет использоваться в общем случае, а другая только в случае $\mathfrak{gl}_2$. Первая соответствует компактной форме группы, а вторая — расщепленной.

4.1. **Свойство эрмитовости, соответствующее компактной форме.** Пусть θ — инволюция Картана на $\mathfrak{g}$. Это антилинейная инволюция, заданная $\theta(x_\alpha) = -x_\alpha^-$, $\theta(x_\alpha^-) = -x_\alpha$, $\theta(h_i) = -h_i$. Неподвижные точки этой антиинволюции — это компактная вещественная форма $\mathfrak{g}_{comp}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Соответствующая подгруппа $G_{comp} \subset G$ компактна.

На Янгиане $Y(\mathfrak{g})$ действует антиавтоморфизм $\hat{\theta}$, заданный $\hat{\theta}(x) = \theta(x)$, $\hat{\theta}(J(x)) = -J(\theta(x))$ $\forall x \in \mathfrak{g}$. Этот антиавтоморфизм обобщает антиавтоморфизм, определенный Кирилловым и Решетихиным в [Re].

Рассмотрим T^{reg}_{comp}, неподвижные точки инволюции Картана на T^{reg}. А именно, $T^{reg}_{comp} = T^{reg} \cap G_{comp}$.

Лемма 4.1 ([Ma22])**.** *Если* $C \in T^{reg}_{comp}$*, то* $\hat{\theta}(B(C)) = B(C)$.

Эрмитовость — достаточное условие полупростоты операторов, то есть на представлении есть эрмитово скалярное произведение, отностильено которого $B(C)$ действует нормальными операторами.

Определение 4.1. Представление $\pi : Y(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$ в эрмитовом пространстве V мы называем эрмитовым, если $\pi(x)^+ = \pi(\hat{\theta}(x))$ для любого $x \in Y(\mathfrak{g})$.

4.2. **Свойство эрмитовости, соответствующее расщепленной форме.** В случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ мы рассматриваем другую эрмитову форму на конечномерных представлениях $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Эта форма продолжает стандартную форму, которая есть на представлении $\mathfrak{gl}_n$.

Определение 4.2. Представление V Янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$ называется унитарным, если существует положительно определенная эрмитова форма $\langle\cdot,\cdot\rangle$ на V, такая что для любых $v, w \in V$ $\langle t_{ij}(u)v, w\rangle = \langle v, t_{ji}(u)w\rangle$.

Мы обозначаем ϕ^+ эрмитов сопряженный оператор к оператору ϕ относительно данной эрмитовой формы.

Лемма 4.2 ([Ma21]). *Если $C \in T^{reg}_{split}$, то $B(C)^+ = B(C)$ в представлении V.*

5. Главные результаты

Мы говорили, что в качестве первого шага в решении задачи анзатца Бете необходимо установить, что совместные собственные значения подалгебры Бете не имеют кратностей. Как было замечено, это условие выполнено тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия: во-первых, в представлении есть циклический вектор для подалгебры Бете (то есть существует $v \in V$, такой что $B(C)v = V$), а во-вторых, алгбра $B(C)$ действует на V полупросто.

В этом разделе мы обсудим, при каких предположениях данные условия выполняются.

Гипотеза 5.1. *$B(C)$ действует с циклическим вектором в любом неприводимом конечномерном представлении $Y(\mathfrak{g})$ для всех $C \in T^{reg}$.*

Условие, которое может быть проверено и которое гарантирует полупростоту операторов из подалгебры Бете $B(C)$ — это условие, что они действуют нормальными операторами относительно некоторой эрмитовой формы, то есть $B(C)^+ = B(C)$.

Гипотеза 5.2. *Для всех тензорных произведений модулей Кириллова-Решетихина $\bigotimes_{j=1}^N W_{k_j,r_j}(u_j)$, где $u_j \in i\mathbb{R}$, $B(C)$ действует нормальными операторами относительно эрмитовой формы, определенной в разделе 4.1, если $C \in T^{reg}_{comp}$.*

В данной работе мы получили несколько результатов, подтверждающих эти гипотезы, и это главные результаты нашей работы. В следующих подразделах мы их обсудим подробнее.

5.1. Случай $Y(\mathfrak{g})$ для простой $\mathfrak{g}$.

Для условия наличия циклического вектора мы рассмотрим представления, для которых $W_{k,r}|_{\mathfrak{g}} = V_{k\omega_r}$. Согласно [KR87] для всех классических алгебр Ли такие представления существуют. В частности, в типе A все модули Кириллова-Решетихина имеют такой вди, а в типе C все модули Кириллова-Решетихина с $r = 1$ имеют такой вид. Также в ортогональном случае спинорное представление имеет такой вид.

