Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Лебедев Михаил Евгеньевич

Стационарные состояния нелинейного уравнения Шрёдингера с периодически модулированной нелинейностью: математическое и численное исследование

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ

на соискание ученой степени кандидата наук
по прикладной математике

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук, профессор
Алфимов Георгий Леонидович

Москва, 2023

Общая характеристика работы

Введение

Начиная с 90-х годов прошлого века, *нелинейное уравнение Шрёдингера* (НУШ) с дополнительной пространственной неавтономностью продолжает оставаться объектом пристального изучения. Для одномерного случая данное уравнение может быть записано в виде

$$i\Psi_t + \Psi_{xx} - U(x)\Psi + P(x)|\Psi^2|\Psi = 0. \tag{1}$$

Интерес к этому классу уравнений во многом обусловлен экспериментальными успехами в исследовании конденсата Бозе–Эйнштейна[1] (БЭК), а также развитием нелинейной оптики и связанных с ней практических приложений.

В контексте теории БЭК уравнение типа (1) носит название *уравнения Гросса–Питаевского* и описывает динамику конденсата в приближении среднего поля. Здесь $\Psi(t,x)$ представляет волновую функцию облака конденсата, которое предполагается вытянутым вдоль оси x. Функция $U(x)$ описывает потенциал ловушки, удерживающей конденсат, а $P(x)$ соответствует нелинейному потенциалу, называемому также *псевдопотенциалом*. Псевдопотенциал $P(x)$ описывает зависимость длины рассеяния частиц конденсата от пространственной координаты. Интервалы с положительным значением псевдопотенциала $P(x) > 0$ соответствуют случаю межатомного притяжения, в то время как интервалы с отрицательным значением, $P(x) < 0$, — межатомному отталкиванию частиц конденсата. Классическими модельными примерами потенциала $U(x)$ является гармонический потенциал $U(x) = Ax^2$ (магнитная ловушка), периодический потенциал $U(x) = A\cos 2x$ (оптическая ловушка), а также потенциальные ямы различных типов. В качестве модельных примеров псевдопотенциала $P(x)$ используются различные функции, в том числе периодические, как, например, косинусный псевдопотенциал $P(x) = A + B\cos\Omega x$. В таком случае

[1] A. Einstein, “Quantentheorie des einatomigen idealen Gases”, Preussische Akademie der Wissenschaften, Berlin, 1924.

говорят о воздействии на конденсат *нелинейной решётки*[2].

В задачах нелинейной оптики уравнение (1) описывает распространение светового пучка в оптическом волокне. В этом случае функция $\Psi(t, x)$ соответствует амплитуде огибающей светового пучка, где t есть направление его распространения, а x есть поперечная пространственная координата. Функция $U(x)$ связана с диэлектрической проницаемостью оптической среды и описывает её неоднородность. Другими словами, $U(x)$ описывает линейную решетку, привнесенную в среду для контроля над линейным пропусканием электромагнитного излучения[3]. Функция $P(x)$ представляет собой керровский коэффициент, пространственная модуляция которого может быть достигнута путём добавлением в волокно резонантных примесей[4]. Периодическая зависимость $P(x)$ естественным образом возникает при рассмотрении многослойной периодической системы тонкоплёночных нелинейных волноводов, где $P(x)$ характеризует керровский нелинейный отклик тонких слоёв[5]. В этом случае также говорят о наличии нелинейной решётки, но уже в оптической системе.

Для физических приложений важную роль играют решения уравнения (1) специального вида — так называемые *стационарные локализованные решения* (*стационарные локализованные моды*, СЛМ). Они получаются в результате подстановки в соответствующее уравнение (1) выражения

$$\Psi(t, x) = u(x)e^{-i\omega t}, \tag{2}$$

где функция $u(x)$ удовлетворяет условию локализации:

$$\lim_{x\to\infty} u(x) = 0, \tag{3}$$

[2] H. Sakaguchi, B. A. Malomed, "Matter-wave solitons in nonlinear optical lattices", Phys. Rev. E, Vol. 72, P. 046610, 2005.

[3] Y. V. Kartashov, B. A. Malomed, and L. Torner, "Solitons in nonlinear lattices", Rev. Mod. Phys. Vol. 83, P. 247, 2011.

[4] J. Hukriede, D. Runde, and D. Kip, "Fabrication and application of holographic Bragg gratings in lithium niobate channel waveguides", J. Phys. D, Vol. 36, R1, 2003.

[5] Y. S. Kivshar, G. P. Agrawal, "Optical Solitons", Academic Press, P. 386–424, 2003.

а ω есть вещественный параметр, имеющий смысл химического потенциала конденсата. Профиль стационарного локализованного решения $u(x)$ есть действительнозначная функция[6], которая удовлетворяет уравнению

$$u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0; \quad Q(x) = \omega - U(x). \tag{4}$$

Стоит отметить, что далеко не все локализованные решения уравнения (4) одинаково интересны с физической точки зрения. В частности, особо важным свойством является устойчивость локализованных решений. Если СЛМ неустойчива, малые возмущения такого решения приводят к его разрушению при эволюции, описываемой уравнением (1). Поэтому именно устойчивые локализованные решения особенно ценны для различных физических приложений, а сама проверка СЛМ на устойчивость является существенной частью их теоретического исследования.

Постановка проблемы

Итак, при изучении динамики, описываемой уравнением (1), естественным образом возникают следующие вопросы:

1. Возможно ли перечислить *полностью все* стационарные локализованные решения уравнения (1), одновременно существующие при заданных параметрах уравнения?

2. Возможно ли эффективно выделить из этих решений те, которые являются устойчивыми?

Степень разработанности темы исследования

Стоит отметить, что в большинстве работ, посвящённых данной тематике вопрос о поиске / описании *всех* СЛМ не ставился. Вместо него, как правило, рассматривался вопрос об отдельных классах СЛМ, соответствующих той или

[6] G. L. Alfimov, V. V. Konotop, and M. Salerno, “Matter solitons in Bose–Einstein condensates with optical lattices”, Europhys. Lett., Vol. 58, P. 7–13, 2002

иной физической структуре, см. обзор[3]. В то же время, несмотря на некоторую «амбициозность» поставленных выше вопросов, сочетание строгих аналитических утверждений с численным счётом позволяет добиться существенных результатов в этом направлении. Отметим некоторые важные результаты.

