

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Физический институт им. П. Н. Лебедева
Российской академии наук

На правах рукописи

Киселев Александр Михайлович

**МАГНИТНЫЕ ПОЛЯ И ДИФФУЗИЯ КОСМИЧЕСКИХ ЛУЧЕЙ
В ГАЛАКТИКЕ**

РЕЗЮМЕ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физических наук

Москва – 2023

Диссертационная работа выполнена в Федеральном государственном бюджетном учреждении науки Физическом институте имени П. Н. Лебедева Российской академии наук

Научные руководители:

Истомин Яков Николаевич,

доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник ФИАН,

Догель Владимир Александрович,

доктор физико-математических наук, профессор,
главный научный сотрудник ФИАН

Тема диссертации

Диссертация посвящена исследованию магнитных полей в турбулентном газе и изучению диффузии заряженных частиц в стохастическом магнитном поле.

Актуальность проблемы

Согласно общепринятой теории образования и распространения космических лучей, их первичная компонента состоит преимущественно из протонов и не содержит антивещества. При распространении в Галактике первичные космические лучи взаимодействуют с газом, в результате чего образуются вторичные частицы, в том числе антипротоны и позитроны. Вычисленный в рамках такой теории энергетический спектр вторичных частиц должен степенным образом спадать с ростом энергии. Также таким же образом должно вести себя отношение числа античастиц к числу частиц [1]. Однако, в 2009 году были опубликованы данные с орбитального прибора PAMELA, который обнаружил избыток позитронов с энергиями 10 – 100 ГэВ в космических лучах [2]. Позднее эти результаты были расширены [3] и подтверждены спутником Fermi [4] и инструментом AMS [5]. По последним данным AMS, избыток позитронов наблюдается вплоть до энергии 500 ГэВ.

Эти наблюдения привлекли к себе большое внимание, и было предложено несколько теоретических моделей для их объяснения, включая вклад пульсаров и аннигиляцию темной материи. Однако возможен другой, менее экзотический механизм образования позитронов в Галактике – ускорение частиц в гигантских молекулярных облаках и образование там же вторичных космических лучей. Эта идея была предложена задолго до запуска прибора PAMELA в работе В.А. Догеля, А.В. Гуревича, Я.Н. Истомина и К.П. Зыбина [6], а позже развивалась в [7, 8]. Однако в этих работах использовалась упрощенная модель распространения частиц в магнитных полях молекулярных облаков. В связи с появлением данных об избытке позитронов, требуется детальное исследование космических лучей в молекулярных облаках.

Молекулярные облака состоят преимущественно из нейтрального водорода. По данным наблюдений, газ в молекулярных облаках слабоионизован, а его движение имеет турбулентный характер. В такой системе возникает стохастическое магнитное поле. Этот процесс носит название турбулентного динамо. Распространение заряженных частиц в случайном магнитном поле имеет диффузионный характер. Чтобы вычислить распределение космических лучей внутри облака, требуется знать коэффициент диффузии для частиц различных энергий. Коэффициент диффузии определяется спектром магнитного поля. Поскольку экспериментальные данные недостаточны, спектр магнитного поля в

молекулярных облаках может быть рассчитан только с использованием теоретических моделей.

Одним из самых известных аналитических подходов к изучению динамо в турбулентной среде является метод Казанцева-Крейчнана [9], [10]. Существуют и другие способы исследования турбулентного динамо – модели среднего поля (см. например [11]) и Лагранжевых деформаций [12]. Чаще всего в литературе используются уравнения одножидкостной магнитной гидродинамики [13, 14, 15, 16, 17, 18]. Слабоионизованный газ в молекулярных облаках необходимо описывать с помощью двухжидкостной магнитной гидродинамики. Динамо в такой системе также изучалась, см. например [19], но гораздо меньше.

Несмотря на многолетние исследования магнитного динамо, многие вопросы в этой области остаются открытыми. Например, известно, что молекулярные облака в центре Галактики окружены однородным магнитным полем, а в теоретических моделях влияние среднего поля исследовано плохо. С другой стороны, в модели Казанцева-Крейчнана поле скоростей несжимаемой жидкости считается гауссовым случайным процессом с нулевым средним. Это означает, в том числе, что все корреляторы нечетных степеней равны нулю. Однако в реальной турбулентности это не так. Колмогоровский закон «четырех пятых» [20] утверждает, что кубический коррелятор не равен нулю, в инерционном интервале он пропорционален расстоянию между точками. Для лучшего понимания процесса магнитного динамо требуется развитие теоретических моделей – учет среднего магнитного поля и негауссовости поля скоростей.

Структура магнитного поля определяет коэффициенты диффузии заряженных частиц в молекулярных облаках. Однако вычисление коэффициента диффузии является нетривиальной задачей.