Теорема 5.3 ([Ma22]). *Если $W_{k,r}$ — модуль Кириллова-Решетихина, удовлетворяющий условиям выше, то для всех $C \in T^{reg}$ для общих u_j, то есть для открытого по Зарискому подмножества в $\mathbb{C}^{\otimes N}$, подалгебра Бете $B(C)$ действует в представлении $V = \bigotimes_j W_{k_j,r_j}(u_j)$ с циклическим вектором.*

Теперь приведем результат о полупростоте.

Рассмотрим T^{reg}_{comp} — неподвижные точки инволюции Картана на T^{reg}. То есть $T^{reg}_{comp} = T^{reg} \cap G_{comp}$.

Теорема 5.4 ([Ma22]). *Пусть V — представление Янгиана $Y(\mathfrak{g})$, которое является тензорным произведением представлений вида $W_{k,r}(u)$, где $u \in i\mathbb{R}$ с условием, что $W_{k,r}$ неприводимо как $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда V эрмитово.*

Главный результат нашей работы в общем случае следующий:

Следствие 5.5. *Если $C \in T^{reg}_{comp}$, спектр подалгебры Бете $B(C)$ прост в представлениях, который удовлетворяют условиям теорем 5.3 и 5.4.*

5.2. **Анзатц Бете, циклический вектор и простота спектра, случай $Y(\mathfrak{gl}_n)$.** Пусть $X \in \overline{M_{0,n+2}}$ и рассмотрим подалгебру Бете $B(X)$. Наша гипотеза в этих предположениях следующая:

Гипотеза 5.6. *$B(X)$ действует с циклическим вектором в любом ручном представлении $Y(\mathfrak{gl}_n)$ для всех $X \in \overline{M_{0,n+2}}$.*

На самом деле легко увидеть, что гипотеза верна для общих $X, z_1, \dots, z_N$. Действительно, рассмотрим пространство параметров $\overline{M_{0,n+2}} \times \mathbb{C}^N$. Условие, что $B(X)$ действует с циклическим вектором на $\bigotimes_{i=1}^N V_i(z_i)$ определяет открытое по Зарискому подмножество в $\overline{M_{0,n+2}} \times \mathbb{C}^N$, а значит если у нас есть одна точка $(X, z_1, \dots, z_N) \in \overline{M_{0,n+2}} \times \mathbb{C}^N$, такая что $B(X)$ действует с циклическим вектором на $\bigotimes_{i=1}^N V_i(z_i)$, мы автоматически получаем то же свойство для общих $(X, z_1, \dots, z_N)$. С другой стороны, согласно [NT], подалгебра Гельфанда-Цетлина $Y(\mathfrak{gl}_n)$ (которая является частным случаем подалгебры Бете $B(X)$) действует без кратностей в любом ручном представлении, а значит действует с циклическим вектором. Следовательно, это открытое по Зарискому подмножество непусто. Проблема с этим рассуждением в том, что оно не дает ни одного представленя, такого что $B(X)$ действует циклически для всех $X \in \overline{M_{0,n+2}}$.

Теорема 5.7 ([IMR])**.** *Существует открытое по Зарискому плотное подмножество $I \subset \mathbb{C}^N$, такое что $B(X)$ действует на V с циклическим вектором для всех $X \in \overline{M_{0,n+2}}$ и $(z_1, \dots, z_N) \in I$.*

В частности, в общем ручном представлении в смысле [NT] каждая подалгебра Бете $B(X)$ с $X \in \overline{M_{0,n+2}}$ действует с циклическим вектором. Это позволяет изучать совместный спектр $B(X)$ в данном ручном представлении как конечное накрытие $\overline{M_{0,n+2}}$ и переформулировать некоторые свойства этого спектра в терминах геометрии компактификации Делиня-Мамфорда.

Теорема 5.8 ([IMR])**.** *Пусть $W_{k,r}$ — модуль Кириллова-Решетихина, такой что его веса не имеют кратностей. Тогда для всех $C \in T^{reg}$ для общих $u_j \in i\mathbb{R}$ подалгебра Бете $B(C)$ действует в представлении $V = \bigotimes_j W_{k_j,r_j}(u_j)$ с циклическим вектором.*

Другой главный результат этот работы — это следующая теорема. Она была впервые доказана в типа A Решетихиным [Re] для $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$.

