Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования «Московский государственный университет
имени М.В.Ломоносова»

Механико-математический факультет

*На правах рукописи*

Дуков Андрей Валерьевич

# Типичные конечно-параметрические семейства векторных полей на двумерной сфере

Резюме диссертации на соискание
учёной степени кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор Ильяшенко Юлий Сергеевич

Москва - 2022

# Введение

Эта работа относится к теории бифуркаций динамических систем на двумерных многообразиях. В ней изучаются свойства полициклов векторных полей и их типичных возмущений. В первой части строится бифуркационная диаграмма типичного конечно-параметрического семейства, возмущающего полицикл «сердце». Во второй — доказывается существование числовых инвариантов в полулокальных бифуркациях. В третьей — оценивается кратность предельных циклов, рождающихся из гиперболических полициклов.

## Полициклы

Пусть $M$ — $C^\infty$-гладкое двумерное ориентированное многообразие. В большинстве утверждений работы многообразие $M$ — либо сфера $\mathbb{S}^2$, либо её открытое подмножество. Рассматриваемое пространство $C^r$-гладких векторных полей $Vect^r(M)$, $r \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, снабжено стандартной гладкой топологией.

**Определение 1.** *Полициклом* векторного поля называется любой конечный ориентируемый граф $\Gamma$, удовлетворяющий следующим требованиям:

- вершинами графа $\gamma$ являются особые точки поля;
- рёбрами графа $\gamma$ являются фазовые кривые поля, не являющиеся особыми точками; ориентация задаётся временем;
- граф $\gamma$ — эйлеров (существует цикл, обходящий каждое ребро по одному разу).

Пусть поле $v_0$ возмущается внутри типичного конечно-параметрического семейства $V$ с базой параметров $B = (\mathbb{R}^k, 0)$. Поскольку семейство по определению есть непрерывное отображение $V : B \to Vect^r(M)$, то на пространстве таких семейств рассматривается компактно-открытая топология. Свойство точек некоторого топологического пространства (в нашем случае, пространства конечно-параметрических семейств) называется *типичным*, если множество точек (семейств) с этим свойством содержит не более чем счётное пересечение открытых всюду плотных множеств.

**Пример 1.** Рассмотрим полицикл, образованный двумя гиперболическими сёдлами и двумя соединяющими их сепаратрисными связками. Полагаем, что сёдла расположены таким образом, что их не задействованные в образовании связок сепаратрисы находятся по разные стороны от полицикла. Этот полицикл носит название «сердце» (рис. 1). Поскольку он имеет лишь два вырождения (две сепаратрисные связки), то его можно типичным образом возмутить внутри двупараметрического семейства.

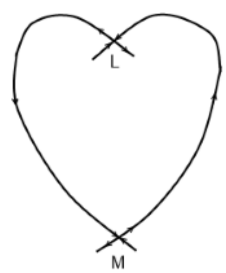


Рис. 1: Полицикл «сердце».

Главная задача теории бифуркаций — *описать возмущение векторного поля с заданным вырождением* (например, с полициклом) внутри типичного конечно-параметрического семейства. Полное исследование полицикла подразумевает построение бифуркационной диаграммы возмущающего его семейства. Напомним определение структурной устойчивости векторных полей и бифуркационной диаграммы.

**Определение 2.** Два векторных поля $v$ и $\tilde{v}$ являются *орбитально топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм фазовых пространств $H$, переводящий фазовый портрет одного поля в фазовый портрет другого поля с сохранением ориентации кривых. Поле $v$ называется *структурно устойчивым*, если в пространстве векторных полей существует такая окрестность $U$ поля $v$, что любое поле $\tilde{v} \in U$ орбитально топологически эквивалентно полю $v$.

**Определение 3.** *Бифуркационной диаграммой* семейства $V$ с базой параметров $B$ называется подмножество базы $B$, состоящее из всех таких значений параметров, при которых соответствующие поля семейства структурно неустойчивы.

