Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
“Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”

Факультет математики

На правах рукописи

Боброва Ирина Александровна

Неабелевы обобщения уравнения Пенлеве IV

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Побережный Владимир Андреевич

Москва – 2023

Аннотация

Шесть классов знаменитых уравнений Пенлеве являются одним из важных объектов современной математической физики в связи с их повсеместным появлением в физических задачах. Их общие решения определяют новые специальные функции, известные как *трансцендентны Пенлеве*. Поскольку существует несколько примеров различных неабелевых аналогов уравнений Пенлеве, появляющихся в различных разделах некоммутативных интегрируемых моделей, возникает естественный вопрос о классификации интегрируемых неабелевых обобщений.

Данная диссертация посвящена классификации некоммутативных аналогов четвертого уравнения Пенлеве:

$$y'' = \frac{1}{2\,y}y'^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4zy^2 + 2(z^2-\alpha)y + \frac{\beta}{y}, \qquad y(z),\ z,\ \alpha,\ \beta \in \mathbb{C}. \tag{P$_4$}$$

Наша цель – найти интегрируемые матричные и неабелевы аналоги уравнения P_4. Их решения могут быть интерпретированны как новые матричные и некоммутативные трансцендентные функции. Кроме того, такие уравнения можно рассматривать как квантовые или неабелевы версии уравнения Пенлеве IV.

Классификация основана на двух методах, позволяющих обнаружить возможных кандидатов в интегрируемые неабелевы аналоги уравнения P_4: (1) проверка матричного теста Пенлеве-Ковалевской и (2) построение решений в терминах бесконечной некоммутативной системы Тоды. Используя первый метод, мы нашли три неэквивалентных класса матричных систем с параметрами, являющимися постоянными произвольными матрицами. Второй метод оказывается эффективным для построения полностью некоммутативного аналога уравнения Пенлеве IV. Чтобы доказать интегрируемость этих обобщений, мы приводим их изомонодромные представления Лакса.

1 Исторический обзор

Знаменитые уравнения Пенлеве появились в результате классификации комплексных дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$y''(z) = P\left(z, y(z), y'(z)\right), \qquad y(z),\ z \in \mathbb{C}, \tag{1}$$

где $P\left(z, y(z), y'(z)\right)$ – мероморфная функция по z и рациональная функция по $y\left(z\right)$, $y'(z)$. Для изучения этих уравнений было введено *свойство Пенлеве*. А именно, их общие решения не имеют подвижных особых точек, кроме полюсов[1]. Впервые это свойство использо-

[1] В случае ОДУ m-го порядка при $m > 2$ этот критерий формулируется иначе. А именно, общие решения не имеют критических подвижных точек.

вала С. Ковалевская в [Kow89]. 50 классов таких уравнений были найдены П. Пенлеве и его школой [Pai00], [Pai02]. Позднее Б. Гамбье [Gam10] доказал, что только шесть из них определяют новые специальные функции. Общие решения уравнений Пенлеве в настоящее время известны как наиболее общий класс специальных функций, называемых *трансцендентами Пенлеве*. Эти шесть классов уравнений вида (1) известны как *уравнения Пенлеве*. Они имеют широкое применение в математике и физике и обладают удивительно богатой математической структурой.

В частности, они связаны с системой скалярных дифференциальных уравнений [Fuc07], [Gar12], интегрируемой в смысле теоремы Фробениуса. В статье [Fuc07] Р. Фукс исследовал случай шестого уравнения Пенлеве. Результат Р. Фукса был обобщен Р. Гарнье, который рассмотрел иррегулярные особенности [Gar12] и в результате нашел такое представление для других уравнений Пенлеве. Отметим, что в этой области также работали Л. Шлезингер и Б. Мальгранж (см., например, [Sch12], [Mal74]). В статье [JM81] была установлена возможность линеаризации уравнений Пенлеве. Этот факт связан с изомонодромными деформациями, ассоциированными с векторными расслоениями ранга 2. Благодаря свойству изомонодромности пространство решений уравнений Пенлеве может быть параметризовано данными монодромии[2]. А именно, каждому из уравнений можно сопоставить аффинную кубику, нули которой определяют так называемую *поверхность монодромии* (например, [VDPS09]).

Одна из причин повсеместного появления уравнений Пенлеве заключается в том, что они тесно связаны с иерархией Тода. В [DZ04] Б. Дубровин и Ю. Чжан доказали, что τ-функция общего решения расширенной иерархии Тоды аннулируется некоторыми комбинациями операторов Вирасоро. Именно такие ограничения Вирасоро регулируют корреляционные функции многих систем в теории случайных матриц, в теории струн и в топологической теории поля. Например, в [DZ05] выражения для полного потенциала Громова–Виттена рода $g \geq 1$ были представлены через величины рода нуль, полученные из ограничений Вирасоро.

Отметим, что изомонодромная τ-функция тесно связана с так называемой сигма-формой уравнений Пенлеве. Этот вопрос исследовал К. Окамото [Oka81], который развил гамильтонову теорию дифференциальных уравнений Пенлеве [Oka80] и показал, что все преобразования Бэклунда могут быть получены как естественные аффинные действия групп Вейля на сигма формах [Oka87a], [Oka87b], [Oka86], [Oka87c].

Что касается приложений уравнений Пенлеве в интегрируемых системах, то оказывается, что эти уравнения могут быть получены как редуцированные ОДУ некоторых

[2]Неформально говоря

интегрируемых УЧП. Гипотеза Абловица-Рамани-Сегюра [ARS80] утверждает, что нелинейное УЧП разрешимо методом обратной задачи [ZS74] только в том случае, если каждое нелинейное ОДУ, полученное точной редукцией, обладает свойством Пенлеве. Например, первое и второе уравнения Пенлеве являются редукциями уравнения КдФ, редукция ОДУ уравнения синус-Гордон есть третье уравнение Пенлеве, а шестое уравнение Пенлеве является редукцией нелинейного уравнения Шрёдингера. В статье [JKT07] было показано, что уравнения Пенлеве III–VI являются редукциями трехволновой резонансной системы.