Теорема 5.9 ([IMR])**.** *Пусть V — представление Янгиана $Y(\mathfrak{g})$, такое что V — это тензорное произведение представлений $W_{k,r}(u)$, где $u \in i\mathbb{R}$ и $W_{k,r}$ неприводимо как $\mathfrak{g}$-модуль. Тогда V эрмитово (в смысле определения 4.1).*

Из теоремы 5.7 следует, что если $B(C)$ действует полупросто, у нее простой спектр (то есть совместные собственные значения не имеют кратностей). Обычное достаточное условие для этого — это существование эрмитового скалярного произведения, такого что $B(C)^+ = B(C)$, то есть все элементы $B(C)$ действуют нормальными операторами. Мы даем достаточные условия на представления Янгиана, гарантирующие, что такое скалярное произведение существует, если C принадлежит либо замыканию множества регулярных элементов компактного вещественного тора $T_{comp} \subset T$, либо расщепленного вещественного тора $T_{split} \subset T$. Таким образом мы получаем:

Следствие 5.10 ([IMR])**.** *Для $C \in T^{reg}_{comp}$ спектр подалгебры Бете $B(C)$ в представлениях, удовлетворяющих условиям теорем 5.8 и 5.9 прост.*

Случай компактного тора восходит к Кириллову и Решетихину [KR86]. Тогда $W_{k,r}(u)$ — это другое обозначение для $V_{k\omega_r}(\frac{k_i}{2} - \frac{r_i}{2} + u)$. Заметим, что замыкание множества регулярных точек в компактном торе T_{comp} в $\overline{M_{0,n+2}}$ — это компактная форма $\overline{M^{comp}_{0,n+2}}$. Таким образом в случае $\mathfrak{gl}_n$ мы получаем:

Теорема 5.11 ([IMR])**.** *Пусть все V_i являются модулями Кириллова-Решетихина. Пусть $k_i \times r_i$ — размер соответствующей диаграммы Юнга. Пусть $z_i = \frac{k_i}{2} - \frac{r_i}{2} + ix_i$, где $x_i \in \mathbb{R}$.*

Тогда для $(x_1,\dots,x_N)\in\mathbb{R}^N$ *из открытого по Зарискому подмножества* $B(X)$ *действует с простым спектром на* $\bigotimes_{i=1}^N V_i(z_i)$ *для всех* $X\in\overline{M_{0,n+2}^{comp}}$.

Замыкание множества регулярных точек расщепленного вещественного тора T_{split} в $\overline{M_{0,n+2}}$ — это вещественная форма $\overline{M_{0,n+2}^{split}}$. Наш следующий результат:

Теорема 5.12 ([IMR]). *Пусть* $V_i, i=1,\dots,N$ *— набор косых представлений* $Y(\mathfrak{gl}_n)$. *Тогда для* $(x_1,\dots,x_N)$ *из непустого открытого по Зарискому подмножества в* $\mathbb{R}^N$, $B(X)$ *действует с простым спектром на* $\bigotimes_{i=1}^N V_i(x_i)$ *для всех* $X\in\overline{M_{0,n+2}^{split}}$.

5.3. **Случай** $Y(\mathfrak{gl}_2)$**.** В случае $Y(\mathfrak{gl}_2)$ у нас получилось найти явно открытое по Зарискому подмножество, о котором мы говорили выше.

Струна — это множество $S(a,b)=\{a-1,a-2,\dots,b+1,b\}$, где $a,b\in\mathbb{C}$, $a>b$, $a-b\in\mathbb{Z}$. Известно, что представление $L(\underline{a},\underline{b})=L(a_1,b_1)\otimes\ldots\otimes L(a_N,b_N)$ неприводимо тогда и только тогда, когда для любых $1\leqslant i<j\leqslant N$ выполнен один из трех вариантов: $S(a_i,b_i)\cup S(a_j,b_j)$ не струна, или $S(a_i,b_i)\subset S(a_j,b_j)$, или $S(a_i,b_i)\supset S(a_j,b_j)$.

Мы получили следующие два результата:

Теорема 5.13 ([Ma21]). *Любая алгебра в семействе* $\mathcal{B}$ *действует с циклическим вектором на* $L(a_1,b_1)\otimes\ldots\otimes L(a_N,b_N)$, *если для любых* $1\leqslant i<j\leqslant n$, $S(a_i,b_i)\cup S(a_j,b_j)$ *не является струной.*

Во-вторых, мы ограничиваемся на замыкание подсемейства, соответствующее вещественным диагональным матрицам, параметризованное точками $\mathbb{R}P^1\simeq Z'\subset Z$ (см. определение Z в теореме 2.5).