Мы говорим, что бифуркация вырожденного поля имеет коразмерность $k$, если поля с данным вырождением (например, полициклом) в пространстве $Vect^r(M)$ образуют банахово подмногообразие коразмерности $k$.

На сегодняшний день бифуркации коразмерности 1 исследованы полностью благодаря усилиям целого ряда математиков: Андронов, Леонтович (сепаратрисная петля седла) [1]; Сотомайор (все простейшие вырождения коразмерности 1) [2]; Мальта, Палис (параболический предельный цикл с двумя сёдлами внутри и снаружи) [3]; Ильяшенко, Солодовников (сепаратрисная петля с множеством сёдел внутри) [4]; Гончарук, Ильяшенко, Солодовников (параболический предельный цикл с множеством сёдел внутри и снаружи) [5]; Старичкова (структурная устойчивость простейших бифуркаций коразмерности 1)[6].

Если все вырождения коразмерности 1 сводились к шести различным случаям, то вырождения коразмерности 2 насчитывают несколько десятков случаев. Их исследованиями занимались, например, Рейн (полицикл «лунка») [7]; Грозовский (полициклы «яблоко» и «пол-яблока») [8]; Ройтенберг (сепаратрисная петля с единичных характеристическим числом, полициклы «лунка», «сердце», «яблоко», «пол-яблока» и др. на ориентированных и неориентированных многообразиях, мелькающие се-

---

[1]А.А.Андронов, Е.А.Леонтович, И.И.Гордон, А.Г.Майер, Теория бифуркаций динамических систем на плоскости, Издательство «Наука», 1967

[2]J. Sotomayor, Generic one-parametre families of vector fields on two-dimensional manifolds // Publications Mathématiques de l'IHÉS, Volume 43 (1974) , p. 5-46, Zbl 0279.58008 | MR 49 4039.

[3]Malta, I. P., Palis, J. [1981] "Families of vector fields with finite modulus of stability," Dynam- ical Systems and Turbulence, Warwick 1980, eds. Rand, D. & Young, L.-S. (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg), ISBN 978-3- 540-38945-3, pp. 212–229.

[4]Yu. Ilyashenko, N. Solodovnikov, Global bifurcations in generic one-parameter families with a separatrix loop on $S^2$ , Moscow Math. J., 2018, pp. 93–115

[5]N. Goncharuk, Yu. Ilyashenko, N. Solodovnikov, "Global bifurcations in generic one-parameter families with a parabolic cycle on $S^2$", Mosc. Math. J., 19:4 (2019), 709–737

[6]V. Starichkova, Global Bifurcations in Generic One-parameter Families on $S^2$, Regul. Chaotic Dyn., 23:6 (2018), 767–784

[7]Reyn, J. W. [1980] "Generation of limit cycles from separatrix polygons in the phase plane," Geo- metrical Approaches to Differential Equations, ed. Martini, R. (Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg), pp. 264–289.

[8]Т. М. Грозовский, Бифуркации полициклов «яблоко» и «половина яблока» в типичных двухпараметрических семействах, Дифференц. уравнения, 32:4 (1996), 458–469.

паратрисные связки) [9], а также многие другие авторы. Все вырождения коразмерности 2 не изучены до сих пор.

В случае полициклов коразмерности 3 и выше возникает неожиданное препятствие для изучения их бифуркаций, а именно числовые инварианты — величины, принимающие произвольные действительные значения и сохраняющиеся при переходе к эквивалентным семействам. Они были открыты недавно в работе Ильяшенко, Кудряшова и Щурова [10].

Построение бифуркационных диаграмм для семейств, возмущающих полициклы сколь угодно большой коразмерности, не представляется возможным. Поэтому для таких полициклов ставится вопрос, встречается ли в них то или иное вырождение. Наибольший интерес представляют предельные циклы, то есть периодические траектории, изолированные от других периодических траекторий. Существуют оценки на количество предельных циклов, рождающихся при возмущении полицикла коразмерности $n$ в типичном $k$-параметрическом семействе [11] [12] [13]. Точная оценка не получена до сих пор. Эти результаты напрямую связаны со второй частью 16-й проблемы Гильберта, решённой лишь частично [14].

