

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
«ВЫСШАЯ ШКОЛА ЭКОНОМИКИ»

Факультет математики

на правах рукописи

Зинова Полина Александровна

**Весовая система, связанная с алгеброй Ли
 \mathfrak{sl}_2 , и алгебра Хопфа графов**

Резюме диссертации
на соискание учёной степени
кандидата математических наук

Научный руководитель
Доктор физико-математических наук, профессор
Ландо Сергей Константинович

Москва–2022

Оглавление

Введение	3
I Общая теория	3
1 Теория инвариантов Васильева	4
2 Алгебры Хопфа графов и хордовых диаграмм	5
2.1 Алгебры Хопфа графов	5
2.2 Алгебра Хопфа хордовых диаграмм	7
2.3 Примитивные элементы в алгебрах Хопфа	10
3 Весовые системы	10
3.1 Построение весовых систем по инвариантам графов	10
3.2 Построение весовых систем по алгебрам Ли	11
II \mathfrak{sl}_2-весовая система	13
4 Основные свойства \mathfrak{sl}_2 -весовой системы	14
5 \mathfrak{sl}_2 -весовая система на графах	15
5.1 Алгебра долей и вычисление значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на полных двудольных графах	16
5.2 \mathfrak{sl}_2 -весовая система и проекции на пространство примитивных элементов	19
5.3 Значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на семействе графов, не являющихся графиками пересечений	20
6 Основные результаты диссертации	21
7 Публикации, содержащие основные результаты диссертации	24

Введение

Диссертация посвящена исследованию \mathfrak{sl}_2 -весовой системы. Весовые системы сопоставляются инвариантам узлов конечного порядка. Они представляют собой функции на хордовых диаграммах (комбинаторных объектах, имеющих вид ориентированной окружности с набором хорд на ней). В частности, \mathfrak{sl}_2 -весовая система отвечает крашеному многочлену Джонса.

Несмотря на простоту определения, вычисление значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы является сложной и содержательной задачей. Нами вычислены значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на некоторых семействах графов, представляющих собой соединение (join) данного графа с дискретными графиками, а именно, на полных двудольных графах (соединение двух дискретных графов) и на соединениях цикла на пяти вершинах с дискретными графиками. Мы обозначаем соединение графа G с дискретным графом на n вершинах через (G, n) . Если G это граф C_5 , цикл на 5 вершинах, то при $n \geq 1$ графы (G, n) не являются графиками пересечений хордовых диаграмм. Семейство (C_5, n) представляет собой первое бесконечное семейство графов, не являющихся графиками пересечений, для которого известны значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы.

Кроме этого, мы доказываем явную формулу для проекций графов серий (G, n) на пространство примитивных элементов вдоль пространства разложимых элементов в алгебре Хопфа графов. Наша формула выражает экспоненциальную производящую функцию для проекций графов (G, n) , $n = 0, 1, 2, \dots$ через экспоненциальные производящие функции для графов (H, n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, где H — всевозможные подграфы графа G . Применяя эту формулу к выведенным нами явным значениям \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на указанных сериях графов, мы вычисляем ее значения на проекциях этих графов на подпространство примитивных. В частности, полученные результаты подтверждают следующую гипотезу Ландо: значение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на проекции графа на подпространство примитивных представляет собой многочлен степени не выше половины окружения (длины максимального цикла, circumference) графа.

Часть I

Общая теория

1 Теория инвариантов Васильева

У разветвленной теории Васильева дополнений к дискриминантам и топологии этих дополнений [1] имеется важный раздел: теория инвариантов Васильева узлов. *Узлом* называется класс изотопии вложения ориентированной одномерной окружности в пространство $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. *Инвариант узлов* — это функция на множестве узлов.

Особым узлом называется класс изотопии отображений $u: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$, таких, что

1. $u'(t) \neq 0$ для всех $t \in S^1$;
2. все точки самопересечения образа $u(S^1)$ — простые двойные точки с трансверсальными самопересечениями (то есть, если $u(t_1) = u(t_2)$, $t_1, t_2 \in S^1$, $t_1 \neq t_2$, то не существует точки $t_3 \in S^1$, отличной от t_1 и t_2 и такой что $u(t_3) = u(t_1) = u(t_2)$ и два касательных вектора $u'(t_1)$ и $u'(t_2)$ не коллинеарны).

Как нетрудно видеть, количество двойных точек на особом узле конечно. В. А. Васильев предложил способ (скейн-соотношение Васильева) продолжить каждый инвариант узлов со значениями в абелевой группе до инварианта особых узлов. Инвариант узлов называется *инвариантом Васильева порядка не выше n* , если его продолжение обращается в нуль на всех особых узлах, имеющих более, чем n двойных точек.

Понятие инварианта конечного порядка естественным образом распространяется и на инварианты зацеплений («многокомпонентных узлов»). Многие классические инварианты узлов, например, многочлен Конвея или многочлен HOMFLYPT, выражаются тем или иным образом через инварианты конечного порядка, хотя сами и не являются ими.

Инварианты Васильева (они же инварианты конечного порядка) обладают рядом достоинств, что делает их удобным и важным инструментом изучения узлов и зацеплений. Перечислим их, следуя [14]. Во-первых, пространство инвариантов порядка не выше заданного конечно-мерно, и размерность этого пространства можно a priori оценить сверху.

Кроме того, каждое пространство инвариантов наперед заданного порядка алгоритмически вычислимно. Далее, для каждого инварианта Васильева существует алгоритм для вычисления этого инварианта за полиномиальное время. Наконец, инварианты Васильева сильнее, чем все известные классические полиномиальные инварианты узлов (полиномы Александера, Джонса, Кауфмана, Конвея, HOMFLYPT и др.). Гипотеза В. А. Васильева утверждает, что для любых двух различных узлов существует различающий их инвариант конечного порядка. Отметим, однако, что до настоящего времени не известны перспективные подходы к доказательству этой гипотезы, как, впрочем, и к построению контрпримеров к ней.

2 Алгебры Хопфа графов и хордовых диаграмм

Функции на хордовых диаграммах тесно связаны с инвариантами графов. Структура многих из естественно возникающих инвариантов, в свою очередь, тесно связана со структурами алгебр Хопфа на пространствах графов и хордовых диаграмм. В этом разделе мы описываем соответствующие структуры.

2.1 Алгебры Хопфа графов

Под графиком мы понимаем класс изоморфизма простых (т.е. не имеющих кратных ребер и петель) конечных графов. Формальные линейные комбинации графов образуют векторное пространство, градуированное количеством вершин графа.

Произведение графов G_1 и G_2 — это их несвязное объединение: $G_1 G_2 := G_1 \sqcup G_2$. Такое умножение продолжается на пространство графов по линейности. Оно согласовано с градуировкой и задает на пространстве графов структуру градуированной алгебры.