Теорема 5.14 ([Ma21]). *Для любого* $x\in Z'$ *и любых* $a_1,b_1\dots,a_N,b_N\in\mathbb{R}$, *таких что* (a_i,b_i) *и* (a_j,b_j) *не пересекаются и* $S(a_i,b_i)\cup S(a_j,b_j)$ *не является струной для каждой пары* i,j, *подалгебра* $\mathcal{B}(x)$ *действует на* $L(a_1,b_1)\otimes\ldots\otimes L(a_N,b_N)$ *с простым спектром.*

6. Дальнейшие задачи

Теорема 5.11 позволяет рассматривать множество собственных прямых относительно действия $B(X)$ на $\bigotimes_{i=1}^k V_i(z_i)$ как неразветвленное накрытие пространства $\overline{M_{0,n+2}^{comp}}$. В частности, мы получаем действие монодромии фундаментальной группы $\pi_1(\overline{M_{0,n+2}^{comp}})$ (которую естественно называть (чистой) аффинной группой кактусов) на спектре подалгебр Бете. Также можно определить структуру кристалла Кириллова-Решетихина на спектре, следуя стратегии, описанной в [HKRW] (см. [KMR]). Мы ожидаем, что действие аффинной группы кактусов на этом множестве задается частичными инволюциями Шутценбергера на кристалле Кириллова-Решетихина.

Аналогично с ситуацией с компактной вещественной формой, теорема 5.12 дает возможность рассмотреть действие обычной группы кактусов $\pi_1(\overline{M_{0,n+2}^{split}})$ на спектре подалгебры Бете. Специализирую параметр подалгебры Бете в точку гусеничной кривой в $\overline{M_{0,n+2}^{split}}$, мы получаем действие группы кактусов на базисе Гельфанда-Цетлина в тензорном произведении косых представлений. Этот базис пронумерован наборами полустандартных косых таблиц Юнга, и мы предполагаем, что действие группы кактусов задается инволюциями Бендера-Кнута, аналогично с конструкцией Чмутова, Глика и Пилявского [CGP].

Основные результаты диссертации опубликованы в двух статьях: I. I. Mashanova-Golikova *Simplicity of spectra for Bethe subalgebras in* $Y(\mathfrak{gl}_2)$. Arnold Math J. (2021) (И. Машанова-Голикова *Простота спректра подалгебр Бете в* $Y(\mathfrak{gl}_2)$.)
II. I. Mashanova-Golikova *Hermitian property and simplicity of spectra of Bethe subalgebras in Yangians.* Funct. Anal. and its Appl. (2022) (И. Машанова-Голикова *Свойство эрмитовости и простота спектра подалгебр Бете в янгианах.*)

Список литературы

[B] R. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, Inc., London, 1982

[CLV] D. Chernyak, S. Leurent, D. Volin, *Completeness of Wronskian Bethe Equations for Rational* $\mathfrak{gl}_{\mathsf{m}|\mathsf{n}}$ *Spin Chains*, Commun.Math.Phys. 391 (2022) 3, 969-1045

[CGP] M. Chmutov, M. Glick, P.Pylyavskyy, *The Berenstein–Kirillov group and cactus groups*, Journal of Combinatorial Algebra, VOL. 4 (2020), NO. 2, Pages 111–140

[D85] V. Drinfeld *Hopf algebras and the quantum Yang-Baxter equation.* Soviet Math. Dokl. 32 (1985), 254-258

[D88] V. Drinfeld *Quantum groups.* Journal of Soviet Mathematics 41:2 (1988), 898-915

[HKRW] I. Halacheva, J. Kamnitzer, L. Rybnikov, A. Weekes *Crystals and monodromy of Bethe vectors.* Duke Math. J. 2020. Vol. 169. No. 12. P. 2337-2419.

