Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
“Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”

Факультет математики

На правах рукописи

Осипов Павел Сергеевич

Геометрические структуры на плоских многообразиях

Резюме диссертации на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
PhD., профессор
Вербицкий Михаил Сергеевич

Москва – 2022

Диссертация подготовлена на факультете математики Национального Исследовательского Университета «Высшая школа экономики».

Результаты диссертации опубликованы в трёх статьях:

a) P. Osipov "Selfsimilar Hessian manifolds ("Самоподобные гессиановы многообразия"), Journal of Geometry and Physics, 2022, Vol. 175.

b) P. Osipov "Self-similar Hessian and conformally Kähler manifolds" ("Самоподобные гессиновы и конформно кэлеровы многообразия"), Annals of Global Analysis and Geometry, 2022, Vol. 62, No. 3.

c) P. Osipov "Statistical Lie algebras of constant curvature and locally conformally Kähler Lie algebras"("Статистические алгебры Ли постоянной кривизны и локально конформно кэлеровы алгебры Ли), Bulletin Mathematique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie, 2022, vol. 65 (113), No. 3, pp. 341–358.

Содержание

1 Самоподобные многообразия

В статье [O1] мы изучаем самоподобные римановы многообразия. **Самоподобным многообразием** называется риманово многообразие (M, g) оснащённое векторным полем ξ таким, что $\mathcal{L}_\xi g = 2g$. Кроме того, если поле ξ полно, то (M, g, ξ) называется **глобально самоподобным гессиановым многообразием**.

Пример 1 *Риманов конус* $(C = M \times \mathbb{R}^{>0}, g = s^2 g_M + ds^2)$ *с векторным полем* $\xi = s\frac{\partial}{\partial s}$ *является глобально самоподобным многообразием.*

Римановы конусы имеют важные применения к супергравитации ([ACDM], [ACM], [CDM], [CDMV]).

Пример 2 ([O1]) *Пусть* φ *и* s *— координаты на* S^1 *и* $\mathbb{R}^{>0}$*. Тогда набор* $\left(C = S^1 \times \mathbb{R}^{>0}, g = s^2 d\varphi^2 + sds \cdot d\varphi + ds^2, s\frac{\partial}{\partial s}\right)$ *является глобально самоподобным гессиановым многообразием но* (C, g) *не изометрично риманову конусу.*

Мы описываем глобально самподобные многообразия

Теорема 1 ([O1]) *Любое глобально самоподобное многообразие* (C, g, ξ) *изометрично одному из следующих:*

(i) $\left(\mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \left(dx^i\right)^2, \rho + \eta\right)$*, где* $a \in \mathbb{R}$*,* $\rho = \sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ *— радиантное векторное поле и* $\eta \in \mathfrak{so}(n)$ *— поле Киллинга.*

(ii) $\left(\hat{M} = M \times \mathbb{R}^{>0}, \hat{g} = s^2 g_M + sds \cdot \alpha + ds^2, s\frac{\partial}{\partial s}\right)$*, где* s *— координата на* $\mathbb{R}^{>0}$*,* g_M *— риманова метрика на* M*,* α *1-форма на* M *и* $g_M(X, X) + 2\alpha(X) + 1 > 0$*, for any* $X \in \Gamma(TM)$*.*

Любое самоподобное многообразие локально изометрично глобально самоподобному многообразию.

Мы называем поле гомотетий ξ на самоподобном многообразии (M, g, ξ) потенциальным, если локально ξ выражается как градиент функции. Если $\xi = \operatorname{grad} f$ на области U, то $\iota_\xi g|_U = df$. Кроме того, форма замкнута тогда и только тогда, когда она локально точна. Таким образом векторное поле ξ потенциально тогда и только тогда, когда $d\iota_\xi g = 0$.

Теорема 2 ([O1]) *Пусть (M, g, ξ) глобально самоподобное многообразие с потенциальным полем гомотетий.*

(i) Если ξ зануляется в какой-то точке, то (M, g, ξ) — евклидово пространство с радиантным векторным полем $\left(\mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n \left(dx^i\right)^2, \sum x^i \frac{\partial}{\partial x^i}\right)$.