Обозначим через $V(G)$ множество вершин графа G . Действие *коумножения* μ на графике G определено так:

$$\mu(G) := \sum_{U \subset V(G)} G|_U \otimes G|_{V(G) \setminus U}.$$

Здесь через $G|_U$ обозначен подграф в G , индуцированный подмножеством $U \subset V(G)$ множества его вершин. Как и умножение, коумножение продолжается на линейные комбинации графов по линейности и согласовано с градуировкой, т.е. мы ввели на пространстве графов структуру градуированной коалгебры. Более того, справедливо

Утверждение 1. *Введенные выше умножение и коумножение, вместе с естественно определяемыми единицей, коединицей и антиподом, задают на пространстве графов структуру градуированной коммутативной и кокоммутативной алгебры Хопфа.*

Эта структура алгебры Хопфа на пространстве графов введена в [13], а рассматривать несвязное объединение графов как умножение предложил ещё Татт [24].

Обозначим через \mathfrak{G} алгебру Хопфа графов, а через \mathfrak{G}_n – однородное векторное подпространство в ней, натянутое на графы с n вершинами, $n = 0, 1, 2, \dots$, так что

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \oplus \mathfrak{G}_1 \oplus \mathfrak{G}_2 \oplus \dots$$

С точки зрения теории инвариантов узлов конечного порядка нас будет также интересовать алгебра Хопфа графов по модулю так называемых *четырехчленных соотношений для графов*:

$$G - G'_{AB} - \tilde{G}_{AB} + \tilde{G}'_{AB} = 0,$$

где G – некоторый граф, A, B – какие-то две его вершины, G'_{AB} – граф G , в котором инцидентность вершин A и B изменена на противоположную; \tilde{G}_{AB} – граф G , в котором для каждой вершины, соединенной с B , ее инцидентность с вершиной A изменена на противоположную. Отметим, что все графы, входящие в 4-членное соотношение, имеют одинаковое число вершин. Как следствие, это соотношение уважает градуировку, и соответствующая фактор-алгебра Хопфа тоже градуирована. Мы обозначаем ее через \mathfrak{F} . Говоря об элементах алгебры Хопфа \mathfrak{F} , мы будем допускать вольность речи и называть графом его класс эквивалентности по модулю четырехчленных соотношений.

В алгебре Хопфа графов имеются заслуживающие внимания подалгебры Хопфа. Одна из таких подалгебр Хопфа порождена полными графами. Другой пример – уже целого семейства подалгебр Хопфа – строится с помощью конструкции соединения (join) графов. *Соединением*

двух простых графов G и H называется граф, получаемый добавлением к несвязному объединению $G \sqcup H$ этих графов всех ребер, соединяющих вершины графа G с вершинами графа H . Для $n = 0, 1, 2, \dots$ будем обозначать через (G, n) граф, являющийся соединением графа G и дискретного графа на n вершинах.

Некоторые семейства графов такого вида всегда состоят из графов пересечений хордовых диаграмм (см. ниже), к примеру, полные двудольные графы. Однако с помощью этой конструкции нетрудно построить и бесконечную серию графов, не являющихся графами пересечений, подробнее об этом сказано ниже.

Любой индуцированный подграф графа (G, n) имеет вид (H, k) , где H — некоторый подграф в G , $k \leq n$. Графы вида (H, n) , где H — подграф графа G , $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, порождают подалгебру Хопфа в алгебре Хопфа \mathfrak{G} . Если G_0, G_1, G_2, \dots — последовательность графов, в которой каждый граф является индуцированным подграфом следующего за ним, то соответствующие подалгебры Хопфа образуют цепочку по включению.

2.2 Алгебра Хопфа хордовых диаграмм

Хордовая диаграммой порядка n называется ориентированная окружность с выбранными на ней $2n$ попарно различными точками, разбитыми на n пар, рассматриваемая с точностью до диффеоморфизма, сохраняющего ориентацию. Обычно точки, принадлежащие к одной паре, соединяют хордами. Говорят, что две хорды *пересекаются*, если их концы перемежаются на окружности.

Формальные линейные комбинации хордовых диаграмм образуют градуированное векторное пространство. Каждая компонента градуировки — векторное пространство, порожденное диаграммами одного порядка. Четырехчленное соотношение Васильева для хордовых диаграмм имеет вид

$$\begin{array}{c} \text{Diagram 1} - \text{Diagram 2} + \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} \\ \text{---} = 0 \end{array} \quad (1)$$

Здесь и далее, если не указано иное, штриховой линией обозначены части окружности, на которых могут лежать концы какого-то набора хорд, одинакового во всех диаграммах соотношения.

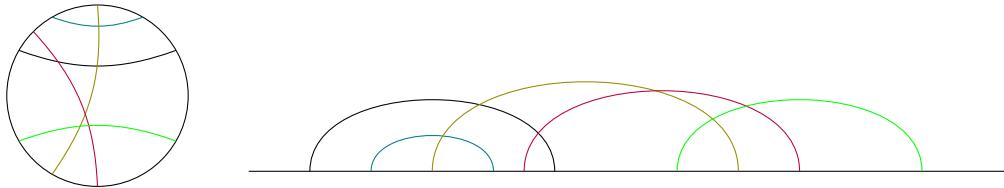


Рис. 1: Пример хордовой диаграммы и соответствующей ей дуговой диаграммы

Диаграммы, входящие в четырехчленное соотношение, устроены так: одна из хорд остается на месте, один из концов другой хорды тоже остается неподвижным, а другой пробегает все возможных положения рядом с концом первой хорды. (Говорят, что концы хорд расположены *рядом*, если между ними нет концов других хорд.)

Введем на векторном пространстве хордовых диаграмм по модулю всевозможных четырехчленных соотношений согласованные с градиурковой умножение и коумножение.

Определение 1. Дуговая диаграмма *порядка* n — *ориентированная прямая с выбранными на ней $2n$ попарно различными точками, разбитыми на n пар, рассматриваемая с точностью до диффеоморфизмов прямой, сохраняющих ориентацию*.

Если выбрать на окружности хордовой диаграмме точку, отличную от концов хорд, «разрезать» окружность в этой точке и развернуть ее в прямую, то получится *представление хордовой диаграммы в виде дуговой диаграммы* (см. пример на рис. 1). У хордовой диаграммы порядка n может быть до $2n$ различных представлений в виде дуговой диаграммы. Напротив, дуговая диаграмма однозначно определяет соответствующую хордовую диаграмму.

Произведение хордовых диаграмм C_1 и C_2 — это хордовая диаграмма, соответствующая дуговой диаграмме, полученной последовательным соединением двух произвольных дуговых представлений диаграмм C_1 и C_2 (см. рис. 2). Произведение хордовых диаграмм корректно определено (то есть, результат не зависит от выбора точек разрыва) по модулю 4-членных соотношений.