Для уравнения (4) с потенциалом $U(x)$, имеющего вид бесконечной потенциальной ямы, $U(x) = Ax^2$, в случае отталкивающих взаимодействий, $P(x) \equiv -1$, был предложен метод «доказательных вычислений», позволяющий гарантировать нахождение *всех* ограниченных решений при заданных значениях параметров задачи[7]. Разработанный метод впоследствии был обобщён на системы из нескольких связанных уравнений Гросса – Питаевского, в которых соответствующие псевдопотенциалу коэффициенты также не зависят от пространственной координаты[8].

Для периодического потенциала $U(x)$ в случае отталкивающих взаимодействий частиц конденсата $P(x) \equiv -1$ предложены достаточные условия, опять же допускающие исчерпывающее описание *всех* ограниченных решений уравнения (4). При этом показано, что выполнение этих условий позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между ограниченными решениями и всевозможными бесконечными в обе стороны последовательностями символов из некоторого конечного алфавита[9]. Последовательности такого рода названы *кодами решений*, а сам процесс присвоения кодов – *кодированием решений*. Проверка достаточных условий проводилась авторами работы с помощью численного счёта. Результаты предыдущей работы получили свое продолжение[10],

---

[7] G. L. Alfimov, D. A. Zezyulin, "Nonlinear modes for the Gross–Pitaevskii equation — a demonstrative computational approach", Nonlinearity, Vol. 20, P. 2075–2092, 2007.

[8] G. L. Alfimov, I. V. Barashenkov, A. P. Fedotov, V. V. Smirnov, D. A. Zezyulin, "Global search for localised modes in scalar and vector nonlinear Schrödinger-type equations", Physica D, Vol. 397, P. 39–53, 2019.

[9] G. L. Alfimov, A. I. Avramenko, "Coding of nonlinear states for the Gross–Pitaevskii equation with periodic potential", Physica D, Vol. 254, P. 29–45, 2013.

[10] G. L. Alfimov, P. P. Kizin, D. A. Zezyulin, "Gap solitons for the repulsive Gross-Pitaevskii equation with periodic potential: Coding and method for computation", Discrete and Continuous Dynamical Systems — Series B, Vol. 22, P. 1207–1229, 2017.

а именно: был разработан алгоритм, позволяющий по коду решения численно построить его профиль.

Стоит также отметить математические работы Ф. Занолина (F. Zanolin) и соавторов[11],[12], в которых доказывается существование некоторых типов решений в близких задачах. Эти решения также могут быть полностью описаны в терминах нелинейной динамики. Авторы цитированных работ используют подход, отличающийся от представленного в данной работе и основывающийся на топологических аргументах.

Актуальность темы исследования

Актуальной задачей является обобщение результатов приведенных выше работ на случай переменного псевдопотенциала $P(x) \neq \mathrm{const}$. В частности, перспективным направлением исследования является обобщение аппарата кодирования решений на случай периодических потенциала и псевдопотенциала. Детальная классификация решений уравнения (1) открывает возможность экспериментального обнаружения новых, ранее неизвестных устойчивых СЛМ.

Цели и задачи диссертационной работы

Основным объектом исследования данной диссертационной работы являются стационарные решения одномерного уравнения Гросса–Питаевского (1) с *периодическим псевдопотенциалом*. Цели и задачи работы можно сформулировать следующим образом:

1. Сформулировать достаточные условия, дающие возможность обобщить метод кодировки СЛМ[9] на случай периодического потенциала и периодического псевдопотенциала; указать способ проверки этих условий (аналитически или с помощью численного счета).

2. Исследовать множество стационарных решений уравнения (1) с периоди-

[11] Ch. Zanini, F. Zanolin, “Complex Dynamics in One-Dimensional Nonlinear Schrödinger Equations with Stepwise Potential”, Complexity, Vol. 2018, Article ID 2101482, 2018.

[12] Ch. Zanini, F. Zanolin, “An Example of Chaos for a Cubic Nonlinear Schrödinger Equation with Periodic Inhomogeneous Nonlinearity”, Advanced Nonlinear Studies, Vol. 12, No. 3, P. 481–499, 2012.

ческим псевдопотенциалом в случае принципиально нелинейных взаимодействий, когда линейным потенциалом можно пренебречь, $U(x) \equiv 0$.

3. Для случая бесконечной потенциальной ямы, $U(x) = Ax^2$, исследовать влияние периодического псевдопотенциала на структуру множества стационарных локализованных решений и их устойчивость.

Методология и методы исследования

Для исследования возможных типов СЛМ в работе используется так называемый «метод исключения сингулярных решений»[9]. Решение уравнения (4) называется *сингулярным*, если оно уходит на бесконечность в конечной точке числовой прямой $x = x_0$:

$$\lim_{x \to x_0} u(x) = \infty. \tag{5}$$

Очевидно, такие решения не могу описывать профиль волновой функции и должны быть исключены из рассмотрения. При выполнении определенных условий «большая часть» решений уравнения (4) представляет собой сингулярные решения. Множество оставшихся решений, называемых *регулярными*, оказывается достаточно «бедным» и может быть полностью описано в терминах символической динамики.

Решение дифференциального уравнения (4) производится с помощью метода Рунге–Кутта четвертого порядка точности. Для построения локализованных решений уравнения (4) в работе используется метод стрельбы. Построенные решения проверяются на линейную устойчивость путём решения соответствующей задачи на собственные значения в пространстве Фурье (метод коллокаций Фурье[13]), а также посредством эволюционного моделирования динамики уравнения (1) с помощью консервативной конечно-разностной схемы[14]. Все алгоритмы и численные методы реализованы в среде `MATLAB` с использованием расширения `MEX` для поддержки высокопроизводительных вычислений.

[13] J. Yang, “Nonlinear Waves in Integrable and Nonintegrable Systems”, Philadelphia: SIAM, 2010.

[14] V. Trofimov, N. Peskov Comparison of finite-difference schemes for the Gross-Pi taevskii equation // Mathematical Modelling and Analysis. — 2009. — Mar. — Vol. 14. — P. 109–126.

Научная новизна

В диссертационной работе доказан ряд общих утверждение, указывающих, когда уравнение (4) допускает существование сингулярных решений, а также, когда все его решения регулярны. В частности, показано, что если псевдопотенциал принимает отрицательное значение хотя бы в одной точке x_0, $P(x_0) < 0$, то существуют два однопараметрических семейства решений, уходящих на бесконечность в этой точке, а также получены асимптотические формулы для этих семейств.