В последние годы большое внимание привлекли квантовые или, в более общем смысле, неабелевы обобщения различных интегрируемых систем. Это было мотивировано проблематикой и потребностями современной квантовой физики, а также естественными попытками математиков расширить и обобщить "классические" интегрируемые структуры и системы. В частности, трансценденты Пенлеве являются хорошим примером этого феномена.

Квантовые версии уравнений Пенлеве были получены в [NGR$^+$08], где авторы проквантовали скобки Пуассона, связанные с так называемой симметрической формой уравнений Пенлеве. Существует также интересное некоммутативное семейство неавтономных многочастичных интегрируемых систем, которые были введены в [BCR18]. Авторы нашли изомонодромное представление гамильтоновых систем Такасаки семейств Пенлеве-Калоджеро [Tak01]. Полностью[3] неабелева версия второго уравнения Пенлеве была представлена в [RR10]. Авторы исследовали ганкелеву квазидетерминантную структуру решений P_2, обусловленную их связью с некоммутативными уравнениями Тоды [GR92]. Хотя уже было известно [Kaw15], что каждое из уравнений Пенлеве имеет только один матричный гамильтонов аналог, в недавней статье [AS21] было показано, что уравнение P_2 имеет по крайней мере три неэквивалентных матричных обобщения. Чтобы их получить, авторы использовали матричный тест Пенлеве-Ковалевской, введенный в [BS98]. Поскольку уравнения Пенлеве связаны с ортогональными полиномами, несколько авторов вывели их матричные аналоги, используя матричные обобщения ортогональных полиномов (например, [CM14], [CM$^+$18]).

Приведенный исторический очерк не претендует на полный обзор теории Пенлеве, поэтому мы отсылаем читателя к замечательным книгам [CM08], [FIN$^+$06], а также цитируемым в них обзорам.

[3] В терминологии авторов.

2 Постановка задачи

Основная проблема классификации интегрируемых систем связана с вопросом:“Что такое понятие интегрируемости?”. Чтобы построить определение, мы разделили нашу классификацию на два этапа.

(1) Сначала мы находим неабелевы аналоги, используя один из подходов из Таблицы 1.

(2) Для заданного аналога приведем его представление нулевой кривизны:

$$A_z - B_\zeta = [B, A],$$

где $A(\zeta, z)$, $B(\zeta, z)$ — некоторые матрицы, ζ — спектральный параметр, z — параметр деформации (“независимая” переменная).

	Approach 1 [BS98]	**Approach 2** [RR10]
Setting	• $\mathcal{A} = \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ is an associative unital algebra over $\mathbb{C}$. • “dependent” variables $\in \mathcal{A}$. • the independent variable $\in \mathbb{C}$. • constants $\in \mathcal{A}$ or $\mathbb{C}$. • spectral parameter $\in \mathbb{C}$.	• R is an associative unital division ring over a field $\mathbb{F}$ with a derivation. • all variables $\in R$. • there is an element $t \in R$ s.t. $t' = 1$. • constants $\in \mathbb{F}$. • spectral parameter $\in \mathbb{F}$.
Criterion	Matrix generalizations should pass a matrix Painlevé-Kovalevskaya test.	Analogs should possess solutions in terms of an infinite ncToda system.

Таблица 1: Подходы

Замечание 2.1. Мы предполагаем, что $\operatorname{char} \mathbb{F} = 0$.

Таким образом, мы имеем следующее

Определение 2.1. Матричное или неабелево обобщение уравнения Пенлеве IV является *интегрируемым*, если

(a) оно удовлетворяет критерию из Approach **1** или Approach **2**, соответственно,

(b) и допускает представление нулевой кривизны.

Итак, задачи классификации можно сформулировать следующим образом.

- Применить матричный тест Пенлеве-Ковалевской для поиска новых примеров матричных обобщений уравнения Пенлеве IV. Эти примеры могут содержать произвольные матричные константы. Найти представления нулевой кривизны для всех новых уравнений.

- Найти полностью некоммутативные аналоги уравнения Пенлеве IV, выразив их решения в терминах бесконечной неабелевой системы Тоды[4]. Для данного аналога представить его изомонодромную пару.

Замечание 2.2. Отметим, что существуют и другие методы построения неабелевых аналогов:

(a) квантование скобок Пуассона [NGR+08];

(b) редукции интегрируемых неабелевых систем [OS98], [Adl20], [AK22];

(c) построение матричных систем Шлезингера [Kaw15];

(d) разрешение матричной проблемы Римана-Гильберта [CM14];

(e) изучение автономных систем [GR19], [BS22b], [BS22a].

3 Основные результаты

3.1 Матричные аналоги

В Approach **1** зависимая переменная $y(z)$ принадлежит матричной алгебре $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ с единичным элементом $\mathbb{I}$[5] и независимая переменная z является элементом $\mathbb{C}$. С помощью матричного обобщения теста Пенлеве-Ковалевской, введенного С. Баландиным и В. Соколовым в [BS98], мы можем проверить, что матричное ОДУ потенциально удовлетворяет свойству Пенлеве (это необходимое условие). Напомним, что скалярному ОДУ m-го порядка проходит тест Пенлеве-Ковалевской, если все его общие формальные решения имеют m произвольных констант. Мы называем такие решения *максимальными*.

Пример 3.1. Рассмотрим матричное уравнение

$$y'(z) = -y^2(z), \qquad y(z) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{2}$$

[4]Этот пункт является обобщением результатов из статьи [JKM06] на некоммутативный случай.
[5]Иногда мы будем его опускать.

Пусть $y(z) \in GL_n(\mathbb{C})$. Тогда уравнение (2) может быть проинтегрировано:

$$-y^{-1}\, y'\, y^{-1} = \mathbb{I}; \qquad (y^{-1})' = \mathbb{I}; \qquad y^{-1} = z\,\mathbb{I} + \Lambda; \qquad y = (z\,\mathbb{I} + \Lambda)^{-1},$$

где $\mathbb{I}$ — единичная матрица, а $\Lambda \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ — постоянная интегрирования. Предположим, что Λ можно диагонализовать, т.е. $\Lambda = \mathrm{diag}\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Тогда очевидно, что вычет общего решения в $z = -\lambda_k$, $k = 1, \dots, n$ является матрицей ранга 1.

