Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

Международная лаборатория динамических систем и приложений

На правах рукописи

Круглов Владислав Евгеньевич

Модули топологической сопряженности Ω-устойчивых потоков на поверхностях

Резюме диссертации
на соискание ученой степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
доктор физико-математических наук,
профессор
Починка Ольга Витальевна

Нижний Новгород – 2023

Введение

Топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов на замкнутых многообразиях достигла огромного прогресса за последние 50 лет. Топологической классификации диффеоморфизмов Морса-Смейла в предположениях различной общности на двумерных многообразиях посвящена целая серия работ таких авторов, как С.Х. Арансон, А. Н. Безденежных, В. З. Гринес [2], [4], [6], [5], [11]; Е. А. Боревич [7]; Х. Бонатти, Р. Ланжевен [29]; И.Ю. Власенко [8]; В.З. Гринес, С.Х. Зинина, Т.М. Митрякова, О.В. Починка [26], [12]. Классификация произвольных диффеоморфизмов Морса-Смейла на поверхностях[1] потребовала привлечения аппарата топологических цепей Маркова и следует из работы Х. Бонатти и Р. Ланжевена [29] (см. также [28]), где найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряжённости структурно устойчивых диффеоморфизмов с нульмерными базисными множествами.

Согласно работе Ш. Ньюхауса и Ж. Палиса [38], существует открытое множество дуг, которые начинаются в диффеоморфизме Морса-Смейла и имеют первую бифуркационную точку в диффеоморфизме с гетероклиническим касанием. В обзоре [3] описаны бифуркации систем, принадлежащих границе множества систем Морса-Смейла, которую можно разбить на две части: 1) системы с конечным множеством неблуждающих траекторий, содержащие либо негиперболические неподвижные точки или циклы, либо траектории нетрансверсального пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий неподвижных точек или (и) циклов, либо и те, и другие одновременно; 2) системы с бесконечным множеством неблуждающих траекторий.

Очевидно, что нарушение условия трансверсальности гетероклинических пересечений инвариантных многообразий седловых точек диффеоморфизма приводит к его негрубости. Более того, это приводит к возникновению непрерывных топологических инвариантов — модулей топологической сопряжённости и, следовательно, к существованию континуума несопряжённых диффеоморфизмов с одинаковой геометрией гетероклинического пересечения. Термин “модуль топологической сопряжённости” был предложен в работах Л.П. Шильникова, С.В. Гонченко и Д.В. Тураева [9], [10] и соответствует термину “moduli of stability” (модули устойчивости), который употребляется в западной литературе. Модули устойчивости, в частности, возникают для систем, лежащих на границе множества систем Морса-Смейла, имеющих конечное множество неблуждающих траекторий и содержащих траектории нетрансверсального пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий неподвижных точек или (и) циклов (см. [3]).

Строгое определение модулей было дано в работах Л.П. Шильникова, С.В. Гонченко и Д.В. Тураева [9], [10]. Именно, пусть X — топологическое пространство, $x \in X$ и на некоторой окрестности $U_x \subset X$ точки x задано отношение эквивалентности R.

[1]Под поверхностью в настоящей работе всегда понимается двумерная поверхность.

Предположим, что на U_x определена непрерывная *локально непостоянная* функция $h\colon U_x \to \mathbb{R}$, то есть в любой окрестности $U_y \subset U_x$ любой точки $y \in U_x$ существует точка z такая, что $h(z) \neq h(y)$. Будем называть функцию h — *модулем R-эквивалентности*, если из неравенства $h(y) \neq h(z)$ для $y, z \in U_x$ следует, что y и z не R-эквивалентны. В этом случае говорят, что $x \in X$ имеет *модуль* h. Будем говорить, что x имеет (по крайней мере) m *модулей*, если на X определены m независимых модулей, где *независимость системы модулей* $h_1, \dots, h_m$ понимается в следующем смысле: для любого $i \in \{1, \dots, m\}$ в любой окрестности $V_x \subset U_x$ точки x существует точка y такая, что $h_l(x) = h_l(y)$ для всех $l \neq i$ и $h_i(x) \neq h_i(y)$. Говорят, что x *имеет бесконечно много модулей*, если x имеет m модулей для любого заданного m. В противном случае, x *имеет конечное число модулей.*

Если в этом определении заменить $\mathbb{R}$ на пространство некоторых функций, а равенства значений отображения h заменить на некоторое отношение эквивалентности значений отображения h, то h будем называть *функциональным модулем R-эквивалентности.*

Первым, кто обратил внимание на существование модулей топологической сопряженности, был Ж. Палис [39]. Он обнаружил существование модулей топологической сопряженности у систем с простой динамикой. Такими модулями обладают уже двумерные диффеоморфизмы и потоки с негрубой гетероклинической траекторией, в точках которой инвариантные многообразия двух разных седловых неподвижных точек имеют одностороннее касание. А именно, если f – такой диффеоморфизм (класса $C^r, r \geq 2$), имеющий две гиперболические седловые неподвижные точки σ_1 и σ_2 с собственными значениями ϱ_i, μ_i такими, что $|\varrho_i| < 1 < |\mu_i|,\ i = 1, 2$; кроме того $W^s_{\sigma_1}$ имеет одностороннее касание с $W^u_{\sigma_2}$ в точках некоторой гетероклинической траектории (см. Рис. 1), то параметр

$$\alpha = \frac{\ln|\varrho_2|}{\ln|\mu_1|}$$

является модулем топологической сопряжённости в том смысле, что диффеоморфизмы f и f' с гетероклиническими касаниями могут быть сопряжены только в том случае, когда

$$\frac{\ln|\varrho_2|}{\ln|\mu_1|} = \frac{\ln|\varrho_2'|}{\ln|\mu_1'|}.$$

Из выше сказанного, в частности, следует, что любой диффеоморфизм поверхности, допускающий гетероклиническое касание, имеет хотя бы один модуль топологической сопряжённости. Существенным продвижением в описании модулей поверхностных диффеоморфизмов явилась работа В. ди Мелу, С. ван Стрина [36], в которой были найдены необходимые и достаточные условия того, что Ω-устойчивый диффеоморфизм f ориентируемой поверхности имеет конечное число модулей топологической сопряжённости. Заметим, что одним из условий является ограниченность длины цепочки

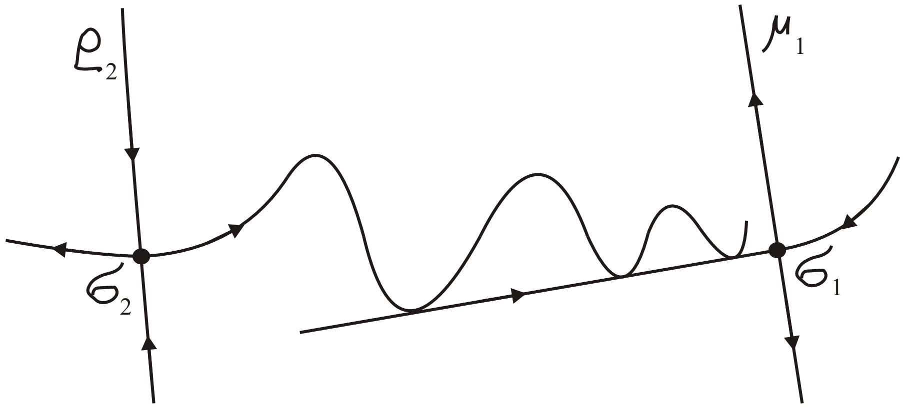

Рис. 1: Касание седловых инвариантных многообразий

касающихся сепаратрис.

Настоящее исследование посвящено описанию модулей топологической сопряжённости Ω-устойчивых потоков на поверхностях, выделению среди них класса потоков с конечным числом модулей и их классификации с точностью до топологической сопряжённости.

Традиционный подход к качественному изучению динамики потоков с конечным числом неподвижных точек и периодических орбит на поверхностях состоит в выделении на несущем многообразии областей с одинаковым асимптотическим поведением траекторий — *ячеек*. Классическими комбинаторными инвариантами таких потоков, основанными на выделении ячеек, являются схема Леонтович-Майера [24], [23] для потоков в ограниченной части плоскости, ориентированный граф Пейшото [40] и молекула Ошемкова-Шарко [27] для потоков Морса-Смейла на произвольных замкнутых поверхностях, орбитальный комплекс Неймана-О'Брайена [37] для класса потоков на произвольных замкнутых поверхностях, содержащего Ω-устойчивые потоки.