Дальнейшее развитие получает метод исключения сингулярных решений. В работе предложены достаточные условия существования взаимно-однозначного соответствия между регулярными решениями уравнения (4) и бесконечными последовательностями символов над некоторым алфавитом. В отличии от ранее полученных результатов[9], предложенные достаточные условия могут быть эффективно проверены с помощью численного счета. В диссертации приводится алгоритм их численной проверки, а также его теоретическое обоснование.

Для случая $U(x) \equiv 0$ и модельного периодического псевдопотенциала вида $P(x) = A + B\cos 2x$ исследовано множество стационарных локализованных решений. Использование выше упомянутых техник позволило эффективно описать множество СЛМ и в конечном счёте обнаружить новое устойчивое решение, которое ранее не обсуждалось в литературе при рассмотрении задач, связанных с уравнением (1). Найденное новое устойчивое решение получило название *дипольный солитон.*

Наконец, изучен вопрос о влиянии периодического псевдопотенциала вида $P(x) = A + B\cos\Omega x$ на множество СЛМ в случае бесконечной потенциальной ямы, $U(x) = Ax^2$. Показано, что по сравнению с хорошо изученным случаем $P(x) = \text{const}$, множество стационарных локализованных решений оказывается значительно богаче, а именно, появляются существенно нелинейные решения, не существующие в малоамплитудном пределе. Исследована зависимость устойчивости СЛМ от частоты псевдопотенциала Ω. Для псевдопотенциала с нулевым средним, $P(x) = B\cos\Omega x$, показано, что увеличение частоты Ω позволяет стабилизировать малоамплитудные решения, чьи аналоги в модели с $P(x) = \mathrm{const}$ оказываются неустойчивыми.

Положения, выносимые на защиту:

1. Сформулированы и доказаны общие утверждения о наличии и отсутствии сингулярных решений уравнения (4). Показано, что в случае $P(x) > 0$ все решения уравнения (4) регулярны. Если $P(x)$ принимает отрицательное значение хотя бы в одной точке x_0, $P(x_0) < 0$, то существуют два однопараметрических семейства решений, уходящих на бесконечность в точке $x = x_0$; построена асимптотика этих решений. В том случае, когда $Q(x) < 0$ и $P(x) < 0$, показано, что все решения уравнения (4) сингулярны.

2. Сформулированы достаточные условия возможности кодирования регулярных решений уравнения (4) и предложен эффективный алгоритм численной проверки этих условий.

3. Для случая $U(x) \equiv 0$, $P(x) = A + \cos 2x$ исследовано множество СЛМ уравнения (1) и обнаружено новое устойчивое локализованное решение — *дипольный солитон.*

4. В случае бесконечной потенциальной ямы вида $U(x) = Ax^2$ показано, что присутствие периодического псевдопотенциала приводит к появлению новых классов СЛМ, не имеющих аналогов в моделях с $P(x) = \mathrm{const}$. Для псевдопотенциала с нулевым средним установлено, что частота псевдопотенциала существенным образом влияет на устойчивость СЛМ. Установлено, что увеличение частоты приводит к стабилизации малоамплитудных стационарных локализованных решений.

Степень достоверности и апробация результатов

Модель Гросса – Питаевского является классической моделью физики сверхнизких температур и её достоверность не вызывает сомнений. В данной диссертационной работе численно строятся локализованные стационарные решения указанной модели, а также численно исследуется устойчивость таких решений. Построение решений производится при помощи стандартных численных методов с контролируемой точностью. Исследование устойчивости построенных решений производится спектральным методом, который хорошо зарекомендовал себя для решения подобных задач. Результаты исследования устойчивости проверяются численным решением эволюционной задачи при помощи конечно-разностной схемы. Основные результаты диссертационной работы докладывались на различных научных семинарах и конференциях, в числе которых:

1. «Фундаментальная математика и ее приложения в естествознании», БашГУ, Уфа, сентябрь 2015 г., доклад «Стационарные моды нелинейного уравнения Шрёдингера в присутствии линейного и нелинейного потенциалов».

2. «Динамика, бифуркации и странные аттракторы», Нижегородский государственный университет, Нижний Новгород, июль 2016 г., доклад «Stable dipole solitons and soliton complexes in the nonlinear Schrödinger equation with periodically modulated nonlinearity».

3. «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Башкортостан, оз. Банное, март 2018 г., доклад «Steady-states for the Gross-Pitaevskii equation with nonlinear lattice pseudo- potential».

4. «Nonlinear Phenomena in Bose Condensates and Optical Systems», Ташкент, Узбекистан, август 2018 г., доклад «Steady-states for the Gross-Pitaevskii equation with nonlinear lattice pseudopotential».

5. «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Башкортостан, оз. Банное, март 2019 г., доклад «Coding of solutions for the

Duffing equation with non-homogeneous nonlinearity».

6. «Комплексный анализ, математическая физика и нелинейные уравнения», Башкортостан, оз. Банное, март 2021 г., доклад «Coding of bounded solutions of equation $u_{xx} - u + \eta(x)u^3 = 0$ with periodic piecewise constant function $\eta(x)$».

Публикации

Материалы диссертации опубликованы в 3 печатных работах в рецензируемых журналах, входящих в международную систему цитирования Scopus:

1. Alfimov G. L., Lebedev M. E. On regular and singular solutions for equation $u_{xx} + Q(x)u + P(x)u^3 = 0$ // Ufa Mathematical Journal, 2015, Vol. 7, no. 2, P. 3–16, DOI: 10.13108/2015-7-2-3 (Scopus Q2).

2. Lebedev M. E., Alfimov G. L., Malomed B. Stable dipole solitons and soliton complexes in the nonlinear Schrödinger equation with periodically modulated nonlinearity // Chaos, 2016, Vol. 26, P. 073110, DOI: 10.1063/1.4958710 (Scopus Q1).

3. Alfimov G. L., Gegel L. A., Lebedev M. E., Malomed B. A., Zezyulin D. A. Localized modes in the Gross-Pitaevskii equation with a parabolic trapping potential and a nonlinear lattice pseudopotential // Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2019, Vol. 66, P. 194–207, DOI: 10.1016/j.cnsns.2018.06.019 (Scopus Q1).

