Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
“Национальный исследовательский университет
“Высшая школа экономики”

Факультет математики

На правах рукописи

Болбачан Василий Сергеевич

О структуре K-групп эллиптических кривых

Резюме диссертации
на сосискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
д. мат. н., профессор
Левин Андрей Михайлович

Москва – 2023

Введение

Одна из ключевых гипотез в ариметическиой геометрии — это гипотеза А. Бейлинсона, описывающая связь между значениями регулятора, определенного на мотивных когомолгиях арифметического многообразия и значениями его L–функции в целых точках. Простейший случай когда многообразие состоит из одной точки составляет содержание известной теоремы А. Бореля. С другой стороны Д. Загье высказал гипотезу, что значения L–функции (которая в данном случае называется ζ–функцией) числового поля в целых точках выражаются через так называемые *полилогарифмы*. На данные момент эта гипотеза доказана только в случае $2 \leq n \leq 4$ (где n — число в котором берется значение ζ–функции). Более того случай $n = 4$ был доказан только в этом году, и, в этом доказательстве были использованы результаты данной диссертации.

Указанные результаты мотивируют следующий вопрос: что можно сказать о значениях регултора произвольного арифметического многообразия и можно ли эти значения описать явным образом? Согласно С. Блоху, про мотивные когомолгии можно думать как про симплициальные группы Чжоу. На этом языке явная формула для отображения регулятора была построена в [6]. Первый нетривиальный случай этой конструкции (соответствующий ситуации когда многообразие является спектром поля, а так называемый *мотивный вес* равен 2) приводит к понятию *дилогарифма Чжоу*. Мотивируясь аналитическими свойствами дилогарифма Чжоу, А. Гончаров сформулировал гипотезу, обощающую так называемый *строгий закон взаимности А. Суслина*. Частичное продвижение в доказательстве этой гипотезы было получено [9]. Основным результатом данной диссертации является доказательство указанной гипотезы в полном объеме. Кроме этого, попутно доказывается новый закон взаимности, который формулируется для 4 ненулевых функций на алгебраической поверхности. Также в диссертации доказывается результат описывающий функциональные соотношения для так называемого *эллиптического дилогарифма*.

Диссертация состоит из 3 разделов. В первом разделе я даю необходимые определения. Во втором разделе я формулирую результаты связанные с гипотезой А. Гончарова, обощающий усиленный закон взаимности А. Суслина. Эти результаты были получены в статьях [3], [4]. В третьем разделе я формулирую результаты, относящиеся к описанию функциональных соотношений для эллиптического дилогарифма. Эти результаты были получены в [2].

1 Определения

Пусть k — алгебраически замкнутое поле характеристики ноль. Все многообразия предполагаются гладкими и опрделенными над k. Для каждой абелевой группы A определена ее рационализация $A_{\mathbb{Q}} := A \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$. Мы всюду заменяем каждую абелеву группу на ее рационализацию. Все внешние и тензорные степени берутся над $\mathbb{Q}$.

Определим функцию $Li_n(z)$ по следующей формуле:

$$Li_n(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}.$$

Этот ряд сходится при $|z| < 1$, но может быть аналитически продолжен до многозначной мероморфной функции на всем $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Эта функция называется *классическим полилогарифмом* и изначально была введена Л. Эйлером. В [10] дается определение однозначной версии $\mathcal{L}_n$ функции Li_n. Функция $\mathcal{L}_n$ является непрерывной вещественно значной функцией на всем $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$. Можно показать, что эта функция является вещественно аналитичекой на дополнении к конечному числу точек, в которых она имеет логарифмические особенности. Пусть F произвольное поле. Определим $\mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(F)]_n$ как свободную абаелеву группу порожденную символами $\{x\}_n$ где $x \in \mathbb{P}^1(F)$. (Эта группа фактически не зависит от n, но я ввожу это определение для дальнейншега удобства). В случае $F = \mathbb{C}$, полилогарифм $\mathcal{L}_n$ задает линейное отображение $\widetilde{\mathcal{L}}_n \colon \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(\mathbb{C})] \to \mathbb{R}$, заданное на образующих по следующей формуле:

$$\widetilde{\mathcal{L}}_n(\{z\}_n) = \mathcal{L}_n(z).$$

На всю группу $\mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(\mathbb{C})]_n$ это отображение продолжается по линейности. В [8] А. Гончаров определил подгруппу $\mathcal{R}_n(F)$ группы $\mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(F)]_n$ так что в случае $F = \mathbb{C}$ эта подгруппа лежит в ядре отображения $\widetilde{\mathcal{L}}_n$. Интуитивно, эта подгруппа описывает "универсальные" функциональные соотношения для функции $\mathcal{L}_n$.