Обозначим через $V(C)$ множество хорд диаграммы C . Коумножение

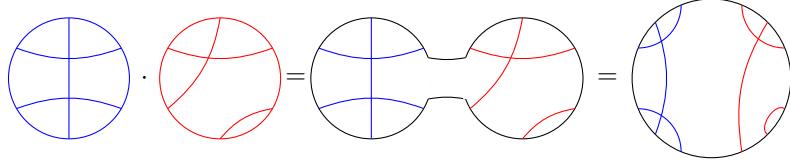


Рис. 2: Умножение хордовых диаграмм

μ хордовых диаграмм определено так:

$$\mu(C) := \sum_{U \subset V(C)} C|_U \otimes C|_{V(C) \setminus U}.$$

Здесь через $C|_U$ обозначена хордовая диаграмма, образованная подмножеством $U \subset V(C)$ множества хорд хордовой диаграммы C .

Умножение и коумножение продолжаются на линейные комбинации хордовых диаграмм по линейности и согласованы с градуировкой.

Как доказал Бар-Натан [2], эти операции превращают векторное пространство хордовых диаграмм по модулю четырехчленных соотношений в алгебру Хопфа. Мы обозначаем эту алгебру Хопфа через \mathfrak{C} ,

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0 \oplus \mathfrak{C}_1 \oplus \mathfrak{C}_2 \oplus \dots,$$

где через \mathfrak{C}_k обозначено векторное пространство, порожденное хордовыми диаграммами с k хордами, профакторизованное по 4-членным соотношениям.

Каждой хордовой диаграмме можно сопоставить простой граф с помощью конструкции *графа пересечений*. Вершины этого графа соответствуют дугам хордовой диаграммы, и между вершинами есть ребро тогда и только тогда, когда соответствующие хорды пересекаются. Это отображение не является ни инъективным, ни сюръективным: с одной стороны, нетрудно привести пример двух различных хордовых диаграмм, имеющих один и тот же граф пересечений, с другой — не любой простой граф является графиком пересечений. Буше [4] указал полный набор препятствий к тому, чтобы график являлся графиком пересечений какой-либо хордовой диаграммы. Отображение, сопоставляющее хордовой диаграмме ее график пересечений, продолжается до градуированного гомоморфизма алгебры Хопфа \mathfrak{C} в алгебру Хопфа \mathfrak{F} (см. [19]). Начиная с порядка 7 этот гомоморфизм не является инъективным — он имеет нетривиальное ядро; вопрос о его сюръективности остается открытым.

2.3 Примитивные элементы в алгебрах Хопфа

При изучении структуры алгебр Хопфа важную роль играют так называемые примитивные элементы. Теорема Милнора–Мура [22] утверждает, что над полем характеристики нуль связная коммутативная кокоммутативная градуированная биалгебра изоморфна полиномиальной биалгебре, порожденной ее примитивными элементами. Элемент p биалгебры с коумножением μ называется **примитивным**, если $\mu(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1$. Градуированная биалгебра называется *связной*, если ее нулевая однородная компонента изоморфна основному полю. Как нетрудно видеть, эти условия выполняются для алгебр Хопфа \mathfrak{G} , \mathfrak{F} и \mathfrak{C} . В полиномиальных алгебрах Хопфа определена проекция на подпространство примитивных элементов вдоль подпространства разложимых элементов. Явную формулу для этой проекции предложил Ландо [19]. Мы рассматриваем проекцию π в алгебрах Хопфа графов, однако аналогичная формула имеет место и для алгебры Хопфа хордовых диаграмм:

$$\pi(G) := \sum_{V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k} (-1)^{k-1} (k-1)! G|_{V_1} G|_{V_2} \dots G|_{V_k}. \quad (2)$$

Здесь и далее через $G|_U$ мы обозначаем подграф графа G , индуцированный подмножеством $U \subseteq V(G)$ его множества вершин. Суммирование ведётся по всем представлениям множества $V(G)$ в виде объединения непересекающихся непустых подмножеств.

Универсальная формула для этой проекции в полиномиальных алгебрах Хопфа представляет ее как логарифм тождественного гомоморфизма (см. [18], [23]). Впрочем, для графов общего вида вычисления с помощью этой формулы оказываются трудоемкими. В частном случае графов вида (G, n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, вычисления, связанные с проекциями на примитивные, существенно упрощаются.

3 Весовые системы

3.1 Построение весовых систем по инвариантам графов

Всякому особому узлу сопоставляется его хордовая диаграмма: концы хорд в ней — это прообразы двойных точек особого узла. При этом значение инварианта Васильева порядка не выше n на особом узле ровно

с n двойными точками полностью определяется хордовой диаграммой этого узла. При таком сопоставлении инвариант Васильева порядка не выше n задаёт функцию на хордовых диаграммах с n хордами. При этом оказывается, что получающиеся функции f должны удовлетворять двум соотношениям: так называемым одночленному и существенно более важному четырехчленному (3).

$$f\left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{(dashed circle with two chords)} \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \text{Diagram 2} \\ \text{(dashed circle with one chord)} \end{array}\right) + f\left(\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{(dashed circle with two chords)} \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{(dashed circle with one chord)} \end{array}\right) = 0 \quad (3)$$

Согласно теореме Концевича [14] всякая функция на хордовых диаграммах со значениями в коммутативной алгебре над полем характеристики 0, удовлетворяющая одночленным и четырехчленным соотношениям, получается из инварианта узлов, имеющего порядок не выше n . Кроме того, существует операция перенормировки, которая позволяет построить по каждой функции, удовлетворяющей четырехчленным соотношениям, функцию, дополнительно удовлетворяющую одночленным соотношениям. *Весовой системой* называется функция на хордовых диаграммах, удовлетворяющая четырехчленным соотношениям. Для простоты мы рассматриваем весовые системы со значениями в поле \mathbb{C} комплексных чисел.

Таким образом, весовые системы — это элементы алгебры Хопфа, градуированно двойственной к алгебре Хопфа \mathfrak{C} . Отметим, что умножение и коумножение хордовых диаграмм возникают естественным образом — они соответствуют двойственным операциям на биалгебре инвариантов узлов.

3.2 Построение весовых систем по алгебрам Ли

Один из наиболее богатых источников весовых систем — это предложенная Бар-Натаном [2] и Концевичем [14] конструкция весовой системы, которая строится по конечномерной алгебре Ли, наделенной невырожденной инвариантной билинейной формой.