Личный вклад автора

Содержание диссертации и основные положения, выносимые на защиту, отражают персональный вклад автора в опубликованные работы. Подготовка к публикации полученных результатов проводилась совместно с соавторами, причем вклад диссертанта был определяющим. Все представленные в диссертации результаты получены лично автором с использованием разработанных методов и компьютерных программ.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения, трёх приложений и библиографии. Общий объем диссертации 131 страниц, из них 115 страниц текста, включая 35 рисунков, 4 таблицы и 1 схему алгоритма. Библиография включает 61 наименование.

Содержание работы

Во **введении** обоснована актуальность диссертационной работы, сформулирована цель и аргументирована научная новизна исследований, показана практическая значимость полученных результатов, представлены выносимые на защиту научные положения.

Вводятся основные понятия, относящиеся к объекту исследования. *Стационарные локализованные решения* (или *стационарные локализованные моды*, СЛМ) определяются как решения уравнения (1), имеющие вид (2) и удовлетворяющие условию локализации (3). Решение $u(x)$ уравнения (4) называется *сингулярным*, если для некоторой конечной точки x_0 выполняется $u(x) \to \infty$ при $x \to x_0$. Точка x_0 называется точкой коллапса решений, а про само решение говорится, что оно *коллапсирует* в точке x_0. Решение называется *регулярным*, если оно не коллапсирует ни в какой точке.

В **первой главе** сформулированы и доказаны основные утверждения о сингулярных и регулярных решениях уравнения (4).

Утверждение 1. *Пусть для всех $x \in \mathbb{R}$, в уравнении (4) функции $Q(x)$, $P(x) \in C^1(\mathbb{R})$, причём*

(а) $P(x) \geq P_0 > 0$, $|P'(x)| \leq \widetilde{P}$;

(б) $Q(x) \geq Q_0$, $|Q'(x)| \leq \widetilde{Q}$.

Тогда решение задачи Коши для уравнения (4) с произвольными начальными условиями может быть продолжено на всю действительную ось $\mathbb{R}$.

Утверждение 1 устанавливает условия отсутствия сингулярных решений. Одним из таких условий является положительность функции $P(x)$ на всей числовой прямой. Если же функция $P(x)$ принимает отрицательное значение хотя бы в одной точке x_0, $P(x_0) < 0$, это порождает два семейства решений уравнения (4), коллапсирующих в этой точке. Для формулировки следующего утверждения удобно положить $P(x_0) = -1$ (этого всегда можно добиться путём соответствующей перенормировки).

Утверждение 2. *Пусть Ω — некоторая окрестность точки x_0, а $Q(x) \in C^2(\Omega)$ и $P(x) \in C^4(\Omega)$. Тогда существуют два C^1-гладких однопараметрических семейства решений уравнения (4), коллапсирующих в точке $x = x_0$ (при приближении слева, $x \to x_0 - 0$) и связанных между собой симметрией $u \to -u$. Каждое из этих семейств может быть запараметризовано свободной переменной $C \in \mathbb{R}$, причём для этих семейств справедливы следующие асимптотические разложения:*

$$\pm u(x) = \frac{\sqrt{2}}{\eta} + A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + A_3\eta^3 \ln|\eta| + C\eta^3 + A_4\eta^4 \ln|\eta| + \ldots. \tag{6}$$

Здесь $\eta = x - x_0$, а коэффициенты A_n выражаются через коэффициенты Q_n, P_n разложения функций $Q(x)$, $P(x)$

$$Q(x) = Q_0 + Q_1\eta + Q_2\eta^2 \ldots, \quad P(x) = -1 + P_1\eta + P_2\eta^2 + \ldots. \tag{7}$$

Аналогичные однопараметрические семейства коллапсирующих решений существуют также и справа от точки $x = x_0$. Наконец, в первой главе устанавливаются условия, при которых уравнение (4) вообще не имеет регулярных решений, за исключением нулевого решения $u(x) \equiv 0$.

Утверждение 3. *Пусть при $x \in \mathbb{R}$ выполняются условия $P(x) \le P_0 < 0$, $Q(x) \le Q_0 < 0$. Тогда все решения уравнения (4) сингулярны, за исключением нулевого решения.*

Одним из следствий полученных результатов является то, что в том случае, когда псевдопотенциал $P(x)$ является знакопеременной функцией, сингулярность является характерным свойством большого количества решений уравнения (4), что, в свою очередь, делает возможным применение метода исключения сингулярных решений[9].

Во **второй главе** представлен аппарат кодирования стационарных состояний уравнения (1) с L-периодическими функциями потенциала, $U(x+L) = U(x)$, и псевдопотенциала, $P(x+L) = P(x)$. Оказывается, что множество регулярных решений уравнения (4) при определенных условиях можно полностью описать исходя из структуры так называемых *кодировочных множеств*: $\mathscr{U}_L^+$, $\mathscr{U}_L^-$, $\mathscr{U}_L$. Эти множества определяются на плоскости (u, u') начальных условий уравнения (4) следующим образом. Множество $\mathscr{U}_L^+$ содержит в себе начальные условия для решений, ограниченных на промежутке $[0; L]$, а множество $\mathscr{U}_L^-$ — начальные условия для решений, ограниченных на промежутке $[-L; 0]$. Множество $\mathscr{U}_L$ есть пересечение двух предыдущих множеств, $\mathscr{U}_L = \mathscr{U}_L^+ \cap \mathscr{U}_L^-$. Связь между точками этих множеств удобно описать с помощью *отображения Пуанкаре* $\mathcal{P}$, которое определено следующим образом: пусть $\mathbf{p} \in \mathscr{U}_L^+$, тогда $\mathcal{P}(\mathbf{p}) = \mathbf{q} = (u(L), u'(L))$, $\mathbf{q} \in \mathscr{U}_L^-$, где $u(x)$ — решение задачи Коши для уравнения (4) с начальными условиями $u(0) = u_0$, $u'(0) = u'_0$. Последовательность точек $\{\mathbf{p}_n\}$, связанных отображением Пуанкаре, $\mathcal{P}(\mathbf{p}_n) = \mathbf{p}_{n+1}$, называется *орбитой.*

Ключевым моментом на пути к описанию множества регулярных решения является выполнение *двух гипотез* относительно действия отображения $\mathcal{P}$ на множестве $\mathscr{U}_L$.