Определение 1.1 (Высшая группа Блоха)**.** Определим группу $\mathcal{B}_n(F)$ как следующую фактор-группу:

$$\mathcal{B}_n(F) := \mathbb{Z}[\mathbb{P}^1(F)]_n / \mathcal{R}_n(F).$$

Эта группа называется *n-ой группой Блоха.*

Так как группа $\mathcal{B}_2(F)$ будет играть важную роль на протяжении всей диссертации, дадим явное поределение группы $\mathcal{R}_2(F)$. Как было замечено в Разделе 4.2 статьи [8], эта группа порождается следующими элементами:

$$\sum_{i=1}^{5}(-1)^i\{c.r.(x_1,\ldots,\widehat{x}_i,\ldots,x_5)\}_2, \{0\}_2, \{1\}_2, \{\infty\}_2.$$

В этой формуле x_i — это 5 различных точек на $\mathbb{P}^1$ и $c.r.(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ — это двойное отношение четырех точек на проективной прямой.

Замечание 1.2. Не известно совпадает ли подгруппа $\mathcal{R}_n(F)$ из статьи [5] с аналогичной подгруппой, определенной в [8]. Утверждение об их совпадении тесно связанно с так называемой гипотезой А. Суслина о жесткости. В этой диссертации мы придерживаемся определения группы $\mathcal{R}_n(F)$ взятой из [8].

Определение 1.3 (Полилогарифмический комплекс)**.** Определим комплекс $\Gamma(F,n)$ следующим образом:

$$\Gamma(F,n)\colon \mathcal{B}_n(F) \xrightarrow{\delta_n} \mathcal{B}_{n-1}(F)\otimes F^\times \xrightarrow{\delta_n} \dots \xrightarrow{\delta_n} \mathcal{B}_2(F)\otimes \Lambda^{n-2}F^\times \xrightarrow{\delta_n} \Lambda^n F^\times.$$

Этот комплекс сосредоточен в степнях от 1 до n. Дифференциал определяется следующим образом: $\delta_n(\{x\}_k\otimes y_{k+1}\wedge\dots\wedge y_n) = \{x\}_{k-1}\otimes x\wedge y_{k+1}\wedge\dots\wedge y_n$ для $k>2$ и $\delta_n(\{x\}_2\otimes y_3\wedge\dots y_n) = x\wedge(1-x)\wedge y_3\wedge\dots\wedge y_n$.

Полилогарифмические комплексы комплексы были определены А. Гончаровым в статье [5]. В этой же статье была высказана гипотеза, что эти комплексы вычисляют мотивные когомологии поля F.

Пусть (F,ν) — это поле дисретного нормирования. Обозначим $\mathcal{O}_\nu = \{x\in F|\nu(x)\geq 0\}, m_\nu = \{x\in F|\nu(x)>0\}$ and $\overline{F}_\nu = \mathcal{O}_\nu/m_\nu$. Напомним, что элемент $a\in F^\times$ is называется *униформизающим* если $\nu(a)=1$ и называется *единицей* если $\nu(a)=0$. Для $u\in\mathcal{O}_\nu$ обозначим через $\overline{u}$ его класс в поле вычетов $\overline{F}_\nu$.

Доказательство следующего предложения может быть найдено в [5]:

Предложение 1.4. *Пусть (F,ν) — поле дискретного нормирования и $n\geq 3$. Существует единнственный морфизм комплексов*

$$\partial_\nu^{(n)}\colon \Gamma(F,n)\to\Gamma(\overline{F}_\nu,n-1)[-1]$$

удовлетворяющий следующим условиям:

1. *Для любого униформизующего π и едениц $u_2,\dots u_n\in F$, выполнена следующая формула: $\partial_\nu^{(n)}(\pi\wedge u_2\wedge\dots\wedge u_n) = \overline{u_2}\wedge\dots\wedge\overline{u_n}$.*

2. Для любого $a \in F\backslash\{0,1\}$ удовлетворяющего $\nu(a) \neq 0$, целого числа k, такого что $2 \le k \le n$ и любого $b \in \Lambda^{n-k}F^\times$ имеем: $\partial_\nu^{(n)}(\{a\}_k \otimes b) = 0$.