Напомним, что поток Морса-Смейла называется *градиентно-подобным*, если его неблуждающее множество не содержит периодических орбит. Такие потоки имеют наиболее простую динамику, что вдохновляло многих математиков на поиски инвариантов их топологической эквивалентности. В предположениях различной общности на рассматриваемый класс градиентно-подобных потоков были получены следующие инварианты: граф Пейшото (М. Пейшото) [40], модифицированный граф Пейшото (В.З. Гринес, О.В. Починка) [32], двуцветный граф (К. Вонг) [42], трёхцветный граф (А.А. Ошемков, В.В. Шарко) [27], круговая схема (Г. Флейтас) [31].

Таким образом, проблема классификации градиентно-подобных потоков на поверхностях с точки зрения топологической эквивалентности решена исчерпывающим образом. В настоящей работе доказано, что для градиентно-подобных потоков классы топологической эквивалентности совпадают с классами топологической сопряжённости. Полученный результат позволяет использовать для проверки топологической сопряжённости градиентно-подобных потоков любые инварианты их топологической эквивалентности. Кроме того, для каждого из приведенных выше инвариантов строится *эффективный алгоритм* (время его работы полиномиально зависит от входных данных) различения эквивалентности градиентно-подобных потоков.

Очевидно, что каждый предельный цикл порождает модуль топологической сопряжённости, равный периоду цикла. Поэтому для топологической сопряжённости потоков Морса-Смейла имеющихся инвариантов топологической эквивалентности явно не достаточно. Кроме того, в настоящей работе установлен удивительный факт наличия бесконечного числа классов топологической сопряжённости в одном классе топологической эквивалентности потока Морса-Смейла. Этот эффект связан с единственностью инвариантного слоения в окрестности любой периодической орбиты. Доказано, что критерием конечности числа модулей топологической сопряжённости потока Морса-Смейла на поверхности является отсутствие траекторий, идущих от одного предельного цикла к другому. Для класса потоков Морса-Смейла на поверхностях с конечным числом модулей также получена их топологическая классификация с точностью до топологической сопряжённости, основанная на молекуле Ошемкова-Шарко.

Еще один источник модулей для Ω-устойчивых систем на поверхностях – это наличие касающихся седловых инвариантных многообразий – *связок* (см. рис. 2), что было обнаружено Ж. Палисом в работе [39]. Как следует из приведённых выше результатов С. ван Стрина и В. ди Мелу, одним из условий конечности числа модулей у диффеоморфизма является ограничение длины цепочки сёдел с касающимися седловыми многообразиями, она не должна превышать трёх. В настоящей работе доказано, что в случае потока не существует подобного ограничения на длину седловых цепочек потока. Также введён полный инвариант топологической эквивалентности Ω-устойчивых потоков – оснащённый граф, для таких графов построен полиномиальный алгоритм различения их изоморфности.

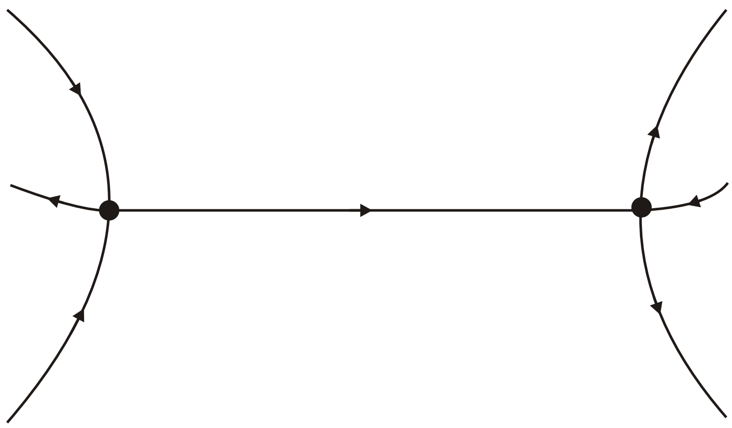

Рис. 2: Связка

1 Результаты исследования

Пусть M — гладкое замкнутое n-многообразие с метрикой d. *Гладким потоком* на M называется гладкое отображение $\phi\colon M\times\mathbb{R}\to M$ с групповыми свойствами:
1) $\phi(x,0)=x\ \forall x\in M$;
2) $\phi(\phi(x,t),s)=\phi(x,t+s)\ \forall x\in M,\ \forall s,t\in\mathbb{R}$.

В дальнейшем будем использовать обозначение $\phi^t(x)=\phi(x,t)$, $x\in M$, $t\in\mathbb{R}$. Заметим, что при фиксированном $t\in\mathbb{R}$ отображение $\phi^t\colon M\to M$ является диффеоморфизмом (см., например, [14]), поэтому поток еще называют однопараметрической группой диффеоморфизмов, действующих на многообразии M.

Траекторией или *орбитой* точки $x\in M$ называется множество $\mathcal{O}_x=\{\phi^t(x),t\in\mathbb{R}\}$. Любая траектория потока либо состоит из одной точки, и в этом случае эта точка называется *неподвижной*, либо гомеоморфна окружности, и в этом случае любая точка траектории называется *периодической*, либо является инъективно иммерсированной прямой. Полагают, что все траектории потока, отличные от неподвижной точки, ориентированы в соответствии с возрастанием параметра t. С каждым потоком $\phi^t\colon M\to M$ связано касающееся траекторий потока векторное поле

$$\dot{x}=\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}|_{t=0}=F(x).$$

Потоки f^t, $f'^t\colon M\to M$ на многообразии M называются *топологически эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $h\colon M\to M$, отображающий траектории потока f^t в траектории потока f'^t с сохранением направления движения по траекториям. Два потока называются *топологически сопряжёнными*, если выполняется условие $hf^t=f'^th$, $t\in\mathbb{R}$, это означает, что h отображает траектории в траектории, сохраняя не только направление, но и время движения по траекториям.

Пусть $p\in M$ – неподвижная точка потока $\phi^t\colon M\to M$. *Устойчивым и неустойчивым*, соответственно, многообразием[2] неподвижной точки p называются множества

$$W^s_p=\{x\in M: d(p,\phi^t(x))\to 0 \text{ при } t\to+\infty\} \text{ и}$$
$$W^u_p=\{x\in M: d(p,\phi^t(x))\to 0 \text{ при } t\to-\infty\}.$$

Устойчивой (неустойчивой) сепаратрисой неподвижной точки p называется компонента линейной связности множества $W^s_p\setminus p$ $(W^u_p\setminus p)$.

С неподвижной точкой p потока ϕ^t помимо касательного векторного поля $\dot{x}=F(x)$ связано *линеаризованное векторное поле*

$$\dot{x}=A(x-p),$$

где A – матрица частных производных отображения $F(x)$ в точке p (матрица Якоби),

[2] См. [41], Теорема об устойчивом многообразии.

разность точек x и p понимается в векторном смысле. Неподвижная точка p потока ϕ^t называется *гиперболической*, если собственные значения матрицы A не имеют нулевых действительных частей.

При этом, неподвижная точка p диффеоморфизма $f\colon M \to M$ называется *гиперболической*, если матрица частных производных отображения $f(x)$ в точке p (матрица Якоби) не имеет собственных значений по модулю равных единице.

Пусть $\mathfrak{c}$ – замкнутая траектория потока $\phi^t\colon M \to M$. *Устойчивым и неустойчивым*, соответственно, многообразием замкнутой траектории $\mathfrak{c}$ называются множества

$$W^s_{\mathfrak{c}} = \{x \in M : \min_{p\in\mathfrak{c}} d(p, \phi^t(x)) \to 0 \text{ при } t \to +\infty\} \text{ и}$$
$$W^u_{\mathfrak{c}} = \{x \in M : \min_{p\in\mathfrak{c}} d(p, \phi^t(x)) \to 0 \text{ при } t \to -\infty\}.$$

Пусть $p \in \mathfrak{c}$, и Σ_p – $(n-1)$-мерный диск, трансверсальный в точке p вектору, касательному к периодической траектории, называемый *секущей Пуанкаре*. Тогда в некоторой окрестности $V_p \subset \Sigma_p$ точки p для каждой точки $x \in V_p$ существует значение $\tau_x > 0$ такое, что $\phi^{\tau_x}(x) \in \Sigma_p$ и $\phi^t(x) \notin \Sigma_p$ для любого $0 < t < \tau_x$. Отображение $f\colon V_p \to \Sigma_p$, определённое формулой $f(x) = \phi^{\tau_x}(x)$, $x \in V_p$, называется *отображением последования* или отображением Пуанкаре.

Точка p является неподвижной точкой отображения последования. Периодическая траектория $\mathfrak{c}$ называется *гиперболической*, если точка p является гиперболической неподвижной точкой отображения Пуанкаре $f\colon V_p \to \Sigma_p(V_p)$.

Точка $x \in M$ называется *блуждающей точкой* потока $\phi^t\colon M \to M$, если существует открытая окрестность U_x точки x такая, что $\phi^t(U_x) \cap U_x = \varnothing$ для всех $t > 1$. В противном случае точка x называется *неблуждающей*, множество всех неблуждающих точек потока ϕ^t называется его *неблуждающим множеством* и обозначается Ω_{ϕ^t}.