(I) Множество $\mathscr{U}_L$ представляет из себя набор компонент связности $\mathscr{U}_L = \bigcup_{k\in S} D_k$, где каждая компонента D_k есть криволинейный четырехугольник с монотонными границами, а также для любых i, j множества $H_{ij} = \mathcal{P}(D_i) \cap D_j$ и $V_{ij} = \mathcal{P}^{-1}(D_j) \cap D_i$ непустые.

(II) Отображения $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^{-1}$ некоторым образом сохраняют свойства монотонности полос, названных в работе *h- и v-полосами*, соединяющих противоположные стороны D_k, причем ширина этих полос убывает под действием соответствующих отображений.

Поясним гипотезу II. Если она верна, тогда определенные выше множества H_{ij} и V_{ij} представляют из себя h- и v- полосы соответственно. Из гипотезы II следует, что множества $\mathcal{P}(H_{ij}) \cap D_k$ также являются h-полосами, при этом выполняется неравенство $d_{\mathrm{h}}(\mathcal{P}(H_{ij}) \cap D_k) < d_{\mathrm{h}}(H_{ij})$, где под $d_{\mathrm{h}}(\cdot)$ понимается ширина h-полосы, измеряемая вдоль вертикальной прямой. Аналогично множества $\mathcal{P}^{-1}(V_{ij}) \cap D_k$ представляют из себя v-полосы, причём верным оказывается неравенство $d_{\mathrm{v}}(\mathcal{P}^{-1}(V_{ij}) \cap D_k) < d_{\mathrm{v}}(V_{ij})$, где $d_{\mathrm{v}}(\cdot)$ есть ширина v-полосы, измеряемся вдоль горизонтальной прямой.

В данной главе показано, что при выполнении гипотез I и II отображение $\mathcal{P}$ действует на множестве $\mathscr{U}_L$ по схеме подковы Смейла[15], и существует взаимно-однозначное соответствие между *орбитами* регулярных решений уравнения (4) и *множеством бесконечных последовательностей*, в которых каждый символ соответствует компоненте связности множества $\mathscr{U}_L$. В этой части работы автор следует подходу, описанному в работах Л. П. Шильникова и В. М. Алексеева в 60-70-е годы прошлого века. В основных статьях[16],[17] подход, основанный на символической динамике, был успешно применен к описанию поведения траекторий вблизи гомоклинической орбиты, а также для задачи трёх тел. В данной работе такой подход применяется к динамике отображений $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^{-1}$, действующих на множествах $\mathscr{U}_L^{\pm}$, что является новым приложением этой теории.

Проверка гипотез осуществляется численно. При этом гипотеза I может

[15] S. Wiggins, “Introduction to Applied Nonlinear Dynamical Systems and Chaos”, New York: Springer-Verlag, 2003.

[16] Л. П. Шильников, «Об одной задаче Пуанкаре-Биркгофа», Математический сборник, Т. 74, №4, С. 378–397, 1967.

[17] В. М. Алексеев, «Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика», Успехи математических наук, Т. 36, Вып. 4, С. 161, 1981.

быть легко проверена *методом сканирования плоскости начальных условий.* Проверка же гипотезы II не столь проста и требует более обстоятельного подхода. В данной главе сформулированы две теоремы (*теоремы об отображении h- и v-полос*), которые позволяют свести проверку гипотезы II к эффективной численной процедуре. Данная процедура заключается в вычислении значений элементов матрицы Якоби, а также оценке некоторых констант в точках $\mathbf{p}$, принадлежащих специальным подмножествам множества $\mathscr{U}_L$. Сам алгоритм проверки выглядит следующим образом.

Алгоритм 1. Проверка гипотезы II

Дано: Гипотеза I верна для уравнения (4); $\mathscr{U}_L = \bigcup_{k\in S} D_k$.

Шаг (1). Задать расчётную сетку. Для всех $i, j \in S$ численно построить множества $H_{ij} = \mathcal{P}(D_i) \cap D_j$, и $V_{ij} = \mathcal{P}^{-1}(D_j) \cap D_i$ на заданной расчётной сетке.

Шаг (2). Проверка знаков элементов в матрицах Якоби $D\mathcal{P}_{\mathbf{p}}$, $D\mathcal{P}^{-1}_{\mathbf{q}}$ для отображений $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}^{-1}$.

- **(а)** Для $\mathbf{p} \in V_{ij}$ вычислить матрицу 2×2 оператора $D\mathcal{P}_{\mathbf{p}} = (a_{mn})$ и проверить, что знаки её элементов $\forall \mathbf{p} \in V_{ij}$ соответствуют в точности одной из конфигураций, указанных в теореме об отображении h-полос.
- **(б)** Для $\mathbf{q} \in H_{ij}$ вычислить матрицу 2×2 оператора $D\mathcal{P}^{-1}_{\mathbf{q}} = (b_{mn})$ и проверить, что знаки её элементов $\forall \mathbf{q} \in H_{ij}$ соответствуют в точности одной из конфигураций, указанных в теореме об отображении v-полос.

Шаг (3). Оценка сжатия h- и v-полос.

- **(а)** Используя расчётную сетку, оценить значение $\mu_* = \min\limits_{\mathbf{p}\in V_{ij}} a_{11}(\mathbf{p})$; проверить, что $\mu_* > 1$.
- **(б)** Используя расчётную сетку, оценить значение $\nu_* = \min\limits_{\mathbf{q}\in H_{ij}} b_{22}(\mathbf{q})$; проверить, что $\nu_* > 1$.

Работа алгоритма (см. рисунок 1) проиллюстрирована на примере уравнения (4) с $Q(x) \equiv -1$ и $P(x) = \eta(x)$, где $\eta(x)$ — кусочно-постоянная периодическая функция с периодом $L = L_* + L_0$, определенная следующим образом:

$$\eta(x) = \begin{cases} -1, & x \in [0; L_*); \\ +1, & x \in [L_*; L_* + L_0). \end{cases} \tag{8}$$

Оказывается (доказано строгое утверждение), что множество $\mathscr{U}_L$ на плоскости начальных условий для такого уравнения неограниченно. Тем не менее можно ограничиться рассмотрением некоторого ограниченного подмножества $\mathcal{D} \subset \mathscr{U}_L$. Если гипотезы I и II верны для $\mathcal{D}$, тогда можно описать подмножество регулярных решений, чьи орбиты не выходят за пределы рассмотренного подмножества $\mathcal{D}$ на плоскости начальных условий. На рисунке 1 показан пример множества $\mathcal{D}$, состоящего из трёх компонент связности. Гипотезы I и II верны для $\mathcal{D}$, а значит существует подмножество регулярных решений, которое может быть кодировано тремя символами $\{-1, 0, +1\}$.