Существует общее наблюдение, что максимальные решения матричных ОДУ имеют старший коэффициент ранга 1. В связи с этим наблюдением мы предпочитаем работать только с полиномиальными ОДУ. Из-за этих технических ограничений, связанных с матричным обобщением теста, мы рассматриваем однородные матричные полиномиальные ОДУ со скалярными коэффициентами, разрешенные относительно старшей производной,

$$y^{(m)}(z) = P\left(z, y(z), \dots, y^{(m-1)}(z)\right), \qquad y(z) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C}), \qquad z \in \mathbb{C}. \tag{3}$$

Заметим, что этот метод позволяет внедрить постоянные матричные коэффициенты в (3), если мы рассмотрим некоторую деформацию данного ОДУ, которая имеет те же самые максимальные решения, что и однородная система. Таким образом, для построения матричных аналогов уравнений Пенлеве мы используем следующие два ингредиента:

(1) матричные обобщения главной однородной части скалярных систем, эквивалентные уравнению Пенлеве и проходящие матричный тест Пенлеве-Ковалевской;

(2) линейные деформации с произвольными матричными коэффициентами систем из пункта (1), имеющих те же самые максимальные решения, что и в однородном случае.

В результате мы можем найти новые матричные аналоги с постоянными матричными коэффициентами, которые иногда связаны некоторыми алгебраическими соотношениями. Такие примеры для первого и второго уравнений Пенлеве были найдены в статьях [BS98], [AS21] соответственно.

В случае уравнения Пенлеве IV результаты классификации приведены в Теореме 3.1. Как уже упоминалось выше (подробнее см. Раздел 2.1 основного текста), мы можем работать только с полиномиальными ОДУ. В связи с этим мы классифицируем матричные аналоги системы Пенлеве IV

$$\begin{cases} u' &= -u^2 + 2uv - 2zu + c_1, \\ v' &= -v^2 + 2uv + 2zv + c_2, \end{cases} \tag{4}$$

где $u(z)$, $v(z)$, $z \in \mathbb{C}$ и c_1, c_2 — произвольные константы. Используя матричный тест Пенлеве-Ковалевской, мы находим все интегрируемые[6] матричные обобщения системы (4) вида

$$\begin{cases} u' &= -u^2 + 2\,uv + \alpha(uv - vu) - 2zu + b_1 u + u b_2 + b_3 v + v b_4 + b_5 \\ v' &= -v^2 + 2\,vu + \beta(vu - uv) + 2zv + c_1 v + v c_2 + c_3 u + u c_4 + c_5, \end{cases} \tag{5}$$

где $u(z)$, $v(z) \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$, α, β, $z \in \mathbb{C}$ и b_i, c_i — постоянные матрицы.

Отметим, что существуют преобразования, сохраняющие класс систем вида (5), но меняющие параметры. Такие преобразования задаются формулами[7]

$$(u,\, v) \mapsto (v,\, u), \tag{6}$$

$$(u,\, v) \mapsto (u^T,\, v^T), \tag{7}$$

$$(u,\, v) \mapsto (-u,\, v - u - 2z) \tag{8}$$

и

$$u \mapsto e^{zK}\,(u + Q_1)\,e^{-zK}, \qquad v \mapsto e^{zK}\,(v + Q_2)\,e^{-zK}, \tag{9}$$

где K и Q_i — постоянные матрицы. Подчеркнем, что преобразование (9) выводит систему вида (5) за пределы класса, но в очень частных случаях его можно применять.

Замечание 3.1. Согласно (6) – (8) параметры (α, β) изменяются как

$$(\alpha,\beta) \mapsto (\beta,\alpha), \qquad (\alpha,\beta) \mapsto (-\alpha-2, -\beta-2), \qquad (\alpha,\beta) \mapsto (\alpha, -\alpha-\beta-3), \tag{10}$$

соответственно. Эти преобразования образуют групповую структуру, изоморфную группе диэдра D_{12} симметрий правильного 6-угольника.

Итак, основным результатом нашей классификации является следующая

Теорема 3.1. *Любая система вида (5), удовлетворяющая матричному тесту Пенлеве-Ковалевской, может быть сведена преобразованиями (6), (7), (8) и (9) к одной из следующих:*

$$\begin{cases} u' &= -u^2 + uv + vu - 2zu + hu + \gamma_1\,\mathbb{I}, \\ v' &= -v^2 + vu + uv + 2zv - vh + \gamma_2\,\mathbb{I}, \end{cases} \qquad \mathrm{P}_4^0$$

[6] В смысле Определения 2.1.

[7] Для преобразований (7) и (8) следует использовать перескалирование $z \mapsto -iz$, $u \mapsto iu$, $v \mapsto iv$ для исправления знаков перед $2z$ в полученной системе (5) и после преобразования (8) также необходим сдвиг u и v для приведения результата к виду (5).

$$\begin{cases} u' &= -u^2+2uv-2zu+h, \\ v' &= -v^2+2uv+2zv+h+\gamma\,\mathbb{I}, \end{cases} \qquad \mathrm{P}_4^1$$

$$\begin{cases} u' &= -u^2+2uv-2zu+h_2, \\ v' &= -v^2+3uv-vu+2zv+h_1u+2h_2+\gamma\,\mathbb{I}. \end{cases} \qquad \mathrm{P}_4^2$$

Здесь γ, $\gamma_i \in \mathbb{C}$, h — произвольная матрица, и две постоянные матрицы h_1, h_2 связаны соотношением $[h_2, h_1] = -2h_1$.

Замечание 3.2. В случае скалярной матрицы h система P_4^0 была найдена Х. Каваками [Kaw15]. Общая система P_4^0 может быть получена из естественного матричного обобщения одевающей цепочки с $N = 3$, исследованной в [VS93].