Поток $\phi^t\colon M \to M$ называется Ω-*устойчивым*, если существует окрестность $U(\phi^t)$ потока ϕ^t в пространстве $C^1(M \times \mathbb{R}, M)$ с C^1-топологией такая, что если $\phi'^t \in U(\phi^t)$, то потоки $\phi^t|_{\Omega_{\phi^t}}$ и $\phi'^t|_{\Omega_{\phi'^t}}$ топологически эквивалентны.

Поток $\phi^t\colon M \to M$ называется *структурно устойчивым*, если существует окрестность $U(\phi^t)$ потока ϕ^t в пространстве $C^1(M \times \mathbb{R}, M)$ с C^1-топологией такая, что если $\phi'^t \in U(\phi^t)$, то потоки ϕ^t и ϕ'^t топологически эквивалентны.

Поток называется *потоком Морса-Смейла*, если его неблуждающее множество состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и конечного числа гиперболических периодических орбит, чьи устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально. Поток Морса-Смейла без периодических орбит называется *градиентно-подобным* потоком.

В рамках исследования были получены следующие результаты по топологической сопряженности Ω-устойчивых потоков на поверхностях.

В главе 2 рассмотрены градиентно-подобные потоки на поверхностях и доказано, что для таких потоков классификации с точностью до топологической эквивалентности и топологической сопряжённости совпадают. Для основных топологических инвариантов потоков такого класса построены эффективные алгоритмы их различения.

А именно, рассмотрим градиентно-подобный поток f^t, заданный на замкнутой поверхности[3] S. Первый результат главы говорит о том, что топологические инварианты, описывающие классы топологической эквивалентности градиентно-подобных потоков на поверхностях, подходят и для классификации с точностью до топологической сопряжённости.

Теорема 1 ([33]*, теорема 7; [22]*, теорема 2.1; [16]*, теорема 1) *Если два градиентно-подобных потока на замкнутой поверхности топологически эквивалентны, то они топологически сопряжены.*

Таким образом, классы топологически эквивалентных и классы топологически сопряжённых градиентно-подобных потоков на поверхностях совпадают. В большинстве случаев инварианты, описывающие эти классы, это классы изоморфности оснащённых графов. Два оснащенных графа называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное соответствие, переводящее вершины и рёбра одного графа в вершины и рёбра другого графа с сохранением оснащений. Алгоритм различения изоморфности графов в каком-либо классе графов называется *эффективным или полиномиальными*, если время его выполнения ограничено полиномом от длины входной информации (количество вершин, рёбер и параметров оснащения графа). Такое определение эффективности алгоритма восходит к А. Кобхэму [30]. Поскольку для произвольных графов задача существования эффективного различающего алгоритма (задача об NP-полноте) является открытой, то эффективность является стандартом трудноразрешаемости такой задачи [13].

Рассмотрим множество

$$\tilde{S} = S \setminus \bigcup_{\sigma \in \Omega^1_{f^t}} \left(cl(W^u_\sigma) \cup cl(W^s_\sigma) \right).$$

Замыкание любой его компоненты связности называется *ячейкой.*

Пусть Γ_{f^t} – ориентированный граф потока f^t такой, что вершины графа Γ_{f^t} соответствуют неподвижным точкам потока f^t, а рёбра соответствуют ориентированным седловым сепаратрисам. Оснастим граф Γ_{f^t} *различающими множествами* – подграфами, соответствующими границам ячеек. В результате получим *граф Пейшото* $\Gamma^P_{f^t}$. Такой граф является полным топологическим инвариантом для градиентно-подобных потоков на произвольных поверхностях (см. рис. 3). .

[3] Обычно через S обозначается поверхность, через M – многообразие произвольной размерности, либо поверхность, отличная от S.

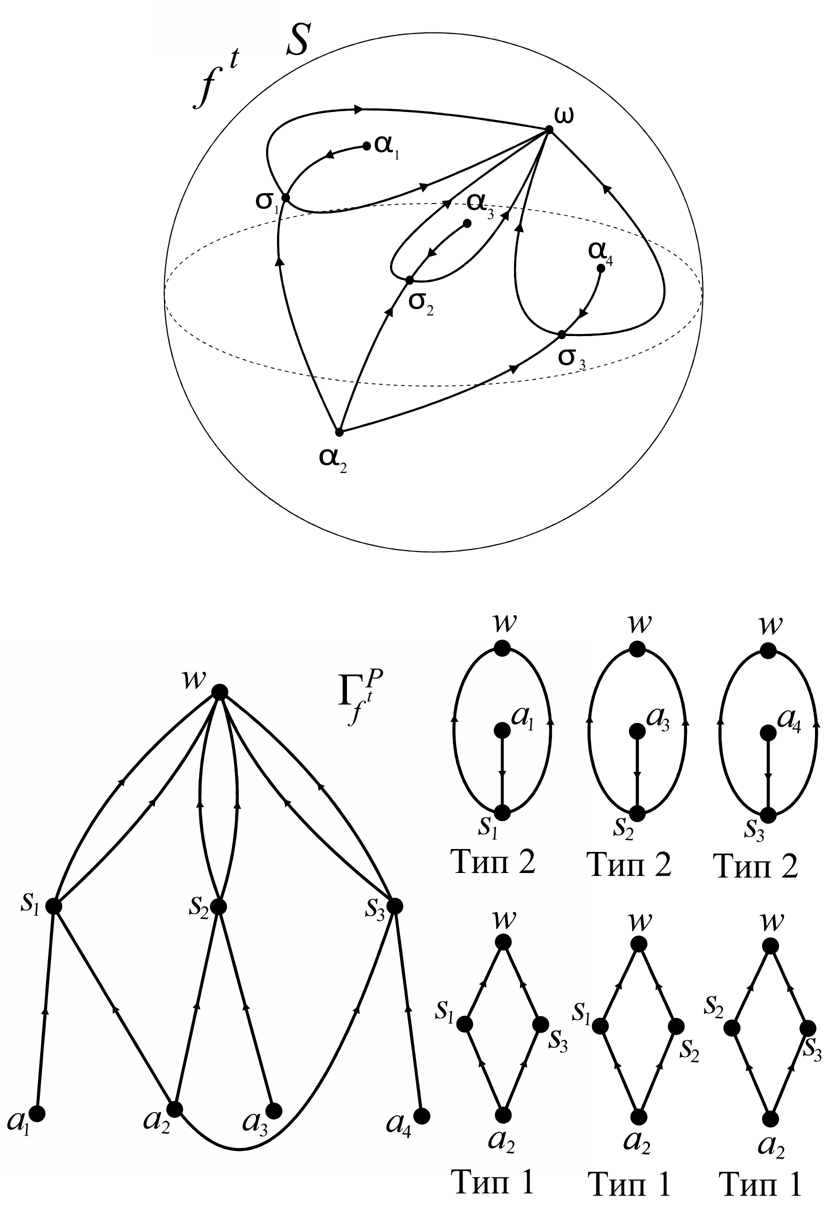

Рис. 3: Градиентно-подобный поток f^t на сфере S и его граф Пейшото $\Gamma^P_{f^t}$

Теорема 2 ([33]*, теорема 1; [22]*, теорема 3.1) *Пусть f^t и f'^t – градиентно-подобные потоки, заданные на поверхности S рода g, и $\Gamma^P_{f^t}$, $\Gamma^P_{f'^t}$ – их n-вершинные графы Пейшото. Тогда изоморфность графов $\Gamma^P_{f^t}$ и $\Gamma^P_{f'^t}$ можно проверить за время $O\left(n^{O(g)}\right)$ для $g > 0$ и за время $O(n)$ для $g = 0$.*

В 2011 году В.З. Гринес и О.В. Починка [32] модифицировали граф Пейшото. Именно, вместо различающих множеств они оснастили ориентированный граф Пейшото Γ_{f^t} порядками рёбер (согласованными с вложениями седловых сепаратрис в несущую поверхность), инцидентных вершинам, соответствующим стокам. Класс изоморфности полученного таким образом *модифицированного графа Пейшото* $\Gamma^{GP}_{f^t}$ также является полным инвариантом эквивалентности градиентно-подобных потоков на произвольных поверхностях.