В **третьей главе** исследуется множество стационарных решения уравнения (1), в котором потенциал ловушки отсутствует, $U(x) \equiv 0$, а псевдопотенциал имеет вид косинуса, $P(x) = A + \cos 2x$. Такая задача ранее рассматривалась в литературе[2]. Было установлено, что она допускает стационарное локализованное решение колоколообразной формы, называемое *фундаментальный солитон*, которое является устойчивым при определенных параметрах уравнения.

В данной главе к такому уравнению применяется подход, основанный на методике кодирования решений. Структура кодировочных множеств приведена на рисунке 2. Оказывается, что множества $\mathscr{U}_\pi^\pm$ $(L = \pi)$ представляют из себя бесконечные спирали, которые образуют неограниченное пересечение $\mathscr{U}_\pi$, состоящее из бесконечного количества компонент связности.

Проверка гипотез I и II осуществляется для подмножества $\mathcal{D} \subset \mathscr{U}_\pi$, состоящего из семи центральных компонент связности. Численная процедура проверки гипотез позволила заключить, что обе гипотезы верны. Следовательно, существует взаимно-однозначное соответствие между решениями уравнения (4) и кодами, построенными исходя из структуры кодировочного множества. Нали-

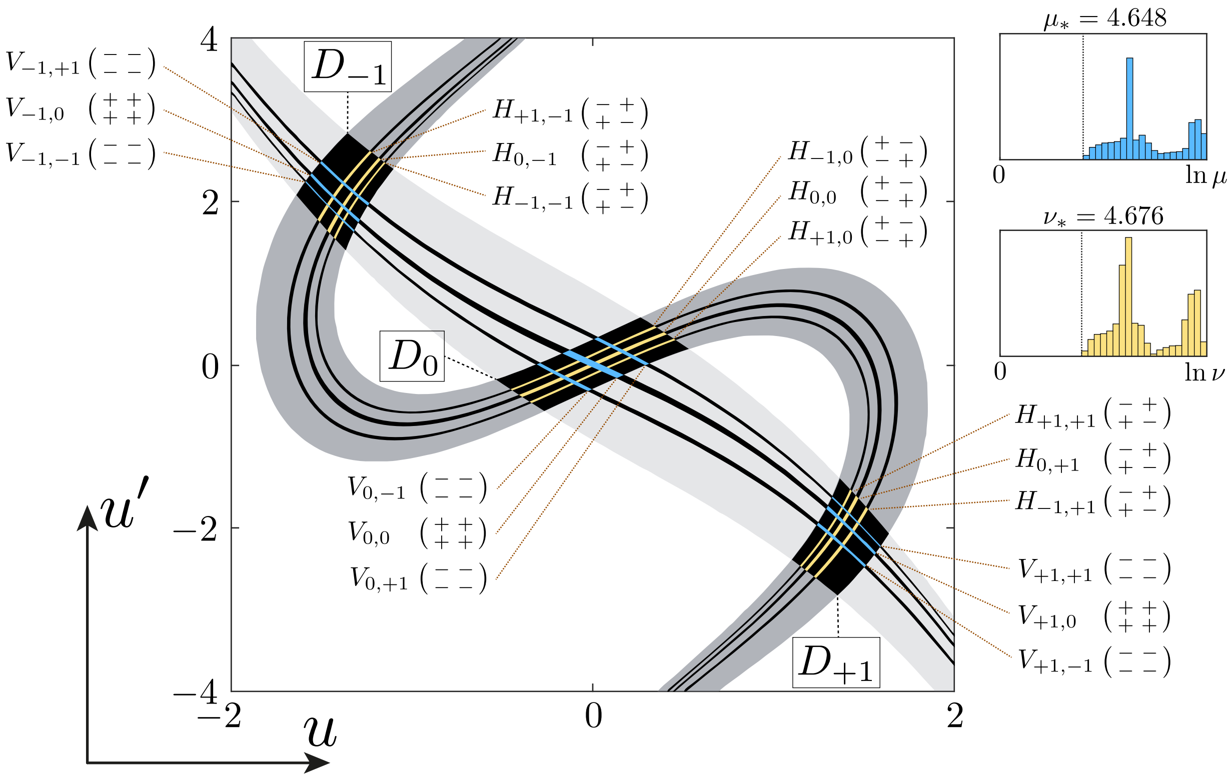

Рис. 1: Проверка гипотез для уравнения (4) для случая $Q(x) \equiv -1$, $P(x) = \eta(x)$ с параметрами $(L_*, L_0) = (2, 1)$. Множество $\mathscr{U}_L^+$ (светло-серый), $\mathscr{U}_L^-$ (тёмно-серый), их пересечение $\mathcal{D} = \{D_{-1}, D_0, D_{+1}\} \subset \mathscr{U}_L$ (чёрный); для множеств V_{ij} (синий) и H_{ij} (жёлтый) указаны знаки элементов соответствующих операторов.

чие такого соответствия показывает, что множество стационарных локализованных решения рассматриваемого уравнения чрезвычайно богато. На рисунке 3 представлены различные решения и соответствующие им символьные коды.

Анализ линейно устойчивости спектральным методом показал, что большинство решений являются неустойчивыми, однако в задаче существует некоторое количество устойчивых решений, часть из которых ранее не была известна. Одним из таких новых устойчивых решений является так называемый *дипольный солитон*, профиль которого изображен на рисунке 3 (e).