Как видно из приведённого обзора, теория бифуркаций является активно развивающейся областью математики. В ней до сих пор много нерешённых проблем, а некоторые результаты последних лет меняют наше представление о поведении полициклов.

---

[9] В.Ш.Ройтенберг, Нелокальные двухпараметрические бифуркации на поверхностях, Диссертация на соискание учёной степени кандидата физико-математических наук, Ярославский государственный технический университет, Ярославль, 2000г.

[10] Yu. Ilyashenko, Yu. Kudryashov and I. Schurov, Global bifurcations in the two-sphere: a new perspective, Invent. math., 2018, Volume 213, Issue 2, pp 461–506

[11] Ilyashenko Yu., Yakovenko S., Finite cyclicity of elementary polycycles in generic families, Concerning the Hilbert 16th Problem, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 165, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, 21-65.

[12] V.Kaloshin, The Existential Hilbert 16-th problem and an estimate for cyclicity of elementary polycycles, Invent. math. 151, 451–512 (2003) DOI: 10.1007/s00222-002-0244-9

[13] П. И. Каледа, И. В. Щуров, Цикличность элементарных полициклов с фиксированным числом особых точек в типичных k-параметрических семействах, Алгебра и анализ, 2010, том 22, выпуск 4, 57–75

[14] Yu. Ilyashenko. “Centennial history of Hilbert’s 16th problem”. In: Bulletin (new series) of the American Mathematical Society 39.3 (2002), pp. 301–354. DOI: 10.1090/ S0273-0979-02-00946-1.

## Бифуркационная диаграмма полицикла «сердце»

В **первой главе диссертации** исследуется бифуркация полицикла «сердце» (рис. 1). Этот полицикл имеет коразмерность два, а значит, его можно типичным образом разрушить внутри двупараметрического семейства.

**Определение 4.** *Характеристическим числом* гиперболического седла называется модуль отношения собственных чисел седла, где отрицательное стоит в числителе. Седло называется *(не-)диссипативным*, если его характеристическое число больше (меньше) единицы.

**Определение 5.** Рассмотрим выходящую сепаратрису одного седла и входящую сепарастрису другого седла и отметим в базе параметров множество точек, при которых эти сепаратрисы образуют сепаратрисную связку, пересекающую некоторую трансверсаль к полициклу хотя бы два раза. Будем говорить, что в семействе наблюдается *серия мелькающих сепаратрисных связок*, если росток в нуле этого множества распадается на бесконечное число компонент связности.

Существуют два качественно различных сценария бифуркации полицикла «сердце», зависящие от диссипативности сёдел. Ключевые результаты первой части представлены следующими двумя теоремами.

**Теорема 1.** *Бифуркационная диаграмма типичного двупараметрического семейства, возмущающего поле с полициклом «сердце», в случае диссипативного и недиссипативного сёдел представляет собой (при естественном выборе параметров) объединение $C^1$-гладких кривых, стремящихся к началу координат: двух координатных осей, соответствующих исходным связкам; двух кривых, соответствующих полям с петлёй сепаратрисы; одной кривой, соответствующей полю с параболическим предельным циклом и двух счётных серий кривых, соответствующих мелькающим сепаратрисным связкам.*

Бифуркационная диаграмма в этом случае представлена на рис. 2a.

**Теорема 2.** *Бифуркационная диаграмма типичного двупараметрического семейства, возмущающего поле с полициклом «сердце», в случае двух недиссипативных сёдел представляет собой (при естественном выборе параметров) объединение $C^1$-гладких кривых, стремящихся к началу координат: двух координатных осей, соответствующих исходным* *связкам; двух кривых, соответствующих полям с петлёй сепаратрисы и двух счётных серий кривых, соответствующих мелькающим сепаратрисным связкам.*

Бифуркационная диаграмма в этом случае представлена на рис. 2b.

