Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Гусева Ляля Андреевна

Строение производных категорий и геометрия многообразий Фано в грассманианах.

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико–математических наук
Кузнецов Александр Геннадьевич

Москва – 2023

Аннотация

Данная диссертация посвящена изучению ограниченных производных категорий когерентных пучков двух многообразий Фано в грассманианах, точнее построению полных исключительных наборов в производных категориях этих двух многообразий.

Первое многообразие $\mathrm{IGr}(3,8)$ — это грассманиан трехмерных изотропных подпространств в восьмимерном симплектическом векторном пространстве. Это рациональное однородное многообразие $\mathrm{Sp}(8)/P_3$, где $P_3 \subset \mathrm{Sp}(8)$ максимальная параболическая подгруппа соответствующая третьему простому корню (мы используем индексацию Бурбаки). Существование полного исключительного набора на этом многообразии подтверждает в этом случае гипотезу о том, что на любом рациональном однородном многообразии существует полный исключительный набор.

Второе многообразие, так называемый грассманиан Кэли $\mathbf{CG}$, является подмногообразием грассманиана $\mathrm{Gr}(3,7)$, параметризующего трехмерные подпространства, аннигилируемые общей 4-формой. Грассманиан Кэли $\mathbf{CG}$ является сферическим многообразием относительно действия исключительной простой группы Ли $\mathbb{G}_2$. Геометрические и топологические свойства $\mathbf{CG}$ были исследованы в работах [13] и [2]. В частности, в [2] была доказана полупростота малых квантовых когомологий $\mathbf{CG}$. Таким образом, существование полного исключительного набора подтверждает в этом конкретном случае гипотезу Дубровина, согласно которой полупростота квантовых когомологий влечет существование полного исключительного набора.

Наборы, которые мы строим в диссертации, являются *лефшецевыми*, [6, 8, 7]. Лефшецев исключительный набор относительно линейного расслоения $\mathcal{L}$ — это исключительный набор, состоящий из нескольких блоков, каждый из которых является подблоком в предыдущем, подкрученном на $\mathcal{L}$. Если все блоки имеют одинаковую длину, набор называется *прямоугольным*.

В Введении мы даем краткий обзор истории изучения производных категорий и формулируем основные результаты диссертации.

В первой главе мы даем необходимый справочный материал о полуортогональных разложениях и эквивариантных векторных расслоениях на грассманианах, а также напоминаем некоторые базовые факты об алгебраической группе $\mathbb{G}_2$.

Во второй главе мы доказываем первую основную Теорему 0.1 диссертации для изотропного грассманиана $\mathrm{IGr}(3,8)$. В Разделе 2.1 мы доказываем леммы о занулении, которые важны для доказательства исключительности и полноты построенного набора. В разделе 2.2 мы описываем несколько важных точных последовательностей и строим бикомплекс, необходимый для доказательства Теоремы 0.1. Также в этом разделе мы доказываем несколько важных свойств построенного бикомплекса. В разделе 2.3 мы строим векторные расслоения F и T и доказываем исключительность набора из Теоремы 0.1. В разделе 2.4 мы доказываем полноту построенного набора. В разделе 2.5 мы описываем несколько применений полученного результата: вычисляем вычетную категорию $\mathrm{IGr}(3,8)$ и строим (дробные) Калаби–Яу категории, которые получаются из двойного накрытия $\mathrm{IGr}(3,8)$, разветвленного в антиканоническом дивизоре, и из дивизора в $\mathrm{IGr}(3,8)$, заданного половиной антиканкласса.

В третьей главе мы доказываем вторую основную Теорему 0.2 диссертации для грассманиана Кэли. В разделе 3.1 мы доказываем несколько общих конструкций для расслоений на квадрики, которые необходимы для доказательства Теоремы 0.2. В разделе 3.2 мы описываем несколько нужных результатов о действии $\mathbb{G}_2$ на грассманиане Кэли. В разделе 3.3, используя общие конструкции из раздела 3.1 мы описываем несколько самодвойственностей, которые необходимы для доказательства полноты построенного набора. В разделе 3.4 мы доказываем полноту набора. В разделе 3.5 собраны все необходимые вычисления когомологий для грассманиана Кэли $\mathbf{CG}$, в том числе доказывается исключительность построенного набора, кроме того в этом разделе описывается вычетная категория для построенного набора. В разделе 3.6 мы описываем несколько геометрических конструкций для грассманиана Кэли: мы доказываем, что грассманиан Кэли $\mathbf{CG}$ изоморфен схеме Гильберта коник на присоединенном грассманиане $\mathbb{G}_2^{\mathrm{ad}}$ для группы $\mathbb{G}_2$, и описываем схему Гильберта прямых на $\mathbf{CG}$.