Замечание 3.3. Система P_4^0 является гамильтоновой относительно симплектической пуассоновой структуры с гамильтонианом

$$H(u,v) = \mathrm{tr}\left(vu\,(v-u-2z) + vhu + \gamma_1 v - \gamma_2 u\right), \qquad \{u_{ij}, v_{kl}\} = \delta_{il}\,\delta_{jk}.$$

Когда h является скалярной матрицей, этот гамильтониан совпадает с представленным в [Kaw15]. Остальные системы, P_4^1 и P_4^2, не имеют гамильтонианов вида $\mathrm{tr}(Q)$, где $Q(u,v)$ является некоммутативным полиномом, с постоянной скобкой Пуассона.

Замечание 3.4. Система P_4^1 эквивалентна матричному уравнению P_4, представленному в заключении статьи [AS21]. В случае скалярных коэффициентов системы P_4^1 и P_4^2 эквивалентны системам, найденным в [Adl20].

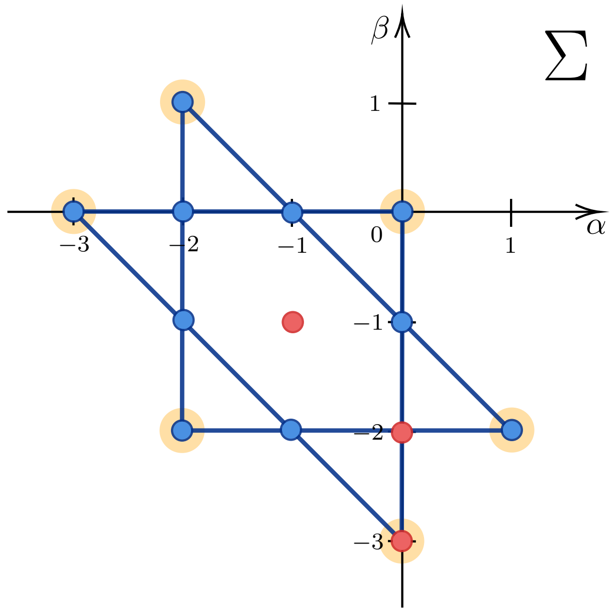
Замечание 3.5. Отметим, что система P_4^0 может быть записана в полностью неабелевой форме. Подробное обсуждение этого факта можно найти в Разделе 4 основного текста.

Чтобы доказать эту теорему, мы разделим наше исследование на два этапа.

(1) Сначала мы проведем анализ Пенлеве для однородной части системы (5).

(2) Далее мы рассмотрим неоднородную систему (5), имеющую те же максимальные решения, что и однородная система. Это позволит нам найти допустимые матричные коэффициенты b_i и c_i.

Отметим, что на первом шаге мы выделили 13 точек на (α,β)-плоскости:



Красные точки соответствуют системам из Теоремы 3.1. Они являются представителями действия группы с образующими (10) (см. также Раздел 2.2 в основном тексте).

Для построения изомонодромных пар Лакса воспользуемся процедурой неабелианизации (см. Раздел 2.4 в основном тексте). Оказывается, каждая из систем $\mathrm{P}_4^0 - \mathrm{P}_4^2$ допускает изомонодромное представление Лакса. А именно, верна следующая

Теорема 3.2. *Пусть $A(\zeta, z)$ и $B(\zeta, z)$ — 2×2-матрицы, зависящие от спектрального параметра ζ следующим образом*

$$A(\zeta, z) = A_1\zeta + A_0(z) + A_{-1}(z)\zeta^{-1}, \qquad B(\zeta, z) = B_1\zeta + B_0(z). \tag{11}$$

Тогда каждая из систем P_4, перечисленных в Теореме 3.1, имеет представление нулевой кривизны

$$A_z - B_\zeta = [B, A],$$

где матрицы A_1, $A_0(z)$, $A_{-1}(z)$, B_1 и $B_0(z)$ задаются формулами

- *система* P_4^0:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \qquad A_0 = \begin{pmatrix} z\,\mathbb{I} & -uv - \gamma_1\,\mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & -z\,\mathbb{I} + h \end{pmatrix}, \qquad A_{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} uv + \frac{1}{2}\gamma_2\,\mathbb{I} & -uvu - \gamma_2 u \\ v & -vu - \frac{1}{2}\gamma_2\,\mathbb{I} \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} \mathbb{I} & 0 \\ 0 & -\mathbb{I} \end{pmatrix}, \qquad B_0 = \begin{pmatrix} v - z\,\mathbb{I} + h & uv + \gamma_1\,\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & z\,\mathbb{I} \end{pmatrix};$$

- *система* P_4^1:

$$A_1=\begin{pmatrix}-\mathbb{I} & 0\\ 0 & \mathbb{I}\end{pmatrix},\quad A_0=\begin{pmatrix}z\,\mathbb{I} & -uv-h\\ -\mathbb{I} & -z\,\mathbb{I}\end{pmatrix},\quad A_{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}uv+\frac{1}{2}\gamma\,\mathbb{I} & -u^2v-u(h+\gamma\,\mathbb{I})\\ v & -uv-h-\frac{1}{2}\gamma\,\mathbb{I}\end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix}\mathbb{I} & 0\\ 0 & -\mathbb{I}\end{pmatrix},\qquad B_0=\begin{pmatrix}-z\,\mathbb{I} & uv+h\\ \mathbb{I} & -v+z\,\mathbb{I}\end{pmatrix};$$

- *система* P_4^2:

$$A_1=\begin{pmatrix}-\mathbb{I} & 0\\ 0 & \mathbb{I}\end{pmatrix},\qquad A_0=\begin{pmatrix}z\,\mathbb{I} & -uv-\frac{1}{2}h_1u-h_2\\ -\mathbb{I} & -z\,\mathbb{I}\end{pmatrix},$$

$$A_{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}uv+\frac{1}{2}h_1u+h_2+\frac{1}{2}\gamma\,\mathbb{I} & -u^2v-\frac{1}{2}uh_1u-\frac{1}{2}h_1uv+zh_1u\\ & -h_2u-uh_2-\gamma u-\frac{1}{2}h_1h_2\\ v & -uv-\frac{1}{2}h_1u-h_2-\frac{1}{2}\gamma\,\mathbb{I}\end{pmatrix},$$

$$B_1=\begin{pmatrix}\mathbb{I} & 0\\ 0 & -\mathbb{I}\end{pmatrix},\qquad B_0=\begin{pmatrix}u-z\,\mathbb{I} & uv+\frac{1}{2}h_1u+h_2\\ \mathbb{I} & u-v+z\,\mathbb{I}\end{pmatrix}.$$

Согласно классической схеме вырождения уравнений Пенлеве [Gam10] существует предельный переход от уравнения P_4 к уравнению P_2. Аналогично, системы P_4^0 – P_4^2 вырождаются в матричные уравнения P_2^0 – P_2^2 [AS21] (см. Раздел 2.5 в основном тексте).