Теорема 3 ([33]*, теорема 2; [22]*, теорема 3.2) *Пусть f^t, f'^t – градиентно-подобные потоки на поверхности S рода g, и $\Gamma^{GP}_{f^t}$, $\Gamma^{GP}_{f'^t}$ – их модифицированные n-вершинные графы Пейшото. Тогда изоморфизм графов $\Gamma^{GP}_{f^t}$ и $\Gamma^{GP}_{f'^t}$ может быть проверен за время $O\left(n^{O(g)}\right)$, если $g > 0$, и за время $O(n)$, если $g = 0$.*

Следующий инвариант, для которого в работе построен алгоритм различения, это *граф Вонга* [42]. Пусть f^t – градиентно-подобный поток, заданный на ориентируемой поверхности S. *Граф Вонга* для такого потока – это граф, дуальный к графу Пейшото: вершины графа Вонга $\Gamma^W_{f^t}$ соответствуют ячейкам потока f^t, его рёбра соответствуют седловым сепаратрисам и соединяют вершины, соответствующие ячейкам, граничащим по соответствующим рёбрам сепаратрисам. Ребро окрашивается в цвет u, если соответствует неустойчивой седловой сепаратрисе, и в цвет s, если соответствует устойчивой седловой сепаратрисе. При этом, если какая-либо седловая сепаратриса лежит во внутренности замыкания некоторой ячейки, то этой ячейке и этой сепаратрисе соответствует вершина графа с петлёй. То есть, каждая вершина имеет валентность 4, если считать петлю за два условных ребра. Набор этих четырех рёбер, включая условные, разбивается на пары, в каждую из которых входит одно ребро, соответствующее устойчивой сепаратрисе, и одно ребро, соответствующее неустойчивой сепаратрисе, примыкающие друг к другу на границе соответствующей вершине ячейки. Такие пары обозначаются дугой, пересекающей оба ребра пары (см. рис. 4).

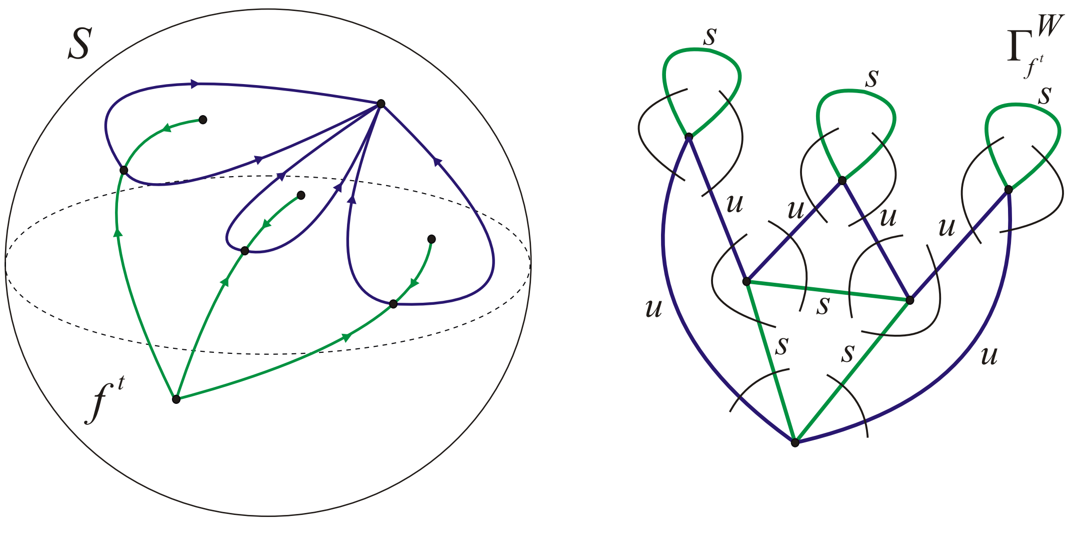

Рис. 4: Поток f^t из G на поверхности S и его граф Вонга $\Gamma^W_{f^t}$

Теорема 4 ([33]*, теорема 3; [22]*, теорема 3.3) *Пусть f^t, f'^t – градиентно-подобные потоки на ориентируемой поверхности S рода g, и $\Gamma^W_{f^t}$, $\Gamma^W_{f'^t}$ – их n-вершинные графы Вонга. Тогда изоморфизм графов $\Gamma^W_{f^t}$ и $\Gamma^W_{f'^t}$ проверяется за время $O\left(n^{O(g)}\right)$, если $g > 0$ и за время $O(n)$, если $g = 0$.*

Градиентно-подобный поток $f^t\colon S \to S$ называется *полярным*, если в его неблуждающем множестве содержится ровно один источник и ровно один сток. *Граф Флейтас* или *круговая схема Флейтас* $\Gamma^F_{f^t}$ для такого потока f^t строится следующим образом. Выберем вокруг источника (единственного, в силу полярности потоков) окружность S, трансверсальную траекториям потока f^t в бассейне источника. Обозначим через D диск, который эта окружность ограничивает в бассейне (т.е. двумерном инвариантном многообразии) источника. Присвоим всем точкам пересечения окружности $\mathcal{S}$ с седловыми сепаратрисами *метки* так, чтобы точки пересечения с сепаратрисами одного и того же седла были с одинаковыми метками. Каждой паре точек с одинаковыми метками присвоим *спин*, то есть знак $+\,(-)$, если объединения диска D с трубчатой окрестностью устойчивого многообразия седловой точки, пересекающего окружность $\mathcal{S}$ по данной паре точек, является кольцом (плёнкой Мёбиуса) (см. рис. 5). Собственно графом Флейтас будем называть окружность S с точками пересечения с седловыми сепаратрисами, оснащёнными присвоенными метками и спинами, при этом точки пересечения будут вершинами графа, а дуги окружности $\mathcal{S}$, соединяющие эти вершины – рёбрами.

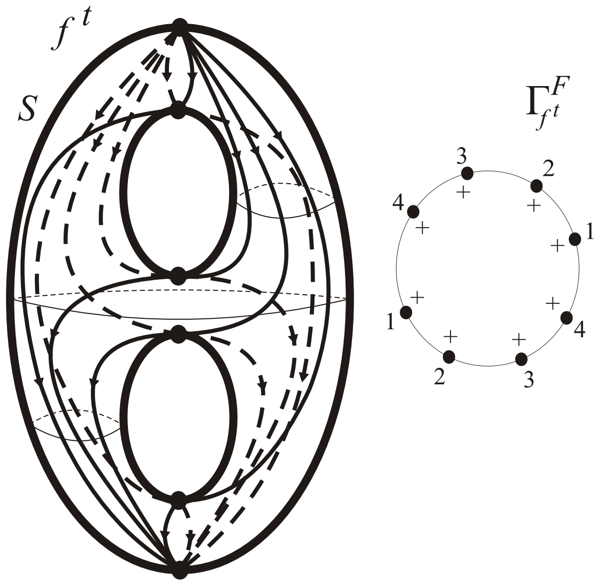

Рис. 5: Полярный поток f^t и его граф Флейтас $\Gamma^F_{f^t}$

Теорема 5 ([33]*, теорема 5; [22]*, теорема 3.4) *Пусть f^t и f'^t – полярные потоки на поверхности S рода g, и $\Gamma^F_{f^t}$, $\Gamma^F_{f'^t}$ – их n-вершинные графы Флейтас. Тогда изоморфизм графов $\Gamma^F_{f^t}$ и $\Gamma^F_{f'^t}$ проверяется за время $O(n^{O(g)})$, если $g > 0$, и за время $O(n)$, если $g = 0$.*

Последний рассмотренный инвариант предназначен вновь для произвольных градиентно-подобных потоков на поверхностях. Обозначим через J_{f^t} множество всех ячеек потока f^t. Выберем по одной траектории θ_J (*t-кривой*) в каждой ячейке $J \in J_{f^t}$.

Положим $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{J \subset \tilde{S}} \theta_J$, $\bar{S} = \tilde{S} \setminus \mathcal{T}$. Назовём *u-кривыми* неустойчивые седловые сепаратрисы и *s-кривыми* – устойчивые седловые сепаратрисы. Из [40] следует, что каждая компонента связности Δ множества $\bar{S}$ является криволинейным треугольником, ограниченным одной s-, одной u- и одной t-кривой, поэтому мы будем называть Δ *треугольной областью*. Обозначим через Δ_{f^t} множество всех треугольных областей потока f^t.

Трёхцветный граф $\Gamma^{OS}_{f^t}$ *Ошемкова-Шарко* из работы [27], соответствующий градиентно-подобному потоку f^t, строится следующим образом (см. рис. 6):

1) вершины графа $\Gamma^{OS}_{f^t}$ взаимно однозначно соответствуют треугольным областям потока;

2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s, t, u, если соответствующие этим вершинам многоугольные области имеют общую s-, t- или u-сторону, а между этим ребром и s, t или u-кривой соответственно устанавливается взаимно однозначное соответствие.

