Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Широков Дмитрий Сергеевич

Некоторые алгебро-геометрические методы в теории поля и других приложениях

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ
на соискание ученой степени доктора наук
по прикладной математике

Москва – 2023

Актуальность и степень разработанности темы исследования

1) В настоящее время законы физики элементарных частиц описываются квантовыми калибровочными теориями[1]. Теория Янга – Миллса[2] описывает три из четырех фундаментальных взаимодействий в природе (электромагнитное, электрослабое и сильное взаимодействия). Электромагнитное взаимодействие описывается уравнениями Максвелла, которые являются частным случаем уравнений Янга – Миллса с калибровочной (абелевой) группой Ли $\mathrm{U}(1)$. Электрослабое взаимодействие описывается уравнениями Янга – Миллса с калибровочной (неабелевой) группой Ли $\mathrm{U}(1) \times \mathrm{SU}(2)$, сильное взаимодействие – с калибровочной (неабелевой) группой Ли $\mathrm{SU}(3)$. Вопросы, связанные с уравнениями Янга – Миллса, находятся в центре внимания специалистов; есть надежда, что решение этих вопросов в перспективе может привести к ответам на такие фундаментальные проблемы математической физики, как проблемы дефекта масс, спектра масс, пониманию механизма конфайнмента.

Точные решения уравнений Янга – Миллса важны для развития калибровочной теории (в частности, для описания вакуумной структуры теории[3] [4] и более полного понимания калибровочной теории[5]). Сложность изучения уравнений Янга – Миллса связана с нелинейностью этих уравнений. Усилиями ряда исследователей были найдены некоторые нетривиальные классы частных решений уравнений Янга – Миллса: монополи[6] [7] [8], инстантоны[9] [10], мероны[11] и др. Отметим известную ADHM-конструкцию[12], которая позволяет полностью описать пространство модулей инстантонов с помощью алгебро-геометрических методов. Различные частные классы решений уравнений Янга – Миллса с $\mathrm{SU}(2)$ калибровочной группой представлены в обзоре[13]. Указанный обзор содержит ссылки на ряд других работ по точным решениям уравнений Янга – Миллса.

---

[1] Славнов А. А., Фаддеев Л. Д., *Введение в квантовую теорию калибровочных полей.* 2-е изд. М.: Наука. 1988.

[2] Yang C. N., Mills R. L., *Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance* // Phys. Rev. 1954. V. 96.

[3] Greensite J. P., *Calculation of the Yang–Mills vacuum wave functional* // Nuclear Physics B, 158 (1979).

[4] Jackiw R., Rebbi C., *Vacuum Periodicity in a Yang–Mills Quantum Theory* // Phys. Rev. Lett., 37 (1976) 172.

[5] Nian J., Qian Y., *A topological way of finding solutions to Yang–Mills equations* // Commun. Theor. Phys., 72:8, 2020.

[6] Wu T. T., Yang C. N., *Some Solutions of the Classical Isotopic Gauge Field Equations* // Properties of Matter Under Unusual Conditions, H. Mark & S. Fernbach (Eds), Interscience, 1968.

[7] 't Hooft G., *Magnetic Monopoles in Unified Gauge Theories* // Nucl.Phys. B., 79 (1974).

[8] Polyakov A. M., *Isomeric states of quantum fields* // Sov.Phys. – JETP, 41 (1975).

[9] Belavin A. A., Polyakov A. M., Schwartz A. S., Tyupkin Yu. S., *Pseudoparticle solutions of the Yang–Mills equations* // Phys. Lett. B., 59 (1975) 85.

[10] Witten E., *Some Exact Multipseudoparticle Solutions of Classical Yang–Mills Theory* // Phys. Rev. Lett., 38 (1977) 121.

[11] de Alfaro V., Fubini S., Furlan G., *A new classical solution of the Yang–Mills field equations* // Phys. Lett. B, 65 (1976) 163.

[12] Atiyah M., Drinfeld V., Hitchin N., Manin Yu., *Construction of instantons* // Physics Letters A, 65 (1978).

[13] Actor A., *Classical solutions of SU(2) Yang–Mills theories* // Rev. Mod. Phys., 51 (1979).

Постоянные (не зависящие от точки x евклидова $\mathbb{R}^n$ или псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$) решения уравнений Янга – Миллса с нулевым током рассматриваются в работах R. Schimming и E. Mundt[14 15], где авторы пишут: *“The following problems concerning constant Yang–Mills fields are actual ones in our opinion: Is there a gauge- and coordinate-invariant characterization of those Yang–Mills fields which admit constant potentials with respect to some gauge and some coordinate system? Find as many as possible (in the ideal case: all) constant Yang–Mills fields and classify them!”* [16]. В своей работе мы даем полный ответ на поставленные вопросы в случае группы Ли SU(2). Наши результаты для произвольного тока согласуются с результатами упомянутых работ для нулевого тока. В частности, в работах[14 15] доказано, что в случае нулевого тока $J = 0$ напряженность поля Янга – Миллса является нулевой $F = 0$ для всех постоянных потенциалов A, удовлетворяющих уравнениям Янга – Миллса в случае евклидовых и лоренцевых сигнатур. Этот факт явно подтверждается в нашей работе для всех постоянных решений уравнений Янга – Миллса с SU(2) калибровочной симметрией, кроме этого в нашей работе приводятся решения с ненулевой напряженностью $F \neq 0$ и нулевым током $J = 0$ во всех остальных случаях $p \geq 2$ и $q \geq 2$.

Отметим, что постоянные решения уравнений Янга – Миллса являются существенно нелинейными решениями и, с этой точки зрения, особенно важны для приложений.

Почти все известные классы решений уравнений Янга – Миллса рассматриваются для нулевого тока и, чаще всего, только для частного случая евклидова пространства или пространства Минковского. Инстантоны являются решениями уравнений Янга – Миллса в евклидовом пространстве-времени (с мнимым временем).

Преимущество настоящей работы заключается в том, что предъявляются все постоянные решения не только для нулевого тока, а для произвольного ненулевого тока. Одним из основных результатов настоящей работы является представление всех постоянных решений уравнений Янга – Миллса с SU(2) калибровочной симметрией для произвольного неабелева тока в произвольном псевдоевклидовом (и евклидовом) пространстве размерности n. Используя алгебро-геометрические методы, мы представляем общее решение алгебраических систем специального вида из $3n$ кубических уравнений с $3n$ неизвестными и $3n$ параметрами. Данная задача решается с использованием метода сингулярного разложения (SVD, singular value decomposition) в слу-

[14] Schimming R., *On constant solutions of the Yang–Mills equations* // Arch. Math., 24:2 (1988).

[15] Schimming R., Mundt E., *Constant potential solutions of the Yang–Mills equation* // J. Math. Phys., 33 (1992) 4250.

[16] Перевод: *“На наш взгляд, актуальными являются следующие проблемы, касающиеся постоянных полей Янга – Миллса: существует ли калибровочно- и координатно-инвариантная характеризация тех полей Янга – Миллса, которые допускают постоянные потенциалы относительно некоторой калибровки и некоторой системы координат? Найти как можно больше (в идеале, все) постоянные поля Янга – Миллса и классифицировать их!”*

чае евклидова пространства и гиперболического сингулярного разложения (HSVD, hyperbolic singular value decomposition) в случае псевдоевклидова пространства. Используя инвариантность уравнений Янга – Миллса по отношению к (псевдо)ортогональным заменам координат и калибровочную инвариантность, мы выбираем специальную систему координат и специальную фиксацию калибровки для каждого постоянного тока и получаем все постоянные решения уравнений Янга – Миллса в данной системе координат с данной фиксацией калибровки, а затем и в исходной системе координат с исходной фиксацией калибровки. В предложенном подходе существенным образом используется двулистное накрытие ортогональной группы $\mathrm{SO}(3)$ спинорной группой $\mathrm{Spin}(3) \cong \mathrm{SU}(2)$.

Известны некоторые классы частных решений уравнений Янга – Миллса – Дирака[17] [18] [19] [20] [21] [22] [23]. В данной работе мы представляем все постоянные решения этой системы уравнений в пространстве Минковского с помощью методов гиперболического сингулярного разложения и двулистного накрытия ортогональной группы спинорной группой. Также используется калибровочная инвариантность уравнения Дирака по отношению к псевдоунитарной группе $\mathrm{SU}(2,2)$[24].

Уравнение Прока[25] является обобщением уравнений Максвелла. Оно не является калибровочно инвариантным и описывает массивные частицы со спином 1. Уравнения Янга – Миллса – Прока рассматриваются, например, в работе[26]. Данные уравнения являются одновременно обобщением уравнений Янга – Миллса и уравнения Прока, они также не являются калибровочно инвариантными. Мы представляем все постоянные решения системы уравнений Янга – Миллса – Прока в случае группы Ли $\mathrm{SU}(2)$ в евклидовом и псевдоевклидовом пространстве произвольной размерности и сигнатуры.

---

[17] Akhoury R., Weisberger W. I., *Self-consistent solutions for fermions in constant SU(2) gauge potentials* // Nuclear Physics B 174(1) (1980).

[18] Antoine J.-P., Mahara I., *Classical Yang–Mills–Dirac Equations: Qualitative Analysis of Some Solutions with a Noncompact Symmetry Group* // Letters in Mathematical Physics, 38 (1996).

[19] Antoine J.-P., Dabrowski L., Mahara I., *Classical Yang–Mills–Dirac system with conformal symmetry: a geometric analysis* // Modern Physics Letters A, 09:37 (1994).

[20] Basler M., *Self-Consistent Spherically Symmetric Solutions of the Yang–Mills–Dirac–Equations* // Z. Phys. C – Particles and Fields 20, (1983).

[21] Magg M., *Static solutions of the coupled Yang–Mills–Weyl equations* // Journal of Mathematical Physics 25, 1539 (1984).

[22] Meetz K., *Finite energy solutions for interacting Yang–Mills and Dirac fields on Minkowski space* // Zeitschrift für Physik C Particles and Fields, 6 (1980).

[23] Rudolph G., Tok T., Volobuev I., *Exact solutions in Einstein – Yang – Mills – Dirac systems* // Journal of Mathematical Physics 40, 5890 (1999).

[24] Марчук Н. Г., *Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда*, Изд. 2-е, расш. и доп., Ленанд, М., 2018.

[25] Proca A., *Wave Theory of Positive and Negative Electrons* // J. Phys. Radium, 7 (1936).

[26] Dzhunushaliev V., Folomeev V., *Dirac star with SU(2) Yang–Mills and Proca fields* // Phys. Rev. D. 2020. V. 101. № 024023.

Решения типа плоской волны уравнений Янга – Миллса рассматриваются в работах[27] [28] [29] [30] [31] [32] [33] [34]. Мы представляем все решения типа плоской волны уравнений Янга – Миллса с SU(2) калибровочной симметрией и нулевым током в евклидовом и псевдоевклидовом пространстве произвольной конечной размерности и сигнатуры.

2) Метод сингулярного разложения[35] [36] (SVD) был независимо предложен E. Beltrami[37] и C. Jordan[38] [39] в 1873 и 1874 годах соответственно. Этот метод широко используется в различных приложениях – компьютерных науках, инженерии, обработке сигналов и изображений, автоматизации производства, аппроксимации данных методом наименьших квадратов и др.

Метод гиперболического сингулярного разложения (HSVD) впервые был предложен R. Onn, A. O. Steinhardt и A. W. Bojanczyk в 1989 году[40] для частного случая комплексных матриц $A_{n\times N}$ с $n \geq N$, $\mathrm{rank}(A\eta A^\dagger) = \mathrm{rank}(A) = N$ (здесь и далее обозначения соответствуют Теореме 3)[41]. В данном частном случае имеем $d = 0$, и матрица Σ является диагональной со всеми положительными диагональными элементами. В следующей работе[42] этих же трех авторов сформулировано утверждение для чуть более общего случая – произвольных n и N, $\mathrm{rank}(A\eta A^\dagger) = \mathrm{rank}(A) = \min(n, N)$. В третьей работе этих авторов[43] представлено обобщение HSVD на случай $\mathrm{rank}(A\eta A^\dagger) < \mathrm{rank}(A)$. В этом обобщении некоторые элементы матрицы Σ

[27] Coleman S., *Non-Abelian plane waves* // Phys. Lett. B. 70, 1977

[28] Melia F., Lo S., *Linear plane waves solutions of the Yang–Mills theory* // Phys. Lett. B. 77, 1978.