Наиболее разработанный на данный момент подход к вычислению коэффициентов диффузии – квазилинейная теория, впервые предложенная в работе [21]. В данной теории предполагается, что магнитное поле есть сумма однородного поля и случайных флуктуаций, причем амплитуда флуктуаций много меньше среднего поля. Это позволяет использовать теорию возмущений и аналитически найти коэффициент диффузии. Однако во многих астрофизических системах флуктуации сравнимы или сильно превышают среднее магнитное поле. В таком случае квазилинейная теория неприменима. Поэтому изучение диффузии частиц в магнитном поле с большими флуктуациями имеет множество применений в астрофизике космических лучей. Среди них задачи о распространении космических лучей в Галактических молекулярных облаках [22], в Галактике в целом, в скоплениях галактик [23], а также задача об ускорении космических лучей на ударных волнах в остатках сверхновых [24].

Цель и задачи работы

Целью работы является вычисление коэффициента диффузии заряженных частиц в стохастическом магнитном поле.

Для достижения данной цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Изучить пространственную структуру магнитного поля в галактических молекулярных облаках. Получить уравнение эволюции парного коррелятора магнитного поля с учетом однородного среднего магнитного поля. Исследовать тензорную структуру анизотропных корреляторов магнитного поля в данном случае. Найти соотношение между средним магнитным полем и амплитудой флуктуаций магнитного поля.
2. Вычислить корреляционную длину магнитного поля в молекулярном облаке Sgr B2.
3. Построить обобщение модели Казанцева-Крейчнана для негауссового поля скоростей жидкости с учетом ненулевого трехточечного коррелятора скорости. Получить уравнение эволюции парного коррелятора магнитного поля и исследовать его экспоненциальные моды. Найти область параметров, при которых магнитное поле растет со временем.
4. Вычислить коэффициент диффузии заряженных частиц в стохастическом магнитном поле с малым средним полем. Для этого найти конфигурацию регулярного магнитного поля, в котором уравнения движения частицы интегрируются аналитически. Усреднить закон движения частицы по спектру магнитного поля и найти зависимость коэффициента диффузии частиц от их энергии.

Основные результаты и выводы

Основные результаты работы состоят в следующем:

1. Исследована задача об эволюции магнитного поля в слабоионизованном турбулентном газе. Получены уравнения эволюции парного коррелятора магнитного поля. В изотропном случае при нулевом среднем поле это одно уравнение второго порядка по r . При учете среднего магнитного поля H получена система анизотропных уравнений. Стационарные решения данной системы исследованы в двух предельных случаях. При большом среднем поле $H \gg 1$ найдено аналитическое решение анизотропной системы.

Для малого среднего поля $H \ll 1$ уравнения решены в приближении изотропных корреляторов. Показано что при любом значении H существует единственное стационарное решение. Численно найдена зависимость амплитуды флуктуаций b_0 и корреляционной длины магнитного поля от среднего поля H .

2. Исследовано магнитное поле в молекулярном облаке Sgr B2, которое находится вблизи центра Галактики. Посчитаны корреляционная длина магнитного поля и турбулентная скорость нейтрального газа.
3. Изучено обобщение модели Казанцева-Крейчнана турбулентного динамо с учетом негауссовости поля скорости. Получен вклад трехточечного коррелятора скорости в уравнение эволюции магнитного поля. Численно исследованы экспоненциально растущие моды уравнения эволюции. Показано, что учет трехточечного коррелятора скорости уменьшает темп роста магнитного поля. Область параметров, при которых магнитное поле растет со временем, также уменьшается.
4. Решена задача о диффузии заряженных частиц в случайном магнитном поле, которое удовлетворяет соотношению $\mathbf{V} \times \text{rot } \mathbf{V} = 0$. Уравнения движения частицы сведены к уравнению математического маятника. Изучен непрерывный переход от захваченных частиц к пролетным, когда лармовский радиус r_L порядка корреляционной длины магнитного поля. Показано, что при малых r_L коэффициент диффузии пропорционален лармовскому радиусу частицы, $D \propto r_L$, для всех разумных спектров магнитного поля.

Личный вклад автора

Все основные результаты диссертации являются оригинальными и получены впервые. Все изложенные в диссертации результаты получены автором лично либо при его непосредственном участии.

Уравнения эволюции корреляторов магнитного поля с учетом среднего поля получены автором лично. Анализ данной системы уравнений также выполнен лично автором.

Над задачей о негауссовом поле скорости автор работал в составе группы К.П. Зыбина. Автор вывел уравнение эволюции магнитного поля в инерционном интервале. Численное исследование экспоненциальных мод произведено лично автором.

Идея вычисления коэффициента диффузии в бессиловом магнитном поле принадлежит научному руководителю Я.Н. Истомину. Вычисление коэффициента диффузии выполнены лично автором.

Публикации и апробация работы

Публикации повышенного уровня

Основные результаты работы опубликованы в пяти статьях в рецензируемых научных журналах, входящих в базу данных Web of Science:

1. Istomin Ya. N., Kiselev A. Magnetic field generation in Galactic molecular clouds (Генерация магнитного поля в Галактических молекулярных облаках) // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 2013. – V. 436. – Issue 3. – P. 2774-2784.
2. Dogiel V. A., Chernyshov D.O., Kiselev A.M., Cheng K.-S. On the origin of the 6.4 keV line in the Galactic Center region (О происхождении линии 6,4 кэВ из центра Галактики) // Astroparticle Physics. – 2014. – V. 54. – P. 33-39.
3. Dogiel V. A., Chernyshov D.O., Kiselev A.M., Cheng K.-S., Hui C. Y. , Ko C. M., Nobukawa K. K., Tsuru T. G. Spectrum of relativistic and subrelativistic cosmic rays in the 100 pc central region (Спектр релятивистских и субрелятивистских космических лучей в области 100 пк вокруг галактического центра) // The Astrophysical Journal. – 2015. – V. 809. – Issue 1. – P. 48.
4. Istomin Ya. N., Kiselev A. M. Diffusion of charged particles in a stochastic force-free magnetic field (Диффузия заряженных частиц в стохастическом бессиловом магнитном поле) // Physical Review D. – 2018. – V. 98. – Issue 8. – P. 083026.
5. Коруев А. В., Kiselev A.M., И'ун А.С., Sirota V.A., Zybin K.P. Non-Gaussian Generalization of the Kazantsev–Kraichnan Model for a Turbulent Dynamo (Обобщение модели турбулентного динамо Казанцева–Крейчнана для негауссового случая) // The Astrophysical Journal. – 2022. – V. 927. – Issue 2. – P. 172.

Доклады на конференциях и семинарах

Результаты диссертационной работы докладывались автором на всероссийских и международных научных конференциях:

1. Российская молодёжная конференция по физике и астрономии. Санкт-Петербург, ФТИ им. А.Ф. Иоффе, 24-25 октября 2012г.
2. Всероссийская астрономическая конференция «Многоликая Вселенная». Санкт-Петербург, 23-27 сентября 2013г.

3. The ISSI-BJ Meeting «New Approach to Active Processes in Central Regions of Galaxies», June 1-5, 2015, Пекин, ISSI-BJ. «Structure of magnetic fluctuations excited by a turbulence of neutral gas inside molecular clouds»
4. The ISSI-BJ Meeting «New Approach to Active Processes in Central Regions of Galaxies», June 6-8, 2016, Пекин, ISSI-BJ. «Diffusion of charged particles in the turbulent magnetic field»

Также полученные результаты были представлены автором лично на заседаниях Астрофизического семинара ОТФ ФИАН (руководители А.В. Гуревич и Н.С. Кардашев).

Краткое содержание работы

Объем и структура работы

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и двух приложений. Полный объем диссертации составляет 123 страницы, включая 20 рисунков и 1 таблицу. Список литературы содержит 63 наименования.

Во введении обосновывается актуальность исследования. Также приведен краткий обзор литературы, сформулированы цели и задачи работы.

Первая глава посвящена исследованию генерации магнитного поля турбулентным слабоионизованным газом при наличии среднего магнитного поля. Примером такой системы являются Галактические молекулярные облака. При выводе уравнения эволюции мы не делаем никаких предположений о величине флуктуирующего поля по сравнению со средним.

В нашей задаче движение нейтрального и ионизованного газа следует описывать уравнениями двухжидкостной магнитной гидродинамики. Обозначим за \mathbf{v} скорость нейтрального газа, \mathbf{u} – скорость ионизованной компоненты, \mathbf{B} – магнитное поле. Можно показать, что в молекулярных облаках нейтральный газ не чувствует наличие ионизованной компоненты, а движение ионов, наоборот, полностью определяется движением нейтрального газа и магнитным полем.

В таком случае можно считать движение нейтральной компоненты известным – оно соответствует обычной гидродинамической турбулентности. Для ионизованной компоненты существенными являются только две силы - сила трения о нейтральный газ и сила Лоренца, действующая со стороны магнитного поля. Введем обозначение $a = \frac{1}{4\pi\rho_i\mu_{in}}$, где ρ_i – плотность ионизованной компоненты, μ_{in} - частота столкновений иона с нейтральным газом. За η обозначим магнитную вязкость. Можно получить уравнение для магнитного поля

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B} - a \nabla \times (\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}). \quad (1)$$

Чтобы исследовать зависимость магнитного поля от времени, мы изучим двухточечный коррелятор магнитного поля $\langle \mathbf{B}(\mathbf{r})\mathbf{B}(\mathbf{r}') \rangle$.

В первой главе скорость $\mathbf{v}(t)$ турбулентного движения нейтрального газа считается гауссовым стохастическим процессом с нулевым средним $\langle \mathbf{v} \rangle = 0$. Вся статистическая информация о гауссовом процессе содержится в его парном корреляторе $\langle v_i(\mathbf{x}, t)v_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t') \rangle$.

Мы считаем, что нейтральный газ является однородной изотропной системой. Также мы считаем его несжимаемым. Мы считаем, что скорость нейтрального газа – дельта-коррелированный по времени стохастический процесс:

$$\langle v_i(\mathbf{x}, t)v_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t') \rangle = \tau_c \delta(t - t') V_{ij}(\mathbf{r}). \quad (2)$$

где τ_c – корреляционное время. Изотропия и уравнение непрерывности определяют тензорную часть коррелятора

$$V_{ij}(r) = 2V(r)\delta_{ij} + rV'(r)(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}). \quad (3)$$

Таким образом, парный коррелятор скорости нейтрального газа описывается одной скалярной функцией $V(r)$.