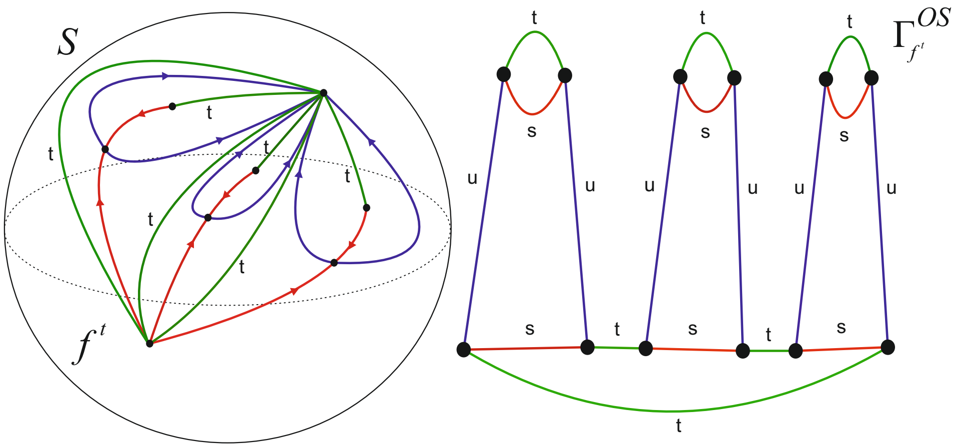

Рис. 6: Фазовый портрет некоторого градиентно-подобного потока и его трёхцветный граф

Теорема 6 ([33]*, теорема 4; [22]*, теорема 3.5) *Пусть f^t, f'^t – градиентно-подобные потоки, заданные на поверхности рода g, и $\Gamma^{OS}_{f^t}$, $\Gamma^{OS}_{f'^t}$ – их n-вершинные трёхцветные графы. Тогда изоморфизм графов $\Gamma^{OS}_{f^t}$ и $\Gamma^{OS}_{f'^t}$ проверяется за время $O\left(n^{O(g)}\right)$ при $g > 0$ и за время $O(n)$ при $g = 0$.*

В главе 3 установлен критерий конечности числа модулей для потоков Морса-Смейла на поверхностях и получена классификация таких потоков в смысле топологической сопряжённости.

Теорема 7 ([20]*, лемма 1; [35]*, теорема 5.1) *Если у потока Морса-Смейла существует неустойчивый предельный цикл, у которого неустойчивое многообразие пересекается с устойчивым многообразием некоторого устойчивого предельного цикла, то поток имеет функциональный модуль топологической сопряжённости, порождающий бесконечное число числовых модулей топологической сопряжённости.*

Рассмотрим поток Морса-Смейла ϕ^t, заданный на замкнутой поверхности S.

Пусть Ω_i – периодическая орбита потока ϕ^t, $K_i = W^u_{\Omega_i}$ для отталкивающего цикла Ω_i и $K_i = W^s_{\Omega_i}$ для притягивающего цикла Ω_i, соответственно.

Лемма 3.2 ([35]*, лемма 4.1) *Существует единственное ϕ^t-инвариантное одномерное слоение Ξ_i на K_i, чьи слои ξ_i являются секущими для траекторий потока $\phi^t|_{K_i}$, и*

$$\phi^{T_i}(z) \in \xi_i,\ \phi^t(z) \notin \xi_i \quad 0 < t < T_i,\ \text{если}\, z \in \xi_i.$$

Такое слоение, о единственности которого говорит лемма 3.1, возникает из работы Ляпунова [25] и использовалось при доказательстве теоремы Андронова-Витта об устойчивости по Ляпунову периодической траектории [1], однако, в упомянутых работах для подобного слоения требовалась гладкость.

Далее, выделен класс потоков Морса-Смейла на поверхностях с конечным числом модулей топологической сопряжённости.

Теорема 8 ([20]*, теорема 1) *Поток Морса-Смейла ϕ^t на поверхности S имеет конечное число модулей тогда и только тогда, когда у ϕ^t не существует неустойчивого предельного цикла, у которого неустойчивое многообразие пересекается с устойчивым многообразием какого-либо устойчивого предельного цикла.*

Далее устанавливается, что каждому классу топологической сопряжённости потока Морса-Смейла ϕ^t с конечным числом модулей взаимно однозначно соответствует класс изоморфности некоторого графа. Для построения такого графа около каждого предельного цикла выбирается окрестность с граничными компонентами связности, трансверсальными траекториям. Эти граничные компоненты делят поверхность на элементарные области. Каждой элементарной области ставится в соответствие вершина графа, а граничным компонентам ставятся в соответствие рёбра, направленные в соответствии с направлением траекторий, пересекающих граничную компоненту.

Все графовые вершины делятся на 3 типа:

– $\mathcal{A}$-вершина, соответствующая элементарной области, из элементов неблуждающего множества содержащей только единственную узловую точку;

– $\mathcal{L}$-вершина, соответствующая элементарной области, из неблуждающего множества содержащей только единственный предельный цикл;

– $\mathcal{M}$-вершина, содержащая хотя бы одну седловую точку.

Такой граф – обозначим его Υ_{ϕ^t} – нуждается в дополнительной информации, чтобы быть топологическим инвариантом. Поэтому $\mathcal{M}$-вершина графа Υ_{ϕ^t} оснащается трёхцветным графом. Именно, рассмотрим некоторую $\mathcal{M}$-область, представляющую собой либо 2-многообразие с границей, либо замкнутую поверхность. В первом случае приклеим объединение D несвязных 2-дисков к границе, чтобы получить замкнутую поверхность M, во втором случае также назовём уже имеющуюся поверхность M и положим $D = \varnothing$. Продолжим поток $\phi^t|_{\mathcal{M}}$ до градиентно-подобного потока $f^t\colon M \to M$ такого, что f^t совпадает с ϕ^t вне D, и Ω_{f^t} имеет в точности одну неподвижную точку (сток или источник) в каждой компоненте связности множества D. Положим

$$\Gamma_{\mathcal{M}} = \Gamma^{OS}_{f^t}.$$

Благодаря вложимости трёхцветного графа $\Gamma_{\mathcal{M}}$ в поверхность M можно индуцировать ориентацию границ области $\mathcal{M}$ на цикл графа $\Gamma_{\mathcal{M}}$, соответствующий узловой точке, лежащей на диске, которым заменили $\mathcal{L}$-область. Такими ориентированными циклами $\tau_{\mathcal{M},\mathcal{L}}$ и $\tau_{\mathcal{L},\mathcal{M}}$ мы оснащаем рёбра $\mathcal{ML}$ и $\mathcal{LM}$ графа Υ_{ϕ^t} соответственно.

Полученный оснащённый граф обозначим через $\Upsilon^*_{\phi^t}$. Согласно работе [27], граф $\Upsilon^*_{\phi^t}$ является полным топологическим инвариантом потока Морса-Смейла с конечным числом модулей с точностью до топологической эквивалентности (см. рис. 7).

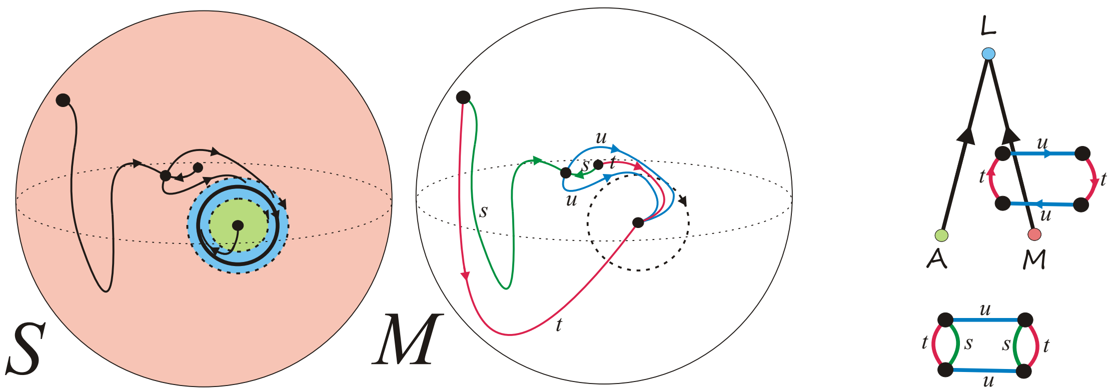

Рис. 7: Фазовый портрет потока Морса-Смейла и его оснащённый граф

Теперь каждую $\mathcal{L}$-вершину графа оснастим периодом соответствующего предельного цикла. Такой оснащённый граф обозначим через $\Upsilon^{**}_{\phi^t}$.

Теорема 9 ([20]*, теорема 2) *Потоки Морса-Смейла ϕ^t, ϕ'^t без пересечений инвариантных многообразий различных предельных циклов топологически сопряжены тогда и только тогда, когда их оснащённые графы $\Upsilon^{**}_{\phi^t}$ и $\Upsilon^{**}_{\phi'^t}$ изоморфны.*

В главе 4 получена классификация Ω-устойчивых потоков на поверхностях с точностью до топологической эквивалентности. Выполнена реализация инвариантов стандартными потоками на поверхности и построены эффективные алгоритмы различения изоморфизмов. Установлено, что потоки со сколь угодно длинной цепочкой связок, в отличие от диффеоморфизмов, имеют конечное число модулей.