[29] Baseyan G. Z., Matinyan S. G., Savvidi G. K., *Nonlinear plane waves in the massless Yang–Mills theory* // ZhETF Pis'ma Redaktsiiu. 1979. V. 29.

[30] Campbell W. B., Morgan T. A., *Non-abelian plane-fronted waves* // Phys. Lett. B. 84, 1979.

[31] Oh C., Teh R., *Periodic solutions of the Yang–Mills field equations* // Phys. Lett. B. 87, 1979.

[32] Oh C., Teh R., *Nonabelian progressive waves* // Journal of Mathematical Physics. 26, 1985.

[33] Tsapalisa A., Politisa E. P., Maintasa X. N., Diakonosa F. K., *Gauss' Law and Non-Linear Plane Waves for Yang–Mills Theory* // Phys. Rev. D. 2016. V. 93. 085003.

[34] Li W., *Wave Solutions to the Yang–Mills Equation*, 60 pp., 2017. https://www.physics.nus.edu.sg/wp-content/uploads/sites/5/2020/08/hyp-201617-16.pdf

[35] Forsythe G. E., Malcolm M. A., Moler C. B., *Computer Methods for Mathematical Computations* (Prentice Hall, Upper Saddle River, 1977).

[36] Golub G., Van Loan C., *Matrix Computations*, JHU Press, Baltimore, 1989.

[37] Beltrami E., *Sulle funzioni bilineari*. Giomale di Matematiche ad Uso degli Studenti Delle Universita. 1873. V. 11.

[38] Jordan C., *Memoire sur lesformes bilineaires* // J. Math. Pures Appl., 2e serie. 19, 1874.

[39] Jordan C., *Sur la reduction desformes bilineaires* // Comptes Rendus de l'Academie Sciences, Paris. 78, 1874.

[40] Onn R., Steinhardt A. O., Bojanczyk A. W., *The hyperbolic singular value decomposition and applications* // Proceedings of the 32nd Midwest Symposium on Circuits and Systems. 1989.

[41] Для единообразия во всей работе мы обозначаем эрмитово сопряженную матрицу через $A^\dagger$, как принято в теории уравнений Янга – Миллса и других физических приложениях; математики обозначают эрмитово сопряженную матрицу также через A^* или A^H.

[42] Onn R., Steinhardt A. O., Bojanczyk A. W., *The hyperbolic singular value decomposition and applications* // IEEE Trans. Signal Proc., 39 (1991).

[43] Bojanczyk A. W., Onn R., Steinhardt A. O., *Existence of the hyperbolic singular value decomposition* // Linear Algebra and its Applications, 185 (1993).

оказываются комплексными. H. Zha в своей работе[44] указал, что данное обобщение выглядит неестественным, и предложил другое обобщение, используя только матрицу Σ с вещественными элементами. B. C. Levy[45] представил утверждение результата H. Zha в другой форме, используя другое доказательство. В то же время, результат B. C. Levy является более слабым: присутствуют дополнительные произвольные диагональные блоки вместо единичных блоков I_d в матрице Σ; не представлен явный вид матрицы $\hat{\eta}$; рассмотрен только случай $n \geq N$. Отметим также интересные результаты S. Hassi [46], B. N. Parlett[47] и V. Šego[48] [49] по другим обобщениям SVD на гиперболический случай, а также мультилинейное сингулярное разложение[50]. Гиперболическое сингулярное разложение используется в обработке сигналов и изображений[51], инженерии[52], компьютерных науках[53] [54], физике[55] и др.

В данной работе мы представляем новую версию HSVD для произвольной комплексной (или вещественной) матрицы. Преимущество новой версии HSVD перед предыдущими версиями (из них наиболее полная версия дана H. Zha) заключается в том, что она не использует гиперобменные матрицы, которые не образуют группу. Вместо гиперобменных матриц мы используем матрицы из псевдоунитарных и псевдоортогональных групп, которые более естественны с теоретической и практической точек зрения. Другое преимущество новой версии заключается в том, что она содержит только три инвариантных параметра (d, x и y) и не содержит другие избыточные параметры (k и s) из результата H. Zha. Также новая версия HSVD естественным образом включает как частный случай обычное SVD и, таким образом, является более общим

[44] Zha H., *A note on the existence of the hyperbolic singular value decomposition* // Linear Algebra and its Applications. 1996; 240.

[45] Levy B. C., *A note on the hyperbolic singular value decomposition* // Linear Algebra and its Applications. 1998; 277.

[46] Hassi S., *A Singular Value Decomposition of Matrices in a Space with an Indefinite Scalar Product* // Series A, Mathem., dissert. 79, Annales Academiae Scientiarum Fennicae, Helsinki, 1990.

[47] Parlett B. N., *A Bidiagonal Matrix Determines Its Hyperbolic SVD to Varied Relative Accuracy* // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2005; 26(4).

[48] Šego V., *Two-sided hyperbolic singular value decomposition.* Dissertation. 2009; 130 pp. https://bib.irb.hr/datoteka/465088.drsc.proc.pdf

[49] Šego V., *Two-sided hyperbolic SVD* // Linear Algebra and its Applications. 433, 2010.

[50] De Lathauwer L., De Moor B., Vandewalle J., *A Multilinear Singular Value Decomposition* // SIAM J. Matrix Anal. Appl. 2000; 21(4).

[51] Bojanczyk A. W., Steinhardt A. O., *A linear array for covariance differencing via hyperbolic SVD* // Proc. Vol. 1152, Advances Algorithms and Architectures for Signal Processing IV, 1989.

[52] Kulikova M. V., *Hyperbolic SVD-based Kalman filtering for Chandrasekhar recursion* // IET Control Theory & Applications. 2019; 13(10): 1525.

[53] Bojanczyk A. W., *An implicit Jacobi-like method for computing generalized hyperbolic SVD* // Linear Algebra and its Applications. 2003; 358.

[54] Politi T., *A continuous approach for the computation of the hyperbolic singular value decomposition* // ICCS 2004. LNCS. Springer, Berlin, Heidelberg. 2004; 3039.

[55] Singer S., Napoli E. D., Novaković V., Čaclović G., *The LAPW method with eigendecomposition based on the Hari–Zimmermann generalized hyperbolic SVD* // SIAM J. Sci. Comput. 42 (2020).

математическим аппаратом. Необходимость использования HSVD вместо SVD возникает, когда мы можем пользоваться только одним ортогональным и одним псевдоортогональным преобразованиями (вместо двух ортогональных), как это, например, происходит в случае уравнений Янга – Миллса в псевдоевклидовых пространствах. Другой результат нашей работы заключается в представлении связи между HSVD и обобщенной задачей на собственные значения. Новая версия HSVD позволяет свести задачу о вычислении HSVD к вычислению собственных чисел, собственных векторов и обобщенных собственных векторов (присоединенных векторов) некоторых вспомогательных матриц в общем случае. Эти результаты обобщают известные результаты о связи между SVD и задачей на собственные значения.

3) В данной работе мы активно развиваем и пользуемся методами, связанными с алгебрами Клиффорда (или геометрическими алгебрами). Алгебры Клиффорда были предложены в 1878 году В. Клиффордом[56] как обобщение кватернионов Гамильтона[57] и внешней алгебры Грассмана[58]. В настоящее время алгебры Клиффорда широко используются в различных науках – физике, теории поля, механике, космической динамике, геометрии, инженерии, робототехнике, компьютерных науках, компьютерном зрении, обработке сигналов и изображений, химии и др. Особую роль алгебры Клиффорда играют при изучении уравнения Дирака[59 60], в которое входят так называемые γ-матрицы Дирака, порождающие алгебру Клиффорда сигнатуры $(1,3)$. В настоящее время регулярно проходят крупные международные конференции по приложениям алгебр Клиффорда в различных науках – International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics (последние конференции прошли в 2020, 2017, 2014, 2011 годах), International Conference on Applied Geometric Algebras in Computer Science and Engineering (2021, 2018, 2015, 2012 гг.), Alterman Conference on Geometric Algebra and Summer School on Kähler Calculus (2019, 2018, 2017, 2016 гг.), Empowering Novel Geometric Algebra for Graphics & Engineering Worksop at the International Conference Computer Graphics International (2022, 2021, 2020, 2019, 2018, 2017 гг.), International Conference of Advanced Computational Applications of Geometric Algebra (2022 г.) и др. Отметим недавние обзоры[61 62] по современным приложениям алгебр Клиффорда в различных науках, в которых обсуждаются 4 работы автора [4, 5, 7, 11].

Вещественные алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ изоморфны матричным алгебрам над $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$, $\mathbb{H}$

[56] Clifford W. K., *Application of Grassmann's Extensive Algebra'* // American Journal of Mathematics, 1:4 (1878).

[57] Hamilton W. R., *On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra* // Phil. Mag. (3), 25 (1844).

[58] Grassmann H., *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*, Verlag von Otto Wigand, Leipzig, 1844.

[59] Dirac P. A. M., *The quantum theory of electron* // Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 117 (1928).

[60] Dirac P. A. M., *The quantum theory of electron. Part II* // Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 118 (1928).

[61] Hitzer E., Lavor C., Hildenbrand D., *Current Survey of Clifford Geometric Algebra Applications* // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 37 pages, (2022) viXra:2204.0062.

[62] Breuils S., Tachibana K., Hitzer E., *New Applications of Clifford's Geometric Algebra* // Adv. Appl. Clifford Algebras, 32, 17 (2022).

или $\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$ в зависимости от $p-q \mod 8$ (так называемая периодичность Картана), комплексифицированные алгебры Клиффорда $\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$ изоморфны матричным алгебрам над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ в зависимости от $n \mod 2$. Преимущество использования алгебр Клиффорда в приложениях вместо соответствующих матричных алгебр состоит в более богатом математическом аппарате, который позволяет естественным образом реализовать различные алгебраические и геометрические структуры, спинорные группы[63 64], спиноры[65 66 67 68 69] и др. В связи с этим возникает задача о переложении известных матричных методов в формализм алгебр Клиффорда[70 71 72].

Вопрос о вычислении обратных элементов в алгебрах Клиффорда изучался во многих работах в случае малых размерностей[73 74 75 76]. Характеристический многочлен в алгебрах Клиффорда рассматривался в работе[77]. Мы предложили явные формулы для всех коэффициентов характеристического многочлена в алгебрах Клиффорда в случае произвольной размерности и сигнатуры пространства. В частности, получены формулы для определителя, которые позволяют вычислять обратный элемент в алгебрах Клиффорда произвольной размерности и сигнатуры. Наши результаты уже активно используются другими учеными в символьном вычислении[78 79]. Мы применили данные результаты для получения явного решения уравнений Сильвестра[80] и

[63] Lawson H. B., Michelsohn M.-L., *Spin geometry* (Princeton, Princeton Univ. Press, 1989).

[64] Doran C. J. L., Hestenes D., Sommen F., Acker N., *Lie Groups as Spin Groups* // J. Math. Phys., 34(8), (1993).

[65] Картан Э., *Теория спиноров*, ИЛ, М., 1947.

[66] Riesz M., *Clifford Numbers and Spinors*, E. F. Bolinder and P. Lounesto (Eds), Springer, Netherlands 1993.

[67] Рашевский П. К., *Теория спиноров* // УМН, 10:2 (1955), 3–110.

[68] Румер Ю. Б., *Спинорный анализ*, ОНТИ, М.-Л., 1936.