Обозначения

Пусть $\mathbb{k}$ — алгебраически замкнутое поле характеристики ноль. Для $\mathbb{k}$-векторного пространства W мы будем обозначать за $\wedge$ операцию внешнего произведения кососимметрических форм и поливекторов, и за $\lrcorner$ операцию свертки

$$\Lambda^p W \otimes \Lambda^q W^\vee \xrightarrow{\lrcorner} \Lambda^{p-q} W \qquad (\text{если } p \geq q),$$

индуцированную естественным спариванием $W \otimes W^\vee \to \mathbb{k}$.

Если $p = n = \dim(W)$ и $0 \neq \omega \in \Lambda^n W$, свертка с ω дает изоморфизм

$$\Lambda^q W^\vee \simeq \Lambda^{n-q} W, \quad \xi \mapsto \xi^\vee := \omega \lrcorner \xi.$$

Этот изоморфиз является каноническим с точностью до умножения на константу (так как ω единственно с точностью до константы). Мы будем говорить, что $\xi^\vee$ является двойственной формой к ξ

Мы говорим, что q-форма $\xi \in \Lambda^q W^\vee$ аннигилирует k-мерное подпространство $U \subset W$, если $k \leq q$ и $\xi \lrcorner \Lambda^k U = 0$. Аналогично мы говорим, что $U \subset W$ является изотропным для ξ если $q \leq k$ и $\Lambda^k U \lrcorner \xi = 0$, то есть $\xi|_U = 0$.

Мы обозначаем за $\mathrm{Gr}(k, W)$ грассманиан k-мерных векторных подпространств в W. Тавтологическое векторное подрасслоение ранга k на $\mathrm{Gr}(k, W)$ будет обозначаться $\mathcal{U}_k \subset W \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Gr}(k,W)}$. Фактор-расслоение будет обозначаться как $\mathcal{Q}_k$, а его двойственное как $\mathcal{U}_k^\perp := \mathcal{Q}_k^\vee$. Напомним, что линейное расслоение $\det \mathcal{U}_k^\vee \simeq \det \mathcal{Q}_k$ обильно порождает группу Пикара $\mathrm{Pic}(\mathrm{Gr}(k, W))$; мы будем обозначать это линейное расслоение за $\mathcal{O}(H_k)$.

Так как мы в основном будем работать с $\mathrm{Gr}(3, W)$, тавтологическое расслоение будет обозначаться просто как $\mathcal{U}$, а линейное расслоение $\mathcal{O}(H_3)$ как $\mathcal{O}(1)$.

Для обоих исключительных наборов нам понадобится следующее векторное расслоение на $\mathrm{Gr}(3, W)$

$$\Sigma^{2,1}\mathcal{U}^\vee := (\mathcal{U}^\vee \otimes \Lambda^2 \mathcal{U}^\vee)/\Lambda^3 \mathcal{U}^\vee. \tag{1}$$

Канкласс многообразия X будет обозначаться ω_X.

Глава 1

В разделе 1.1 мы напоминаем некоторые хорошо известные факты о полуортогональных разложениях и исключительных наборах. В разделе 1.2 мы формулируем необходимые предварительные сведения об эквивариантных векторных расслоениях на грассманианах: в подразделе 1.2.1 мы формулируем теорему Бореля–Ботта-Вейля для обычных грассманианов, в подразделе 1.2.2 мы формулируем теорему Бореля–Ботта-Вейля для изтропных грассманианов. В разделе 1.3 мы напоминаем необходимые базовые факты о простой алгебраической группе $\mathbb{G}_2$.