Сначала рассмотрим Ω-устойчивый поток f^t без предельных циклов на замкнутой поверхности S. Такому потоку взаимно-однозначно соответствует четырёхцветный граф Γ_{f^t}, обобщающий трёхцветный граф. Именно, в работе доказано, что каждая компонента связности дополнения поверхности до замыкания инвариантных многообразий всех седловых точек является *многоугольной областью*, в границу которой, кроме $s-$, $t-$, $u-$ кривых может входить также любое конечное число c-кривых, являющихся связками. Ориентируем границу многоугольной области в соответствии с положительным направлением движения по t-кривой. Обозначим через Δ_{f^t} множество многоугольных областей потока f^t. Поставим в соответствие потоку f^t четырёхцветный граф следующим образом (см. рис. 8):

1) вершины графа Γ_{f^t} взаимно однозначно соответствуют многоугольным областям множества Δ_{f^t} потока f^t;

2) две вершины графа инцидентны ребру цвета s, t, u или c, если соответствующие этим вершинам многоугольные области содержат в своих замыканиях общую s-, t-, u- или c-кривую;

3) при наличии более чем одного c-ребра, выходящего из некоторой вершины графа Γ_{f^t}, c-рёбра считаются упорядоченными согласно прохождению соответствующих сепаратрис при обходе границы области в направлении t-кривой.

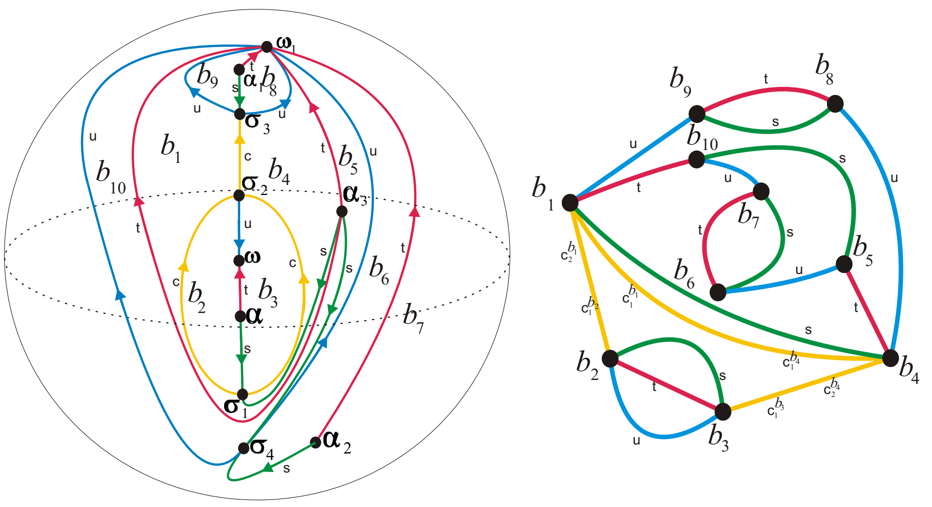

Рис. 8: Фазовый портрет некоторого Ω-устойчивого потока без предельных циклов и его четырёхцветный граф

Теорема 10 ([18]*, теорема 1; [17]*, теорема 1.1; [19]*, теорема 3.1) *Ω-устойчивые потоки f^t и f'^t без предельных циклов топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их четырёхцветные графы Γ_{f^t} и $\Gamma_{f'^t}$ изоморфны.*

Также в работе выделены допустимые абстрактные четырёхцветные графы Γ и конструктивно доказана следующая теорема.

Теорема 11 ([18]*, теорема 3) *Для любого допустимого графа Γ существует Ω-устойчивый поток f^t без предельных циклов, заданный на замкнутой поверхности S, граф которого изоморфен исходному графу, при этом:*

i) эйлерова характеристика поверхности S вычисляется по формуле

$$\chi(S) = \nu_0 - \nu_1 + \nu_2, \tag{1}$$

где ν_0, ν_1 и ν_2 – число всех tu-, c- и st-циклов графа Γ соответственно;

ii) поверхность S является неориентируемой тогда и только тогда, когда граф Γ содержит хотя бы один цикл нечётной длины.

Также в работе установлен эффективный алгоритм различения графов Γ_{f^t}.

Теорема 12 ([18]*, теорема 2; [17]*, теорема 1.2) *Пусть f^t, f'^t – Ω-устойчивые потоки без предельных циклов на поверхности S рода g, и Γ_{f^t}, $\Gamma_{f'^t}$ – их n-вершинные и m-рёберные четырёхцветные графы. Тогда изоморфизм графов Γ_{f^t} и $\Gamma_{f'^t}$ проверяется за время $O(n^{O(g)})$ для $g > 0$ и за время $O(n)$, если $g = 0$. Ориентируемость поверхности S вычисляется за время $O(n + m)$.*

Для произвольного Ω-устойчивого потока ϕ^t на поверхности S оснащённый граф $\Upsilon^*_{\phi^t}$ строится аналогично графу потока Морса-Смейла с помощью деления на элементарные области за тем исключением, что $\mathcal{M}$-вершины оснащаются не трёхцветным, а четырёхцветным графом $\Gamma_{\mathcal{M}}$, а также добавляется вершина 4 типа – $\mathcal{E}$-вершина, соответствующая области без неподвижных точек и предельных циклов. Такая вершина оснащается весом $+$, $-$, если циклы в соседних $\mathcal{L}$-областях ориентированы согласованно, несогласованно соответственно (см. рис. 9). .

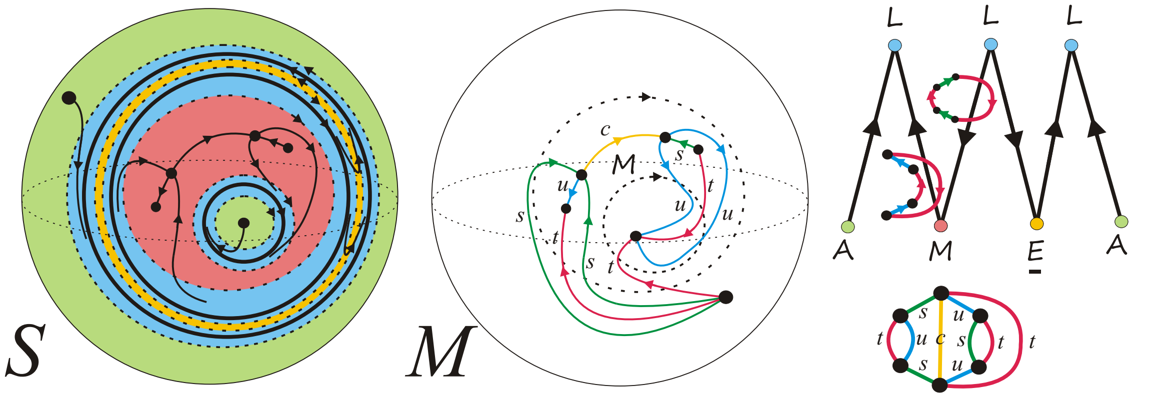

Рис. 9: Ω-устойчивый поток ϕ^t, его поток без предельных циклов f^t, граф $\Upsilon^*_{\phi^t}$ потока ϕ^t

Теорема 13 ([34]*, теорема 5.3; [19]*, теорема 4.1) *Ω-устойчивые потоки ϕ^t и ϕ'^t топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их оснащённые графы $\Upsilon^*_{\phi^t}$ и $\Upsilon^*_{\phi'^t}$ изоморфны.*

Также выделено множество допустимых оснащённых графов и конструктивно доказана следующая теорема.

Теорема 14 ([34]*, теорема 5.9; [21]*, теорема 1) *Каждый допустимый оснащённый граф Υ^* соответствует Ω-устойчивому потоку $\phi^t\colon S\to S$ на замкнутой поверхности S, кроме того:*

(1) эйлерова характеристика поверхности S вычисляется по формуле

$$\chi(S)=\sum_{\mathcal{M}}(X_{\mathcal{M}}-Y_{\mathcal{M}})+N_{\mathcal{A}},$$

где $X_{\mathcal{M}}$ – результат применения формулы (1) к соответствующему допустимому четырёхцветному графу $\Gamma_{\mathcal{M}}$, $Y_{\mathcal{M}}$ – количество рёбер, инцидентных $\mathcal{M}$ и $N_{\mathcal{A}}$ – количество $\mathcal{A}$-вершин графа Υ^*;

(2) Поверхность S ориентируема тогда и только тогда, когда каждый четырёхцветный граф, оснащающий Υ^*, не имеет циклов нечётной длины, и каждая $\mathcal{L}$-вершина имеет валентность 2.