Магнитное поле мы также считаем гауссовым стохастическим процессом. Для начала рассмотрим случай, когда среднее магнитное поле равно нулю, следовательно система изотропна. Уравнение Максвелла $\text{div } \mathbf{B} = 0$ аналогично уравнению несжимаемости $\text{div } \mathbf{v} = 0$, поэтому тензорная структура коррелятора магнитного поля аналогична структуре коррелятора скорости (3)

$$\langle B_i(\mathbf{x}, t)B_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle = 2Q(t, r)\delta_{ij} + rQ'(t, r)(\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}). \quad (4)$$

Мы изучаем коррелятор магнитного поля в совпадающие моменты времени. Он описывается одной скалярной функцией $Q(t, r)$.

Чтобы получить уравнение эволюции данного коррелятора, то есть вычислить производную $\frac{\partial Q(t, r)}{\partial t}$, используем уравнение (1). Для расщепления коррелятора вида $\langle vB^2 \rangle$ мы воспользуемся формулой Фурутцу-Новикова, см. [25], [26]. Коррелятор $\langle B^4 \rangle$ выражается через произведение парных корреляторов. В результате получаем

$$\frac{1}{2\tau_c} \frac{\partial Q(t, r)}{\partial t} = (V(0) - V(r) + \lambda(t))(Q'' + \frac{4Q'}{r}) - V'Q' - (V'' + \frac{4V'}{r})Q, \quad (5)$$

где введено обозначение

$$\lambda(t) = \frac{\eta + 4aQ(t, r=0)}{\tau_c} = \frac{1}{\tau_c}(\eta + \frac{2}{3}aB_0^2) > 0, \quad (6)$$

а $B_0^2 = \langle B_i(x)B_i(x) \rangle$ есть среднеквадратичное магнитное поле. Уравнение эволюции (5) нелинейно, так как параметр λ зависит от значения $Q(0)$. В данной

главе мы ограничимся поиском стационарных решений. В стационарном случае параметр λ не зависит от времени, поэтому стационарное уравнение является линейным ОДУ второго порядка. При этом параметр λ является эффективной магнитной вязкостью. Для характерных параметров молекулярных облаков магнитная вязкость крайне мала $\eta \ll aB_0^2$ и ей можно пренебречь.

Обозначим за L_0 размер системы, за v_0 среднеквадратичную скорость нейтрального газа. Корреляционное время поля скоростей считаем равным времени оборота вихрей на максимальном масштабе $\tau_c = \frac{L_0}{v_0}$.

Для решения уравнения эволюции необходимо задать коррелятор скорости нейтрального газа $V(r)$. Мы считаем спектр скорости нейтрального газа Колмогоровским. Инерционный интервал турбулентности задается условием $l_\nu < r < L_0$, где $l_\nu = Re^{-3/4}L_0$ - вязкий масштаб. Для характерных параметров молекулярных облаков эффективное магнитное число Рейнольдса $Rm^2 \ll Re$. Это означает, что масштаб (эффективной) магнитной вязкости лежит в инерционном интервале.

С помощью замены переменных можно свести уравнение эволюции к уравнению типа уравнения Шредингера с переменной массой. Анализируя его потенциал, можно показать, что стационарное уравнение при малых числах Прандтля не имеет решений. Чтобы найти стационарные решения, добавим в систему среднее магнитное поле.

Обозначим среднюю и флуктуирующую компоненты магнитного поля за \mathbf{H} и \mathbf{b} соответственно: $\mathbf{B} = \mathbf{H} + \mathbf{b}$, $\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{H}$. При этом величина среднего поля постоянна и является внешним параметром задачи.

Теперь в задаче появилось выделенное направление среднего магнитного поля. Мы показали, что парный коррелятор флуктуаций имеет вид

$$\langle b_i(\mathbf{x}, t) b_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle = A(\mathbf{r}) \delta_{ij} + B(\mathbf{r}) n_i n_j + C(\mathbf{r}) (n_i h_j + n_j h_i) + D(\mathbf{r}) h_i h_j, \quad (7)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, $\mathbf{h} = \mathbf{H}/H$ - единичные векторы в направлениях \mathbf{r} и \mathbf{H} соответственно. Функции A, B, C, D зависят от (r, θ) , где θ - угол между векторами \mathbf{n} и \mathbf{h} .

Вывод уравнений эволюции аналогичен изотропному случаю, хотя требует более громоздких вычислений. В итоге получена система уравнений эволюции (на функции A, B, C, D), в правой части которой стоят производные по r второго порядка. В работе произведен анализ данной системы в двух предельных случаях - большого и малого среднего поля.