Глава 2

Обозначим за $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ следующие наборы векторных расслоений на $\mathrm{IGr}(3,8)$:

$$\mathfrak{F} := (\qquad\qquad \mathcal{O}, \mathcal{U}^\vee, S^2\mathcal{U}^\vee, \Lambda^2\mathcal{U}^\vee, \Sigma^{2,1}\mathcal{U}^\vee), \tag{2}$$

$$\mathfrak{F}' := (\Sigma^{2,1}\mathcal{U}^\vee(-1), \mathcal{O}, \mathcal{U}^\vee, S^2\mathcal{U}^\vee, \Lambda^2\mathcal{U}^\vee \qquad\qquad). \tag{3}$$

Будем обозначать за $\mathfrak{F}(i)$ and $\mathfrak{F}'(i)$ наборы, состоящие из соответствующих пяти векторных расслоений, подкрученных на $\mathcal{O}(i)$, а также подкатегории в $\mathrm{D}^b(\mathrm{IGr}(3,8))$, порожденные этими наборами. Будем обозначать за $\mathbb{L}$ и $\mathbb{R}$ функторы левой и правой перестройки. Следующая теорема — первый основной результат диссертации.

Theorem 0.1. *Объекты*

$$T := (\mathbb{L}_{\mathfrak{F}}(\Sigma^{3,1}\mathcal{U}^\vee))[-3] \qquad \textit{и} \qquad F := \mathbb{R}_{\Sigma^{2,1}\mathcal{U}^\vee(-1)}(T)$$

являются эквивариантными векторными расслоениями на $\mathrm{IGr}(3,8)$.

Наборы из 32 *векторных расслоений на* $\mathrm{IGr}(3,8)$

$$\begin{array}{llllllll} F, & \mathfrak{F}, & F(1), & \mathfrak{F}(1), & \mathfrak{F}(2), & \mathfrak{F}(3), & \mathfrak{F}(4), & \mathfrak{F}(5), \qquad \textit{и} \\ T, & \mathfrak{F}', & T(1), & \mathfrak{F}'(1), & \mathfrak{F}'(2), & \mathfrak{F}'(3), & \mathfrak{F}'(4), & \mathfrak{F}'(5) \end{array}$$

являются полными лефшецевыми наборами относительно линейного расслоения $\mathcal{O}(1)$.

Наборы из 32 *векторных расслоений на* $\mathrm{IGr}(3,8)$

$$\begin{array}{llllllll} F, & \mathfrak{F}, & \mathfrak{F}(1), & \mathfrak{F}(2), & F(3), & \mathfrak{F}(3), & \mathfrak{F}(4), & \mathfrak{F}(5), \qquad \textit{и} \\ T, & \mathfrak{F}', & \mathfrak{F}'(1), & \mathfrak{F}'(2), & T(3), & \mathfrak{F}'(3), & \mathfrak{F}'(4), & \mathfrak{F}'(5) \end{array}$$

являются полными прямоугольными лефшецевыми наборами относительно линейного расслоения $\mathcal{O}(3)$.

Важная часть доказательства Теоремы 0.1 основана на изучении следующего интересного бикомплекса

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & \Sigma^{3,2}\mathcal{U}^\vee(-3) \arrow[r] & V_8\otimes\Sigma^{2,1}\mathcal{U}^\vee(-2) \arrow[r] & \Lambda^2V_8\otimes\mathcal{U}^\vee(-1) \arrow[r] & \Lambda^4V_8\otimes\mathcal{O} \arrow[r] & \Lambda^2V_8\otimes\Lambda^2\mathcal{U}^\vee \arrow[r] & V_8\otimes\Sigma^{2,1}\mathcal{U}^\vee \arrow[r] & \Sigma^{3,1}\mathcal{U}^\vee \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & \Sigma^{3,3}\mathcal{U}^\vee(-4) \arrow[r] \arrow[u] & V_8\otimes\Sigma^{2,2}\mathcal{U}^\vee(-3) \arrow[r] \arrow[u] & \Lambda^2V_8\otimes\Lambda^2\mathcal{U}^\vee(-2) \arrow[r] \arrow[u] & \Lambda^3V_8\otimes\mathcal{O}(-1) \arrow[r] \arrow[u] & \Lambda^2V_8\otimes\mathcal{O} \arrow[r] \arrow[u] & V_8\otimes\mathcal{U}^\vee \arrow[r] \arrow[u] & S^2\mathcal{U}^\vee \arrow[r] \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

векторных расслоений на $\mathrm{IGr}(3,8)$, где V_8 — 8-мерное тавтологическое представление $\mathrm{Sp}(8)$. Это $\mathrm{Sp}(8)$-эквивариантным бикомплекс, его строки получаются как ограничения так называемых ступенчатых комплексов (см. [3]) с $\mathrm{Gr}(3,8)$. Векторное расслоение T отождествляется с когомологиями обрезания этого бикомплекса. Используя бикомплекс, мы доказываем изоморфизм

$$\mathbb{L}_{\mathfrak{F}'(1),\mathfrak{F}'(2)}(T(3)) = T(1)[4],$$

необходимый для доказательства полноты исключительных наборов из Теоремы 0.1.