[69] Желнорович В. А., *Теория спиноров и ее примененение в физике и механике*, Наука, Москва, 1982.

[70] Abłamowicz R., *The Moore–Penrose Inverse and Singular Value Decomposition of Split Quaternions* // Adv. Appl. Clifford Algebras 30, 33 (2020).

[71] Hitzer E., Sangwine S., *Exponential Factorization and Polar Decomposition of Multivectors in $Cl(p,q)$, $p+q\leq 3$* // https://vixra.org/abs/1911.0275.

[72] Sangwine S. J., Hitzer E., *Polar Decomposition of Complexified Quaternions and Octonions* // Adv. Appl. Clifford Algebras 30, 23 (2020)

[73] Dadbeh P., *Inverse and determinant in 0 to 5 dimensional Clifford algebra* // arXiv:1104.0067 (2011).

[74] Hitzer E., Sangwine S., *Multivector and multivector matrix inverses in real Clifford algebras* // Applied Mathematics and Computation 311 (2017).

[75] Acus A., Dargys A., *The Inverse of a Multivector: Beyond the Threshold $p+q=5$* // Adv. Appl. Clifford Algebras 28, 65 (2018).

[76] Hitzer E., Sangwine S. J., *Construction of Multivector Inverse for Clifford Algebras Over 2m+1-Dimensional Vector Spaces from Multivector Inverse for Clifford Algebras Over 2m-Dimensional Vector Spaces* // Adv. Appl. Clifford Algebras 29, 29 (2019).

[77] Helmstetter J., *Characteristic polynomials in Clifford algebras and in more general algebras* // Adv. Appl. Clifford Algebras 29, 30 (2019).

[78] Acus A., Dargys A., *Geometric Algebra Mathematica package*, https://github.com/ArturasAcus/GeometricAlgebra, 2017

[79] Hadfield H., Wieser E., Arsenovic A., Kern R., and The Pygae Team: *pygae/clifford: v1.3.1* (2020). https://github.com/pygae/clifford/pull/373

[80] Sylvester J. J., *Sur l'equations en matrices $px=xq$* // C.R. Acad. Sci. Paris. 99(2), 1884.

Ляпунова в алгебрах Клиффорда. Уравнение Сильвестра и его частный случай, уравнение Ляпунова, широко используются в теории управления, теории устойчивости, обработке изображений и сигналов, математическом моделировании.

Известен геометрический аналог (или обобщение) алгебр Клиффорда – алгебры Атьи – Келера[81] [82] [83] [84] [85] [86]. В работе используется обобщение алгебр Атьи – Келера и алгебры дифференциальных форм, которое называется алгеброй h-форм. Вместо дифференциалов dx^μ используются клиффордовы полевые векторы $h^\mu = h^\mu(x)$, удовлетворяющие антикоммутационным соотношениям алгебры Клиффорда в каждой точке $x \in \mathbb{R}^{p,q}$ (псевдо)евклидова пространства. Данная техника используется нами при изучении спиновой связности, предъявлении нового класса частных решений уравнений Янга – Миллса и доказательстве локальной теоремы Паули о связи двух наборов антикоммутирующих величин в евклидовом пространстве. Отметим, что спиновая связность[87] широко используется в теории уравнения Дирака на искривленных псевдоримановых многообразиях сигнатуры $(1, 3)$.

В работе исследуются различные группы и алгебры Ли в алгебрах Клиффорда. Отметим работы[88] [89] о связи классических матричных групп и алгебр Клиффорда и ряд других работ, в том числе, о применении унитарных, симплектических и псевдоунитарных групп в формализме алгебр Клиффорда в различных вопросах теории поля и физики[90] [91] [92] [93]. В нашей работе обобщается метод Хестенеса[94] (который работает только в случае размерности 4) вычисления элементов спинорных групп по заданным элементам ортогональных групп при двулистном накрытии на случай произвольной размерности и сигнатуры пространства. Используется метод усреднения в алгебрах Клиффорда, который развивался в предыдущих работах автора.

Цель и задачи исследования

[81] Kähler E., Randiconti di Mat. (Roma) ser. 5, 21, 1962, 425.

[82] Atiyah M., *Vector Fields on Manifolds*, Arbeitsgemeinschaft für Forschung des Landes Nordrhein-Westfalen, Heft, 200, 1970.

[83] Graf W., *Differential Forms as Spinors* // Ann. Inst. Henri Poincare, 29:1 (1978).

[84] Salingaros N. A., Wene G. P., *The Clifford Algebra of Differential Forms* // Acta Applicandae Mathematicae, 4 (1985).

[85] Ivanenko D., Landau L., *Zur theorie des magnetischen electrons* // Z. Phys. (I), 48 (1928).

[86] Обухов Ю. Н., Солодухин С. Н., *Редукция уравнения Дирака и его связь с уравнением Иваненко – Ландау – Келера* // ТМФ, 94:2 (1993).

[87] Мицкевич Н. В., *Физические поля в общей теории относительности*, М:, Наука, 1969.

[88] Porteous I. R., *Clifford Algebras and the Classical Groups*, CUP, Cambridge, 1995.

[89] Lounesto P., *Clifford Algebras and Spinors*, 2nd edition, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 286, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[90] Benn I. M., Tucker R. W., *An introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics* (Bristol, 1987).

[91] Snygg J., *Clifford Algebra. A computation tool for physicists*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1997.

[92] Марчук Н. Г., *Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда*, РХД, Ижевск, 2009.

[93] Marchuk N., Dyabirov R., *A symplectic subgroup of a pseudounitary group as a subset of Clifford algebra* // Advances in Applied Clifford Algebras, 20:2 (2010).

[94] Hestenes D., *Space-Time Algebra*, Gordon and Breach, New York, 1966.

Целью работы является разработка новых алгебро-геометрических методов, связанных с сингулярным и гиперболическим сингулярным разложением, алгебрами Клиффорда и их обобщениями, группами и алгебрами Ли, и их применение при изучении различных прикладных вопросов, связанных с уравнениями Янга – Миллса, Янга – Миллса – Дирака, Янга – Миллса – Прока, уравнениями Сильвестра и Ляпунова, спинорными группами, спиновой связностью, теоремой Паули и др.

Задачами исследования являются:

1. Найти все постоянные решения уравнений Янга – Миллса с SU(2) калибровочной симметрией с произвольным неабелевым током в произвольном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.
2. Обобщить метод гиперболического сингулярного разложения (HSVD) на произвольный случай с использованием псевдоортогональных и псевдоунитарных матриц. Найти метод вычисления HSVD в общей постановке.
3. Найти все постоянные решения системы уравнений Янга – Миллса – Прока в случае группы Ли SU(2) в евклидовом и псевдоевклидовом пространстве произвольной размерности и сигнатуры.
4. Найти все решения типа плоской волны уравнений Янга – Миллса с SU(2) калибровочной симметрией и нулевым током в евклидовом и псевдоевклидовом пространстве произвольной размерности и сигнатуры.
5. Решить проблему о вычислении обратных элементов, определителя и других коэффициентов характеристического многочлена в алгебрах Клиффорда произвольной размерности. Найти безбазисное решение уравнений Сильвестра и Ляпунова в алгебре Клиффорда произвольной размерности.
6. Найти метод вычисления элементов спинорных групп по заданным элементам ортогональных групп при двулистном накрытии в случае произвольной размерности и сигнатуры пространства.
7. Найти выражение для спиновой связности общего вида. Представить на основе данного выражения новый класс решений уравнений Янга – Миллса. Обобщить теорему Паули на локальный случай, когда два набора антикоммутирующих величин гладко зависят от точки евклидова пространства.
8. Дать классификацию всех групп и алгебр Ли специального типа (алгебры Ли являются прямыми суммами подпространств кватернионных типов) в алгебрах Клиффорда, найти изоморфизмы классическим матричным группам и алгебрам Ли в случае произвольной размерности и сигнатуры.

9. Дать полную классификация групп Ли, определяющих внутренние автоморфизмы, сохраняющие инвариантными фундаментальные подпространства алгебр Клиффорда, определяемые с помощью реверса и четностного сопряжения.

Основные результаты, выносимые на защиту

1. Представлены [9] классификация и явный вид всех постоянных решений уравнений Янга – Миллса с SU(2) калибровочной симметрией с произвольным неабелевым током в произвольном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$.

2. Дана [6] формулировка гиперболического сингулярного разложения (HSVD) на случай произвольной комплексной или вещественной матрицы без использования гиперобменных матриц и с использованием только псевдоунитарных или псевдоортогональных матриц. Вычисление HSVD сведено к вычислению собственных чисел, собственных векторов и присоединенных векторов некоторых вспомогательных матриц.

3. Представлены [1] все постоянные решения системы уравнений Янга – Миллса – Прока в случае группы Ли SU(2) в евклидовом и псевдоевклидовом пространстве произвольной размерности и сигнатуры.

4. Представлен [8] явный вид всех решений типа плоской волны уравнений Янга – Миллса с SU(2) калибровочной симметрией и нулевым током в евклидовом и псевдоевклидовом пространстве произвольной размерности и сигнатуры.

5. Решена [5, 3] проблема о вычислении обратных элементов, определителя и других коэффициентов характеристического многочлена в алгебрах Клиффорда произвольной размерности. На основе этих результатов представлено [4] безбазисное решение уравнений Сильвестра и Ляпунова в алгебре Клиффорда произвольной размерности.

6. На основе метода усреднения [14] в алгебрах Клиффорда дано [11] обобщение метода Хестенеса вычисления элементов спинорных групп по заданным элементам ортогональных групп при двулистном накрытии на случай произвольной размерности и сигнатуры пространства.

7. Найдено [17] выражение для спиновой связности общего вида. На основе данного выражения представлен [13] новый класс решений уравнений Янга – Миллса, а также дано [10] обобщение теоремы Паули о связи двух наборов антикоммутирующих величин на локальный случай, когда оба набора гладко зависят от точки евклидова пространства.

8. Дана [12, 16, 18] полная классификация групп и алгебр Ли специального типа (алгебры Ли являются прямыми суммами подпространств кватернионных типов) в алгебрах Клиффорда, доказаны изоморфизмы классическим матричным группам и алгебрам Ли в случае произвольной размерности и сигнатуры.

9. Дана [7, 2] полная классификация групп Ли, определяющих внутренние автоморфизмы, сохраняющие инвариантными фундаментальные подпространства алгебр Клиффорда, определяемые с помощью реверса и четностного сопряжения.

Научная новизна

Все перечисленные выше основные результаты диссертации получены лично автором и являются новыми.

Основные методы исследования

В диссертации используются различные методы алгебры, геометрии, математической физики, вычислительной математики, дифференциальной геометрии, теории представлений, теории групп и алгебр Ли. В частности, используются методы сингулярного разложения и гиперболического сингулярного разложения произвольной вещественной или комплексной матрицы, двулистные накрытия ортогональных групп спинорными группами в случае произвольной сигнатуры и размерности пространства, метод усреднения из теории представлений конечных групп, метод Леверрье – Фаддеева и метод полиномов Белла вычисления коэффициентов характеристического многочлена и др.

Теоретическая и практическая ценность работы

Диссертация имеет теоретическую и практическую значимость. Практическая ценность работы проявляется при использовании результатов в таких прикладных областях, как физика, инженерия, компьютерные науки, робототехника, теория управления, теория устойчивости, обработка сигналов и изображений, математическое моделирование, символьное вычисление. Результаты применяются при изучении вопросов, связанных с уравнениями Янга – Миллса, Янга – Миллса – Дирака, Янга – Миллса – Прока, спинорными группами, спиновой связностью, уравнениями Сильвестра и Ляпунова, теоремой Паули и др.

Достоверность полученных результатов

Достоверность результатов диссертации подтверждается приведенными строгими математическими доказательствами соответствующих утверждений.