В случае большого среднего поля $H^2 \gg L_0 v_0 \rho_i \mu_{in}$ систему стационарных уравнений удалось решить аналитически. Решение приведено в Приложении Б. Зависимость корреляционных функций от угла имеет вид

$$A(r, \theta) = A_0(r) + A_1(r) \cos^2 \theta, \quad (8)$$

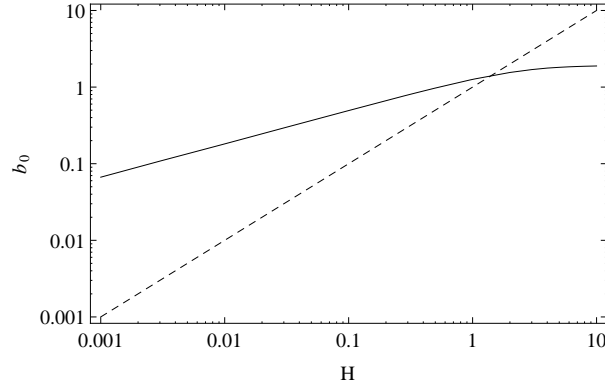


Рисунок 1 — График зависимости b_0 от H . Для сравнения пунктиром показана прямая $b_0 = H$

аналогично для остальных функций. Функции $A_0(r), A_1(r), \dots$ являются суммой степенных функций. Найденное решение позволяет вычислить анизотропию корреляторов.

В случае малого среднего поля $H \ll L_0 v_0 \rho_i \mu_{in}$ амплитуда флуктуаций b_0 оказывается много больше значения среднего поля, $b_0 \gg H$. Поэтому можно считать, что коррелятор $\langle b_i b'_j \rangle$ является изотропным, то есть имеет вид (4). Изотропизуя уравнения эволюции, получаем уравнение для коррелятора $\langle b_i b'_j \rangle$

$$\frac{1}{2\tau_c} \frac{\partial Q(r)}{\partial t} = (V(0) - V(r) + \lambda') \left(Q'' + \frac{4Q'}{r} \right) - V'Q' - \frac{1}{r} (4V' + rV'') \left(Q + \frac{1}{6} H^2 \right), \quad (9)$$

где теперь

$$\lambda' = \frac{\eta + 4a(Q(0) + H^2/6)}{\tau_c}. \quad (10)$$

При $H = 0$ уравнение (9) переходит в (5).

Фактически уравнение можно свести к уравнению (5), но с другим граничным условием на бесконечности. У такого стационарного уравнения существует решение! Это решение единственно, в работе она названо выделенным решением.

Мы численно решили уравнение (9) для Колмогоровского спектра и нашли зависимость b_0 от H . Результаты представлены на графике 1. При $H < 1$ для амплитуды флуктуаций верно $b_0 \sim \sqrt{H}$. Следовательно, $b_0 \gg H$, то есть случайное поле много больше среднего.

Для астрофизических приложений полезно знать корреляционную длину стохастического магнитного поля

$$l_{corr} = \frac{1}{b_0^2} \int_0^\infty \langle b_i(\mathbf{0}) b_i(\mathbf{r}) \rangle dr. \quad (11)$$

Вычисляя ее для выделенного решения, найдем, что при малых H корреляционная длина пропорциональна среднему полю $l_{corr} \sim H$.

В заключение первой главы я использовал полученные результаты для исследования молекулярного облака Sgr B2, которое находится вблизи центра нашей Галактики. Магнитное поле внутри облака равно 550 мкГс [27], тогда как среднее крупномасштабное магнитное поле в Галактическом центре $H \approx 100$ мкГс [28]. Это соответствует случаю малого среднего поля. Я вычислил корреляционную длину магнитного поля $l_{corr} = 0,4$ пк и характерную скорость нейтрального газа $v_0 = 7,3$ км с⁻¹ в этом облаке.

Зная корреляционную длину, в работе [32] мы вычислили коэффициент диффузии космических лучей в облаке. Этот результат использовался при изучении распространения релятивистских и субрелятивистских космических лучей вблизи и внутри облака Srg B2.

Обычно в литературе поле скоростей несжимаемой жидкости $v(r,t)$ считается гауссовым случайным процессом. Но в реальной турбулентности это не так. Во **второй главе** учтена первая негауссова поправка – трехточечный (кубический) коррелятор поля скорости. Тем самым построено обобщение теории турбулентного динамо для негуассового поля скоростей.

Во второй главе я работаю в рамках одножидкостной МГД. Уравнение для магнитного поля имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \eta \Delta \mathbf{B}, \quad (12)$$

поэтому уравнения эволюции корреляторов будут линейны. Мы не будем учитывать среднее магнитное поле. Следовательно, система изотропна, и парный коррелятор магнитного поля имеет вид (4). Также мы будем считать трехточечный коррелятор малой поправкой.

Чтобы расщеплять корреляторы, требуется изучить трехточечный коррелятор скорости. В общем случае он неизвестен. Предположим, что он также δ -коррелирован

$$\langle v_i(r_1, t_1) v_j(r_2, t_2) v_k(r_3, t_3) \rangle = \beta \tau_c^2 \cdot Y(t_1, t_2, t_3) \cdot \langle v_i(r_1) v_j(r_2) v_k(r_3) \rangle,$$

где функция $Y(t_1, t_2, t_3)$ нормирована на 1. Мой коллега Алексей Копьев получил два важных результата для данного коррелятора в вязком масштабе [33] и в инерционном интервале [29]. Коррелятор в вязком масштабе определен с точностью до общего множителя F . Сшивая свертки трехточечного коррелятора при $r = r_\nu$, я получил связь между F и нормировочным множителем β для коррелятора в инерционном интервале. Знак β связан с направлением потока энергии в турбулентном каскаде [30], в реальной трехмерной турбулентности $\beta > 0$.