Чтобы доказать полноту исключительных наборов из Теоремы 0.1 мы для начала показываем, что некоторые специальные объекты лежат в подкатегории $\mathcal{D}$ в $\mathrm{D}^b(\mathrm{IGr}(3,8))$, порожденной одним (неважно каким) из этих наборов. После этого мы рассматриваем изотропные флаги $\mathrm{IFl}(2,3;8)$ с двумя проекциями

$$\begin{tikzcd}
 & \mathrm{IFl}(2,3;8) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathrm{IGr}(2,8) & & \mathrm{IGr}(3,8)
\end{tikzcd}$$

Первая стрелка является $\mathbb{P}^3$-расслоением. Затем мы строим некоторый специальный полный исключительный набор на $\mathrm{IFl}(2,3;8)$, используя некоторый специально подобранный лефшецев набор на $\mathrm{IGr}(2,8)$ из [6] и разложение Орлова для проективного расслоения. Основным свойством построенного исключительного набора на $\mathrm{IFl}(2,3;8)$ является то, что прямые образы вдоль второй стрелки (которая является $\mathbb{P}^2$-расслоением) практически всех объектов, входящих в него, содержатся в подкатегории $\mathcal{D}$, а образы оставшихся объектов, не обладающих этим свойством, содержатся в подкатегории $\mathfrak{F}(6) \subset \mathrm{D}^b(\mathrm{IGr}(3,8))$. Из этого следует, что любой объект $\mathrm{D}^b(\mathrm{IGr}(3,8))$, содержащийся в ортогонале ${}^\perp\mathcal{D}$ к подкатегории $\mathcal{D}$, принадлежит $\mathfrak{F}(6)$. Из очевидного наблюдения

$${}^\perp\mathfrak{F} \cap \mathfrak{F}(6) = 0,$$

которое немедленно получается из двойственности Серра для $\mathrm{IGr}(3,8)$, следует что ${}^\perp\mathcal{D} = 0$, что доказывает полноту набора.

Глава 3

Определим грассманиан Кэли $\mathbf{CG}$. Для этого рассмотрим грассманиан $\mathrm{Gr}(3,V_7)$, параметризующий 3-мерные подпространства в 7-мерном векторном пространстве V_7. По теореме Бореля–Ботта–Вейля $\mathrm{H}^0(\mathrm{Gr}(3,V),\mathcal{U}^\perp(1)) \simeq \Lambda^4V_7^\vee$. Фиксируем общее глобальное сечение расслоения $\mathcal{U}^\perp(1)$, то есть общую 4-форму $\lambda \in \Lambda^4V_7^\vee$. Грассманиан Кэли $\mathbf{CG}$ определяется как локус нулей глобального сечения $\lambda \in \mathrm{H}^0(\mathrm{Gr}(3,V_7),\mathcal{U}^\perp(1))$. Иначе говоря, **CG** парметризует такие 3-мерные векторные подпространства $U \subset V_7$, что $\lambda(u_1,u_2,u_3,-) = 0$ для всех $u_1,u_2,u_3 \in U$. Из определения сразу следует, что **CG** является гладким многообразием Фано размерности 8 и что канонический класс $\omega_{\mathbf{CG}}$ грассманиана Кэли изоморфен $\mathcal{O}(-4)$.

Полный исключительный набор в ограниченной производной категории когерентных пучков $\mathrm{D}^b(\mathbf{CG})$ на грассманиане Кэли **CG**, который строится в этой главе, является лефшецевым: он состоит из 4 блоков относительно Плюкерова линейного расслоения $\mathcal{O}(1)$. Общая часть этих четырех блоков (прямоугольная часть лефшецева набора) состоит из 3 расслоений $(\mathcal{O},\mathcal{U}^\vee,\Lambda^2\mathcal{U}^\vee)$.