Апробация полученных результатов

Основные результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях и симпозиумах:

1. Международная конференция “Computer Graphics International 2022”, Empowering Novel

Geometric Algebra for Graphics & Engineering Workshop (2022, Женева, Швейцария, онлайн), доклад “On Noncommutative Vieta Theorem in Geometric Algebras”;

2. The 8th Conference on Applied Geometric Algebras in Computer Science and Engineering (2021, Брно, Чехия, онлайн), доклад “On Lie groups defining inner automorphisms that leave invariant fundamental subspaces of geometric algebra”;
3. Международная конференция “Марчуковские научные чтения 2021” (2021, Академгородок, Новосибирск, Россия, онлайн), доклад “Hyperbolic SVD for obtaining solutions of SU(2) Yang–Mills equations”;
4. Международная конференция “Математическая физика, динамические системы и бесконечномерный анализ 2021” (2021, Долгопрудный, Россия, онлайн), доклад “On constant solutions of the Yang–Mills–Dirac equations”;
5. Международная конференция “Computer Graphics International 2020”, Empowering Novel Geometric Algebra for Graphics & Engineering Workshop (2020, Женева, Швейцария, онлайн), доклад “On basis-free solution to Sylvester equation in geometric algebra”;
6. Международная конференция по математической физике памяти академика В. С. Владимирова (2020, Москва, Россия, онлайн), доклад “On some equations modeling the Yang–Mills equations”;
7. The 12th International Conference on Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics (2020, Хэфэй, Китай, онлайн), доклад “On determinant, other characteristic polynomial coefficients, and inverses in Clifford algebras”;
8. IX Международная конференция по математическому моделированию (2020, Якутск, Россия, онлайн), доклад “On determinant and inverses in Clifford algebras”;
9. International Bogolyubov Conference “Problems of theoretical and mathematical physics” (2019, Москва – Дубна, Россия), доклад “On constant solutions of SU(2) Yang–Mills equations”;
10. IX-th International Conference “Solitons, Collapses and Turbulence: Achievements, Developments and Perspectives” (SCT–19) in honor of Vladimir Zakharov’s 80th birthday (2019, Ярославль, Россия), постерный доклад “Classification of all constant solutions of SU(2) Yang–Mills equations with arbitrary current”;
11. 4th Alterman Conference on Computational and Geometric Algebra-cum-Workshop on Kähler Calculus (2019, Манипал, Индия), пленарный доклад “Method of averaging in Clifford algebras and applications”;
12. Международная конференция “Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ” (2019, Долгопрудный, Россия), доклад “On constant solutions of SU(2) Yang–Mills equations”;

13. The 2nd JNMP Conference on Nonlinear Mathematical Physics (2019, Сантьяго, Чили), доклад “On constant solutions of SU(2) Yang–Mills equations”;
14. International Symposium on Wen-Tsun Wu’s Academic Thought and Mathematics Mechanization (2019, Пекин, Китай), доклад “SVD and hyperbolic SVD for obtaining solutions of SU(2) Yang–Mills equations”;
15. International Conference on Mathematical Methods in Physics (2019, Марракеш, Марокко), доклад “Method of averaging in Clifford algebras and applications”;
16. Международная конференция “Современная математическая физика. Владимиров – 95” (2018, Москва, Россия), доклад “On some solutions of Yang–Mills equations with SU(2) gauge symmetry”;
17. The 7th Conference on Applied Geometric Algebras in Computer Science and Engineering (2018, Кампинас, Бразилия), доклад “Calculation of elements of spin groups using method of averaging in Clifford’s geometric algebra”;
18. Operators, Functions, and Systems of Mathematical Physics Conference (2018, Баку, Азербайджан), доклад “On some solutions of Yang–Mills equations with SU(2) gauge symmetry”;
19. The 11th International Conference on Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics (2017, Гент, Бельгия), доклад “Yang–Mills equations and Clifford algebras”;
20. Международная конференция по математическому моделированию (2017, Якутск, Россия), доклад “Local generalized Pauli’s theorem and one field equation”;
21. The 2nd French-Russian Conference “Random Geometry and Physics” (2016, Париж, Франция), доклад “On connection between two sets of higher-dimensional gamma matrices and a primitive field equation”;
22. International Conference “New trends in Mathematical and Theoretical Physics” (2016, Москва, Россия), доклад “Covariantly constant solutions of the Yang–Mills equations”;
23. VI Российско-Армянское совещание по математическому анализу, математической физике и аналитической механике (2016, Ростов-на-Дону, Россия), доклад “Covariantly constant solutions of the Yang–Mills equations”;
24. Alterman Conference on Geometric Algebra and Summer School on Kähler Calculus (2016, Брашов, Румыния), доклад “On some Lie groups containing Spin groups in Clifford algebra”;
25. Physical and Mathematical Problems of Advanced Technology Development, devoted to the 50th Anniversary of the Scientific and Educational Division “Fundamental Sciences” of the Bauman Moscow State Technical University (2014, Москва, Россия), доклад “New class of gauge invariant solutions of Yang–Mills equations”;

26. Четвертая международная конференция “Математическая физика и ее приложения” (2014, Самара, Россия), доклад “Method of contractions in Clifford algebras with applications to the field theory equations”;
27. The 10th International Conference on Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics (2014, Тарту, Эстония), доклад “The method of contractions in Clifford algebras”.

Кроме того, основные результаты диссертации были представлены на следующих семинарах:

1. Семинар Отдела математической физики, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (2021, Москва, руков.: чл.-кор. И. В. Волович);
2. Семинар “Бесконечномерный анализ и математическая физика”, Кафедра теории функций и функционального анализа, МГУ им. М. В. Ломоносова, Механико-математический Факультет (2021, 2023, Москва, руков.: проф. О. Г. Смолянов, проф. Е. Т. Шавгулидзе);
3. Семинар В. П. Михайлова, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (2018, Москва, руков.: проф. А. К. Гущин, проф. В. В. Жаринов);
4. Семинар “Суперкомпьютерное моделирование в науке и инженерии”, МИЭМ, НИУ ВШЭ (2023, Москва, руков.: проф. Л. Н. Щур);
5. Семинар “Перспективные математические технологии”, Лаборатория “Математические методы естествознания”, НИУ ВШЭ (2023, Москва, руков.: проф. В. Г. Данилов);
6. Семинар “Квантовая математическая физика”, Научно-образовательный центр Математического института им. В. А. Стеклова РАН (2013–2015, Москва, руков.: акад. В. В. Козлов, чл.-кор. И. В. Волович, д.ф.-м.н. С. В. Козырев, к.ф.-м.н. А. С. Трушечкин);
7. Научный семинар в Mathematics Mechanization Research Center, Китайская академия наук (2019, Пекин, Китай, руков.: Prof. Hongbo Li);
8. Spectral Theory and PDE Seminar, Pontificia Universidad Catolica de Chile (2019, Сантьяго, Чили, руков.: Prof. Georgi Raikov).

На основе результатов диссертации автором были прочитаны следующие специальные курсы:

1. полугодовой курс в НОЦ при МИАН (и МЦМУ МИАН) “Основы теории алгебр Клиффорда и спиноров” (весна 2021 года);
2. полугодовой курс в НОЦ при МИАН “Алгебры Клиффорда и уравнения теории поля” (осень 2014 года);
3. общеуниверситетский факультатив в НИУ ВШЭ “Основы теории алгебр Клиффорда и спиноров” (осень 2020 года);
4. курс по выбору для первого курса магистратуры в НИУ ВШЭ (маголего) “Основы теории алгебр Клиффорда” (весна 2020 года, весна 2022 года);

5. курс лекций “Introduction to the Theory of Clifford Algebras” на международной летней школе “Hypercomplex Numbers, Lie Groups, and Applications”, Варна, Болгария (лето 2017 года).

Исследования автора по теме диссертации были поддержаны грантами:

1. грант РФФИ 16-31-00347 “Алгебро-геометрические методы в теории поля”, 2016–2017, руководитель;
2. грант 17-01-0009 “Группы Ли и алгебры Ли в алгебрах Клиффорда” в рамках Программы Научный фонд НИУ ВШЭ (индивидуальный исследовательский проект), 2017–2018, руководитель;
3. грант РНФ 18-71-00010 “Алгебро-геометрические методы в теории нелинейных уравнений математической физики”, 2018–2020, руководитель;
4. грант РФФИ 20-11-00009 “Теория алгебр Клиффорда и спиноров”, издание книги, 2020, руководитель;
5. грант 20-01-003 “Некоторые вычислительные задачи теории алгебр Клиффорда” в рамках Программы Научный фонд НИУ ВШЭ (индивидуальный исследовательский проект), 2020–2021, руководитель;
6. грант Президента РФ МК-404.2020.1 “Некоторые вопросы теории алгебр Клиффорда, возникающие в математической физике”, 2020–2021, руководитель;
7. грант РНФ 21-71-00043 “Алгебро-геометрические методы в теории уравнений Янга – Миллса”, 2021–2023, руководитель;
8. грант 22-00-001 “Алгебры Клиффорда и приложения” в рамках Программы Научный фонд НИУ ВШЭ (научно-учебная группа), 2022, руководитель, сайт научно-учебной группы https://economics.hse.ru/clifford, сайт научного семинара https://economics.hse.ru/clifford/seminar.

Публикации

Основное содержание диссертации опубликовано в 20 статьях [1] – [20] в рецензируемых научных журналах (все индексированы в WoS/Scopus, из них 12 статей в Q1 – Q2, 14 статей без соавторов)[95]. Также имеется рецензируемая[96] монография [21] и 5 рецензируемых работ [22] – [26], опубликованных в трудах конференций (все индексированы в WoS/Scopus).[97]

[95] Требования Диссертационного совета НИУ ВШЭ: не менее 10 статей (WoS/Scopus), их них не менее 4 статей в Q1 – Q2, не менее 3 статей без соавторов (либо соискатель является главным соавтором).

[96] Имеются две анонимные рецензии экспертов РФФИ.

[97] Все указанные работы [1] – [26] опубликованы после 2015 года, тогда как кандидатская диссертация защищена в 2013 году, таким образом основные результаты этих работ не используются для получения ученой степени дважды.

Работы, опубликованные автором в рецензируемых научных журналах, входящих в международную систему цитирования WoS/Scopus:

[1] Широков Д. С., *Гиперболическое сингулярное разложение при исследовании уравнений Янга – Миллса и Янга – Миллса – Прока* // Журнал вычислительной математики и математической физики, 62:6 (2022), 1042–1055, https://doi.org/10.31857/S004446692206014X

Shirokov D. S., *Hyperbolic Singular Value Decomposition in the Study of Yang–Mills and Yang–Mills–Proca Equations* // Computational Mathematics and Mathematical Physics, 62:6 (2022), 1007–1019, **Scopus Q2**, https://doi.org/10.1134/S0965542522060136

[2] Filimoshina E. R., Shirokov D. S., *On generalization of Lipschitz groups and spin groups* // Mathematical Methods in the Applied Sciences, 26 pp. (2022), **WoS Q1**, https://doi.org/10.1002/mma.8530

[3] Abdulkhaev K. S., Shirokov D. S., *Basis-free Formulas for Characteristic Polynomial Coefficients in Geometric Algebras* // Advances in Applied Clifford Algebras, 32 (2022), 57, 27 pp., **Scopus Q3**, https://doi.org/10.1007/s00006-022-01232-0

[4] Shirokov D. S., *Basis-free solution to Sylvester equation in Clifford algebras of arbitrary dimension* // Advances in Applied Clifford Algebras, 31 (2021), 70, 19 pp., **Scopus Q2**, https://doi.org/10.1007/s00006-021-01173-0

[5] Shirokov D. S., *On computing the determinant, other characteristic polynomial coefficients, and inverse in Clifford algebras of arbitrary dimension* // Computational and Applied Mathematics, 40 (2021), 173 , 29 pp., **WoS Q1**, https://doi.org/10.1007/s40314-021-01536-0