Путем довольно длинных вычислений я получил уравнение эволюции пар-

ного коррелятора в инерционном интервале $r_\nu < r < L_0$

$$\frac{1}{2\tau_c} \frac{\partial Q(t, r)}{\partial t} = \left(V(0) - V(r) + \frac{\eta}{\tau_c} \right) \left(Q'' + \frac{4Q'}{r} \right) - V'Q' - \left(V'' + \frac{4V'}{r} \right) Q + \frac{\beta \varepsilon \tau_c}{30} \left(2rQ''' + 15Q'' + \frac{4Q'}{r} - \frac{24Q}{r^2} \right) \quad (13)$$

Последнее слагаемое – вклад трехточечного коррелятора скорости. Это уравнение – один из главных результатов данной работы.

Аналогичные вычисления для вязкого масштаба $r < r_\nu$ были выполнены Алексеем Копьевым, приведем результат:

$$\frac{1}{2\tau_c} \frac{\partial Q(t, r)}{\partial t} = \left(V(0) - V(r) + \frac{\eta}{\tau_c} \right) \left(Q'' + \frac{4Q'}{r} \right) - V'Q' - \left(V'' + \frac{4V'}{r} \right) Q + \frac{F}{18\tau_c} (2r^3Q''' + 21r^2Q'' + 14rQ' - 70Q). \quad (14)$$

Стоит отметить, что мы для вычисления тензорных свертков мы использовали специальную программу, написанную мной на языке Wolfram Mathematica. Она позволяет делать операции с тензорами символично, то есть абсолютно точно.

В работе исследованы экспоненциальные моды

$$Q(t, r) = e^{\gamma Dt} Q(r). \quad (15)$$

Для уравнений (13), (14) существует дискретный спектр значений $\gamma > 0$. Я численно нашел максимальное положительное значение γ в зависимости от параметров задачи, в том числе от величины кубической поправки f (график 2). В некоторых предельных случаях эта задача была решена аналитически [33]. Аналитические предсказания подтвердились результатами численного счета.

Для астрофизических приложений самым интересным вопросом является область генерации, то есть область параметров, при которых существуют решения с $\gamma > 0$. Я нашел область генерации численно.

Оказывается, наличие негауссового члена уменьшает темп роста и уменьшает область параметров, в которой генерация возможна. Тем самым она ухудшает генерацию магнитного поля.

В **третьей главе** изучается движение заряженных частиц в стохастическом магнитном поле с нулевым средним. Известно, что на больших временах такое движение может быть описано уравнением диффузии.

Пусть заряженная частица, имеющая заряд q и скорость v_0 , движется в стационарном магнитном поле $\mathbf{B}(\mathbf{r})$. Будем считать, что электрическое поле в системе отсутствует, тогда модуль скорости частицы не меняется со временем. Мы изучаем случай, когда среднее магнитное поле равно нулю $\langle \mathbf{B} \rangle = \mathbf{0}$. Обозначим за L_0 корреляционную длину магнитного поля, за B_{LS} – величину

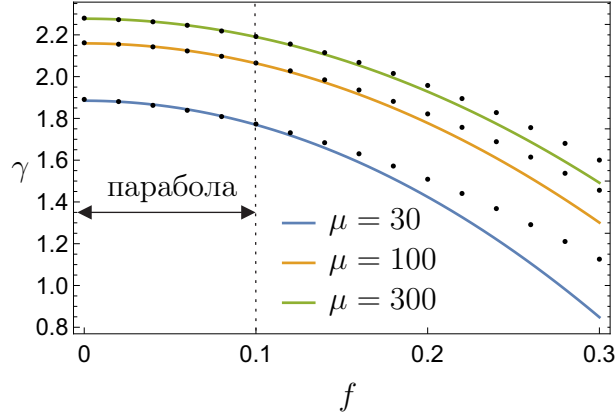


Рисунок 2 — График зависимости темпа роста γ от величины кубической поправки f .

крупномасштабного поля. Сейчас мы считаем L_0 известным параметром задачи. Введем обозначение

$$r_L = \frac{mc\gamma v_0}{qB_{LS}}, \quad \text{где} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v_0^2/c^2}} \quad (16)$$

для ларморовского радиуса в крупномасштабном магнитном поле B_{LS} . В зависимости от энергии частицы можно разделить на замагниченные $r_L < L_0$ и незамагниченные $r_L > L_0$. Коэффициент диффузии незамагниченных частиц вычислить достаточно просто, см., например [31], $\langle D \rangle \sim \frac{v_0 r_L^2}{L_0}$.

Описать движение замагниченных частиц значительно сложнее. Рассмотрим достаточно большие времена, когда движение частиц выходит на диффузионный режим, т.е.

$$\langle r^2(t) \rangle = 2Dt. \quad (17)$$

Здесь и далее угловые скобки $\langle \dots \rangle$ означают усреднение по ансамблю реализаций случайного магнитного поля. Следовательно,

$$\langle D \rangle = \frac{1}{2} \frac{d\langle r^2 \rangle}{dt} = \langle r_i v_i \rangle. \quad (18)$$

Известно, что электрический ток в плазме создается за счет движения электронов. Масса электрона мала. Тогда, в отсутствие электрического поля сила Ампера, действующая на электроны, должна быть равна нулю, $\mathbf{j} \times \mathbf{B} = 0$. В МГД-приближении $\mathbf{j} \sim \text{rot } \mathbf{B}$. Следовательно, магнитное поле в этом случае удовлетворяет соотношению

$$\text{rot } \mathbf{B} = k\mathbf{B}. \quad (19)$$

Такое поле мы будем называть "бессиловым". Используя уравнение $\text{div } \mathbf{B} = 0$, можно доказать что величина $k(\mathbf{r})$ постоянна вдоль силовой линии магнитного поля.