Для того, чтобы описать набор на **CG** нам понадобится еще одно расслоение. Заметим, что на **CG** имеется вложение векторных расслоений

$$i_\lambda\colon \Lambda^2\mathcal{U} \hookrightarrow \Lambda^2\mathcal{U}^\perp,$$

заданное 4-формой λ. В частности, на **CG** мы можем определить фактор-расслоение $\Lambda^2\mathcal{U}^\perp/\Lambda^2\mathcal{U}$. В исключительном наборе мы будем использовать двойственное к нему расслоение

$$\mathcal{R} \coloneqq (\Lambda^2\mathcal{U}^\perp/\Lambda^2\mathcal{U})^\vee. \tag{4}$$

Сформулируем второй основной результат диссертации.

Theorem 0.2. *Набор из 15 векторных расслоений на грассманиане Кэли*

$$\{\underbrace{\mathcal{O},\mathcal{U}^\vee,\Lambda^2\mathcal{U}^\vee,\mathcal{R},\Sigma^{2,1}\mathcal{U}^\vee;}_{block\ 1}\ \underbrace{\mathcal{O}(1),\mathcal{U}^\vee(1),\Lambda^2\mathcal{U}^\vee(1),\mathcal{R}(1);}_{block\ 2}\underbrace{\mathcal{O}(2),\mathcal{U}^\vee(2),\Lambda^2\mathcal{U}^\vee(2);}_{block\ 3}\underbrace{\mathcal{O}(3),\mathcal{U}^\vee(3),\Lambda^2\mathcal{U}^\vee(3)}_{block\ 4}\} \tag{5}$$

является полным лефшецевым набором относительно $\mathcal{O}(1)$.

Используя резольвенту Кошуля для структурного пучка $\varrho_*\mathcal{O}_{\mathbf{CG}}$:

$$0 \to \mathcal{O}(-3) \to \Lambda^3\mathcal{Q}(-3) \to \Lambda^2\mathcal{Q}(-2) \to \mathcal{Q}(-1) \to \mathcal{O} \to \varrho_*\mathcal{O}_{\mathbf{CG}} \to 0, \tag{6}$$

где $\varrho\colon \mathbf{CG} \hookrightarrow \mathrm{Gr}(3,V_7)$ — вложение **CG** в $\mathrm{Gr}(3,V_7)$, доказательство исключительности набора (5) сводится к вычислениям когомологий на $\mathrm{Gr}(3,V_7)$, которые можно проделать, используя теорему Бореля–Ботта–Вейля.

Опишем идею доказательства полноты набора (5). Можно показать, что **CG** покрывается семейством подмногообразий $\mathbf{CG}_f \xhookrightarrow{i_f} \mathbf{CG}$, которые определяются как нули достаточно общих глобальных сечений $f \in \mathrm{H}^0(\mathbf{CG},\mathcal{U}^\vee)$. Нетрудно показать, что подмногообразия $\mathbf{CG}_f$ изоморфны гладкому гиперплоскому сечению изотропного грассманиана $\mathrm{IGr}(3,6)$, так что по [14, Теорема 2.3] в $\mathrm{D}^b(\mathbf{CG}_f)$ имеется полный исключительный набор. Используя стандартные аргументы из [6], мы сводим задачу к следующей проверке включений для пяти векторных расслоений:

$$S^2\mathcal{U}^\vee(m) \in \mathcal{A} \quad \text{для} \quad m=0,1,2, \quad \text{и} \quad \Sigma^{2,1}\mathcal{U}^\vee(1), \Sigma^{2,1}\mathcal{U}^\vee(2) \in \mathcal{A}, \tag{7}$$

где $\mathcal{A} \subset \mathrm{D}^b(\mathbf{CG})$ подкатегория, порожденная (5).

Доказательство включений (7) — самая важная часть доказательства полноты набора (5). Вначале мы приводим два общих результата о расслоениях на квадрики. Грубо говоря, первая конструкция позволяет "склеить" два расслоения на квадрики с изоморфными пучками коядер в новое расслоение уже без вырождений, а вторая конструкция позволяет построить из расслоения на квадрики с пучком коядер, сосредоточенным на дивизоре Картье, новое расслоение на квадрики с пучком коядер, сосредоточенном на том же дивизоре. Используя эти два результата, мы строим несколько естественных $\mathbb{G}_2$-эквивариантных расслоений на квадрики на **CG**. Снова используя первую конструкцию, мы склеиваем полученные расслоения на квадрики в следующие самодвойственные векторные расслоения на **CG**

$$\mathcal{E}_{10}(1) \simeq \mathcal{E}_{10}^{\vee} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{16}(-1) \simeq \mathcal{E}_{16}^{\vee}, \tag{8}$$