[6] Shirokov D. S., *A note on the hyperbolic singular value decomposition without hyperexchange matrices* // Journal of Computational and Applied Mathematics, 391 (2021), 113450, **WoS Q1**, https://doi.org/10.1016/j.cam.2021.113450

[7] Shirokov D. S., *On inner automorphisms preserving fixed subspaces of Clifford algebras* // Advances in Applied Clifford Algebras, 31 (2021), 30, 23 pp., **Scopus Q2**, https://doi.org/10.1007/s00006-021-01135-6

[8] Марчук Н. Г., Широков Д. С., *О некоторых уравнениях, моделирующих уравнения Янга – Миллса* // Физика элементарных частиц и атомного ядра, 51:4 (2020), 676–685, https://www1.jinr.ru/Pepan/v-51-4/38_Marchuk.pdf

Marchuk N. G., Shirokov D. S., *On some equations modeling the Yang–Mills equations* // Physics of Particles and Nuclei, 51:4 (2020), 589–594, **WoS Q4**, https://doi.org/10.1134/S1063779620040498

[9] Shirokov D. S., *On constant solutions of* SU(2) *Yang–Mills equations with arbitrary current in Euclidean space* $\mathbb{R}^n$ // Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 27:2 (2020), 199–218, **Scopus Q2**, https://doi.org/10.1080/14029251.2020.1700625

[10] Marchuk N. G., Shirokov D. S., *Local generalization of Pauli's Theorem* // Azerbaijan Journal of Mathematics, 10:1 (2020), 38–56, **Scopus Q2**, https://azjm.org/volumes/1001/pdf/1001-3.pdf

[11] Shirokov D. S., *Calculation of elements of spin groups using method of averaging in Clifford's geometric algebra* // Advances in Applied Clifford Algebras, 29:50 (2019), 12 pp., **WoS Q3**, https://doi.org/10.1007/s00006-019-0967-y

[12] Shirokov D. S., *Classification of Lie algebras of specific type in complexified Clifford algebras* // Linear and multilinear algebra, 66:9, 1870–1887 (2018), **WoS Q2**, https://doi.org/10.1080/03081087.2017.1376612

[13] Shirokov D. S., *Covariantly constant solutions of the Yang–Mills equations* // Advances in Applied Clifford Algebras, 28:53 (2018), 16 pp., **WoS Q3**, https://doi.org/10.1007/s00006-018-0868-5

[14] Shirokov D. S., *Method of averaging in Clifford algebras*, Advances in Applied Clifford Algebras // 27:1, 149–163 (2017), **WoS Q2**, https://doi.org/10.1007/s00006-015-0630-1

[15] Marchuk N. G., Shirokov D. S., *Constant solutions of Yang–Mills equations and generalized Proca equations* // Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 42 (2016), 53–72, **Scopus Q4**, https://doi.org/10.7546/jgsp-42-2016-53-72

[16] Shirokov D. S., *On some Lie groups containing spin group in Clifford algebra* // Journal of Geometry and Symmetry in Physics, 42 (2016), 73–94, **Scopus Q4**, https://doi.org/10.7546/jgsp-42-2016-73-94

[17] Marchuk N. G., Shirokov D. S., *General solutions of one class of field equations* // Reports on mathematical physics, 78(3), 2016, **Scopus Q3**, https://doi.org/10.1016/S0034-4877(17)30011-3

[18] Shirokov D. S., *Symplectic, orthogonal and linear Lie groups in Clifford algebra* // Advances in Applied Clifford Algebras, 25:3, 707–718, (2015), **WoS Q2**, https://doi.org/10.1007/s00006-014-0520-y

[19] Широков Д. С., *Свертки по рангам и кватернионным типам в алгебрах Клиффорда* // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки, 19:1 (2015), 117–135, **WoS**, https://doi.org/10.14498/vsgtu1387

[20] Shirokov D. S., *Calculation of elements of spin groups using generalized Pauli's theorem* // Advances in Applied Clifford Algebras, 25:1, 227–244, (2015), **WoS Q2**, https://doi.org/10.1007/s00006-014-0471-3

Рецензируемая монография:

[21] Марчук Н. Г., Широков Д. С., *Теория алгебр Клиффорда и спиноров*, Красанд, Москва, 2020 (первое издание под грифом РФФИ) и 2021 (второе издание), 560 с., ISBN 978-5-396-01014-7, http://urss.ru/cgi-bin/db.pl?lang=Ru&blang=ru&page=Book&id=263794

Работы, опубликованные автором в рецензируемых трудах конференций, входящих в международную систему цитирования WoS/Scopus:

[22] Shirokov D. S., *Clifford algebras and their applications to Lie groups and spinors* // Proceedings of the Nineteenth International Conference on Geometry, Integrability and Quantization (Varna, Bulgaria, June 2017), eds. I. Mladenov and A. Yoshioka, Avangard Prima, Sofia, Bulgaria, 2018, 11–53, **Scopus**, https://doi.org/10.7546/giq-19-2018-11-53

[23] Shirokov D. S., *On basis-free solution to Sylvester equation in geometric algebra* // In: Magnenat-Thalmann N. et al. (eds) Advances in Computer Graphics. CGI 2020. Lecture Notes in Computer Science, vol 12221. Springer, Cham., (2020), 541–548, **Scopus Q3**, http://doi-org-443.webvpn.fjmu.edu.cn/10.1007/978-3-030-61864-3_46

[24] Shirokov D. S., *A note on subspaces of fixed grades in Clifford algebras* // AIP Conference Proceedings (ICMM-2020, Yakutsk, Russia), 2328, 060001 (2021), ISBN: 978-0-7354-4072-2, **WoS**, https://doi.org/10.1063/5.0042103

[25] Shirokov D. S., *On solutions of the Yang–Mills equations in the algebra of h-forms* // Journal of Physics: Conference Series (MSR-2021, Novosibirsk, Russian Federation). IOP Publishing, 2021. V. 2099. № 012015, **Scopus Q4**, https://doi.org/10.1088/1742-6596/2099/1/012015

[26] Abdulkhaev K. S., Shirokov D. S., *On explicit formulas for characteristic polynomial coefficients in geometric algebras* // In: Magnenat-Thalmann N. et al. (eds) Advances in Computer Graphics. CGI 2021. Lecture Notes in Computer Science, vol 13002. Springer, Cham. 2021. P. 670–681, **Scopus Q2**, https://doi.org/10.1007/978-3-030-89029-2_50

Личный вклад автора

Все результаты, представленные в диссертации и выносимые на защиту, получены автором лично.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, 3 глав, приложений, заключения и списка литературы. Объем диссертации без приложений – 249 страниц, библиография включает 202 наименования.

Краткое содержание работы

Глава 1 посвящена исследованию уравнений Янга – Миллса с SU(2) калибровочной симметрией с помощью методов сингулярного (SVD) и гиперболического (HSVD) сингулярного разложений. Изучаются также системы уравнений Янга – Миллса – Дирака и Янга – Миллса – Прока.

В **параграфе 1.1** рассматриваются уравнения Янга – Миллса в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ (или, как частный случай, евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$):

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - \rho[A_\mu, A_\nu] =: F_{\mu\nu}, \tag{1}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - \rho[A_\mu, F^{\mu\nu}] = J^\nu, \tag{2}$$

где $A_\mu \in \mathfrak{g}\mathrm{T}_1$, $J^\nu \in \mathfrak{g}\mathrm{T}^1$, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \in \mathfrak{g}\mathrm{T}_2$ есть тензорные поля (потенциал, ток и напряженность поля Янга – Миллса соответственно) со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$ (далее рассматривается случай этой алгебры Ли), ρ есть вещественная константа (константа связи). Метрика пространства $\mathbb{R}^{p,q}$ задается диагональной матрицей

$$\eta = (\eta_{\mu\nu}) = (\eta^{\mu\nu}) = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}), \qquad p + q = n. \tag{3}$$

Расписав потенциал и ток Янга – Миллса по базису $\tau^a = \frac{\sigma^a}{2i}$, $a = 1, 2, 3$, построенного с помощью матриц Паули σ^a, $a = 1, 2, 3$, алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$

$$A^\mu = A^\mu{}_a \tau^a, \qquad J^\mu = J^\mu{}_a \tau^a, \qquad A^\mu{}_a, J^\mu{}_a \in \mathbb{R}, \tag{4}$$

получаем из уравнений (1), (2)

$$\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu{}_k - \partial^\nu A^\mu{}_k) - \rho\epsilon^{ab}{}_k(\partial_\mu(A^\mu{}_a A^\nu{}_b) + \eta_{\mu\alpha}A^\alpha{}_a(\partial^\mu A^\nu{}_b - \partial^\nu A^\mu{}_b)) + \rho^2\eta_{\mu\alpha}A^\alpha{}_c A^\mu{}_a A^\nu{}_b \epsilon^{ab}{}_d \epsilon^{cd}{}_k = J^\nu{}_k. \tag{5}$$

Будем воспринимать систему уравнений (5) как систему уравнений для элементов двух матриц $A = (A^\mu{}_k)$ и $J = (J^\nu{}_k)$ размера $n \times 3$. Далее будем считать, что матрица тока J задана либо зависит от неизвестной матрицы потенциала A некоторым заданным образом (например, в случае уравнений Янга – Миллса – Прока имеем $J = -m^2 A$). Пользуясь инвариантностью уравнений Янга – Миллса (5) по отношению к псевдоортогональным преобразованиям координат из группы $\mathrm{O}(p, q)$, калибровочной инвариантностью этих уравнений относительно преобразований из группы Ли $\mathrm{SU}(2)$, а также двулистным накрытием специальной ортогональной группы $\mathrm{SO}(3)$ спинорной группой $\mathrm{Spin}(3) \cong \mathrm{SU}(2)$, получаем следующую теорему.

Теорема 1 *Система уравнений (5) инвариантна относительно преобразований вида*

$$A \to \hat{A} = QA, \qquad J \to \hat{J} = QJ, \qquad Q \in \mathrm{O}(p, q), \tag{6}$$

и преобразований вида

$$A \to \acute{A} = AP + \Omega, \qquad J \to \acute{J} = JP, \qquad P = (p^a_b) \in \mathrm{SO}(3), \tag{7}$$

где

$$\Omega = \Omega(P) = (\omega^\mu{}_d), \qquad \omega^\mu{}_d = \frac{1}{8}\delta_{ac}\epsilon^{bk}{}_d(p^c_k \partial^\mu p^a_b - p^a_k \partial^\mu p^c_b).$$

Если совместить два преобразования из теоремы, то получим инвариантность по отношению к преобразованию

$$A \to QAP + \Omega, \quad J \to QJP, \qquad Q \in \mathrm{O}(p, q), \quad P \in \mathrm{SO}(3), \quad \Omega = \Omega(P). \tag{8}$$

Система уравнений Янга – Миллса для постоянных (не зависящих от $x \in \mathbb{R}^{p,q}$) решений принимает вид

$$\rho^2 \eta_{\mu\alpha} A^\alpha_c A^\mu_a A^\nu_b \epsilon^{ab}{}_d \epsilon^{cd}{}_k = J^\nu_k \tag{9}$$

с глобальной симметрией

$$A \to QAP, \qquad J \to QJP, \qquad Q \in \mathrm{O}(p,q), \qquad P \in \mathrm{SO}(3). \tag{10}$$

Умножение матрицы слева на псевдоортогональную матрицу и справа на ортогональную матрицу позволяет преобразовать ее к каноническому виду с большим количеством нулей. В случае евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ будем пользоваться сингулярным разложением, а в случае псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$, $p \neq 0$, $q \neq 0$, будем пользоваться гиперболическим сингулярным разложением. Далее для удобства константу связи кладем равной единице $\rho = 1$.