В **четвертой главе** исследуются СЛМ уравнения (1), в котором наряду с периодическим потенциалом также присутствует удерживающий потенциал, имеющий вид бесконечной потенциальной ямы. После перенормировки функции потенциала и псевдопотенциала принимают вид $U(x) = x^2$, $P(x) =$

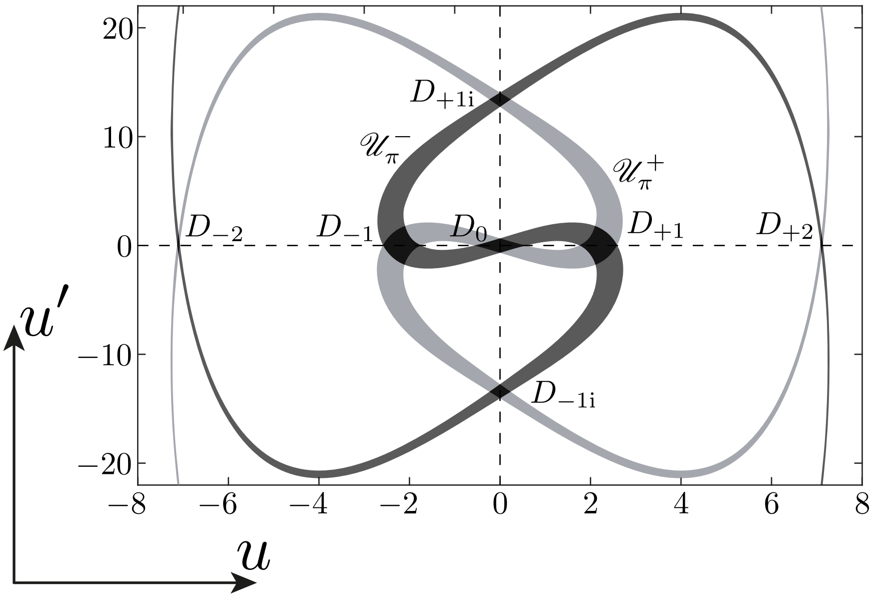

Рис. 2: Множество $\mathcal{D} \subset \mathscr{U}_\pi$, состоящее из семи компонент связности $\{D_{-2}, D_{-1\mathrm{i}}, D_{-1}, D_0, D_{+1}, D_{+1\mathrm{i}}, D_{+2}\}$ (чёрный), сформированное пересечением множеств $\mathscr{U}_\pi^\pm$ для уравнения (4); $Q(x) = -1.5,\ P(x) = \cos 2x$.

$A + B\cos\Omega x$ соответственно.

Особое место в анализе такого уравнения занимают *стационарные решения с линейным аналогом.* Такие решения возникают из рассмотрения случая малых амплитуд $|u(x)| \ll 1$. В этом случае в уравнении (4) можно отбросить нелинейное слагаемое, так что уравнение принимает вид обыкновенного гармонического осциллятора

$$u_{xx} + (\omega - x^2)u = 0. \tag{9}$$

Его решением является следующий набор собственных значений и собственных функций:

$$\tilde{\omega}_n = 2n+1; \quad \tilde{u}_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n! \sqrt{\pi}}} H_n(x) e^{-\frac{1}{2}x^2}; \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{10}$$

где функции $H_n(x)$ представляют собой многочлены Эрмита. Под действием нелинейности каждое собственное значение $\tilde{\omega}_n$ бифурцирует и порождает однопараметрическое семейство $\Gamma_n = (\omega_n, u_n(x))$ — семейство решений с линейным аналогом.