Пусть \mathfrak{g} — конечномерная комплексная алгебра Ли размерности t и пусть (\cdot, \cdot) — невырожденная билинейная инвариантная форма на \mathfrak{g} . Инвариантность означает, что для любых $x, y, z \in \mathfrak{g}$ выполнено равенство

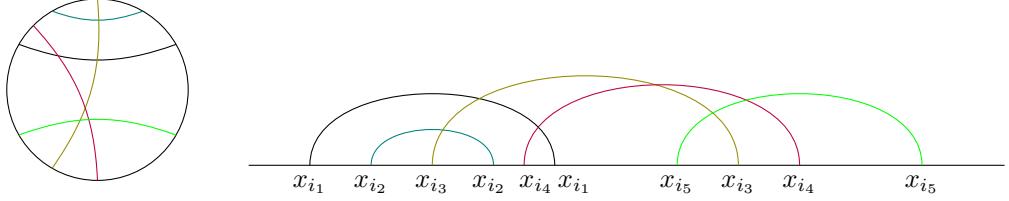


Рис. 3: Вычисление значения весовой системы, отвечающей алгебре Ли с ортонормированным базисом x_1, \dots, x_m , на дуговой диаграмме, соответствующей хордовой диаграмме.

$([x, y], z) = (x, [y, z])$. Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ — ортонормированный базис в \mathfrak{g} , $(x_i, x_j) = \delta_{ij}$. Обозначим через $U(\mathfrak{g})$ универсальную обертывающую алгебру Ли \mathfrak{g} . Рассмотрим отображение $w_{\mathfrak{g}}: \mathfrak{C} \rightarrow U(\mathfrak{g})$, которое строится следующим образом.

Пусть D — хордовая диаграмма, A — какое-то ее представление в виде дуговой диаграммы, $V(A)$ — множество дуг этой дуговой диаграммы, $\nu: V(A) \rightarrow \{1, 2, \dots, m\}$ некоторая расстановка индексов от 1 до m на дугах диаграммы. Поставим в соответствие диаграмме A и разметке ν элемент $w_X(A, \nu) \in U(\mathfrak{g})$ следующим образом: для каждой дуги $v \in V(A)$ напишем на обоих её концах элемент $x_{\nu(v)} \in X$ и обозначим через $w_X(A, \nu)$ результат перемножения этих элементов слева направо. Обозначим через $w_X(A)$ сумму по всем возможным разметкам:

$$w_X(A) := \sum_{\nu: V(A) \rightarrow \{1, \dots, m\}} w_X(A, \nu). \quad (4)$$

Так, значение весовой системы, отвечающей алгебре Ли с ортонормированным базисом x_1, \dots, x_m , на дуговой диаграмме с рис. 3 равно

$$\sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \sum_{i_3=1}^m \sum_{i_4=1}^m \sum_{i_5=1}^m x_{i_1} x_{i_2} x_{i_3} x_{i_2} x_{i_4} x_{i_1} x_{i_5} x_{i_3} x_{i_4} x_{i_5}.$$

- Утверждение 2** ([14]).
1. Для любого элемента $C \in \mathfrak{C}$ результат такой операции определен однозначно и не зависит от выбора представления хордовой диаграммы C в виде дуговой диаграммы.
 2. Для любой дуговой диаграммы A элемент $w_X(A)$ лежит в центре универсальной обертывающей алгебры: $w_X(A) \in Z(U(\mathfrak{g}))$.

3. Значение $w_X(A)$ с точностью до умножения на одну и ту же константу для всех хордовых диаграмм не зависит от выбора ортонормированного базиса.
4. Полученное таким образом отображение хордовых диаграмм в $Z(U(\mathfrak{g}))$ удовлетворяет 4-членным соотношениям и продолжается, тем самым, до гомоморфизма коммутативных алгебр.

Поскольку произведение хордовых диаграмм задается конкатенацией соответствующих дуговых диаграмм, весовая система, отвечающая алгебре Ли, мультиплективна. Отметим, что описанная конструкция легко модифицируется на случай произвольного, не обязательно ортонормированного, базиса в \mathfrak{g} : нужно лишь ставить на левом конце дуги с индексом i элемент базиса x_i , а на правом ее конце — элемент x_i^* двойственного базиса. В таком виде мы и будем ее применять для алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 .

В диссертации подробно изучаются свойства простейшей такой весовой системы, которая строится по алгебре Ли \mathfrak{sl}_2 . О ней будет подробно сказано далее. Весовая система, построенная по алгебре Ли \mathfrak{sl}_3 , оказывается существенно более сложной и не обладает многими свойствами, которые есть у \mathfrak{sl}_2 -весовой системы и которые существенно облегчают ее вычисление. Эта весовая система изучалась, например, в статье [17], а в статье [27] были вычислены её значения для хордовых диаграмм с графом пересечений $K_{2,n}$. В недавней статье [28] описаны существенные продвижения в понимании весовой системы, построенной по алгебре Ли \mathfrak{gl}_N при произвольных N .

Конструкция весовых систем по алгебрам Ли была обобщена на супералгебры Ли А. Вайнтром [25]. В [9] эта конструкция была рассмотрена подробнее для частного случая супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(1 \mid 1)$. В частности, там выведено рекуррентное соотношение для значений $\mathfrak{gl}(1 \mid 1)$ -весовой системы.

Часть II

\mathfrak{sl}_2 -весовая система

4 Основные свойства \mathfrak{sl}_2 -весовой системы

Простейший случай описанной в предыдущем разделе конструкции — весовая система, отвечающая алгебре Ли \mathfrak{sl}_2 , или, короче, \mathfrak{sl}_2 -весовая система. Инвариант узлов, которому соответствует эта весовая система — крашеный многочлен Джонса. Значения этой весовой системы лежат в центре универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 , то есть представляют собой многочлены от одной переменной c (элемента Казимира в \mathfrak{sl}_2). Ее значение на хордовой диаграмме с n хордами является многочленом степени n со старшим коэффициентом 1.

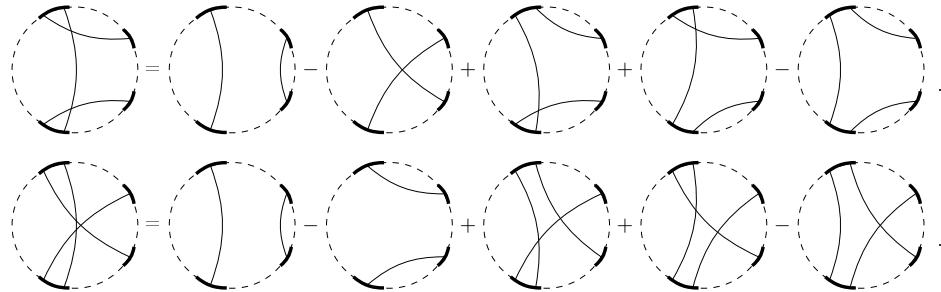
Весовая система, отвечающая алгебре Ли \mathfrak{sl}_2 , подробно изучалась в статье С. В. Чмутова и А. Н. Варченко [8]. В частности, там были выведены следующие соотношения:

1. если в диаграмме D есть лист — хорда, пересекающая только одну хорду, то

$$w_{\mathfrak{sl}_2}(D) = (c - 1)w_{\mathfrak{sl}_2}(D'), \quad (5)$$

где через D' обозначена хордовая диаграмма, полученная из D удалением листа;

2. если в хордовой диаграмме нет листа, то в ней есть тройка хорд, расположенных как изображено в левой части одного из нижеследующих равенств;
3. для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы в случае расположенных таким образом хорд выполняются равенства



Приведенные здесь шестичленные соотношения позволяют упростить хордовую диаграмму, уменьшив количество пересечений хорд. Кроме этого, в той же статье [8] из этих соотношений выведено рекуррентное соотношение, которое позволяет уменьшить число хорд в диаграмме на единицу.