(ii) Если ξ не зануляется ни в какой точке, то (M, g, ξ) — риманов конус $\left(\hat{M}, \hat{g}, \hat{\xi}\right)$.

2 Самоподобные гессиановы многообразия

Плоским аффинным многообразием называется многообразие, оснёщенное плоской связностью без кручения. Существует эквивалентное определение. Плоское многообразие — это многообразие с атласом, все функции перехода которого аффинны ([FGH] или [Sh]). **Гессиановым многообразием** называется плоское аффинное многообразие с римановой метрикой, локально заданной гессианом функции.

Гессиановы многообразия имеется множество различных применений: к суперсимметрии ([CMMS], [CM], [AC]), к выпуклому программированию ([N], [NN]), к уравнению Монжа-Ампера ([F1], [F2], [Gu]), к WDVV уравнения ([To]).

Самоподобным гессиановым многообразием (C, ∇, g, ξ) называется гессианово многообразие (C, ∇, g), оснащённое векторным полем ξ таким, что (C, g, ξ) — самоподобное гессианово многообразие и поток вдоль ξ сохраняет ∇. Если ξ полное, то (C, g, ξ) называет **глобально самоподобным гессиановым многообразием**.

Радиантным многообразием (C, ∇, ρ) называется плоское аффинное многообразие (C, ∇) ес **радиантным векторным полем**, то есть полем ρ, удовлетворяющим условию

$$\nabla \rho = \mathrm{Id}.$$

Назовём самоподобное гессианово многообразие (C, ∇, g, ξ) **радиантным гессиановым многообразием** если существует радиантное векторное поле ρ на C и константа $\lambda \in \mathbb{R}$ такая что $\xi = \lambda\rho$.

Теорема 3 *[O1] Поле гомотетий ξ на самоподобном гессиановом многообразии (C, ∇, ξ) потенциально тогда и только тогда, когда (C, ∇, ξ) локально изоморфно произведению радиантных гессиановых многообразий.*

3 Самоподобные гессиановы и конформно кэлеровы многообразия

Кэлерова структура (I, g^{r}) на TM может быть построена по гессиановой структуре (∇, g) на M (see [Sh]). Соответствие

$$\mathrm{r} : \{\text{Hessian manifolds}\} \to \{\text{Kähler manifolds}\}$$

$$(M, \nabla, g) \quad \to \quad (TM, I, g^{\mathrm{r}})$$

называется **(affine) r-отображением**. В частности, это отображение ставит в соответствие специальному кэлерову многообразию специальное вещественное ([AC]). В этом случае, r-отображение задаёт соответстви между геометриями супесимметрических теорий в размерностях 5 и 4.

Открытый конус $V \subset \mathbb{R}^n$ называется **регулярным** если он не содержит открытых прямых. На любом открытом выпуклым регулярном однородном конусе V существует однородная гессианова струтктура. При помощи r-отображения, по этой структуре может быть построена однородная кэлерова структура на TV.

В [O2],мы строим однородную локально конформно кэлерову структуру на TV и обобщаем эту конструкцию.

Теорема 4 *Пусть (M, ∇, g, ξ) — односвязное глобально самоподобное* *гессианово многообразие и ξ и G — группа аффинных изометрий (M, ∇, g), сохраняющих ξ. Если G действует свободно и транзитивно на множество $\{g(\xi, \xi) = 1\}$ то TM допускает однордную локально конформно кэлерову структуру.*

4 Статистические многообразия постоянной кривизны

Статистическим многообразием (C, D, g) называется риманово многообразие (M, g) со связностью без кручения D такой, что тензор Dg симметричен. Термин "статистическое многообразие"происходит из информационной геометрии ([AN]). В ней статистические многообразия являются пространствами вероятностных распределений с метрикой Фишера. Например, пространству нормальных распределений соответствует гиперболическая плоскость.

Мы говорим, что статистическое многообразие (C, D, g) имеет постоянную кривизну c если тензор кривизны Θ_D удовлетворяет условию

$$\Theta_D(X, Y)Z = c\,(g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)\,,$$

для любых $X, Y, Z \in TM$. Например, риманово многообразие постоянной секционной кривизны является статистическим многообразием постоянной кривизны. Определение статистических многообразий постояннной кривизны происходит из геометрии аффинных гиперповерхностей ([Ku]). Отметим, что гессиановы многообразия являются статистическими многообразиями нулевой кривизны.