Известно[7], что решения с линейным аналогом полностью исчерпывают

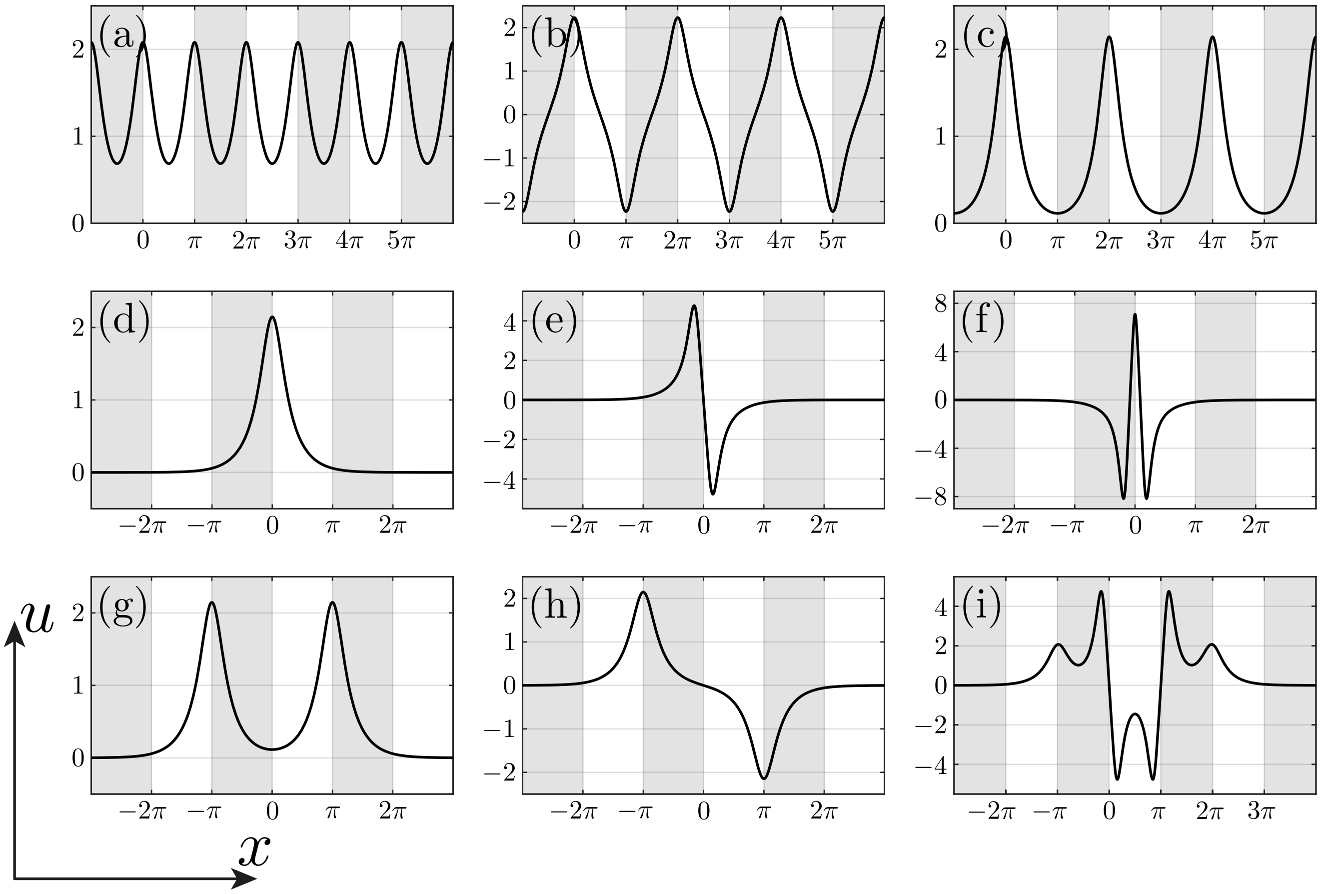

Рис. 3: Различные решения уравнения (4) для $Q(x) = -1.5$, $P(x) = \cos 2x$. Каждому решению соответствует символьный код, который однозначно идентифицирует решение. Периодические решения: (a) π-перидическое решение $\{\dots, +1, +1, +1, \dots\}$; (b) 2π-периодическое решение $\{\dots, +1, -1, +1, -1, \dots\}$; (c) 2π-периодическое решение $\{\dots, +1, 0, +1, 0, \dots\}$. Локализованные решения: (d) фундаментальный солитон $\{\dots, 0, +1, 0, \dots\}$; (e) дипольный солитон $\{\dots, 0, -1\mathrm{i}, 0, \dots\}$ (f) элементарный солитон с кодом $\{\dots, 0, +2, 0, \dots\}$ (g) $\{\dots, 0, +1, 0, +1, 0, \dots\}$ (h) $\{\dots, 0, +1, 0, -1, 0, \dots\}$ (i) $\{\dots, 0, +1, -1\mathrm{i}, +1\mathrm{i}, +1, \dots\}$.

все множество СЛМ для случая $P(x) \equiv -1$. Однако в случае периодического псевдопотенциала также существуют решения, не имеющие линейного аналога. В данной главе ветви таких решений строятся численно, см. рисунок 4. Анализ устойчивости показал, что почти все они оказываются неустойчивыми.

Вторая часть четвёртой главы посвящена анализу устойчивости малоамплитудных решений. Аналитически показано, что в случае псевдопотенциала с нулевой средней, $P(x) = B\cos\Omega x$, увеличение частоты приводит к стабилизации малоамплитудных решений с линейным аналогом. То есть для каждой ветви Γ_n существует пороговое значение частоты Ω_n, что для $\Omega > \Omega_n$ соответствующая ветвь решений устойчива в окрестности точки бифуркации $N \ll 1$, $\omega_n \approx \tilde{\omega}_n$.

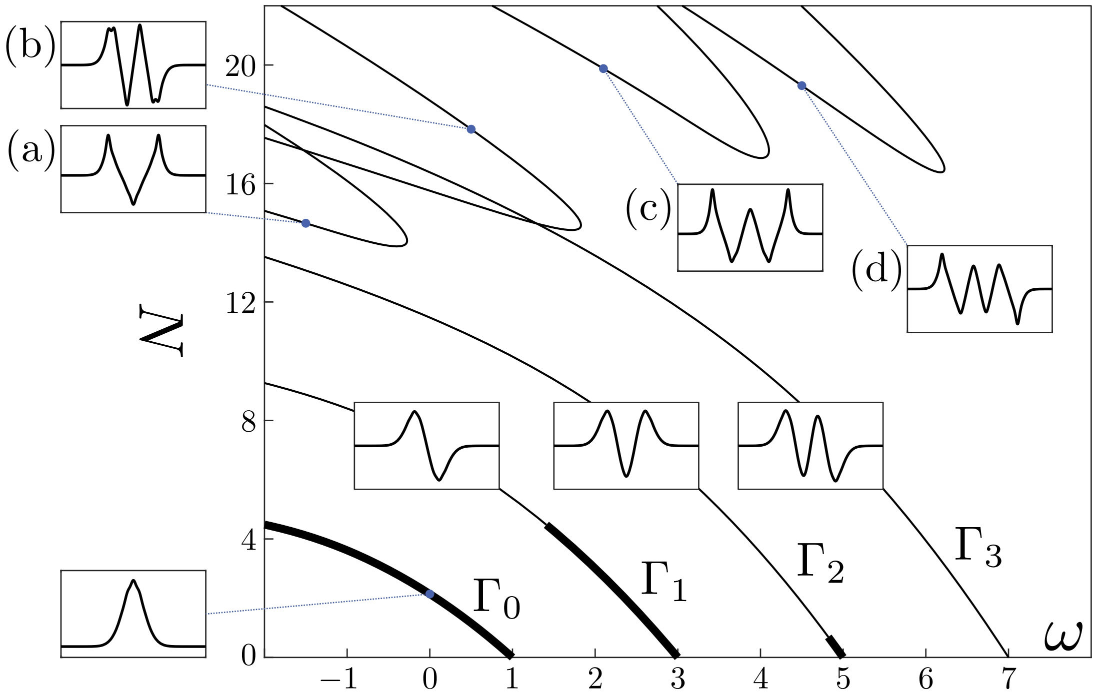

Рис. 4: Диаграммы зависимости нормы решений N от химического потенциала ω, для уравнения (4); $Q(x) = \omega - x^2$, $P(x) = 1 + 2\cos(12x)$. Сегменты кривых $N(\omega)$, соответствующие устойчивым решениям, выделены толстыми линиями. Ветви Γ_n, $n = 0, 1, 2, 3$ соответствуют семействам решений с линейным аналогом.

В **заключении** подводятся итоги диссертационной работы. Основные результаты могут быть представлены следующим образом.

1. Сформулированы и доказаны общие утверждения о наличии и отсутствии сингулярных решений уравнения (4).

2. Сформулированы достаточные условия возможности кодирования регу-

лярных решений уравнения (4) и предложен эффективный алгоритм численной проверки этих условий.

3. Для случая $U(x) \equiv 0$, $P(x) = A + \cos 2x$ исследовано множество СЛМ уравнения (1) и обнаружено новое устойчивое локализованное решение — *дипольный солитон*.

4. В случае бесконечной потенциально ямы показано, что присутствие периодического псевдопотенциала приводит к появлению новых классов СЛМ, не имеющих линейных аналогов. Для псевдопотенциала с нулевым средним установлено, что увеличение частоты псевдопотенциала приводит к стабилизации малоамплитудных стационарных локализованных решений.

В **приложении A** доказывается лемма об ограниченных решениях, использующаяся в первой главе.

В **приложении B** в явном виде выписаны решения для двух уравнений типа осциллятора Дуффинга:

$$u_{xx} - u + u^3 = 0; \quad u_{xx} - u - u^3 = 0, \tag{11}$$

использующиеся в секции 2.3.

В **приложении C** приведено доказательство теорем об отображении h- и v-полос, использующихся во второй главе.