Построен эффективный алгоритм различения оснащённых графов Ω-устойчивых потоков.

Теорема 15 ([34]*, теорема 5.10) *Пусть ϕ^t, ϕ'^t – Ω-устойчивые потоки на поверхности S рода g, и $\Upsilon^*_{\phi^t}$, $\Upsilon^*_{\phi'^t}$ – их n-вершинные и m-рёберные оснащённые графы. Тогда изоморфизм графов $\Upsilon^*_{\phi^t}$ и $\Upsilon^*_{\phi'^t}$ проверяется за время $O(n^{O(g)})$ для $g>0$ и за время $O(n)$, если $g=0$. Ориентируемость поверхности S вычисляется за время $O(n+m)$, эйлерова характеристика может быть вычислена за время $O(m^2)$.*

Еще один результат главы касается доказательства конечности модулей топологической сопряженности у Ω-устойчивых потоков с цепочками связок произвольной длины. Для этого рассматривается класс потоков $f^t\colon S_g\to S_g$ класса гладкости C^2, порождённых градиентным векторным полем функции высоты вертикальной ориентируемой поверхности S_g рода $g>0$. Неблуждающее множество таких систем состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек: одного источника, одного стока и $2g$ седловых точек, образующих цепочку связок длины $2g-1$ (см. рис. 10).

Модулями у таких систем будут отношения собственных значений каждой пары седловых точек, соединённых связками, соответствующих инвариантным многообразиям, не участвующим в соединении данных седловых точек, открытых Ж. Палисом [39]. Результатом данного раздела является факт, что других модулей у подобных систем не возникает.

Теорема 16 ([15]*, теорема 1.1) *Поток $f^t\colon S_g\to S_g$ имеет в точности $2g-1$ модулей.*

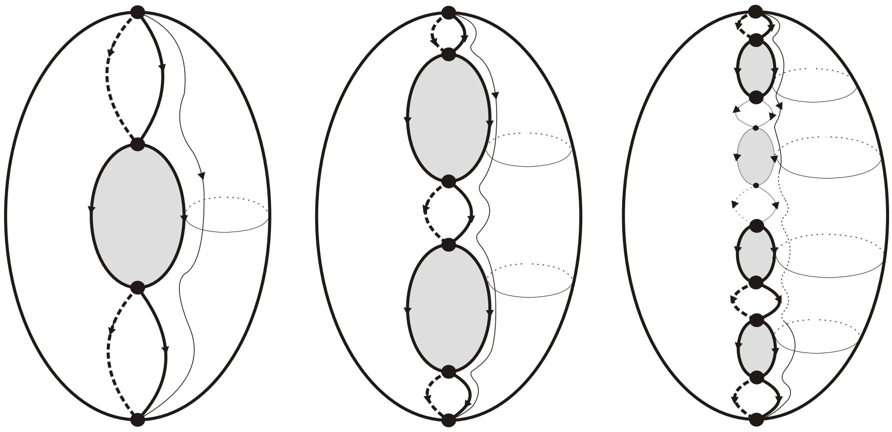

Рис. 10: Примеры потоков с цепочками связок

2 Публикации по результатам исследования

Результаты исследований изложены в восьми статьях.

1. Круглов В. Е., Починка О. В. Классификация с точностью до топологической сопряженности потоков Морса – Смейла с конечным числом модулей устойчивости на поверхностях // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. 2021. Т. 29. № 6. С. 835-850.

2. Kruglov V., Pochinka O. Criterion for the Topological Conjugacy of Multi-Dimensional Gradient-Like Flows with No Heteroclinic Intersections on a Sphere / Пер. с рус. // Journal of Mathematical Sciences. 2020. Vol. 250. P. 22-30. (Круглов В. Е., Починка О. В. Критерий топологической сопряжённости многомерных градиентно-подобных потоков без гетероклинических пересечений на сфере // Проблемы математического анализа. 2020. Т. 104. С. 21-28).

3. Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O., Shubin D. On Topological Classification of Gradient-like Flows on an n-sphere in the Sense of Topological Conjugacy // Regular and Chaotic Dynamics. 2020. Vol. 25. No. 6. P. 716-728. (Круглов В., Малышев Д., Починка О., Шубин Д. О топологической классификации градиентно-подобных потоков на n-мерной сфере в смысле топологической сопряжённости).

4. Kruglov V., Pochinka O., Talanova G. On functional moduli of surface flows // Proceedings of the International Geometry Center. 2020. Vol. 13. No. 1. P. 49-60. (Круглов В., Починка О., Таланова Г. О функциональных модулях потоков на поверхностях).

5. Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O. On Algorithms that Effectively Distinguish Gradient-Like Dynamics on Surfaces // Arnold Mathematical Journal. 2018. Vol. 4. No. 3-4. P. 483-504. (Круглов В., Малышев Д., Починка О. О алгоритмах, эффективно различающих градиентно-подобные потоки на поверхностях).

6. Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O. Topological Classification of Ω-stable Flows on Surfaces by Means of Effectively Distinguishable Multigraphs // Discrete and Continuous Dynamical Systems. 2018. Vol. 38. No. 9. P. 4305-4327. (Круглов В., Малышев Д., Починка О. Топологическая классификация Ω-устойчивых потоков на поверхностях посредством эффективно различимых мультиграфов).

7. Круглов В. Е., Малышев Д. С., Починка О. В. Многоцветный граф как полный топологический инвариант для Ω-устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях // Математический сборник. 2018. Т. 209. № 1. С. 100-126.

8. Круглов В. Е. О числе модулей градиентных потоков функции высоты поверхности // Журнал Средневолжского математического общества. 2018. Т. 20. № 4. С. 419-428.

3 Заключение

В настоящей диссертационной работе рассмотрены три класса потоков на поверхностях с регулярной динамикой: градиентно-подобные потоки, потоки Морса-Смейла и Ω-устойчивые потоки. Перечисленные классы исследованы с точки зрения наличия и количества модулей топологической сопряжённости, для них найдены полные инварианты эквивалентности, а в случае конечности числа модулей, и инварианты топологической сопряжённости. Для всех классов доказано существование полного инварианта, являющегося оснащённым графом, выделен класс допустимых оснащённых графов с последующей их реализацией соответствующим потоком, а также построены эффективные алгоритмы различения изоморфности оснащённых графов.

Перечислим основные результаты работы, выносимые на защиту.

- Доказано, что градиентно-подобные потоки на поверхностях топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они топологически эквивалентны (теорема 1).

- Построены эффективные алгоритмы распознавания изоморфности следующих инвариантов градиентно-подобных потоков на поверхностях:

  - граф Пейшото (теорема 2);

  - модифицированный граф Пейшото (теорема 3);

  - граф Вонга (теорема 4);

  - граф Флейтас (теорема 5);

  - трёхцветный граф Ошемкова-Шарко (теорема 6).

- Найдены необходимые и достаточные условия того, что поток Морса-Смейла на поверхности имеет конечное число модулей топологической сопряжённости (теорема 8), а также найден функциональный модуль у потока Морса-Смейла, обладающего устойчивым и неустойчивым предельными циклами, у которых инвариантные многообразия пересекаются (теорема 7).

- Для потоков Морса-Смейла с конечным числом модулей построен полный инвариант топологической сопряжённости – оснащённый граф (теорема 9).

- Для Ω-устойчивых потоков без предельных циклов построен полный инвариант топологической эквивалентности – четырёхцветный граф (теорема 10). Выделен класс допустимых оснащённых графов, по каждому из которых построен поток в рассматриваемом классе (теорема 11), а также построен эффективный алгоритм различения изоморфности таких графов (теорема 12).

- Для Ω-устойчивых потоков в общем случае построен полный инвариант топологической эквивалентности – оснащённый граф (теорема 13). Выделен класс допустимых оснащённых графов, по каждому из которых построен поток в рассматриваемом классе (теорема 14), а также построен эффективный алгоритм различения изоморфности таких графов (теорема 15).

- Установлено, что потоки со сколь угодно длинной цепочкой связок, в отличие от диффеоморфизмов, имеют конечное число модулей топологической сопряжённости (теорема 16).

Список литературы

[1] Андронов А. А., Витт А. А., Об устойчивости по Ляпунову // ЖЭТФ. - 1933. - Т. 3. - № 5. - С. 372-374.

[2] Арансон С. Х., Гринес В. З., Топологическая классификация каскадов на замкнутых двумерных многообразиях // УМН. - 1990. - Т. 45. - № 1(271). - С. 3-32. [Английский перевод в Российской Мат. Серии - 1990. - № 4.]