3. Для любой единицы u, целого числа k, такого что $2 \le k \le n$ и любого $b \in \Lambda^{n-k}F^\times$ имеем: $\partial_\nu^{(n)}(\{u\}_k \otimes b) = -\{\overline{u}\}_k \otimes \partial_\nu^{(n-k)}(b)$.

Мы будем называть морфизм комплексов $\partial_\nu^{(n)}$ из предыдущего предложения *ручным символом*.

Пусть D — это неприводимый дивизор на гладком многообразии X. Обозначим через ν_D соответствующее дискретное нормирование поля $k(X)$. Для произвольного поля F обозначим через $\nu_{\infty,F}$ дискретное нормирование поля $F(t)$, которое соответствует точке $\infty \in \mathbb{P}^1(F)$.

Напомним, что мы зафиксировали алгебраически замкнутое поле k характеристики ноль. Обозначим через $\mathbf{Fields}_d$ категорию конечно порожденных расширений поля k степени трансцендентности d. Каждый морфизм в этой категории — это конечное расширение. Для поля $F \in \mathbf{Fields}_d$, обозначим через $\mathrm{dval}(F)$ множество дискретных нормирований заданных неприводимым девизором на какой-нибудь гладкой модели поля F. В случае когда $F \in \mathbf{Fields}_1$ это множество совпадает с множеством всех дисертных нормирований, которые тривиальны на поле k. В этом случае мы обозначим это множество просто через $\mathrm{val}(F)$. Если X — это гладкое алгебраическое многообразие, вместе с изоморфизмом $k(X) \to F$, обозначим через $\mathrm{dval}(F)_X \subset \mathrm{dval}(F)$ подмножество дивизориальных нормирований, которые происходят из неприводимых дивизоров на X.

Дадим определение дилогарифма Чжоу, который впервые был определен в [6]. Пусть X – это кривая и f_1, f_2, f_3 три ненулевые рациональные функции на X. Определим следующее 2-распределение на $X(\mathbb{C})$ (см. [6]):

$$r_2(X; f_1, f_2, f_3) = \frac{1}{6}\sum_{\sigma\in S_3} sgn(\sigma)\widetilde{r}_2(X; f_{\sigma(1)}, f_{\sigma(2)}, f_{\sigma(3)}),$$

$\widetilde{r}_2(X; g_1, g_2, g_3) = \log|g_1| d\log|g_2| \wedge d\log|g_3| - 3\log|g_1| d\arg(g_2) \wedge d\arg(g_3).$

Дилогарифм Чжоу опрделяется по формуле

$$\mathcal{P}_2(X; f_1, f_2, f_3) = (2\pi i)^{-1} \int_{X(\mathbb{C})} r_2(X; f_1, f_2, f_3).$$

Из определения легко следует, что дилогарифм Чжоу зануляется если две из трех функций являются константами, а также что для любого непостоянного регулярного отображения $\varphi\colon X \to Y$ и трех неулевых функций f_1, f_2, f_3 на Y выполняется равенство

$$\mathcal{P}_2(Y; f_1, f_2, f_3) = (\deg\varphi)^{-1} \mathcal{P}_2(X, \varphi^*(f_1), \varphi^*(f_2), \varphi^*(f_3)).$$

Определение 1.5 (Поднятое отображение взаимности)**.** Пусть $F \in$ $\mathbf{Fields}_1$. *Поднятое отображение взпимности* на поле F — это $\mathbb{Q}$–линейное отображение $h\colon \Lambda^3 F^\times \to \mathcal{B}_2(k)$ удовлетворяющее следующим двум условиям:

1. Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B}_3(F) \arrow[r, "\delta_3"] & \mathcal{B}_2(F) \otimes F^\times \arrow[r, "\delta_3"] \arrow[d, "\sum\limits_{\nu \in \mathrm{val}(F)} \partial_\nu^{(3)}"'] & \Lambda^3 F^\times \arrow[d, "\sum\limits_{\nu \in \mathrm{val}(F)} \partial_\nu^{(3)}"] \arrow[dl, dashed, "h"'] \\ & \mathcal{B}_2(k) \arrow[r, "-\delta_2"] & \Lambda^2(k^\times). \end{tikzcd} \tag{1}$$

2. Отображение h зануляется на элементах вида $c \wedge f_2 \wedge f_3, c \in k, f_2, f_3 \in F$.