В **параграфе 1.2** решается задача о предъявлении всех постоянных решений уравнений Янга – Миллса с $\mathrm{SU}(2)$ калибровочной симметрией в произвольном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Используя инвариантность уравнений Янга – Миллса по отношению к ортогональным преобразованиям координат и калибровочную инвариантность, мы выбираем специальную систему координат и специальную фиксацию калибровки для каждого постоянного тока и получаем все постоянные решения уравнений Янга – Миллса в этой системе координат с данной фиксацией калибровки, а затем в исходной системе координат с исходной фиксацией калибровки. Мы используем метод сингулярного разложения и метод двулистного накрытия ортогональной группы спинорной группой.

Воспользуемся сингулярным разложением, а именно, для произвольной вещественной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times N}$ существуют такие ортогональные матрицы $L \in \mathrm{O}(n)$ и $R \in \mathrm{O}(N)$, что $L^{\mathrm{T}} AR = D$, где $D = \mathrm{diag}(\mu_1, \ldots, \mu_s) \in \mathbb{R}^{n\times N}$, $s = \min(n, N)$, где сингулярные числа можно всегда упорядочить в порядке убывания $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_s \geq 0$.

Теорема 2 *Пусть $A = (A^\nu{}_k)$, $J = (J^\nu{}_k)$ удовлетворяют системе из $3n$ кубических уравнений в $\mathbb{R}^n$*

$$A_{\mu c} A^\mu{}_a A^\nu{}_b \epsilon^{ab}{}_d \epsilon^{cd}{}_k = J^\nu{}_k, \qquad \nu = 1, \ldots, n, \qquad k = 1, 2, 3. \tag{11}$$

Тогда существуют матрицы $P \in \mathrm{SO}(3)$ и $Q \in \mathrm{O}(n)$ такие, что QAP диагональная. Для всех таких матриц P и Q матрица QJP является тоже диагональной и система (11) принимает следующий вид при преобразовании (10):

$$-a_1((a_2)^2 + (a_3)^2) = j_1, \qquad -a_2((a_1)^2 + (a_3)^2) = j_2, \qquad -a_3((a_1)^2 + (a_2)^2) = j_3 \tag{12}$$

в случае $n \geq 3$ и

$$-a_1(a_2)^2 = j_1, \qquad -a_2(a_1)^2 = j_2 \tag{13}$$

в случае $n = 2$. Мы обозначаем диагональные элементы матрицы QAP через a_1, a_2, a_3 (или a_1, a_2) и диагональные элементы матрицы QJP через j_1, j_2, j_3 (или j_1, j_2).

Система (12) имеет следующую симметрию.

Лемма 1 *Если система (12) имеет решение (a_1, a_2, a_3), где $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$, $a_3 \neq 0$, то эта система имеет также решение $(\frac{K}{a_1}, \frac{K}{a_2}, \frac{K}{a_3})$, где $K = (a_1 a_2 a_3)^{\frac{2}{3}}$.*

Далее в диссертации приводится общее решение выписанных систем уравнений в терминах потенциала A, напряженности F, а также инварианта $F^2 := F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ поля Янга – Миллса. Все указанные выражения зависят только от сингулярных чисел j_1, j_2, j_3 матрицы тока J. Таким образом, дана полная классификация всех постоянных решений уравнений Янга – Миллса с SU(2) калибровочной симметрией в произвольном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$. Количество ненулевых решений в зависимости от матрицы тока для случая произвольного евклидова пространства $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ указано в Таблице 1, явные формулы для A, F и F^2 во всех случаях приводятся в диссертации. Показано, что число (0, 1 или 2) постоянных решений уравнений Янга – Миллса в терминах напряженности поля Янга – Миллса зависит от сингулярных чисел матрицы тока.

Таблица 1: Все постоянные решения уравнений Янга – Миллса с SU(2) калибровочной симметрией в $\mathbb{R}^n$.

n	rank(J)	доп. условия	rank(A)	A	F	F^2
$n \geq 2$	0		0	$A = 0$	$F = 0$	$F^2 = 0$
$n \geq 2$	0		1	∞ реш.	$F = 0$	$F^2 = 0$
$n \geq 2$	1			$\varnothing$	$\varnothing$	$\varnothing$
$n \geq 2$	2		2	1 реш.	$F \neq 0$	$F^2 \neq 0$
$n \geq 3$	3	$j_1 = j_2 = j_3$	3	1 реш.	$F \neq 0$	$F^2 \neq 0$
$n \geq 3$	3	$j_1 = j_2 > j_3$	3	2 реш.	$F \neq 0$	два $F^2 \neq 0$
$n \geq 3$	3	$j_3 > j_1 = j_2$	3	2 реш.	$F \neq 0$	одно $F^2 \neq 0$
$n \geq 3$	3	все различные j_1, j_2, j_3	3	2 реш.	$F \neq 0$	два $F^2 \neq 0$

В **параграфе 1.3** приводится новая формулировка гиперболического сингулярного разложения (HSVD) для произвольной комплексной (или вещественной) матрицы без использования гиперобменных матриц, которые не образуют группу. В нашей формулировке мы используем только матрицы из псевдоунитарных (или псевдоортогональных) групп. Мы показываем, что вычисление HSVD в общем случае сводится к вычислению собственных чисел, собственных векторов и обобщенных собственных векторов (присоединенных векторов) некоторых вспомогательных матриц. Новая формулировка более естественна и удобна для приложений. Она естественным образом включает в себя обычное сингулярное разложение (SVD).

Приведем формулировку для комплексного случая. Для получения вещественного аналога достаточно заменить операцию эрмитова сопряжения † на транспонирование T, унитарные $\mathrm{U}(N)$ и псевдоунитарные группы $\mathrm{U}(p,q)$ на соответствующие ортогональные $\mathrm{O}(N)$ и псевдоортогональные группы $\mathrm{O}(p,q)$.

Теорема 3 *Пусть задана матрица η (3), $p+q=n$. Для произвольной матрицы $A\in\mathbb{C}^{n\times N}$ существуют матрицы $R\in\mathrm{U}(N)$ и $L\in\mathrm{U}(p,q)$ такие, что*

$$L^\dagger A R=\Sigma,\qquad \Sigma=\left(\begin{array}{cccc} X_x & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O}\\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & I_d & \mathrm{O}\\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O}\\ \hline \mathrm{O} & Y_y & \mathrm{O} & \mathrm{O}\\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & I_d & \mathrm{O}\\ \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O} & \mathrm{O}\end{array}\right)\begin{array}{l}\left.\vphantom{\begin{array}{c}X\\O\\O\end{array}}\right\}p\\ \left.\vphantom{\begin{array}{c}O\\O\\O\end{array}}\right\}q\end{array}\in\mathbb{R}^{n\times N},\tag{14}$$

где первый блок имеет p строк, а второй блок имеет q строк, X_x и Y_y есть диагональные матрицы соответствующих размеров x и y со всеми положительными, однозначно определенными диагональными элементами (с точностью до перестановки).

Более того, выбирая R, мы можем менять местами столбцы матрицы Σ. Выбирая L, можем менять местами строки в отдельных блоках, но не между блоками. Таким образом мы можем всегда выстроить диагональные элементы матриц X_x и Y_y в порядке убывания (или возрастания).

Здесь

$$d=\mathrm{rank}(A)-\mathrm{rank}(A^\dagger\eta A),\qquad x+y=\mathrm{rank}(A^\dagger\eta A),$$

и x есть число положительных собственных чисел матрицы $A^\dagger\eta A$, y есть число отрицательных собственных чисел матрицы $A^\dagger\eta A$.

Диагональные элементы матриц X, Y будем называть гиперболическими сингулярными числами.

Теорема 4 *Для матриц A, R, L и Σ из Теоремы 3 имеем следующие уравнения:*

$$(A^\dagger\eta A)R=R(\Sigma^{\mathrm{T}}\eta\Sigma),\qquad(\eta AA^\dagger)L=L(\eta\Sigma\Sigma^{\mathrm{T}}).\tag{15}$$

Гиперболические сингулярные числа матрицы A являются квадратными корнями из модулей собственных чисел матрицы $A^\dagger\eta A$. Столбцы матрицы R являются собственными векторами матрицы $A^\dagger\eta A$. Столбцы матрицы L являются собственными векторами матрицы $\eta AA^\dagger$ (в случае $d=0$) или собственными векторами и обобщенными собственными векторами (присоединенными векторами) матрицы $\eta AA^\dagger$ (в случае $d\neq0$).

В **параграфе 1.4** решается задача о предъявлении всех постоянных решений уравнений Янга – Миллса с SU(2) калибровочной симметрией в псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ произвольной размерности и сигнатуры.

Пользуясь глобальной симметрией (10) и гиперболическим сингулярным разложением (Теорема 3) для вещественного случая, можно привести одну из матриц $A = (A^{\nu}{}_{k})$, $J = (J^{\nu}{}_{k})$ к каноническому виду; вторая матрица будет иметь специальный вид в силу уравнений (9). Для каждого постоянного тока выбирается специальная система координат и специальная фиксация калибровки; приводится общее решение соответствующих систем уравнений в терминах потенциала A, напряженности F, а также инварианта F^2 поля Янга – Миллса. Все указанные выражения зависят только от гиперболических сингулярных чисел матрицы тока J, а также параметров x_J, y_J, d_J. Таким образом, дана полная классификация всех постоянных решений уравнений Янга – Миллса с SU(2) калибровочной симметрией в произвольном псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$.

В **параграфе 1.5** мы представляем полную классификацию всех постоянных решений уравнений Янга – Миллса – Дирака с SU(2) калибровочной симметрией в пространстве Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$. Представлен явный вид всех решений. Мы используем наши результаты о гиперболическом сингулярном разложении, причем для двух разных случаев (для вещественной матрицы $A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$ потенциала поля Янга – Миллса и для комплексной матрицы $\Psi \in \mathbb{C}^{4\times 2}$).

Система уравнений Янга – Миллса – Дирака с SU(2) калибровочной симметрией имеет вид

$$\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] =: F_{\mu\nu}, \tag{16}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} - [A_\mu, F^{\mu\nu}] = J^\nu := i\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^\nu\Psi - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(i\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^\nu\Psi)I_2, \tag{17}$$

$$i\gamma^\mu(\partial_\mu\Psi + \Psi A_\mu) - m\Psi = 0, \qquad m \geq 0, \tag{18}$$

для неизвестных $\Psi : \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{C}^{4\times 2}$ и $A^\mu : \mathbb{R}^{1,3} \to \mathfrak{su}(2)$. Система для постоянных решений ($\Psi \in \mathbb{C}^{4\times 2}, A \in \mathbb{R}^{4\times 3}$) системы (16), (17), (18) принимает вид

$$[A_\mu, [A^\mu, A^\nu]] = J^\nu := i\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^\nu\Psi - \frac{1}{2}\mathrm{tr}(i\Psi^\dagger\gamma^0\gamma^\nu\Psi)I_2, \tag{19}$$

$$i\gamma^\mu\Psi A_\mu - m\Psi = 0, \qquad m \geq 0. \tag{20}$$

Расписав потенциал и ток поля Янга – Миллса по базису алгебры Ли $\mathfrak{su}(2)$

$$A^\mu = A^\mu{}_a\tau^a, \qquad J^\mu = J^\mu{}_a\tau^a, \qquad A^\mu{}_a, J^\mu{}_a : \mathbb{R}^{1,3} \to \mathbb{R}, \qquad A := (A^\mu{}_a), \quad J := (J^\mu{}_a)$$

можно доказать, что система (19), (20) инвариантна относительно глобального преобразования

$$\Psi \to \Psi S, \qquad A \to QAP, \qquad J \to QJP, \qquad S \in \mathrm{SU}(2), \qquad Q \in \mathrm{O}(1,3), \qquad P \in \mathrm{SO}(3), \tag{21}$$

где P и S связаны как двулистное накрытие

$$S^{-1}\tau^a S = p^a_b\tau^b, \qquad P = (p^a_b) \in \mathrm{SO}(3), \qquad \pm S \in \mathrm{SU}(2). \tag{22}$$

Используя гиперболическое сингулярное разложение для матрицы A, мы получаем явный вид всех решений (Ψ, A) системы уравнений (19), (20). Также мы приводим явные формулы для соответствующего тока $J = (J^{\mu}_{\ a})$ и инварианта $F^2 = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$. Часть решений найдена с использованием псевдоунитарной симметрии уравнения Дирака, а именно система уравнений (19), (20) инвариантна по отношению к преобразованию

$$\Psi \to W^{-1}\Psi, \qquad \gamma^{\mu} \to W^{-1}\gamma^{\mu}W, \qquad W \in \mathrm{SU}(2,2). \tag{23}$$

Непостоянные решения уравнений Янга – Миллса – Дирака рассматриваются в виде рядов теории возмущений, где в качестве нулевого приближения берутся постоянные решения.