Теорема 3.3. *Можно построить предельный переход, связывающий матричные системы Пенлеве-4 и их изомонодромные пары с матричными системами Пенлеве-2 и их изомонодромные пары следующим образом*

$$\mathrm{P}_4^0\to\mathrm{P}_2^0,\qquad\qquad \mathrm{P}_4^1\to\mathrm{P}_2^1,\qquad\qquad \mathrm{P}_4^2\to\mathrm{P}_2^2.$$

Отметим, что аналогично матричные системы P_2 можно связать с матричным аналогом уравнения P_1, используя предельные переходы (см. Замечание 2.10 в основном тексте). С их помощью можно также получить пару Лакса для матричного аналога уравнения P_1.

3.2 Полностью некоммутативные аналоги

В Approach **2**, развитом В. Ретахом и В. Рубцовым, рассматривается ассоциативное кольцо R с делением и единицей над полем $\mathbb{F}$, $\operatorname{char}\mathbb{F}=0$. Пусть $D: R\to R$ — дифференцирование в R, т. е. $\mathbb{F}$-линейное отображение, удовлетворяющее правилу Лейбница. Для любого

$f \in R$ положим $D(f) = f'$. В дальнейшем мы часто будем называть элементы кольца R *функциями*. Зафиксируем элемент $t \in R$ такой, что $t' = 1$ (мы будем считать, что дифференциальное уравнение $f' = 1$ в R имеет решения) и для любого скалярного параметра $\alpha \in \mathbb{F}$ имеем $\alpha' = 0$. В статье [RR10] авторы построили так называемый *полностью некоммутативный аналог* уравнения P_2. Его можно записать как

$$y'' = 2y^3 + \tfrac{1}{2}t\,y + \tfrac{1}{2}y\,t + \alpha, \qquad y,\ t \in R, \qquad \alpha \in \mathbb{F}. \tag{$\mathrm{P}_2^{\mathrm{NC}}$}$$

Хорошо известно [JKM04], что в коммутативном случае решения коммутативного уравнения P_2 обладают структурой определителя Ганкеля, поскольку можно вывести цепочку Тоды для τ-функции уравнения P_2 [KMN+01]. Используя подходящее некоммутативное обобщение уравнения Тоды, предложенное в [GR92], авторы статьи [RR10] построили решения уравнения $\mathrm{P}_2^{\mathrm{NC}}$ в терминах квазидетерминантов Ганкеля. Также отметим, что уравнение $\mathrm{P}_2^{\mathrm{NC}}$ имеет изомонодромное представление, найденное в [Irf12].

В [RR10] авторы также построили решения *бесконечной системы Тоды* в терминах квазидетерминантов ганкелевых матриц над R (см. Теорему 2.1 в [RR10]). Эта система состоит из двух частей, "положительной" и "отрицательной", и может быть записана как

$$(\theta_n'\theta_n^{-1})' = \theta_{n+1}\theta_n^{-1} - \theta_n\theta_{n-1}^{-1}, \qquad n \geq 0, \tag{12}$$

$$(\eta_m^{-1}\eta_m')' = \eta_m^{-1}\eta_{m-1} - \eta_{m+1}^{-1}\eta_m, \qquad m \leq 0, \tag{13}$$

где $\theta_1 = \eta_0^{-1} = \kappa_1$ и $\theta_0 = \eta_{-1}^{-1} = \kappa_{-1}^{-1}$ для некоторых общих начальных функций κ_{-1} и κ_1. Оказывается, если на функции κ_{-1} и κ_1 наложить некоторые условия, то можно выразить решения уравнения $\mathrm{P}_2^{\mathrm{NC}}$ через квазидетерминанты Ганкеля.

Двигаясь в этом направлении, мы предложим полностью некоммутативный вариант коммутативного уравнения Пенлеве IV в симметрической форме

$$\begin{cases} f_0' &= f_0f_1 - f_0f_2 + \alpha_0, \\ f_1' &= f_1f_2 - f_0f_1 + \alpha_1, \\ f_2' &= f_0f_2 - f_1f_2 + \alpha_2, \end{cases} \tag{14}$$

где $f_i = f_i(t)$ и $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$. В силу Теоремы 3.2 в [BRRS22] решения этого уравнения выражаются через решения уравнений Тоды. Обобщая этот результат на полностью некоммутативный случай, приходим к тому, что, в отличие от матричной алгебры, в полностью неабелевом случае существует только один аналог четвертого уравнения Пенлеве. Он обобщает квантовое четвертое уравнение Пенлеве [NGR+08] и матричную систему P_4^0 [BS22c]. Этот аналог может быть представлен в виде системы третьего порядка и получен при помощи решений бесконечной некоммутативной одномерной системы Тоды. Аналог можно записать как

$$\begin{cases} f_0' &= f_0 f_1 - f_2 f_0 + \alpha_0, \\ f_1' &= f_1 f_2 - f_0 f_1 + \alpha_1, \\ f_2' &= f_2 f_0 - f_1 f_2 + \alpha_2, \end{cases} \tag{15}$$

где f_i, $t \in R$, $\alpha_i \in \mathbb{F}$ и $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Он может рассматриваться как *полностью некоммутативное обобщение* P_4 *симметрической системы*[8]. Полученная система допускает те же преобразования Бэклунда, что и в коммутативном случае (см. Таблицу 3 в основном тексте):