2 Поднятые отображения взаимности и дилогарифм Чжоу

Мотивируясь аналитическими свойствами дилогарифма Чжоу, А. Гончаров высказал следующую гипотезу:

Гипотеза 2.1. *На каждом поле $F \in \mathbf{Fields}_1$ можно выбрать поднятое отображение взаимности $\mathcal{H}_F$ так что выполняются следующие свойства:*

1. *Для любого вложения $j\colon F_1 \to F_2$ выполнена формула*
$$\mathrm{RecMaps}(j)(\mathcal{H}_{F_2}) = \mathcal{H}_{F_1}.$$
2. *В случае когда $k = \mathbb{C}$ выполнена следующая формула:*
$$\mathcal{P}_2(X; f_1, f_2, f_3) = -\widetilde{\mathcal{L}}_2(\mathcal{H}_{\mathbb{C}(X)}(f_1 \wedge f_2 \wedge f_3)).$$

Более того семейство поднятых отображений взаимности $\mathcal{H}_F, F \in$ $\mathbf{Fields}_1$ однозначно определяется свойством 1.

Частичное продвижение в доказательстве этой гипотезы было получено Д. Руденко [9]. Основным результатом диссертации является следующая теорема:

Теорема 2.2. *Гипотеза 2.1 верна.*

Неформально эта гипотеза означает, что дилогарифм Чжоу может быть *функториальным образом* выражен через классический дилогарифм $\mathcal{L}_2$. Доказательство этой гипотезы было анонсировано в [3]. Там же была представлена идея доказательства. Доказательство со всеми деталями будет опубликовано в [4] (статья принята к печати).

При доказательстве этой теоремы был получен следующий результат, который представляет самостаятельный интерес.

Теорема 2.3. *Пусть $L \in \mathbf{Fields}_2$. Для любого $b \in \Lambda^4 L^\times$ и всех кроме конечного числа $\nu \in \mathrm{dval}(L)$, имеем $\mathcal{H}_{\overline{L}_\nu} \partial_\nu^{(4)}(b) = 0$. Более того следующая сумма равна нулю:*
$$\sum_{\nu \in \mathrm{dval}(L)} \mathcal{H}_{\overline{L}_\nu} \partial_\nu^{(4)}(b) = 0. \tag{2}$$

Применяя к обоим частям отображение $\widetilde{\mathcal{L}}_2$, мы восстанавливаем соотношение для дилогарифма Чжоу, полученного А. Гончаровым в [6, Section 1.4].

3 Эллиптический дилогарифм

Пусть $E = \mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle$ — эллиптическая кривая над $\mathbb{C}$. *Эллиптический* дилогарифм был определен С. Блохом [1] (см. также [10]). Эквивалентное представление задается следующей формулой:

$$D_\tau(\xi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} D(e^{2\pi i \xi + 2\pi i \tau n}).$$

Обозначим через $\mathbb{Z}[E]$ свободную абелеву группу, порожденную точками E. Для точки $z \in E$ обозначим через $[z]$ соответствующий элемент в группе $\mathbb{Z}[E]$. Эллиптический дилогарифм задает линейное отображение $\widetilde{D}_\tau \colon \mathbb{Z}[E] \to \mathbb{C}$, определенное по формуле $\widetilde{D}_\tau([z]) = D_\tau(z)$.

Для рациональной функции f на E, обозначим через (f) ее дивизор. Для некоторых $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ мы имеем:

$$(f) = \sum_{i=1}^{n}([\alpha_i] - [\gamma_i]), (1 - f) = \sum_{i=1}^{n}([\beta_i] - [\gamma_i]).$$

Определим элемент $\eta_f \in \mathbb{Z}[E]$ с помощью следующей формулы

$$\eta_f = \sum_{i,j=1}^{n} \left([\alpha_i - \beta_j] + [\beta_i - \gamma_j] + [\gamma_i - \alpha_j]\right). \tag{3}$$

Следующее определение взято из [7]:

Определение 3.1. Определим подгруппу $\mathcal{R}(E)$ группы $\mathbb{Z}[E]$ как группу порожденню следующими элементами:

1. η_f, где $f \in k(E)$,
2. $[z] + [-z]$, где $z \in E$,
3. $2 \cdot (z - \sum_{2z'=z} [z'])$, где $z \in E$.