Будем считать, что магнитное поле во всей системе представляет собой суперпозицию отдельных магнитных ячеек, в каждой из которых k постоянна.

Разные ячейки имеют разные значения k , разные направления ∇k и разные значения магнитного поля B_0 .

Сначала исследуем движение заряженной частицы в одной ячейке. Выберем координатную ось z так что $B_z = 0$. Магнитное поле имеет следующую конфигурацию

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = B_0 (\sin kz, \cos kz, 0). \quad (20)$$

В таком магнитном поле два уравнения движения частицы интегрируются, что позволяет избавиться от компонент скорости v_x, v_y , и свести систему уравнений движения к одному уравнению на $z(t)$. С помощью замены это уравнение сводится к уравнению математического маятника

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = -\omega^2 \sin \psi, \quad (21)$$

где значение постоянной ω зависит от начальной скорости частицы. Теперь с помощью (18) коэффициент диффузии можно представить в виде суммы эллиптических интегралов. Путем усреднения по начальным скоростям и координатам частицы я вычислил коэффициент диффузии частиц в одной ячейке. Он зависит от параметров магнитного поля k, B_0 .

Далее я усреднил коэффициент диффузии $\langle D \rangle$ по спектру магнитных флуктуаций $B_0(r)$, считая спектр степенным с показателем α . При $r_L \ll L_0$ я нашел асимптотику аналитически

$$\langle D(A) \rangle \simeq \frac{2\pi}{3(2-\alpha)} v_0 r_L. \quad (22)$$

Также я вычислил $\langle D(A) \rangle$ численно для произвольных $A < 1$ при различных значениях α . Усредненный коэффициент диффузии очень слабо зависит от показателя спектра α . Частицы с $A > 1$ незамагничены, коэффициент диффузии для них приведен выше.

Итак, для колмогоровского спектра $\alpha = 2/3$ коэффициент диффузии приближенно равен

$$\langle D \rangle \simeq \begin{cases} (\pi/2)v_0 r_L, & r_L < L_0/2\pi \\ (5\pi^2/8)(v_0 r_L^2/L_0), & r_L > L_0/2\pi. \end{cases} \quad (23)$$

Заметим, что две асимптотики практически совпадают в точке $r_L = L_0/2\pi$. Коэффициент диффузии слабо зависит от спектра магнитных флуктуаций.

Для релятивистских частиц ларморовский радиус пропорционален энергии. Следовательно, при малых энергиях коэффициент диффузии пропорционален энергии, а при больших энергиях – квадрату энергии частицы.

В конце Главы 3 изучается приложение полученных результатов к диффузии космических лучей в Галактике.

Литература

- [1] Moskalenko I. V., Strong A. W. Production and propagation of cosmic-ray positrons and electrons //The Astrophysical Journal. – 1998. – V. 493. – Issue 2. – P. 694.
- [2] Adriani O. et al. An anomalous positron abundance in cosmic rays with energies 1.5–100 GeV //Nature. – 2009. – V. 458. – P. 607-609.
- [3] Adriani O. et al. The PAMELA Mission: Heralding a new era in precision cosmic ray physics //Physics Reports. – 2014. – V. 544. – Issue 4. – P. 323-370.
- [4] Morselli A. Latest Results from the Fermi Gamma-Ray Telescope //Acta Polytechnica CTU Proceedings. – 2014. – V. 1. – Issue 1. – P. 139-145.
- [5] Weng Z. et al. Latest results from the AMS experiment on the International Space Station // PoS ICHEP2020. – 2021. – V. 45.
- [6] Dogiel V. A. et al. On relativistic particle acceleration in molecular clouds //Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. – 1987. – V. 228. – Issue 4. – P. 843-868.
- [7] Dogiel V. A. et al. Cosmic ray acceleration inside molecular clouds //Multiwavelength Approach to Unidentified Gamma-Ray Sources. – Springer, Dordrecht, 2005. – P. 201-211.
- [8] Dogiel V. A., Sharov G. S. Manifestations of cosmic ray acceleration in giant molecular clouds // Astronomy and Astrophysics. - 1990. - V.229. - P.259.
- [9] Казанцев А.П. Об усилении магнитного поля проводящей жидкостью // ЖЭТФ - 1967. - Т. 53 - №. 5 - С. 1806.
- [10] Kraichnan R. H. Small scale structure of a scalar field convected by turbulence //The Physics of Fluids. – 1968. – V. 11. – Issue 5. – P. 945-953.
- [11] Yushkov, E. V., Allahverdiyev R., Sokoloff D. D. Mean-field dynamo model in anisotropic uniform turbulent flow with short-time correlations // Galaxies. – 2020. – V. 8. – Issue 3. – P. 68.
- [12] Chertkov M., Falkovich G., Kolokolov I., Vergassola M. Small-scale turbulent dynamo// Physical review letters. – 1999. – V. 83. – Issue 20. – P. 4065.
- [13] Novikov V.G., Ruzmaikin A.A., Sokoloff D.D. Kinematic dynamo in a reflection-invariant random field // Soviet Phys. JETP. - 1983. - V. 58 - Issue 3 - P. 527.