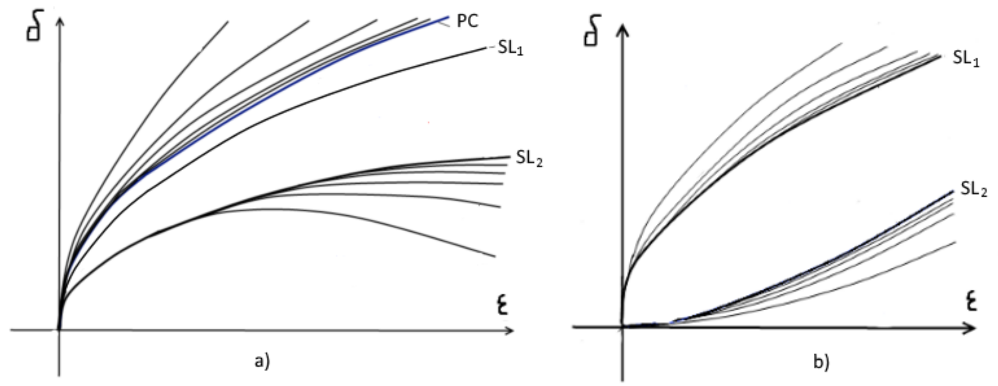


Рис. 2: Две возможные бифуркационные диаграммы. Кривая $PC$ соответствует полям с параболическим предельным циклом, кривые $SL_1$ и $SL_2$ — полям с сепаратрисными петлями сёдел, остальное счётное число кривых соответствует полям с мелькающими сепаратрисными связками.

В работе доказано, что в любом из двух указанных выше случаев при разрушении полицикла «сердце» возникают две серии мелькающих сепаратрисных связок (одна серия соответствует одной паре сепаратрис, другой — другой). Таким образом, бифуркация полицикла «сердце» является простейшей полулокальной бифуркацией (то есть происходящей в сколь угодно малой окрестности полицикла), в которой встречаются мелькающие сепаратрисные связки.

## Числовые инварианты полулокальных бифуркаций

**Вторая глава диссертации** посвящена числовым инвариантам sing-классификации глокальных семейств векторных полей на сфере. Поясним все термины.

**Определение 6.** *Глокальное* семейство векторных полей на многообразии $M$ — это росток отображения базы $(\mathbb{R}^k, 0)$ семейства в пространство $Vect^r(M)$.

Термин *глокальный* образован контаминацией двух терминов: *глобальный* и *локальный*. Глокальное семейство локально по параметру, но глобально на фазовом пространстве.

**Определение 7.** Два представителя глокальных семейств $V = \{v_\alpha | \alpha \in (\mathbb{R}^k, 0)\}$ и $W = \{w_\beta | \beta \in (\mathbb{R}^k, 0)'\}$ топологически эквивалентны, если существует отображение

$$H : B \times M \to B' \times M', \ (\alpha, x) \mapsto (h(\alpha), H_\alpha(x)),$$

где $h : B \to B'$ — гомеоморфизм представителей баз, $H_\alpha$ — гомеоморфизм фазовых пространств, переводящий фазовый портрет поля $v_\alpha$ в фазовый портрет поля $w_{h(\alpha)}$ с сохранением ориентации фазовых кривых.

Если ничего больше не требуется, то эквивалентность называется *слабой*.

Если $H$ является гомеоморфизмом, тогда эквивалентность называют *сильной*.

Если $H$ (как и $H^{-1}$) непрерывно по $\alpha$, $x$ на объединении особых точек, периодических орбит и сепаратрис векторного поля $v_0$ (соответственно, $w_0$) слоя $\{0\} \times M$ ($\{0\} \times M'$), тогда $H$ называется *sing*-эквивалентностью глокальных семейств $V$ и $W$.