Большой класс статистических многообразий постоянной кривизны происходит из выпуклой проективной геометрии. Область $U \subset \mathbb{RP}^n$ называется вполне выпуклой, если замыкание U is является компактным множество в некоторой аффинной карте. Если Γ — дискретная группа автоморфизмов вполне выпуклой области $U \subset \mathbb{RP}^n$ и $M = U/\Gamma$ —

компактное многообразие, то M называется **вполне выпуклым** $\mathbb{RP}^n$-многообразие. Примеры вполне выпуклых $\mathbb{RP}^n$-многообразиях приведены в [B].

Теорема 5 ([KO]) *Любое вполне выпуклое$\mathbb{RP}^n$-многообразие допускает статистическую структуру постоянной отрицательной кривизны. Любое компактное статистическое многообразие постоянной отрицательно кривизны допускает вполне выпуклую $\mathbb{RP}^n$-структуру.*

В [O3], мы строим соответствие между статистическими многообразиями постоянной кривизны и радиантными гессиановыми многообразиями. Более конкретно: мы показываем, что риманов конус

$$\left(M \times \mathbb{R}^{>0}, s^2 g_M + ds^2\right)$$

над статистическим многообразием постоянной кривизны (M, g, D) является радиантным гессиановы многообразием. Линии уровня гессианова потенциала на радиантном гессиановом конусе являются статистическим многообразиями постоянно кривизны.

Согласно dd^c лемме, кэлерова форма локально может быть представлена как комплексный гессиан $dd^c\varphi$. Поэтому гессианова геометрия является вещественным аналогом кэлеровой геометрии. **Сасакиевым многообразием** называется риманово многообразие(M, g) такое, что коническа метрика $g = s^2 g_M + ds^2$ на $M \times \mathbb{R}^{>0}$ является кэлеровой по отношению к некоторой инвариантной относительно растяжений комплексной структуре I (see [OV]). Таким образом, мы можем рассматривать статистические многообразия постоянной кривизны как вещественный аналог сасакиевых многообразий.

Кэлерова структура на TM может быть построена по гессиановой структуре на M при помощи r-отображения. Следующая теорема являет аналогом r-отображения для статистических многообразий постоянной кривизны.

Теорема 6 ([O3]) *Пусть (M, g, ∇) статистическое многообразие по-*

стоянной кривизны. Тогда $TM \times \mathbb{R}$ допускает структуру сасакиева многообразия..

5 Список литературы

[A] D Alekseevski, *self-similar Lorentzian manifolds*, Ann. Global Anal. Geom. **3**, No. 1, (1985), 59-84.

[AC] D.V. Alekseevsky, V. Cortez, *Geometric construction of the r-map: from affine special real to special Kähler manifolds*, Comm. Math. Phys. **291** (2009), 579-590.

[ACDM] D. V. Alekseevsky, V. Cortés, M. Dyckmanns, T. Mohaupt, *Quaternionic Kähler metrics associated with special Kähler manifolds*, J.Geom.Phys. **92**, (2013), 271-287.

[ACGL] D.V. Alekseevsky, V. Cortez, A.S. Galaev, T. Leistner, *Cones over pseudo-Riemannian manifolds and their holonomy*, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelle's Journal) 635 (2009), 23-69.

[ACM] D. V. Alekseevsky, V. Cortés, T. Mohaupt, *Conification of Kähler and hyper-Kähler manifolds*, Comm. Math. Phys. 324 (2013), no. 2, 637-655.

[ACL] , D.V. Alekseevsky, V. Cortez, T. Leistner, *Geometry and holonomy of indecomposable cones*, arXiv preprint arXiv:1902.02493, (2019).

[AN] S. Amari, H. Nagaoka, Methods of Information Geometry. Providence, RI: AMS, 2000.