В **параграфе 1.6** решается задача о предъявлении явного вида всех постоянных решений системы уравнений Янга – Миллса – Прока в случае группы Ли $\mathrm{SU}(2)$ в произвольном псевдоевклидовом пространстве $\mathbb{R}^{p,q}$ (или евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$). Уравнения Янга – Миллса – Прока имеют вид

$$\partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} - \rho[A_{\mu}, A_{\nu}] =: F_{\mu\nu}, \tag{24}$$

$$\partial_{\mu}F^{\mu\nu} - \rho[A_{\mu}, F^{\mu\nu}] + m^2 A^{\nu} = 0, \tag{25}$$

где $A_{\mu} \in \mathfrak{g}\mathrm{T}_1$, $J^{\nu} \in \mathfrak{g}\mathrm{T}^1$, $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu} \in \mathfrak{g}\mathrm{T}_2$, $\rho \in \mathbb{R}$. Данные уравнения отличаются от уравнений Янга – Миллса (1), (2) наличием слагаемого m^2A^{ν} с массой $m \in \mathbb{R}$. Если масса равна нулю $m = 0$, то уравнения (24), (25) совпадают с уравнениями Янга – Миллса (1), (2) с нулевым током $J^{\nu} = 0$. Далее рассматривается случай $m \neq 0$. Для постоянных решений уравнений Янга – Миллса – Прока получаем систему уравнений

$$\eta_{\mu\alpha}A^{\alpha}_{\ c}A^{\mu}_{\ a}A^{\nu}_{\ b}\epsilon^{ab}_{\ \ d}\epsilon^{cd}_{\ \ k} = -\lambda A^{\nu}_{\ k}, \qquad \lambda = \frac{m^2}{\rho^2} > 0. \tag{26}$$

которую можно интерпретировать как систему уравнений Янга – Миллса для постоянных решений с током $J^{\nu} = -\lambda A^{\nu}$, зависящим от потенциала A^{ν}.

Мы пользуемся инвариантностью системы уравнений (26) по отношению к глобальному преобразованию

$$A \to QAP, \qquad Q \in \mathrm{O}(p,q), \qquad P \in \mathrm{SO}(3), \tag{27}$$

и гиперболическим сингулярным разложением для матрицы A. Дана классификация всех решений системы уравнений (26) в терминах A, F и F^2.

Рассматриваются непостоянные решения уравнений Янга – Миллса – Прока в виде рядов теории возмущений, где в качестве нулевого приближения берутся найденные постоянные решения уравнений Янга – Миллса – Прока. Для первого приближения выписаны системы линейных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами, которые могут далее исследоваться с помощью известных численных методов и методов теории линейных уравнений в частных производных.

В **параграфе 1.7** ищутся решения системы уравнений Янга – Миллса (1), (2) в виде плоских волн

$$A_\mu = a_\mu e^\rho, \quad \text{где} \quad \rho = \xi_\mu x^\mu \tag{28}$$

и a_μ – компоненты постоянного ковекторного поля со значениями в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. В случае алгебры Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(2)$, нулевого тока $J = 0$ и (псевдо)евклидова пространства $\mathbb{R}^{p,q}$, $p+q=n$ произвольной конечной размерности n получаем систему уравнений

$$\xi_\mu \xi^\mu a^\nu - \xi^\nu \xi_\mu a^\mu = 0, \tag{29}$$

$$-3\xi_\mu [a^\mu, a^\nu] = 0, \tag{30}$$

$$[a_\mu, [a^\mu, a^\nu]] = 0. \tag{31}$$

Приводится явный вид всех решений $\{a^\mu, \xi_\nu\}$ данной системы уравнений, решения выписываются при должном выборе системы координат и калибровки (любое решение изучаемой системы уравнений может быть сведено с помощью (псевдо)ортогональной замены координат и фиксации калибровки к указанным решениям). Таким образом, представлены все решения типа плоской волны системы уравнений Янга – Миллса с $\mathrm{SU}(2)$ калибровочной симметрией в произвольном псевдоевклидовом (или еклидовом) пространстве с нулевым током. Также обсуждаются решения уравнений Янга – Миллса в виде суммы волн. Предлагаются три система уравнений, моделирующих уравнения Янга – Миллса, которые могут быть интересны для дальнейшего изучения.

В **главе 2** решается ряд прикладных задач теории алгебр Клиффорда.

В **параграфе 2.1** рассматривается понятие вещественной алгебры Клиффорда (или геометрической алгебры) $\mathcal{C}\ell_{p,q,r}$. Порождающие (генераторы) алгебры $\mathcal{C}\ell_{p,q,r}$ удовлетворяют соотношениям $e_a e_b + e_b e_a = 2\eta_{ab} e$, где

$$\eta = (\eta_{ab}) = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \ldots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \ldots, -1}_{q}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{r}), \qquad p+q+r=n. \tag{32}$$

Произвольный элемент вещественной алгебры Клиффорда $U \in \mathcal{C}\ell_{p,q,r}$ может быть записан в виде

$$U = ue + \sum_{a=1}^{n} u_a e_a + \sum_{a<b} u_{ab} e_{ab} + \cdots + u_{1\ldots n} e_{1\ldots n} = \sum_A u_A e_A, \tag{33}$$

где $u, u_a, u_{ab}, \ldots, u_{1\ldots n} \in \mathbb{R}$ есть вещественные числа, e – единичный элемент, $e_A = e_{a_1\ldots a_k} = e_{a_1} \cdots e_{a_k}$ есть элементы базиса, $1 \le a_1 < \cdots < a_k \le n$. Здесь и далее через A мы обозначаем произвольный упорядоченный мультииндекс длины от 0 до n.

В частном случае $r = 0$ получаем *невырожденную вещественную алгебру Клиффорда* $\mathcal{C}\ell_{p,q} := \mathcal{C}\ell_{p,q,0}$. В частном случае $p = q = 0$, $r = n$ получаем *алгебру Грассмана (или внешнюю алгебру)* $\Lambda_n := \mathcal{C}\ell_{0,0,n}$. Также рассматривается *комплексифицированная алгебра Клиффорда*

$\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell_{p,q,r}$. Произвольный элемент $U\in\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell_{p,q,r}$ имеет вид (33), где u, u_a, u_{ab}, $\ldots$, $u_{1\ldots n}\in\mathbb{C}$ есть комплексные числа. Также рассматривается *комплексная алгебра Клиффорда*, для которой матрицу (32) в общем случае можно считать диагональной с p единицами и r нулями на главной диагонали, $p+r=n$, $q=0$. В том случае, когда рассуждения верны для вещественной или комплексной алгебры Клиффорда произвольной сигнатуры (в том числе вырожденные случаи), будем писать просто $\mathcal{C}\!\ell$, подчеркивая тем самым, что рассуждения не зависят от сигнатуры.

Алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell$ представима в виде прямой суммы $\mathcal{C}\!\ell=\bigoplus_{k=0}^n\mathcal{C}\!\ell^k$, где подпространства $\mathcal{C}\!\ell^k:=\{\sum_{A:|A|=k}u_Ae_A\}$ являются линейными оболочками элементов базиса e_A с мультииндексами длины $|A|=k$ и называются подпространствами ранга k. Будем рассматривать операции проецирования на подпространства фиксированных рангов $\langle U\rangle_k=\sum_{A:|A|=k}u_Ae_A\in\mathcal{C}\!\ell^k$. Рассматриваются три классические операции сопряжения: четностное сопряжение (инволюция) $\widehat{\ }$, реверс (антиинволюция) $\widetilde{\ }$ и суперпозиция этих двух операций $\widehat{\widetilde{\ }}$, которая называется клиффордовым сопряжением (антиинволюция):

$$\widehat{U}=\sum_{k=0}^n(-1)^k\langle U\rangle_k,\qquad \widetilde{U}=\sum_{k=0}^n(-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\langle U\rangle_k,\qquad \widehat{\widetilde{U}}=\sum_{k=0}^n(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}}\langle U\rangle_k,\tag{34}$$

$$\widehat{UV}=\widehat{U}\widehat{V},\qquad \widetilde{UV}=\widetilde{V}\widetilde{U},\qquad \widehat{\widetilde{UV}}=\widehat{\widetilde{V}}\widehat{\widetilde{U}},\qquad \forall U,V\in\mathcal{C}\!\ell.\tag{35}$$

Алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell$ является Z_2-градуированной алгеброй (или, используя физическую терминологию, *супералгеброй*), а именно представима в виде прямой суммы четного и нечетного подпространств

$$\mathcal{C}\!\ell=\mathcal{C}\!\ell^{(0)}\oplus\mathcal{C}\!\ell^{(1)},\quad \mathcal{C}\!\ell^{(j)}:=\bigoplus_{k=j\mod 2}\mathcal{C}\!\ell^k=\{U\in\mathcal{C}\!\ell\,|\,\widehat{U}=(-1)^jU\},\quad \mathcal{C}\!\ell^{(i)}\mathcal{C}\!\ell^{(j)}\subset\mathcal{C}\!\ell^{(i+j)\mod 2},\quad i,j=0,1.$$

Алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell$ представима в виде прямой суммы четырех подпространств $\mathcal{C}\!\ell=\mathcal{C}\!\ell^{\overline{0}}\oplus\mathcal{C}\!\ell^{\overline{1}}\oplus\mathcal{C}\!\ell^{\overline{2}}\oplus\mathcal{C}\!\ell^{\overline{3}}$, которые определяются как

$$\mathcal{C}\!\ell^{\overline{j}}:=\bigoplus_{k=j\mod 4}\mathcal{C}\!\ell^k=\{U\in\mathcal{C}\!\ell\,|\,\widehat{U}=(-1)^jU,\quad \widetilde{U}=(-1)^{\frac{j(j-1)}{2}}U\},\qquad j=0,1,2,3,$$

и называются *подпространствами кватернионных типов 0, 1, 2, 3*. В случае вещественной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$ будем обозначать эти четыре подпространства через $\overline{\mathbf{0}}$, $\overline{\mathbf{1}}$, $\overline{\mathbf{2}}$ и $\overline{\mathbf{3}}$. Верны свойства

$$[\overline{\mathbf{k}},\overline{\mathbf{k}}]\subseteq\overline{\mathbf{2}},\qquad [\overline{\mathbf{k}},\overline{\mathbf{2}}]\subseteq\overline{\mathbf{k}},\qquad k=0,1,2,3,\qquad [\overline{\mathbf{0}},\overline{\mathbf{1}}]\subseteq\overline{\mathbf{3}},\quad [\overline{\mathbf{0}},\overline{\mathbf{3}}]\subseteq\overline{\mathbf{1}},\quad [\overline{\mathbf{1}},\overline{\mathbf{3}}]\subseteq\overline{\mathbf{0}};\tag{36}$$

$$\{\overline{\mathbf{k}},\overline{\mathbf{k}}\}\subseteq\overline{\mathbf{0}},\qquad \{\overline{\mathbf{k}},\overline{\mathbf{0}}\}\subseteq\overline{\mathbf{k}},\qquad k=0,1,2,3,\qquad \{\overline{\mathbf{1}},\overline{\mathbf{2}}\}\subseteq\overline{\mathbf{3}},\quad \{\overline{\mathbf{1}},\overline{\mathbf{3}}\}\subseteq\overline{\mathbf{2}},\quad \{\overline{\mathbf{2}},\overline{\mathbf{3}}\}\subseteq\overline{\mathbf{1}}\tag{37}$$

относительно операций взятия коммутатора $[U,V]:=UV-VU$ и антикоммутатора $\{U,V\}:=UV+VU$.