	α_0	α_1	α_2	f_0	f_1	f_2
s_0	$-\alpha_0$	$\alpha_1 + \alpha_0$	$\alpha_2 + \alpha_0$	f_0	$f_1 + \alpha_0 f_0^{-1}$	$f_2 - \alpha_0 f_0^{-1}$
s_1	$\alpha_0 + \alpha_1$	$-\alpha_1$	$\alpha_2 + \alpha_1$	$f_0 - \alpha_1 f_1^{-1}$	f_1	$f_2 + \alpha_1 f_1^{-1}$
s_2	$\alpha_0 + \alpha_2$	$\alpha_1 + \alpha_2$	$-\alpha_2$	$f_0 + \alpha_2 f_2^{-1}$	$f_1 - \alpha_2 f_2^{-1}$	f_2
π	α_1	α_2	α_0	f_1	f_2	f_0

Таблица 2: Преобразования Бэклунда системы (15)

Для построения решений (15) в терминах решений некоммутативных уравнений Тоды мы используем некоммутативные аналоги операторов сдвига. Таким образом, преобразования Бэклунда, композиции которых образуют расширенную аффинную группу Вейля $\tilde{W}$ типа $A_2^{(1)}$, является существенным для определения решений системы (15). В отличие от уравнения $\mathrm{P}_2^{\mathrm{NC}}$ правая часть системы (15) не записывается в форме антикоммутатора. Это означает, что некоммутативный аналог уравнения P_4 нельзя получить, используя упорядочивание Вейля.

Можно проверить, что система (15) допускает квазидетерминантные решения для начальных функций θ_0, θ_1 и η_0, η_{-1} (см. Предложение 3.1 в [BRRS22]). Тогда мы можем обобщить этот результат для произвольных n и m, используя операторы сдвига.

Пусть T_1-оператор $T_1 = \pi s_2 s_1$ — некоммутативный оператор сдвига, связанный с аффинной группой Вейля $\tilde{W}$, образующие которой определены в Таблице 2. Применяя его к (15) и к условиям в Предложении 3.1 из [BRRS22], мы приходим к некоммутативной

[8] В коммутативном случае система (15) определяет 3-периодические решения одевающей цепочки [VS93].

$\mathrm{P}_4[f_{i,n}; n]$ симметрической форме

$$\begin{cases} f'_{0,n} &= f_{0,n}f_{1,n} - f_{2,n}f_{0,n} + (\alpha_0 + n), \\ f'_{1,n} &= f_{1,n}f_{2,n} - f_{0,n}f_{1,n} + (\alpha_1 - n), \\ f'_{2,n} &= f_{2,n}f_{0,n} - f_{1,n}f_{2,n} + \alpha_2, \end{cases} \tag{16}$$

где $T_1^n(f_i) = f_{i,n} \in R$. А именно, основной результат нашей классификации основан на следующей

Теорема 3.4. *Пусть функции θ_n, $n \geq 0$ и η_m, $m \leq 0$ удовлетворяют некоммутативным уравнениям Тоды (12) – (13) и следующим уравнениям*

$$\theta''_{n+1} + t\,\theta'_{n+1} + 2\theta_{n+1}\,\theta_n^{-1}\,\theta_{n+1} + (\alpha_0 - \alpha_1 + 2n)\,\theta_{n+1} = 0,$$

$$\eta''_{m-1} - \eta'_{m-1}\,t + 2\eta_{m-1}\,\eta_m^{-1}\,\eta_{m-1} + (\alpha_0 - \alpha_1 + 2(m-1))\eta_{m-1} = 0.$$

Тогда

(a) *функции $f_{0,n}$, $f_{1,n}$, $f_{2,n}$, удовлетворяющие соотношениям*

$$f_{2,n} = \theta'_{n+1}\,\theta_{n+1}^{-1} + t, \qquad \tfrac{1}{2}f_{1,n}\,f_{2,n} + \tfrac{1}{2}f_{2,n}\,f_{1,n} = \theta_{n+1}\,\theta_n^{-1} - (\alpha_1 - n),$$

$$f_{0,n} = -f_{1,n} - f_{2,n} + t,$$

$$f'_{1,n} = f_{1,n}^2 + f_{1,n}f_{2,n} + f_{2,n}f_{1,n} - tf_{1,n} + (\alpha_1 - n)$$

являются решениями $\mathrm{P}_4[f_{i,n}; n]$ симметрической формы (16);

(b) *функции $f_{0,m-1}$, $f_{1,m-1}$, $f_{2,m-1}$, удовлетворяющие соотношениям*

$$f_{2,m-1} = -\eta_{m-1}^{-1}\,\eta'_{m-1} + t,$$

$$\tfrac{1}{2}f_{0,m-1}\,f_{2,m-1} + \tfrac{1}{2}f_{2,m-1}\,f_{0,m-1} = \eta_m^{-1}\,\eta_{m-1} + (\alpha_0 + m - 1),$$

$$f_{1,m-1} = -f_{0,m-1} - f_{2,m-1} + t,$$

$$f'_{0,m-1} = -f_{0,m-1}^2 - f_{0,m-1}f_{2,m-1} - f_{2,m-1}f_{0,m-1} + f_{0,m-1}t + (\alpha_0 + m - 1)$$

являются решениями $\mathrm{P}_4[f_{i,m-1}; m-1]$ симметрической формы (16).

Отметим, что система P_4^0 со скалярными параметрами эквивалентна системе (15) с центральным элементом t. Чтобы получить систему с произвольной матрицей h, необходимо свести симметрическую форму к системе второго порядка и сделать сдвиг $t \mapsto t+h$, $h \in R$.

После проделанных операций, элемент t можно положить коммутативным (подробное обсуждение этого вопроса рассмотрено в Разделе 4 основного текста). Насколько известно автору, оставшиеся две системы, P_4^1 и P_4^2, не имеют преобразований Бэклунда, композиции которых образуют аффинную группу Вейля типа $A_2^{(1)}$[9]. Следовательно, они не могут быть решены с помощью некоммутативных уравнений Тоды. Аналогичное замечание справедливо и для некоммутативных систем типа P_4, полученных в статье [CM14] при помощи разрешения проблемы Римана-Гильберта.

Система (16) имеет изомонодромное представление Лакса, эквивалентное паре Ноуми-Ямады для коммутативной P_4 симметрической формы (14) [NY00]. Неабелева пара была построена при помощи предложенного в статье [BS22c] метода неабелианизации известных коммутативных пар.