Эллиптическая группа Блоха $B_3(E)$ определяется как фактор группа $\mathbb{Z}[E]/\mathcal{R}(E)$.

Согласно [1, Theorem 9.2.1], (см. также [10], [7]) отображение $\widetilde{D}_\tau$ зануляется на подгруппе $\mathcal{R}(E)$.

Основной результат статьи [2] заключается в следующей теореме:

Теорема 3.2. *Пусть E — эллиптическая кривая над $\mathbb{C}$. Для любой рациональной функции f на E, элемент $\eta_f \in \mathbb{Z}[E]$ может быть представлен как линейная комбинация с целыми коэффициентами элементов вида η_f для функций f степени 3 и элементов вида $[z] + [-z]$.*

Эта теорема показывает что при определнии эллиптической группы Блоха достаточно брать элементы вида η_f для функций f степени 3.

Указанное утверждение было высказано в [7] в качетсве гипотезы.

Фактически в [2] это утверждение было выведено из следующей теоремы, которая представляет самостоятельный интерес:

Теорема 3.3. *Пусть E — это эллиптическая кривая над k. Группа $\mathcal{B}_2(k(E))$ порждается элементами вида $\{f\}_2$, где $f \in k(E)$ функция степени не выше 3. (Мы считаем что степень константы равна нулю).*

Результаты диссертации опубликованы в следующих трёх статьях:

1. V. Bolbachan. Chow dilogarithm and strong suslin reciprocity law (Дилогарифм Чжоу и усиленный закон взаимности Суслина). *Journal of algebraic geometry*, 32(3):to appear, 2023

2. V. Bolbachan. Strong suslin reciprocity law and the norm map (Усиленный закон взаимности Суслина и ображение нормы). *Mathematical Notes*, 112(1):309–312, 2022

3. V. Bolbachan. On functional equations for the elliptic dilogarithm (О функциональных соотношениях для эллиптического дилогарифма). *European Journal of Mathematics*, 8(2):625–633, 2022

Список литературы

[1] S. Bloch. *Higher Regulators, Algebraic K-theory, and Zeta Functions of Elliptic Curves*, volume 11 of *CRM monograph series*. American Mathematical Society, Providence, 2000.

[2] V. Bolbachan. On functional equations for the elliptic dilogarithm (О функциональных соотношениях для эллиптического дилогарифма). *European Journal of Mathematics*, 8(2):625–633, 2022.

[3] V. Bolbachan. Strong suslin reciprocity law and the norm map (Усиленный закон взаимности Суслина и оображение нормы). *Mathematical Notes*, 112(1):309–312, 2022.

[4] V. Bolbachan. Chow dilogarithm and strong suslin reciprocity law (Дилогарифм Чжоу и усиленный закон взаимности Суслина). *Journal of algebraic geometry*, 32(3):to appear, 2023.

[5] A. B. Goncharov. Geometry of configurations, polylogarithms and motivic cohomology. *Advances in Mathematics*, 114(2):197–318, 1995.

[6] A. B. Goncharov. Polylogarithms, regulators and Arakelov motivic complexes. *Journal of the American Mathematical Society*, 18(1):1–60, 2005.

[7] A. B. Goncharov and A. M. Levin. Zagier's conjecture on $L(E, 2)$. *Inventiones mathematicae*, 132(2):393–432, 1998.

[8] Alexander B Goncharov. Polylogarithms and motivic galois groups. *Motives (Seattle, WA, 1991)*, 55:43–96, 1994.

[9] D. Rudenko. The strong suslin reciprocity law. *Compositio Mathematica*, 157(4):649–676, 2021.

[10] Don Zagier and Herbert Gangl. Classical and elliptic polylogarithms and special values of L-series. In *The arithmetic and geometry of algebraic cycles*, pages 561–615. Springer, 2000.