[B] Y. Benoist, *A survey on divisible convex sets*, Geometry, Analysis and Topology of Discrete Groups, Adv. Lect. Math. (ALM), vol. 6, Int. Press, Somerville, MA, 2008, pp. 1–18.

[BG] C. Boyer, K. Galicki, *Sasakian geometry*, Oxford Univ. Press, (2008).

[C] V. Cortés, *Homogeneous special geometry*, Transform. Groups **1** (4) (1996) 337–373

[CDMV] V. Cortez, P. Dempster, T. Mohaupt, O. Vaughan, *Special Geometry of Euclidean Supersymmetry IV: the local c-map* JHEP 10 (2015) 066.

[CDM] V. Cortés, P.-S. Dieterich, T. Mohaupt, *ASK/PSK-correspondence and the r-map*, Lett. Math. Phys. **108** No. 5 (2018), 1279-1306

[CMMS] V. Cortez, C. Mayer, T. Mohaupt, F. Saueressig, *Special Geometry of Euclidean Supersymmetry I: Vector Multiplets* J. High Energy Phys. **03** (2004) 028.

[CM] V. Cortez, T. Mohaupt *Special Geometry of Euclidean Supersymmetry III: the local r-map, instantons and black holes* J. High Energy Phys. 2009, no. 7, 066, 66 pp.

[F1] A. Figalli, *On the Monge-Ampère Equation* 70e annee, no 1147 (2018)

[F2] A. Figalli, *The Monge-Ampère Equation and Its Applications* EMS Zurich Lectures in Advanced Mathematics **22**, (2017), 210 pp.

[FGH] D. Fried, W. Goldman, M. Hirsch, *Affine manifolds with nilpotent holonomy*, Comment. Math. Helvetici **56**, (1981), 487-523.

[G-A] M.A. Garcıa-Ariza, *Degenerate Hessian structures on radiant manifolds*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. 15 (2018), 15 pp.

[Go] W. M. Goldman, *Projective geometry on manifolds*, lecture Notes for Mathematics 748B, Spring 1988, University of Maryland.

[Gu] C. Gutierrez, *The Monge-Ampère Equation* Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications, (2016).

[KO] S. Kobayashi, Y. Ohno, *On a constant curvature statistical manifold*, Info. Geo. 5, 31–46.

[M] C. Mclntosh *Homothetic Motions in General Relativity* General Relativity and Gravitation, **7**, No. 2 (1976), pp. 199-213.

[N] A. Nemirovski, *Advances in convex optimization: conic programming*, Plenary Lecture, International Congress of Mathematicians (ICM), Madrid, Spain (2006).

[NN] Y. Nesterov, A. Nemirovsk, *Interior-point polynomial algorithms in convex programming*, SIAM Studies in Applied Mathematics, vol.13. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia (1994).

[OV] L. Ornea, M. Verbitsky *Sasakian structures on CR-manifolds*, Geom Dedicata **125** (2007), 159-173.

[O1] P. Osipov, *Selfsimilar Hessian manifolds*, J. Geom and Phys, 175, (2022).

[O2] P. Osipov, *Self-similar Hessian and conformally Kähler manifolds*, Ann Glob Anal Geom (2022).

[O3] P. Osipov, *Statistical Lie algebras oa constant curvature and locally conformally Kähler Lie algebras*, Bull. Math. Roumanie, 65(3) (2022).

[O4] P. Osipov, *Locally conformally Hessian and statistical manifolds*, arxiv:4481361.

[V] E.B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*. Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963) 340-403.

[VGP] E. B. Vinberg, S. G. Gindikin, I. I. Piatetskii-Shapiro, *Classification and canonical realization of complex homogeneous domains*, Trans. Moscow Math. Soc., **12** (1963), 404-437.

[Sh] H. Shima, *The geometry of Hessian structures*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore, (2007).

[To] B. Totaro, *The curvature of a Hessian metric*, int. J. of Math. 15(04), (2004).

[Ku] T. Kurose, *Dual connections and affine geometry*, Math. Z. 203 (1990), 115-121.

[OV] L. Ornea, M. Verbitsky, *LCK rank of locally conformally Kähler manifolds with potential* J. Geom. Phys. 107, 92–98 (2016).

.