Теорема 3.5. *Пусть $\mathcal{A}_n(\lambda, t)$ и $\mathcal{B}_n(\lambda, t)$ – 3×3-матрицы, зависящие от спектрального параметра λ следующим образом*

$$\mathcal{A}_n(\lambda, t) = A_{0,n}(t) + A_{-1,n}(t)\lambda^{-1}, \qquad \mathcal{B}_n(\lambda, t) = B_1\lambda + B_{0,n}(t).$$

Тогда для любого $n \in \mathbb{Z}$ система (16) имеет представление нулевой кривизны

$$\partial_t \mathcal{A}_n - \partial_\lambda \mathcal{B}_n = [\mathcal{B}_n, \mathcal{A}_n]$$

где матрицы $A_{0,n}$, $A_{-1,n}$, B_1 и $B_{0,n}$ задаются формулой

$$A_{0,n} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & f_{0,n} \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_{-1,n} = \begin{pmatrix} \beta_0 & 0 & 0 \\ f_{1,n} & \beta_1 & 0 \\ 1 & f_{2,n} & \beta_2 \end{pmatrix}, \qquad B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{0,n} = \begin{pmatrix} -f_{2,n} & 0 & 0 \\ 1 & -f_{0,n} & 0 \\ 0 & 1 & -f_{1,n} \end{pmatrix}.$$

Здесь скалярные параметры β_0, β_1, β_2 связаны с параметрами α_i соотношениями

$$\alpha_0 = 1 + \beta_2 - \beta_0 - n, \qquad \alpha_1 = \beta_0 - \beta_1 + n, \qquad \alpha_2 = \beta_1 - \beta_2.$$

Заметим, что в коммутативном случае пара Ноуми-Ямада сводится к паре Джимбо-Мива [JM81] (см. [JKT07]) со спектральной зависимостью вида (11). Мы доказали аналогичный факт в некоммутативном случае (см. Предложение 3.9 в основном тексте).

[9] Другие преобразования Бэклунда можно найти в [Adl20].

Результаты диссертации опубликованы в двух статьях:

(1) I. Bobrova and V. Sokolov. On matrix Painlevé-4 equations (О матричных уравнениях Пенлеве-4). Nonlinearity, 35(12):6528, 2022;

(2) I. Bobrova, V. Retakh, V. Rubtsov, and G. Sharygin. A fully non-commutative analog of the Painlevé IV equation and a structure of its solutions (Полностью некоммутативный аналог уравнения Пенлеве IV и структура его решений). Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical, 55(47):475205, 2022.

Список литературы

[Adl20] V. E. Adler. Painlevé type reductions for the non-Abelian Volterra lattices. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 54(3):035204, 2020. arXiv:2010.09021. ← 6, 9, 15

[AK22] V. E. Adler and M. P. Kolesnikov. Non-Abelian Toda lattice and analogs of Painlevé III equation. *J. Math. Phys.*, 63:103504, 2022. arXiv:2203.09977. ← 6

[ARS80] M. J. Ablowitz, A. Ramani, and H. Segur. A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. II. *Journal of Mathematical Physics*, 21(5):1006–1015, 1980. ← 4

[AS21] V. E. Adler and V. V. Sokolov. On matrix Painlevé II equations. *Theoret. and Math. Phys.*, 207(2):188–201, 2021. arXiv:2012.05639. ← 4, 7, 9, 11

[BCR18] M. Bertola, M. Cafasso, and V. Rubtsov. Noncommutative Painlevé equations and systems of Calogero type. *Communications in Mathematical Physics*, 363(2):503–530, 2018. arXiv:1710.00736. ← 4

[BRRS22] I. Bobrova, V. Retakh, V. Rubtsov, and G. Sharygin. A fully noncommutative analog of the Painlevé IV equation and a structure of its solutions. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 55(47):475205, 2022. arXiv:2205.05107. ← 12, 13

[BS98] S. P. Balandin and V. V. Sokolov. On the Painlevé test for non-Abelian equations. *Physics letters A*, 246(3-4):267–272, 1998. ← 4, 5, 6, 7

[BS22a] I. Bobrova and V. Sokolov. Classification of Hamiltonian non-abelian Painlevé type systems. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, pages 1–16, 2022. arXiv:2209.00258. ← 6

[BS22b] I. Bobrova and V. Sokolov. Non-abelian Painlevé systems with generalized Okamoto integral. *arXiv preprint arXiv:2206.10580*, 2022. ← 6

[BS22c] I. A. Bobrova and V. V. Sokolov. On matrix Painlevé-4 equations. *Nonlinearity*, 35(12):6528, nov 2022. arXiv:2107.11680, arXiv:2110.12159. ← 12, 15

[CM08] R. Conte and M. Musette. *The Painlevé Handbook*. Springer, 2008. ← 4

[CM14] M. Cafasso and D. Manuel. Non-commutative Painlevé equations and Hermite-type matrix orthogonal polynomials. *Communications in Mathematical Physics*, 326(2):559–583, 2014. arXiv:1301.2116. ← 4, 6, 15

[CM$^+$18] M. Cafasso, D. Manuel, et al. The Toda and Painlevé systems associated with semiclassical matrix-valued orthogonal polynomials of Laguerre type. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 14:076, 2018. arXiv:1801.08740. ← 4

[DZ04] B. Dubrovin and Y. Zhang. Virasoro symmetries of the extended Toda hierarchy. *Comm. Math. Phys.*, 250:161–193, 2004. ← 3

[DZ05] B. Dubrovin and Y. Zhang. Normal forms of hierarchies of integrable PDEs. *Frobenius manifolds and Gromov-Witten invariants, a new*, 2005. ← 3

[FIN$^+$06] A. S. Fokas, A. R. Its, V. Yu. Novokshenov, A. A. Kapaev, A. I. Kapaev, and V. I. Novokshenov. *Painlevé transcendents: the Riemann-Hilbert approach*. American Mathematical Soc., 2006. ← 4

[Fuc07] R. Fuchs. Über lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit drei im Endlichen gelegenen wesentlich singulären Stellen. *Mathematische Annalen*, 63(3):301–321, 1907. ← 3