5 \mathfrak{sl}_2 -весовая система на графах

В статье С. В. Чмутова и С. К. Ландо [7] доказано, что значение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на хордовой диаграмме зависит только от ее графа пересечений и определяет, тем самым, функцию на графах пересечений. Этот результат приводит к естественному вопросу, сформулированному С. К. Ландо: существует ли продолжение весовой системы до полиномиального инварианта графов, который удовлетворяет четырехчленным соотношениям для графов? Для всех графов не более чем с восемью вершинами такое продолжение существует и единственno, как показал Е. С. Красильников [15].

Один из возможных подходов к поиску продолжения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы до полиномиального инварианта произвольных графов состоит в том, чтобы определить некоторый полиномиальный инвариант произвольных графов, удовлетворяющий четырехчленным соотношениям для графов и совпадающий с \mathfrak{sl}_2 -весовой системой на графах пересечений. Для того, чтобы реализовать его, необходимо иметь достаточное количество примеров значений весовой системы на различных семействах графов.

Так, недавно были вычислены значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на полных графах: П. Е. Закорко доказала следующую гипотезу С. К. Ландо (2016, см. [3]) о явном виде производящей функции для этих значений:

Утверждение 3. Производящая функция для последовательности значений весовой системы $w_{\mathfrak{sl}_2}$ на полных графах K_0, K_1, K_2, \dots представляется в виде цепной дроби

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}_2}(K_n) t^n = \frac{1}{1 - \alpha_0(c)t - \frac{\beta_1(c)t^2}{1 - \alpha_1(c)t - \frac{\beta_2(c)t^2}{1 - \alpha_2(c)t - \frac{\beta_3(c)t^2}{1 - \dots}}}},$$

коэффициенты которой имеют следующий вид

$$\alpha_n(c) = c - n(n+1), \quad \beta_n(c) = -n^2c + \frac{n^2(n^2-1)}{4}.$$

5.1 Алгебра долей и вычисление значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на полных двудольных графах

К числу основных результатов диссертации относятся явные формулы для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на некоторых семействах графов и методы их получения. Опишем подход, с помощью которого в диссертации получена рекуррентная формула для производящих функций последовательностей значений $w_{\mathfrak{sl}_2}$ на полных двудольных графах.

Долей (share) в хордовой диаграмме называется такая пара непересекающихся дуг хордовой диаграммы, что если конец хорды лежит на одной из этих дуг, то и второй ее конец лежит на одной из этих дуг.

Всевозможные доли порождают векторное пространство, и мы определяем \mathfrak{sl}_2 -весовую систему на нем. Она принимает значения в коммутативной подалгебре тензорного квадрата $U(\mathfrak{sl}_2) \otimes U(\mathfrak{sl}_2)$ универсальной обертывающей алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 . Эта коммутативная подалгебра порождена тремя элементами, которые мы обозначаем через c_1, c_2, ξ . Для этой весовой системы справедливы аналоги четырехчленных соотношений и соотношений Чмутова–Варченко, и их доказательство практически повторяет доказательство для хордовых диаграмм. Мы работаем с фактор-пространством векторного пространства долей по этим соотношениям. С помощью шестичленных соотношений Чмутова–Варченко мы заключаем, что для каждого элемента такого пространства есть представление в виде линейной комбинации долей более простого вида, значение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на которых имеет вид $(c_1 - 1)^{k_1} (c_2 - 1)^{k_2} c_1^{n_1} c_2^{n_2} \xi^N$,

$k_1, k_2, n_1, n_2, N \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. На множестве долей можно определить умножение как конкатенацию долей и продолжить его по линейности на все элементы фактор-пространства. Тем самым, мы вводим на нем структуру ассоциативной алгебры; мы обозначаем эту алгебру через \mathcal{S} . Далее, из наличия такого представления следует, что \mathfrak{sl}_2 -весовая система задает гомоморфизм из алгебры долей в алгебру многочленов от ξ с коэффициентами, представляющими собой многочлены от c_1, c_2 .

Следуя подходу, предложенному П. Е. Закорко, мы вводим операторы добавления хорды, которые обозначаем через S_k , $k = 1, 2$, (из этой пары далее мы используем лишь оператор S_1) и X , на алгебре долей и соответствующие им (в смысле указанного гомоморфизма) операторы \tilde{S}_1, \tilde{X} на алгебре многочленов. Снова пользуясь шестичленными соотношениями Чмутова–Варченко и четырехчленными соотношениями, мы выводим рекуррентные формулы для действия этих операторов. С их помощью мы получаем производящую функцию для матричных коэффициентов оператора \tilde{S}_1 в базисе $1, \xi, \xi^2, \dots$ (Мы обозначаем эти коэффициенты через $s_{i,m}$, $m = 0, 1, 2, \dots; i = 0, 1, 2, \dots, m$). Кроме этого, старшие матричные коэффициенты $s_{m,m}$ мы вычисляем явно. Оказывается, что $s_{m,m} = c - \frac{m(m+1)}{2}$.

Для вывода формул для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на хордовых диаграммах с полным двудольным графом пересечений (мы обозначаем такие хордовые диаграммы через $B_{n,m}$, $n, m = 0, 1, 2, \dots$) мы вводим специализацию — отображение из алгебры долей в алгебру производящих функций, при котором доля, значение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на которой равно ξ^m , переходит в обыкновенную производящую функцию G_m для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на хордовых диаграммах $B_{0,m}, B_{1,m}, B_{2,m}, \dots$. Пользуясь этой специализацией, мы получаем формулу, которая выражает G_m через G_0, G_1, \dots, G_{m-1} и матричные коэффициенты оператора S_1 .