Основной результат второй части диссертации представлен следующей теоремой:

**Теорема 3.** *Существует такое открытое множество в пространстве всех $C^\infty$-гладких 5-параметрических семейств, что любое семейство $V$ из этого множества содержит векторное поле $v_0$ со следующими свойствами. Поле $v_0$ имеет гиперболический полицикл $\gamma_5$ с четырьмя вершинами и пятью рёбрами, полулокальная бифуркация которого имеет числовые инварианты sing-эквивалентности (см.рис.3).*

Числовой инвариант sing-классификации — это непрерывная функция от семейства, принимающая недискретное множество значений (в нашем случае, это некоторое открытое подмножество действительной прямой). Как следует из названия, значения этой функции не меняются при переходе к sing-эквивалентному семейству.

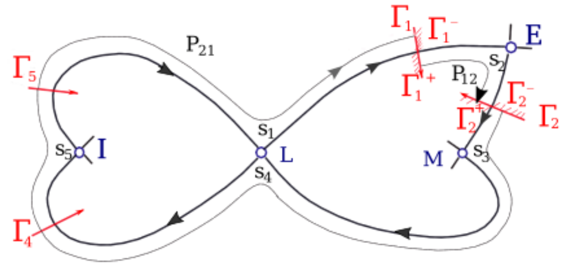


Рис. 3: Невозмущённый полицикл $\gamma_5$.

## Кратные предельные циклы

В **третьей части диссертации** исследуются кратные предельные циклы, рождающиеся при разрушении гиперболических полициклов.

**Определение 8.** Пусть к предельному циклу проведена гладкая трансверсаль Γ. Отображение монодромии вдоль векторного поля с трансверсали Γ на себя называется *отображением Пуанкаре. Предельный цикл имеет кратность* $m$, если его отображение Пуанкаре имеет неподвижную точку кратности $m$.

Пусть поле $v_0 \in Vect^\infty(\mathcal{M})$ имеет некоторый полицикл $\gamma$. Рассмотрим $k$-параметрическое семейство $V = \{v_\delta\}$, $\delta \in B = (\mathbb{R}^k, 0)$, возмущающее поле $v_0$.

**Определение 9.** Будем говорить, что при разрушении полицикла $\gamma$ поля $v_0$ в семействе $V$ рождается предельный цикл (кратности $m$), если существует такая стремящаяся к нулю (которому соответствует поле $v_0$) последовательность значений параметров $\{\delta_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$, что для любого $\alpha$ поле $v_{\delta_\alpha}$ имеет предельный цикл $LC(\delta_\alpha)$ (кратности $m$), причём последовательность предельных циклов $LC(\delta_\alpha)$ при $\delta_\alpha \to 0$ стремится в метрике Хаусдорфа к полициклу $\gamma$.

Пусть поле $v_0$ содержит полицикл $\gamma$, образованный $n$ сепаратрисными связками гиперболических сёдел $S_1, \ldots, S_n$ (некоторые из сёдел могут совпадать). Обозначим характеристические числа сёдел $S_1, \ldots, S_n$ через $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ соответственно.

Основной результат третьей части диссертации представлен следующими двумя теоремами.

**Теорема 4.** *Для любого натурального $n$ существует такой нетривиальный многочлен $\mathcal{L}_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, что для любого поля $v_0$ с гиперболическим полициклом $\gamma$, характеристические числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ сёдел которого удовлетворяют неравенству*

$$\mathcal{L}_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0, \tag{1}$$

*верно следующее: при возмущении поля $v_0$ внутри $C^\infty$-гладкого конечно-параметрического семейства кратность любого рождающегося из полицикла $\gamma$ предельного цикла не превосходит $n$.*

В работе доказано, что из наличия кратного предельного цикла следует, что некоторая полиномиальная система однородных уравнений, коэффициенты которой зависят от характеристических чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, имеет нетривиальное решение. Искомый многочлен $\mathcal{L}_n$ выражается через результант этой полиномиальной системы.

В случае полицикла малой коразмерности многочлен $\mathcal{L}_n$ можно выписать явно. Для этого нам потребуется определить несколько многочленов.