[I] A. Ilin *The Maximality of certain commutative subalgebras in Yangians.* Funct Anal Its Appl 53, 309–312 (2019)

[IR18] A. Ilin, L. Rybnikov *Degeneration of Bethe subalgebras in the Yangian of* $\mathfrak{gl}_n$*.* Letters in Mathematical Physics. 2018. Vol. 108. No. 4. P. 1083-1107

[IR19] A. Ilin, L. Rybnikov *Bethe Subalgebras in Yangians and the Wonderful Compactification.* Commun. Math. Phys., 2019, vol. 372, pp. 343–366

[IMR] A. Ilin, I. Mashanova-Golikova, L. Rybnikov *Spectra of Bethe subalgebras of* $Y(\mathfrak{gl}_n)$ *in tame representations.* Letters in Mathematical Physics (2022) accepted for publication

[KBI] V. E. Korepin, N. M. Bogoliubov, A. G. Izergin, *Quantum inverse scattering method and correlation functions*, Cambridge University Press, 1993

[KMR] V. Krylov, I. Mashanova-Golikova, L. Rybnikov *Bethe subalgebras in Yangians and Kirillov-Reshetikhin crystals,* in preparation.

[KR86] A. N. Kirillov, N. Reshetikhin *The Yangians, Bethe Ansatz and combinatorics.* Letters in Mathematical Physics. 1986. Vol. 12, Iss. 3, pp. 199–208

[KR87] A. N. Kirillov, N. Yu. Reshetikhin, *Representations of Yangians and multiplicities of the inclusion of the irreducible components of the tensor product of representations of simple Lie algebras* Anal. Teor. Chisel i Teor. Funktsii. 8, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI), 160 (1987), 211–221

[Ma21] I. Mashanova-Golikova *Simplicity of spectra for Bethe subalgebras in* $Y(\mathfrak{gl}_2)$*.* Arnold Math J. (2021), https://doi.org/10.1007/s40598-020-00171-7

[Ma22] I. Mashanova-Golikova *Hermitian property and simplicity of spectra of Bethe subalgebras in Yangians.* Funct. Anal. and its Appl. (2022) accepted for publication

[Mo] A. Molev *Yangians and Classical Lie Algebras.* Mathematical Surveys and Monographs **143** (2007).

[MTV06] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *Bethe eigenvectors of higher transfer matrices*, Journal of Stat. Mech.: Theory and Experiment **8** (2006), 1-44.

[MTV07] E. Mukhin, V. Tarasov, A.Varchenko, *Generating operator of XXX or Gaudin transfer matrices has quasi-exponential kernel*, SIGMA 6 (2007), 060, 1–31.

[MTV09] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko, *Bethe Algebra of Homogeneous XXX Heisenberg Model Has Simple Spectrum*, Commun. Math. Phys. 288 (2009), 1–42

[MTV14] E. Mukhin, V. Tarasov, A. Varchenko *Spaces of quasi-exponentials and representations of the Yangian* $Y(\mathfrak{gl}_N)$. Transformation Groups 19, 861–885 (2014)

[MV03] E. Mukhin and A.Varchenko, Solutions to the XXX type Bethe ansatz equations and flag varieties, Cent. Eur. J. Math. 1 (2003), no. 2, 238–271

[NO] M. Nazarov, G. Olshanski *Bethe Subalgebras in Twisted Yangians.* Comm. Math. Phys. 178 (1996), 483–506.

[NT] M. Nazarov, V. Tarasov *Representations of Yangians with Gelfand-Zetlin Bases* J. Reine Angew. Math. 496 (1998), 181-212

[O] G. Olshanski, *Extension of the algebra* $U(\mathfrak{g})$ *for infinite-dimensional classical Lie algebras* $\mathfrak{g}$*, and the Yangians* $Y(\mathfrak{gl}(m))$. Soviet Math. Dokl. **36** (1988), 569—573.

[Re] N. Reshetikhin *Norms of Bethe vectors in systems with SU(3) symmetries.* Zap. Nauchn. Sem. LOMI, 150, 1986, 196–213

[RV] P. Ryan, D. Volin, *Separation of variables for rational* $\mathfrak{gl}(n)$ *spin chains in any compact representation, via fusion, embedding morphism and Bäcklund flow*, arXiv preprint, arXiv:2002.12341 (2020)

[TF] Takhtajan L.A., Faddeev L.D., *Quantum inverse scattering method and the Heisenberg XY Z-model*, Russian Math. Surv. 34 (1979), no. 5, 11-68

[T84] Tarasov V. *Structure of quantum L-operators for the R-matrix of the XXZ-model*, Theor. Math. Phys. 61 (1984), 1065-1071

[T18] V. Tarasov, *Completeness of the Bethe Ansatz for the Periodic Isotropic Heisenberg Model*, Reviews in Mathematical PhysicsVol. 30, No. 08, 1840018 (2018)

[W] C. Wendlandt *The R-matrix presentation for the Yangian of a simple Lie algebra.* Communications in Mathematical Physics, 2018, Vol. 363, Issue 1, pp. 289-332