где $\mathcal{E}_{10}$ — расширение $\mathcal{U}_4^{\perp}$ с помощью $S^2\mathcal{U}$, а $\mathcal{E}_{16}$ — расширение $\Lambda^2\mathcal{U}_3^{\vee} \oplus \mathcal{O}(1)$ с помощью $\mathcal{U}_3^{\perp} \otimes \Lambda^2\mathcal{U}_3^{\vee}$. Используя (8), а также несколько стандартных точных последовательностей, мы доказываем требуемые включения (7).

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих конференциях и семинарах:

(i) Доклад "Производная категория $\mathrm{IGr}(3,8)$", летняя математическая школа и конференция "Алгебра и геометрия", (Ярославль, Россия), июль 2018

(ii) Доклад "Производная категория грассманиана Кэли", международная конференция "Геометрия и гомологическая зеркальная симметрия", (Сочи, Россия), декабрь 2021

(iii) Доклад "Производная категория грассманиана Кэли", Международная Российско-Японская конференция "Категорные и аналитические инварианты в алгебраической геометрии VIII", (Москва, Россия), декабрь 2021

(iv) Доклад "Производная категория грассманиана Кэли", конференция "Геометрия, алгебра и теория представлений", (Долгопрудный, Россия), июль 2022

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в двух статьях:

(i) Л. А. Гусева, “О производной категории IGr(3;8)”, Матем. сб., 211:7 (2020), 24–59

(ii) Л. А. Гусева, “О производной категории грассманиана Кэли”, Матем. заметки, 113:1 (2023), 144–148

References

[1] Beilinson, Alexander. *Coherent sheaves on* $\mathbf{P}^n$ *and problems in linear algebra.* (Russian) Funktsional. Anal. i Prilozhen. 12 (1978), no. 3, 68–69.

[2] Benedetti, Vladimiro; Manivel, Laurent. *The small quantum cohomology of the Cayley Grassmannian.* Internat. J. Math. 31 (2020), no. 3, 2050019, 23 pp.

[3] Fonarev, Anton. *Minimal Lefschetz decompositions of the derived categories for Grassmannians.* (Russian); translated from Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 77 (2013), no. 5, 203–224 Izv. Math. 77 (2013), no. 5, 1044–1065.

[4] Kapranov, Mikhail. *Derived category of coherent sheaves on Grassmann manifolds.* (Russian) Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 48 (1984), no. 1, 192–202.

[5] Kapranov, Mikhail. *On the derived categories of coherent sheaves on some homogeneous spaces.* Invent. Math. 92 (1988), no. 3, 479–508.

[6] Kuznetsov, Alexander. *Exceptional collections for Grassmannians of isotropic lines.* Proc. Lond. Math. Soc. (3) 97 (2008), no. 1, 155–182.

[7] Kuznetsov, Alexander. *Homological projective duality.* Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 105 (2007), 157–220.

[8] Kuznetsov, Alexander. *Hyperplane sections and derived categories.* (Russian); translated from Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. 70 (2006), no. 3, 23–128 Izv. Math. 70 (2006), no. 3, 447–547.

[9] Kuznetsov, Alexander. *Lefschetz decompositions and categorical resolutions of singularities.* Selecta Math. (N.S.) 13 (2008), no. 4, 661–696.

[10] Kuznetsov, Alexander; Polishchuk, Alexander. *Exceptional collections on isotropic Grassmannians.* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 18 (2016), no. 3, 507–574.

[11] Kuznetsov, Alexander; Smirnov, Maxim. *On residual categories for Grassmannians.* Proc. Lond. Math. Soc. (3) 120 (2020), no. 5, 617–641.

[12] Kuznetsov, Alexander; Smirnov, Maxim. *Residual categories for (co)adjoint Grassmannians in classical types.* Compos. Math. 157 (2021), no. 6, 1172–1206.

[13] Manivel, Laurent. *The Cayley Grassmannian.* J. Algebra 503 (2018), 277–298.

[14] Samokhin, Alexander. *On the derived category of coherent sheaves on a 5-dimensional Fano variety.* C. R. Math. Acad. Sci. Paris 340 (2005), no. 12, 889–893.