- [14] Rogachevskii I., Kleeorin N. Intermittency and anomalous scaling for magnetic fluctuations // *Physical Review E*. – 1997. – V. 56. – Issue 1. – P. 417.
- [15] Schekochihin A. A., Boldyrev S. A., Kulsrud R. M. Spectra and growth rates of fluctuating magnetic fields in the kinematic dynamo theory with large magnetic Prandtl numbers // *The Astrophysical Journal*. – 2002. – V. 567. – Issue 2. – P. 828.
- [16] Malyshkin L. M., Boldyrev S. Magnetic dynamo action at low magnetic Prandtl numbers // *Physical review letters*. – 2010. – V. 105. – Issue 21. – P. 215002.
- [17] Kleeorin N., Rogachevskii I. Growth rate of small-scale dynamo at low magnetic Prandtl numbers // *Physica Scripta*. – 2012. – V. 86. – Issue 1. – P. 018404.
- [18] Schleicher D.R.G., Schober J., Federrath C., Bovino S., Schmidt W. The small-scale dynamo: breaking universality at high Mach numbers // *New Journal of Physics*. – 2013. – V. 15. – Issue 2. – P. 023017.
- [19] Subramanian K. Dynamics of fluctuating magnetic fields in turbulent dynamos incorporating ambipolar drifts// *arXiv preprint astro-ph/9708216*. – 1997.
- [20] Колмогоров А. Н. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // *Докл. АН СССР*. – 1941. – Т. 32 - № 1. – С. 19–21.
- [21] Jokipii J. R. Cosmic-ray propagation. I. Charged particles in a random magnetic field // *The Astrophysical Journal*. – 1966. – V. 146. – P. 480.
- [22] Ivlev A. V., Dogiel V. A., Chernyshov D. O., Caselli P., Ko C.-M., Cheng K. S. Penetration of Cosmic Rays into Dense Molecular Clouds: Role of Diffuse Envelopes// *The Astrophysical Journal*. – 2018. – V. 855. – Issue 1. – P. 23.
- [23] Dogiel V. A. et al. In-situ acceleration of subrelativistic electrons in the Coma halo and the halo's influence on the Sunyaev-Zeldovich effect // *Astronomy & Astrophysics*. – 2007. – V. 461. – Issue 2. – P. 433-443.
- [24] Schure K.M., Bell A.R., O’C Drury L., Bykov A.M. Diffusive shock acceleration and magnetic field amplification// *Space science reviews*. – 2012. – V. 173. – Issue 1. – P. 491-519.
- [25] Новиков Е. А. Функционалы и метод случайных сил в теории турбулентности // *ЖЭТФ*. – 1964. – V. 47. – Issue 5. – P. 1919.
- [26] Кляцкин В. И. Статистическое описание динамических систем с флуктуирующими параметрами // *Москва: Наука, 1975. Главы 2-3.*

- [27] Crutcher R. M. et al. Magnetic fields in interstellar clouds from Zeeman observations: inference of total field strengths by Bayesian analysis // *The Astrophysical Journal*. – 2010. – V. 725. – Issue 1. – P. 466.
- [28] Crocker R. M. et al. A lower limit of 50 microgauss for the magnetic field near the Galactic Centre // *Nature*. – 2010. – V. 463. – Issue 7277. – P. 65-67.
- [29] Kopyev A. V., Zybin K. P. Exact result for mixed triple two-point correlations of velocity and velocity gradients in isotropic turbulence // *Journal of Turbulence*. – 2018. – V. 19. – Issue 9. – P. 717-730.
- [30] Il'Yn A. S., Zybin K. P. Material deformation tensor in time-reversal symmetry breaking turbulence // *Physics Letters A*. – 2015. – V. 379. – Issue 7. – P. 650-653.
- [31] Plotnikov I., Pelletier G., Lemoine M. Particle transport in intense small-scale magnetic turbulence with a mean field // *Astronomy & Astrophysics*. – 2011. – V. 532. – P. A68.
- [32] Dogiel V. A., Chernyshov D.O., Kiselev A.M., Cheng K.-S., Hui C. Y. , Ko C. M., Nobukawa K. K., Tsuru T. G. Spectrum of relativistic and subrelativistic cosmic rays in the 100 pc central region // *The Astrophysical Journal*. – 2015. – V. 809. – Issue 1. – P. 48.
- [33] Kopyev A. V., Kiselev A.M., Il'yn A.S., Sirota V.A., Zybin K.P. Non-Gaussian Generalization of the Kazantsev–Kraichnan Model for a Turbulent Dynamo // *The Astrophysical Journal*. – 2022. – V. 927. – Issue 2. – P. 172.