[3] Арнольд В. И., Афраймович В. С., Ильяшенко Ю.С., Шильников Л.П. Теория бифуркаций. Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ РАН. - 1986. - Т. 5. - 283 с.

[4] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 1 // Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е.А. Леонтович-Андроновой. - 1985. - ГГУ. - Горький. - С. 22-38.

[5] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Динамические свойства и топологическая классификация градиентноподобных диффеоморфизмов на двумерных многообразиях. Часть 2 // Методы качественной теории дифференц. уравнений. Межвуз. темат. сб. научн. тр. под ред. Е.А. Леонтович-Андроновой. - 1987. - ГГУ. - Горький. - С. 24-32.

[6] Безденежных А. Н., Гринес В. З. Реализация градиентноподобных диффеоморфизмов двумерных многообразий // Дифференциальные и интегральные уравнения. Сб. науч. тр. под ред. Н.Ф. Отрокова. - 1985. - ГГУ. - Горький. - С. 33-37.

[7] Боревич Е. З. Условия топологической эквивалентности двумерных диффеоморфизмов Морса-Смейла // Дифференц. уравнения. - 1981. - Т. 17. - № 9. - С. 1481-1482.

[8] Власенко И. Ю. О полном инварианте диффеоморфизмов Морса–Смейла на неориентируемых поверхностях // УМН. - 1999. - Т. 54. - № 5(329). - С. 155–156.

[9] Гонченко С. В., Тураев Д. В., Шильников Л. П. О моделях с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Докл. АН СССР. - 1991. - Т. 320. - № 2. - С. 269–272.

[10] Гонченко С. В., Шильников Л. П. О модулях систем с негрубой гомоклинической кривой Пуанкаре // Изв. РАН. Сер. матем. - 1992. - Т. 56. - № 6. - С. 1165–1197.

[11] Гринес В.З. Топологическая классификация диффеоморфизмов Морса-Смейла с конечным множеством гетероклинических траекторий на поверхностях // Матем. заметки. - 1993. - Т. 54. - № 3. - С. 3-17.

[12] Гринес В. З., Капкаева С. Х., Починка О. В. Трехцветный граф как полный топологический инвариант для градиентно-подобных диффеоморфизмов поверхностей // Матем. сб. - 2014. - Т. 205. - № 10. - С. 19–46.

[13] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. Пер. с англ. - М.: Мир. - 1982. - 416 с.; [Garey M. R., Johnson D. S. Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness. - San Francisco, CA: A Series of Books in the Mathematical Sciences, W. H. Freeman and Co. - 1979. - x+338 p.]

[14] Коснёвски Ч. Начальный курс алгебраической топологии. Перевод с англ. Быкова В.М. - М.:Мир. - 1983. - 302 с. [Kosniowski Cz. A First Course in Algebraic Topology. - Cambridge, New-Your: Cambridge University Press. - 1980.]

[15] Круглов В. Е. О числе модулей градиентных потоков функции высоты поверхности // Журнал Средневолжского математического общества. - 2018. - Т. 20. - № 4. - С. 419-428.

[16] Круглов В. Е. Topological conjugacy of gradient-like flows on surfaces // Динамические системы. - 2018. - Т. 8(36). - № 1. - С. 15-21.

[17] Круглов В. Е., Малышев Д. С., Починка О. В. Графовый критерий топологической эквивалентности Ω-устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях и эффективный алгоритм для его применения // Журнал Средневолжского математического общества. - 2016. - Т. 18. - № 2. С. - 47-58.

[18] Круглов В. Е., Малышев Д. С., Починка О. В. Многоцветный граф как полный топологический инвариант для Ω-устойчивых потоков без периодических траекторий на поверхностях // Математический сборник. - 2018. - Т. 209. - № 1. - С. 100-126.

[19] Круглов В. Е., Починка О. В. Графовый критерий топологической эквивалентности Ω-устойчивых потоков на поверхностях // Журнал Средневолжского математического общества. - 2016. - Т. 18. - № 3. - С. 41-48.

[20] Круглов В. Е., Починка О. В. Классификация с точностью до топологической сопряженности потоков Морса – Смейла с конечным числом модулей устойчивости на поверхностях // Известия высших учебных заведений. Прикладная нелинейная динамика. - 2021. - Т. 29. - № 6. - С. 835-850.

[21] Круглов В. Е., Починка О. В. Реализация оснащённого двудольного графа Омегаустойчивым потоком на поверхности // Дифференциальные уравнения и их приложения в математическом моделировании: материалы XIII Международной научной конференции (Саранск, 12–16 июля 2017 г.). - Саранск : Средневолжское математическое общество (СВМО). - 2017. - Гл. 59. - С. 418-427.

[22] Круглов В. Е., Починка О. В. Топологическая сопряженность градиентно-подобных потоков на поверхностях и эффективные алгоритмы ее различения // СМФН. - 2022. - Т. 68. - № 3. - С. 467–487.

[23] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О схеме, определяющей топологическую структуру разбиения на траектории // Докл. Акад. АН СССР. - 1955. - Т. 103. - № 4. - С. 557-560.

[24] Леонтович Е. А., Майер А. Г. О траекториях, определяющих качественную структуру разбиения сферы на траектории // Докл. Акад. АН СССР. - 1937. - Т. 14. - № 5. - С. 251-257.

[25] Ляпунов А. Общая задача об устойчивости движения. - Харьков. - 1892. - XII+251 с.

[26] Митрякова Т. М., Починка О. В. О необходимых и достаточных условиях топологической сопряженности диффеоморфизмов поверхностей с конечным числом орбит гетероклинического касания // Труды МИАН. Дифференциальные уравнения и динамические системы. - М.: МАИК «Наука/Интерпериодика». - 2010. - Т. 270. - С. 155-156.

[27] Ошемков А. А., Шарко В. В. О классификации потоков Морса–Смейла на двумерных многообразиях // Математический сборник. - 1998. - Т. 189. - № 8. - С. 93-140.

[28] Bonatti C., Grines V., Langevin R. Dynamical systems in dimension 2 and 3: Conjugacy invariants and classification // Comput. Appl. Math. - 2001. - V. 20. - No. 1-2. - P. 11-50.

[29] Bonatti Ch., Langevin R. Diffeomorphismes de Smale des surfaces. Astérisque. - V. 250. - Paris: Societe mathematique de France. - 1998. - 236 p.

[30] Cobham A. The intrinsic computational difficulty of functions // Logic, methodology, and philosophy of science. - North-Holland, Amsterdam: Proceedings of the 1964 international congress. - 1965. - P. 24–30.

[31] Fleitas G. Classification of gradient-like flows on dimensions two and three // Bol. Soc. Brasil. Mat. - 1975. - V. 6. - P. 155-183.

[32] Grines V. Z., Medvedev T. V., Pochinka O. V. Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds. Dev. Math. - V. 46. - Cham: Springer. - 2016. - xxvi+295 p.

[33] Kruglov V., Malyshev D., Pochinka O. On Algorithms that Effectively Distinguish Gradient-Like Dynamics on Surfaces // Arnold Mathematical Journal. - 2018. - V. 4. - No. 3-4. - P. 483-504.

[34] Kruglov V. E., Malyshev D. S., Pochinka O. V. Topological classification of Ω-stable flows on surfaces by means of effectively distinguishable multigraphs // Discrete and Continuous Dynamical Systems – Series A. - 2018. - V. 38. - No. 9. - P. 4305–4327.

[35] Kruglov V., Pochinka O., Talanova G. On functional moduli of surface flows // Proceedings of the International Geometry Center. - 2020. - V. 13. - No. 1. - P. 49-60.

[36] De Melo W., van Strien S. J. Diffeomorphisms on surfaces with a finite number of moduli // Ergod. Th. and Dynam. Sys. - 1987. - V. 7. - P. 415-462.

[37] Neumann D., O'Brien T. Global structure of continuous flows on 2-manifolds // J. DifF. Eq.. - 1976. - V. 22. - No. 1. - P. 89-110.

[38] Newhouse S., Palis J. Hyperbolic nonwandering sets on two-dimensional manifolds. Dynamical Systems. Ed. M. M. Peixoto. - Academic Press. - 1973.

[39] Palis J. A differentiable invariant of topological conjugacies and moduli of stability // Astèrisque. - 1978. - 51. - P. 335–346.

[40] Peixoto M. M., On the classification of flows on 2-manifolds. Dynamical systems. - Salvador: Univ. Bahia. - 1971. New-York: Academic Press. - 1973. - P. 389–419.

[41] Smale S. Differentiable dynamical systems // Bulletin of the American Mathematical Society. - 1967. - V. 73. - No. 6. - P. 747-817.

[42] Wang X. The C^*-algebras of Morse-Smale flows on two-manifolds // Ergodic Theory Dynam Sytems. - 1990. - V. 10. - No. 4. - P. 565-597.