[Gam10] B. Gambier. Sur les équations différentielles du second ordre et du premier degré dont l'intégrale générale est à points critiques fixes. *Acta Mathematica*, 33(1):1–55, 1910. ← 3, 11

[Gar12] R. Garnier. Sur des équations différentielles du troisième ordre dont l'intégrale générale est uniforme et sur une classe d'équations nouvelles d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 29, pages 1–126, 1912. ← 3

[GR92] I. Gelfand and V. Retakh. A theory of noncommutative determinants and characteristic functions of graphs. *Functional Analysis and Its Applications*, 26(4):231–246, 1992. ← 4, 12

[GR19] I. Yu. Gaiur and V. N. Rubtsov. Dualities for rational multi-particle Painlevé systems: Spectral versus Ruijsenaars. *arXiv preprint arXiv:1912.12588*, 2019. ← 6

[Irf12] M. Irfan. Lax pair representation and Darboux transformation of noncommutative Painlevé's second equation. *Journal of Geometry and Physics*, 62(7):1575–1582, 2012. arXiv:1201.0900. ← 12

[JKM04] N. Joshi, K. Kajiwara, and M. Mazzocco. Generating function associated with the determinant formula for the solutions of the Painlevé II equation. In Loday-Richaud Michèle, editor, *Analyse complexe, systèmes dynamiques, sommabilité des séries divergentes et théories galoisiennes (II)*, number 297 in Astérisque. Société mathématique de France, 2004. arXiv:nlin/0406035. ← 12

[JKM06] N. Joshi, K. Kajiwara, and M. Mazzocco. Generating function associated with the Hankel determinant formula for the solutions of the Painlevé IV equation. *Funkcialaj Ekvacioj*, 49(3):451–468, 2006. arXiv:nlin/0512041. ← 6

[JKT07] N. Joshi, A. V. Kitaev, and P. A. Treharne. On the linearization of the Painlevé III–VI equations and reductions of the three-wave resonant system. *Journal of Mathematical Physics*, 48(10):103512, 2007. arXiv:0706.1750v3. ← 4, 15

[JM81] M. Jimbo and T. Miwa. Monodromy perserving deformation of linear ordinary differential equations with rational coefficients. II. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2(3):407–448, 1981. ← 3, 15

[Kaw15] H. Kawakami. Matrix Painlevé systems. *Journal of Mathematical Physics*, 56(3):033503, 2015. ← 4, 6, 9

[KMN+01] K. Kajiwara, T. Masuda, M. Noumi, Y. Ohta, and Y. Yamada. Determinant formulas for the Toda and discrete Toda equations. *Funkcialaj Ekvacioj*, 44:291–307, 2001. arXiv:solv-int/9908007. ← 12

[Kow89] S. Kowalevski. Sur le problème de la rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. *Acta Math.*, 12:177–232, 1889. ← 3

[Mal74] B. Malgrange. Intégrales asymptotiques et monodromie. In *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, volume 7, pages 405–430, 1974. ← 3

[NGR+08] H. Nagoya, B. Grammaticos, A. Ramani, et al. Quantum Painlevé equations: from Continuous to discrete. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 4:051, 2008. ← 4, 6, 12

[NY00] M. Noumi and Y. Yamada. Affine Weyl group symmetries in Painlevé type equations. *Citeseer*, 2000. ← 15

[Oka80] K. Okamoto. Polynomial Hamiltonians associated with Painlevé equations, I. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 56(6):264–268, 1980. ← 3

[Oka81] K. Okamoto. On the τ-function of the Painlevé equations. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 2(3):525–535, 1981. ← 3

[Oka86] K. Okamoto. Studies on the Painlevé Equations. III. Second and Fourth Painlevé Equations PII and PIV. *Mathematische Annalen*, 275:221–255, 1986. ← 3

[Oka87a] K. Okamoto. Studies on the Painlevé Equations. I. Sixth Painlevé equation PIV. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 146(4):337—381, 1987. ← 3

[Oka87b] K. Okamoto. Studies on the Painlevé equations. II. Fifth Painlevé equation PV. *Japanese journal of mathematics. New series*, 13(1):47–76, 1987. ← 3

[Oka87c] K. Okamoto. Studies on the Painlevé equations. IV. Third Painlevé equation PIII. *Funkcial. Ekvac*, 30(2-3):305–332, 1987. ← 3

[OS98] P. J. Olver and V. V. Sokolov. Integrable evolution equations on associative algebras. *Communications in Mathematical Physics*, 193(2):245–268, 1998. ← 6

[Pai00] P. Painlevé. Mémoire sur les équations différentielles dont l'intégrale générale est uniforme. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 28:201–261, 1900. ← 3

[Pai02] P. Painlevé. Sur les équations différentielles du second ordre et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale est uniforme. *Acta mathematica*, 25:1–85, 1902. ← 3

[RR10] V. S. Retakh and V. N. Rubtsov. Noncommutative Toda Chains, Hankel Quasideterminants and Painlevé II Equation. *Journal of Physics. A, Mathematical and Theoretical*, 43(50):505204, 2010. arXiv:1007.4168. ← 4, 5, 12

[Sch12] L. Schlesinger. Über eine Klasse von Differentialsystemen beliebiger Ordnung mit festen kritischen Punkten. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, pages 96–145, 1912. ← 3

[Tak01] K. Takasaki. Painleve-Calogero correspondence revisited. *J. Math. Phys.*, 42:1443–1473, 2001. ← 4

[VDPS09] M. Van Der Put and M.-H. Saito. Moduli spaces for linear differential equations and the Painlevé equations. In *Annales de l'Institut Fourier*, volume 59, pages 2611–2667, 2009. ← 3

[VS93] A. P. Veselov and A. B. Shabat. Dressing chains and the spectral theory of the Schrödinger operator. *Functional Analysis and Its Applications*, 27(2):81–96, 1993. ← 9, 13

[ZS74] V. E. Zakharov and A. B. Shabat. A scheme for integrating the nonlinear equations of mathematical physics by the method of the inverse scattering problem. I. *Functional Analysis and Its Applications*, 8(3):43–53, 1974. ← 4