Теорема 1. *Последовательность обыкновенных производящих функций $G_m(t)$ для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на полных двудольных графах удовлетворяет начальному условию $G_0(t) = \frac{1}{1-t \cdot c}$ и рекуррентному соотношению*

$$G_m(t) = \frac{c^m + t \sum_{i=0}^{m-1} s_{i,m} G_i(t)}{1 - t \cdot \left(c - \frac{m(m+1)}{2}\right)},$$

где через $s_{i,j}$ обозначены коэффициенты, которые задаются следующей

производящей функцией:

$$\begin{aligned} \sum_{m=0}^{\infty} S_1(\xi^m) t^m &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^m s_{i,m} \xi^i t^m \\ &= \frac{1}{1 - \xi t} \left(c_1 + \frac{c_1 c_2 t^2 - \xi t}{1 - (2\xi - 1)t - (c_1 + c_2 - \xi^2 - \xi)t^2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда вытекает

Теорема 2. *Обыкновенная производящая функция $G_m(t)$ для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на полных двудольных графах $K_{0,m}, K_{1,m}, K_{2,m}, \dots$ представляет собой линейную комбинацию геометрических прогрессий вида $\sum_{k=0}^m \frac{p_{m,k}(c)}{1-t(c-\frac{k(k+1)}{2})}$, где $p_{m,k}(c)$ — некоторые многочлены степени не выше m .*

Следствие 1. *Экспоненциальная производящая функция*

$$\mathcal{G}_m(t) := \sum_{n=0}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}_2}(K_{n,m}) \frac{t^n}{n!}$$

для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на полных двудольных графах $K_{0,m}, K_{1,m}, K_{2,m}, \dots$ представляет собой линейную комбинацию вида

$$\sum_{k=0}^m P_{m,k}(c) \exp \left(t \left(c - \frac{k(k+1)}{2} \right) \right), \quad (6)$$

где $P_{m,k}(c)$ — некоторые многочлены степени не выше m .

Более того, из теоремы 1 несложно вывести, что верно

Следствие 2. *Для любого G , являющегося графом пересечений хордовой диаграммы, полученной замыканием некоторой доли, оба конца каждой хорды которой лежат на разных дугах, экспоненциальная производящая функция*

$$\mathcal{G}_G(t) := \sum_{n=0}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}_2}((G, n)) \frac{t^n}{n!}$$

для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на графах вида $(G, 0), (G, 1), (G, 2), \dots$ представляет собой линейную комбинацию вида

$$\mathcal{G}_G(t) = \sum_{k=0}^{|V(G)|} p_{G,k}(c) \exp \left(t \left(c - \frac{k(k+1)}{2} \right) \right),$$

где $p_{G,k}(c)$ — некоторые многочлены степени не выше $|V(G)|$.

5.2 \mathfrak{sl}_2 -весовая система и проекции на пространство примитивных элементов

Некоторые инварианты графов естественно ведут себя относительно структуры алгебры Хопфа графов. Такие инварианты существенно упрощаются при проекции (2) на подпространство примитивных элементов. Так, значение хроматического многочлена на $\pi(G)$ представляет собой линейный член значения хроматического многочлена на графе G (см. [5]).

С. К. Ландо выдвинул гипотезу о том, что значение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на проекции хордовой диаграммы — это многочлен степени не выше половины окружения (длины наибольшего цикла, circumference) ее графа пересечений.

Для проверки этого утверждения для некоторых бесконечных серий графов оказалась полезна следующая выведенная в диссертации формула (7).

Для произвольного графа G введем экспоненциальные производящие функции

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_G(x) &:= x^{|V(G)|} \sum_{n=0}^{\infty} (G, n) \frac{x^n}{n!}, \\ \mathcal{P}_G(x) &:= x^{|V(G)|} \sum_{n=0}^{\infty} \pi((G, n)) \frac{x^n}{n!}.\end{aligned}$$

Теорема 3. Производящая функция $\mathcal{P}_G(x)$ представляется в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{P}_G(x) &= \\ &\sum_{V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k = V(G)} (-1)^{k-1} (k-1)! \mathcal{G}_{G|_{V_1}}(x) \mathcal{G}_{G|_{V_2}}(x) \cdots \mathcal{G}_{G|_{V_k}}(x) (\exp(-K_1 x))^k,\end{aligned}\tag{7}$$

где суммирование ведется по всем представлениям $V(G) = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k$ множества $V(G)$ в виде объединения непересекающихся непустых подмножеств.

Заметим, что по структуре эта формула напоминает формулу Ландо (2) для проекции графа.

Из теоремы 3 и следствия 1 вытекает, что верна

Теорема 4. Значение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на проекции полного двудольного графа на пространство примитивных представляет собой многочлен от c степени не выше, чем количество вершин в меньшей из долей.

Тем самым, для полных двудольных графов выполняется гипотеза Ландо о том, что значение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на проекции хордовой диаграммы на пространство примитивных — многочлен степени не выше половины окружения ее графа пересечений.

Более того, из Следствия 2 вытекает, что верно

Следствие 3. В условиях Следствия 2, экспоненциальная производящая функция $\mathcal{P}_G(t)$ \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на проекциях графов вида $(G, 0), (G, 1), (G, 2), \dots$ представляет собой линейную комбинацию вида

$$\sum_{k=0}^{|V(G)|} F_{G,k}(c) \exp(k \cdot t),$$

где $F_{G,k}(c)$ — некоторые многочлены степени не выше $|V(G)|$.

Тем самым, Теорема 4 верна для более широкого класса графов.

Отметим, что в работе [27] обсуждаются значения весовой системы \mathfrak{sl}_3 на проекциях хордовых диаграмм с графом пересечений $K_{2,n}$.

5.3 Значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на семействе графов, не являющихся графиками пересечений

Если график G не является графиком пересечений никакой хордовой диаграммы, то значение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на нем не определено. Однако такой график может оказаться эквивалентен линейной комбинации графов пересечений по модулю 4-членных соотношений. В этом случае мы можем определить значение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на нем как соответствующую линейную комбинацию значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на графах пересечений. Вообще говоря, такое определение может зависеть от способа представления графа линейной комбинацией графов пересечений — вопрос о существовании корректно определенного продолжения остается открытым. В то же время, если мы нашли какое-либо такое представление, то оно однозначно определяет возможное продолжение.

Пусть C_5 — цикл на 5 вершинах. При $n > 0$ график (C_5, n) не является графиком пересечений. Однако с помощью одного 4-членного соотношения

при любом $n > 0$ такой граф представляется в виде линейной комбинации трех графов пересечений и тем самым значение $w_{\mathfrak{sl}_2}((C_5, n))$ представляется как линейная комбинация значений $w_{\mathfrak{sl}_2}$ на соответствующих хордовых диаграммах, что позволяет вычислить его явно.