Для любого натурального $n$ обозначим через $\Lambda_n$ следующий многочлен от характеристических чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$:

$$\Lambda_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \prod_{I \neq (0,\ldots,0)} (\lambda^I - 1),$$

где $I = (i_1, \ldots, i_n)$ — мультииндекс. Через $\lambda^I$ мы обозначили произведение $\lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_n^{i_n}$. Для любого $j = 1, \ldots, n$ компонента мультииндекса $i_j \in \{0, 1\}$ определяет, входит ли число $\lambda_j$ в произведение $\lambda^I$ или нет. Например, $\Lambda_2(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_1\lambda_2 - 1)$.

Помимо этого, через $M(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ обозначим следующий многочлен:

$$M(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 4(\lambda_1\lambda_2\lambda_3 - 1) - (\lambda_1 - 1)(\lambda_2 - 1)(\lambda_3 - 1).$$

**Теорема 5.** *При $n = 1, 2, 3, 4$ в качестве многочлена $\mathcal{L}_n$, фигурирующего в теореме 4, можно взять следующие многочлены:*

1. $\mathcal{L}_1(\lambda_1) = \Lambda_1(\lambda_1)$;

2. $\mathcal{L}_2(\lambda_1, \lambda_2) = \Lambda_2(\lambda_1, \lambda_2)$;

3. $\mathcal{L}_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \Lambda_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$;

*4.* $\mathcal{L}_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = \Lambda_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)\cdot$
$\cdot M(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) M(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_4) M(\lambda_1, \lambda_3, \lambda_4) M(\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$.

Теорема 5 доказывается прямым вычислением результанта упомянутой выше полиномиальной системы.

# Заключение

## Итоги и дальнейшее развитие

Итогом диссертационной работы является доказательство новых свойств бифуркаций гиперболических полициклов. С одной стороны (пессимистичной), обнаруженные числовые инварианты полулокальных бифуркаций показывают, что типичные возмущения векторных полей могут быть устроены довольно сложно. С другой стороны (оптимистичной), полученная линейная оценка на кратность предельных циклов вселяет надежду, что и оценка на количество предельных циклов может оказаться линейной.

В связи с этим дальнейшим развитием темы диссертационного исследования могут послужить следующие вопросы:

**Вопрос 1.** Является ли типичное семейство, возмущающее полицикл «сердце», структурно устойчивым (то есть эквивалентно ли оно любому близкому семейству)?

**Вопрос 2.** Можно ли по топологии невозмущённого гиперболического полицикла определить, имеют ли его типичные бифуркации числовые инварианты?

**Вопрос 3.** Верно ли, что отсутствие числовых инвариантов у типичного семейства, возмущающего гиперболический полицикл, влечёт полулокальную структурную устойчивость этого семейства?

**Вопрос 4.** Является ли полученная оценка на кратности предельных циклов, рождающихся при разрушении гиперболических полициклов, точной?

**Вопрос 5.** Существует ли линейная оценка на количество предельных циклов, рождающихся при разрушении гиперболических полициклов внутри типчных конечно-параметрических семейств?

### Апробация результатов

Результаты диссертации были неоднократно рассказаны на семинаре «Динамические системы» (факультет математики НИУ ВШЭ) под руководством Ильяшенко Ю.С. в 2017, 2018, 2020 и 2021 гг., на Летней школе «Динамические системы» в г. Дубна в 2018, 2019 годах, на нижегородском семинаре лаборатории «Динамические системы и приложения» НИУ ВШЭ в 2021 году, на конференции имени Л.П.Шильникова в 2020 году.

## Публикации автора по теме диссертации


[1] А.В.Дуков, Бифуркации полицикла «сердце» в типичных двупараметрических семействах, Тр. ММО, 79, № 2, МЦНМО, М., 2018, 247–269; Trans. Moscow Math. Soc., 2018, 209–229.

[2] A.Dukov, Yu.Ilyashenko, Numeric invariants in semilocal bifurcations (Числовые инварианты в полулокальных бифуркациях). J. Fixed Point Theory Appl. 23, 3 (2021). https://doi.org/10.1007/s11784-020-00837-x.

[3] А.В.Дуков, Кратности предельных циклов, рождающихся при разрушении гиперболических полициклов, Математический сборник, 2023, статья принята в печать.