Теорема 5. *Если \mathfrak{sl}_2 -весовая система допускает продолжение на графы (C_5, n) , $n = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяющее 4-членному соотношению для графов, то производящая функция для ее значений на этих графах имеет вид*

$$\begin{aligned} x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_{\mathfrak{sl}_2}((C_5), n)x^n}{n!} = & \frac{1}{630} cx^5 ((270c^4 - 540c^3 - 999c^2 + 576c + 324)e^{(c-1)x} \\ & + (280c^4 - 1610c^3 + 3234c^2 - 2646c + 756)e^{(c-6)x} \\ & + (80c^4 - 1000c^3 + 4065c^2 - 6120c + 2700)e^{(c-15)x}) \quad (8) \end{aligned}$$

Теорема 6. *В предположениях предыдущей теоремы производящая функция для значений продолжения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на проекциях на примитивные графы (C_5, n) , $n = 0, 1, 2, \dots$ равна*

$$\begin{aligned} x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w_{\mathfrak{sl}_2}(\pi((C_5, n)))x^n}{n!} = & \frac{1}{630} cx^5 ((480c^4 + 720c^3 - 159c^2 + 576c + 324)e^{-x} \\ & + (-5040c^4 - 5040c^3 + 315c^2)e^{-3x} + (4080c^4 + 1620c^3 - 3990c^2 + 360c)e^{-4x} \\ & + 15120c^4 e^{-5x} + (-25760c^4 + 19600c^3 + 1974c^2 - 2646c + 756)e^{-6x} \\ & + (8400c^4 - 12600c^3 + 4725c^2)e^{-7x} + (5040c^4 - 13860c^3 + 7560c^2)e^{-8x} \\ & + (-1680c^4 + 5880c^3 - 5985c^2 + 1890c)e^{-9x} \\ & + (-720c^4 + 4680c^3 - 8505c^2 + 4050c)e^{-11x} \\ & + (80c^4 - 1000c^3 + 4065c^2 - 6120c + 2700)e^{-15x}) \quad (9) \end{aligned}$$

Как и в случае полных двудольных графов, этот результат подтверждает гипотезу Ландо о том, что значение \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на проекции хордовой диаграммы на пространство примитивных — многочлен степени не выше половины окружения ее графа пересечений.

6 Основные результаты диссертации

Теорема ([1,3]). *Имеет место следующее рекуррентное соотношение для обыкновенных производящих функций для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой си-*

стемы на полных двудольных графах:

$$G_0(t) = \frac{1}{1 - t \cdot c},$$

$$G_m(t) = \frac{c^m + t \sum_{i=0}^{m-1} s_{i,m} G_i(t)}{1 - t \cdot \left(c - \frac{m(m+1)}{2}\right)}.$$

где через $s_{i,j}$ обозначены коэффициенты, которые задаются следующей производящей функцией:

$$\sum_{m=0}^{\infty} S_1(\xi^m) t^m = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=0}^m s_{i,m} \xi^i t^m = \frac{1}{1 - \xi t} \left(c_1 + \frac{c_1 c_2 t^2 - \xi t}{1 - (2\xi - 1)t - (c_1 + c_2 - \xi^2 - \xi)t^2} \right)$$

Теорема ([3]). Обыкновенная производящая функция $G_m(t)$ для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на полных двудольных графах $K_{0,m}, K_{1,m}, K_{2,m}, \dots$ представляет собой линейную комбинацию геометрических прогрессий вида $\sum_{k=0}^m \frac{p_{m,k}(c)}{1-t\left(c-\frac{k(k+1)}{2}\right)}$, где $p_{m,k}(c)$ — некоторые многочлены степени не выше m .

Теорема ([3]). Экспоненциальная производящая функция

$$\mathcal{G}_m(t) := \sum_{n=0}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}_2}(K_{n,m}) \frac{t^n}{n!}$$

для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на полных двудольных графах $K_{0,m}, K_{1,m}, K_{2,m}, \dots$ представляет собой линейную комбинацию вида

$$\sum_{k=0}^m P_{m,k}(c) \exp \left(t \left(c - \frac{k(k+1)}{2} \right) \right), \quad (10)$$

где $P_{m,k}(c)$ — некоторые многочлены степени не выше m .

Теорема. Для любого G , являющегося графом пересечений хордовой диаграммы, полученной замыканием некоторой доли, оба конца каждой хорды которой лежат на разных дугах, экспоненциальная производящая функция

$$\mathcal{G}_G(t) := \sum_{n=0}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}_2}((G, n)) \frac{t^n}{n!}$$

для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на графах вида $(G, 0), (G, 1), (G, 2), \dots$ представляет собой линейную комбинацию вида

$$\mathcal{G}_G(t) = \sum_{k=0}^{|V(G)|} p_{G,k}(c) \exp\left(t\left(c - \frac{k(k+1)}{2}\right)\right),$$

где $p_{G,k}(c)$ — некоторые многочлены степени не выше $|V(G)|$.

Теорема. В условиях предыдущей теоремы экспоненциальная произвольящая функция $\mathcal{P}_G(t)$ \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на проекциях графов вида $(G, 0), (G, 1), (G, 2), \dots$ представляет собой линейную комбинацию вида

$$\sum_{k=0}^{|V(G)|} F_{G,k}(c) \exp(k \cdot t),$$

где $F_{G,k}(c)$ — некоторые многочлены степени не выше $|V(G)|$.

Теорема ([2]). Производящая функция для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на графах (C_5, n) , $n = 0, 1, 2, \dots$ равна

$$\begin{aligned} x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}_2}((C_5, n)) \frac{x^n}{n!} &= \frac{1}{630} cx^5 ((270c^4 - 540c^3 - 999c^2 + 576c + 324)e^{(c-1)x} \\ &\quad + (280c^4 - 1610c^3 + 3234c^2 - 2646c + 756)e^{(c-6)x} \\ &\quad + (80c^4 - 1000c^3 + 4065c^2 - 6120c + 2700)e^{(c-15)x}) \end{aligned} \quad (11)$$

Теорема ([2]). Производящая функция

$$\mathcal{P}_G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi((G, n)) \frac{x^n}{n!}$$

для проекций графов (G, n) на подпространство примитивных дается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_G(x) &= \\ &\sum_{V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k = V(G)} (-1)^{k-1} (k-1)! \mathcal{G}_{G|_{V_1}}(x) \mathcal{G}_{G|_{V_2}}(x) \cdots \mathcal{G}_{G|_{V_k}}(x) (\exp(-K_1 x))^k. \end{aligned}$$

Теорема ([2]). Производящая функция для значений \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на проекциях на примитивные графы (C_5, n) , $n = 0, 1, 2, \dots$ равна

$$\begin{aligned}
& x^5 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} w_{\mathfrak{sl}_2}(\pi((C_5, n))) \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{630} cx^5 \cdot ((480c^4 + 720c^3 - 159c^2 + 576c + 324)e^{-x} \\
& + (-5040c^4 - 5040c^3 + 315c^2)e^{-3x} + (4080c^4 + 1620c^3 - 3990c^2 + 360c)e^{-4x} \\
& + 15120c^4 e^{-5x} + (-25760c^4 + 19600c^3 + 1974c^2 - 2646c + 756)e^{-6x} \\
& + (8400c^4 - 12600c^3 + 4725c^2)e^{-7x} + (5040c^4 - 13860c^3 + 7560c^2)e^{-8x} \\
& + (-1680c^4 + 5880c^3 - 5985c^2 + 1890c)e^{-9x} \\
& + (-720c^4 + 4680c^3 - 8505c^2 + 4050c)e^{-11x} \\
& + (80c^4 - 1000c^3 + 4065c^2 - 6120c + 2700)e^{-15x}) \quad (12)
\end{aligned}$$

7 Публикации, содержащие основные результаты диссертации

- 1 П. А. Филиппова (Зинова), “Значения весовой системы, отвечающей алгебре Ли \mathfrak{sl}_2 , на полных двудольных графах”, Функц. анализ и его прил., 54:3 (2020), 73–93; Funct. Anal. Appl., 54:3 (2020), 208–223 Filippova, P. A., *Values of the \mathfrak{sl}_2 Weight System on Complete Bipartite Graphs*, Functional Analysis and Its Applications, 2020, 54:3, 208–223 (arXiv:2102.03487)
- 2 Филиппова (Зинова) П.А. “Значения \mathfrak{sl}_2 -весовой системы на семействе графов, не являющихся графами пересечений хордовых диаграмм”, Матем. сб., 213:2 (2022), 115–148 Filippova, P. A., *Values of the \mathfrak{sl}_2 weight system on a family of graphs that are not the intersection graphs of chord diagrams*, Sb. Math., 213:2 (2022), 235–267
- 3 Зинова П.А., Казарян М.Э. Алгебра долей, полные двудольные графы и \mathfrak{sl}_2 -весовая система, submitted

Список литературы

- [1] Васильев, В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: Фазис, 1997
- [2] Bar-Natan, D. *On Vassiliev knot invariants*, Topology, vol. 34, no. 2 (1995), 423–472
- [3] Bigeni, A. *A generalization of the Kreweras triangle through the universal \mathfrak{sl}_2 weight system*, J. Combin. Theory Ser. A 161 (2019), 309–326 (arXiv:1712.05475v3)
- [4] Bouchet, A. Circle graph obstructions // Journal of Combinatorial Theory, Series B. 1994. V.60. P.107-144
- [5] Chmutov, S., Kazarian, M., Lando, S. *Polynomial graph invariants and the KP hierarchy*, Selecta Mathematica, volume 26, article number: 34 (2020)
- [6] Chmutov, S.; Duzhin, S.; Mostovoy, J. *Introduction to Vassiliev knot invariants*, Cambridge University Press, Cambridge, 2012. xvi+504 pp. ISBN: 978-1-107-02083-2 (arXiv:1103.5628)
- [7] Chmutov, Sergei V.; Lando, Sergei K. *Mutant knots and intersection graphs*, Algebr. Geom. Topol. 7 (2007), 1579–1598. (arXiv: 0704.1313v1)
- [8] Chmutov, S. V., Varchenko, A. N. *Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from \mathfrak{sl}_2* , Topology. 1997. V.36. P.153–178
- [9] Figueroa-O’Farrill, J. M., Kimura, T., Vaintrob, A. *The Universal Vassiliev Invariant for the Lie Superalgebra $gl(1|1)$* , Comm. Math. Phys., 1997, 185, 93–127
- [10] Filippova, P. A., *Values of the \mathfrak{sl}_2 Weight System on Complete Bipartite Graphs*, Functional Analysis and Its Applications, 2020, 54:3, 208–223 (arXiv:2102.03487)
- [11] Filippova, P. A., *Values of the \mathfrak{sl}_2 weight system on a family of graphs that are not the intersection graphs of chord diagrams*, Sb. Math., 213:2 (2022), 235–267

- [12] Graham, R. L., Knuth, D. E., Patashnik, O., *Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science*, Addison-Wesley, Boston, 1994
- [13] Joni, S. A., Rota, G.-C., *Coalgebras and bialgebras in combinatorics*, Stud. Appl. Math. 61 (1979), no. 2, 93–139
- [14] Kontsevich, M. *Vassiliev knot invariants*, in: Adv. in Soviet Math., vol. 16 (1993), part 2, 137–150
- [15] Krasilnikov, E. *An Extension of the \mathfrak{sl}_2 Weight System to Graphs with $n \leq 8$ Vertices*, Arnold Mathematical Journal, 2021, vol.7, no.4, p.609-618
- [16] Kulakova, E.; Lando, S.; Mukhutdinova, T.; Rybnikov, G. *On a weight system conjecturally related to \mathfrak{sl}_2* , European J. Combin. 41 (2014), 266–277 (arXiv:1307.4933v2)
- [17] Kuga, K., Yoshizumi, S., et al. *Some formulas in sl3 weight systems*, Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences, 75(7):134–136, 1999.
- [18] Lando, S., *On primitive elements in the Hopf algebra of chord diagrams*, in: Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, Providence, RI: AMS 1999, v. 190, 77-81
- [19] Lando, S., *On a Hopf Algebra in Graph Theory*, Journal of Combinatorial Theory, Series B 80, 104-121 (2000)
- [20] Lando, S., Zhukov, V., *Delta-Matroids and Vassiliev Invariants*, Moscow Mathematical Journal. 2017. Vol. 17. No. 4. P. 741–755.
- [21] S. Lando, A. Zvonkin. *Graphs on Surfaces and their Applications* Springer-Verlag, Berlin, 2004
- [22] Milnor, J., Moore, J., *On the structure of Hopf algebras*, Ann. of Math. (2), 1965, v. 81, 211–264
- [23] Schmitt, W. R., *Incidence Hopf algebras*, J. Pure Appl. Algebra, 1994, v. 96, 299–330

- [24] Tutte, W. T. A ring in graph theory. Proc.Camb.Philos.Soc. 1947. V.43. P.26-40; Selected Papers of W. t. Tutte. V.1. Winnipeg: Charles Babbage Research Center, 1979.
- [25] Vaintrob, A., *Vassiliev knot invariants and Lie S-algebras*, Math. Res. Lett. 1994, V.1, P.579-595.
- [26] Vassiliev, V. A., *Cohomology of knot spaces*, in: Theory of singularities and its applications, Advance in Soviet Math., V. I. Arnold ed., AMS, 1990
- [27] Yang, Z., *On values of \mathfrak{sl}_3 weight system on chord diagrams whose intersection graph is complete bipartite* (arXiv: 2102.00888)
- [28] Yang, Z., *New approaches to \mathfrak{gl}_N weight system* (arXiv:2202.12225)