В **параграфе 2.2** решается задача о вычислении обратного элемента в алгебре Клиффорда произвольной размерности. Представлены безбазисные формулы разных типов (явные и рекурсивные) для определителя и всех других коэффициентов характеристического многочлена, присоединенного элемента и обратных элементов в вещественных алгебрах Клиффорда произвольной размерности и сигнатуры. В формулах используются только операции умножения, сложения и операции сопряжения и не используются соответствующие матричные представления. При получении результатов используются методы из теории матриц и вычислительные методы (метод Леверрье – Фаддеева; метод вычисления коэффициентов характеристического многочлена с помощью полиномов Белла).

Рассмотрим комплексифицированную алгебру Клиффорда и изоморфизмы матричным алгебрам

$$\beta : \mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell_{p,q} \to M_{p,q} := \begin{cases} \mathrm{Mat}(2^{\frac{n}{2}}, \mathbb{C}), & \text{если } n \text{ четно,}\\ \mathrm{Mat}(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{C})\oplus\mathrm{Mat}(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{C}), & \text{если } n \text{ нечетно.}\end{cases} \quad (38)$$

Имеем точное представление β комплексифицированной алгебры Клиффорда $\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell_{p,q}$ соответствующей (минимальной) размерности над $\mathbb{C}$ или $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$ в зависимости от $n \mod 2$. Имеем $\mathcal{C}\ell_{p,q}\subset\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\ell_{p,q}$, значит $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ изоморфна некоторой подалгебре в $M_{p,q}$. Тогда можно рассмотреть представление (неминимальной размерности)

$$\beta : \mathcal{C}\ell_{p,q} \to \beta(\mathcal{C}\ell_{p,q}) \subset M_{p,q}. \quad (39)$$

Обозначим размерность представления (39) через $N := 2^{[\frac{n+1}{2}]}$.

Лемма 2 *Для матричного представления β (39), имеем*

$$\frac{1}{N}\mathrm{tr}(\beta(U)) = \langle U\rangle_0 \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q}.$$

Введем понятие *определителя*

$$\mathrm{Det}(U) := \det(\beta(U)) \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q} \equiv \mathbb{R}, \qquad U\in\mathcal{C}\ell_{p,q} \quad (40)$$

в вещественной алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\ell_{p,q}$, используя представление β (39).

Лемма 3 *Определитель (40) корректно определен, т.е. не зависит от выбора представления β (39).*

Назовем *характеристическим многочленом* элемента $U\in\mathcal{C}\ell_{p,q}$

$$\begin{aligned}\varphi_U(\lambda) &:= \mathrm{Det}(\lambda e - U) = \det(\beta(\lambda e - U)) = \det(\lambda I_N - \beta(U)) \\ &= \lambda^N - C_{(1)}\lambda^{N-1} - \cdots - C_{(N-1)}\lambda - C_{(N)} \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q},\end{aligned} \quad (41)$$

где коэффициенты характеристического многочлена $C_{(j)} = C_{(j)}(U) \in \mathcal{C}\!\ell^0_{p,q} \equiv \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, N$ могут быть интерпретированы как скаляры или как элементы ранга 0. Имеем $C_{(j)}(U) = c_{(j)}(\beta(U))$, где $c_{(j)}(\beta(U))$ есть коэффициенты характеристического многочлена матрицы $\beta(U)$. В частности, имеем $C_{(N)} = -\mathrm{Det}(U)$ и $C_{(1)} = \mathrm{tr}(\beta(U)) = N\langle U\rangle_0$.

Назовем *присоединенным элементом* алгебры Клиффорда для элемента $U \in \mathcal{C}\!\ell_{p,q}$ такой элемент $\mathrm{Adj}(U) \in \mathcal{C}\!\ell_{p,q}$, что $\mathrm{Adj}(U)U = U\mathrm{Adj}(U) = \mathrm{Det}(U)$. Обратный элемент существует $U^{-1} = \frac{\mathrm{Adj}(U)}{\mathrm{Det}(U)}$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Det}(U) \neq 0$. Выражение $\mathrm{Adj}(U)$ является аналогом присоединенной матрицы, а именно имеем $\mathrm{Adj}(U) = \mathrm{adj}(\beta(U))$.

Теорема 5 *Рассмотрим произвольный элемент алгебры Клиффорда* $U \in \mathcal{C}\!\ell_{p,q}$, $n = p + q$. *Обозначим* $N := 2^{[\frac{n+1}{2}]}$. *Рассмотрим следующий набор элементов алгебры Клиффорда* $U_{(k)}$, $k = 1, \ldots, N$, *и набор скаляров* $C_{(k)} \in \mathcal{C}\!\ell^0_{p,q} \equiv \mathbb{R}$, $k = 1, \ldots, N$:

$$U_{(1)} := U, \qquad U_{(k+1)} := U(U_{(k)} - C_{(k)}), \qquad C_{(k)} = \frac{N}{k}\langle U_{(k)}\rangle_0 \in \mathcal{C}\!\ell^0_{p,q} \equiv \mathbb{R}. \tag{42}$$

Тогда $C_{(k)}$ *есть коэффициенты характеристического многочлена,*

$$\mathrm{Det}(U) = -U_{(N)} = -C_{(N)} = U(C_{(N-1)} - U_{(N-1)}) \in \mathcal{C}\!\ell^0_{p,q} \equiv \mathbb{R} \tag{43}$$

есть определитель элемента U *и*

$$\mathrm{Adj}(U) = C_{(N-1)} - U_{(N-1)} \in \mathcal{C}\!\ell_{p,q} \tag{44}$$

есть присоединенный элемент для U.

Альтернативно, используя набор скаляров

$$S_{(k)} := (-1)^{k-1}N(k-1)!\langle U^k\rangle_0 \in \mathcal{C}\!\ell^0_{p,q} = \mathbb{R}, \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{45}$$

имеем следующие формулы

$$C_{(k)} = \frac{(-1)^{k+1}}{k!}B_k(S_{(1)}, S_{(2)}, S_{(3)}, \ldots, S_{(k)}), \qquad k = 1, \ldots, N, \tag{46}$$

$$\mathrm{Det}(U) = -C_{(N)} = \frac{1}{N!}B_N(S_{(1)}, S_{(2)}, S_{(3)}, \ldots, S_{(N)}), \tag{47}$$

$$\mathrm{Adj}(U) = \sum_{k=0}^{N-1}\frac{(-1)^{N+k-1}}{k!}U^{N-k-1}B_k(S_{(1)}, S_{(2)}, S_{(3)}, \ldots, S_{(k)}), \tag{48}$$

где мы используем полные полиномы Белла, имеющие следующие два эквивалентных определения

$$B_k(x_1, \ldots, x_k) \;\; := \;\; \sum_{i=1}^{k}\sum\frac{k!}{j_1!j_2!\cdots j_{k-i+1}!}(\frac{x_1}{1!})^{j_1}(\frac{x_2}{2!})^{j_2}\cdots(\frac{x_{k-i+1}}{(k-i+1)!})^{j_{k-i+1}}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x_1 & C_{k-1}^1 x_2 & C_{k-1}^2 x_3 & \cdots & x_k \\ -1 & x_1 & C_{k-2}^1 x_2 & \cdots & x_{k-1} \\ 0 & -1 & x_1 & \cdots & x_{k-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x_1 \end{pmatrix},$$

где вторая сумма берется по всем последовательностям $j_1, j_2, \ldots, j_{k-i+1}$ неотрицательных целых чисел, удовлетворяющих условиям $j_1 + j_2 + \cdots + j_{k-i+1} = i$ и $j_1 + 2j_2 + 3j_3 + \cdots + (k-i+1)j_{k-i+1} = k$.

Теорема 6 *В случае $n = 1$ имеем*

$$C_{(1)} = U + \widehat{U} \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q}, \qquad \mathrm{Det}(U) = -C_{(2)} = U\widehat{U} \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q}, \qquad \mathrm{Adj}(U) = \widehat{U}, \qquad U^{-1} = \frac{\widehat{U}}{\mathrm{Det}(U)}.$$

В случае $n = 2$ имеем

$$C_{(1)} = U + \widehat{\widetilde{U}} \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q}, \qquad \mathrm{Det}(U) = -C_{(2)} = U\widehat{\widetilde{U}} \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q}, \qquad \mathrm{Adj}(U) = \widehat{\widetilde{U}}, \qquad U^{-1} = \frac{\widehat{\widetilde{U}}}{\mathrm{Det}(U)}.$$

В случае $n = 3$ имеем

$$\begin{aligned} &C_{(1)} = U + \widehat{U} + \widetilde{U} + \widehat{\widetilde{U}} \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q}, \qquad C_{(2)} = -(U\widetilde{U} + U\widehat{U} + U\widehat{\widetilde{U}} + \widehat{U}\widehat{\widetilde{U}} + \widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}} + \widehat{U}\widetilde{U}) \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q}, \\ &C_{(3)} = U\widehat{U}\widehat{\widetilde{U}} + U\widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}} + U\widehat{U}\widetilde{U} + \widehat{U}\widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}} \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q}, \qquad \mathrm{Det}(U) = -C_{(4)} = U\widehat{U}\widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}} \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q}, \\ &\mathrm{Adj}(U) = \widehat{U}\widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}}, \qquad U^{-1} = \frac{\widehat{U}\widetilde{U}\widehat{\widetilde{U}}}{\mathrm{Det}(U)}. \end{aligned}$$

В случае $n = 4$ имеем

$$\begin{aligned} &C_{(1)} = U + \widehat{\widetilde{U}} + \widehat{U}^\triangle + \widetilde{U}^\triangle \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q},\ C_{(2)} = -(U\widehat{\widetilde{U}} + U\widehat{U}^\triangle + U\widetilde{U}^\triangle + \widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}^\triangle + \widehat{\widetilde{U}}\widetilde{U}^\triangle + (\widehat{U}\widetilde{U})^\triangle) \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q}, \\ &C_{(3)} = U\widehat{\widetilde{U}}\widehat{U}^\triangle + U\widehat{\widetilde{U}}\widetilde{U}^\triangle + U(\widehat{U}\widetilde{U})^\triangle + \widehat{\widetilde{U}}(\widehat{U}\widetilde{U})^\triangle \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q}, \qquad \mathrm{Det}(U) = -C_{(4)} = U\widehat{\widetilde{U}}(\widehat{U}\widetilde{U})^\triangle \in \mathcal{C}\ell^0_{p,q}, \\ &\mathrm{Adj}(U) = \widehat{\widetilde{U}}(\widehat{U}\widetilde{U})^\triangle, \quad U^{-1} = \frac{\widehat{\widetilde{U}}(\widehat{U}\widetilde{U})^\triangle}{\mathrm{Det}(U)}. \end{aligned}$$

Здесь и далее используется дополнительная операция сопряжения

$$U^\triangle = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{C_k^4} \langle U \rangle_k = \sum_{k=0,1,2,3 \mod 8} \langle U \rangle_k - \sum_{k=4,5,6,7 \mod 8} \langle U \rangle_k, \qquad n \geq 4.$$

В **параграфе 2.3** рассматривается уравнение Сильвестра – линейное уравнение вида $AX - XB = C$ для известных A, B, C и неизвестного X. Уравнение Сильвестра и его частный случай, уравнение Ляпунова (с $B = -A^\dagger$), широко используются в различных приложениях –

обработке изображений, теории управления, теории устойчивости, обработке сигналов, математическом моделировании и многое другое. В данной работе мы исследуем уравнение Сильвестра в алгебрах Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$ и представляем безбазисное решение этого уравнения в случае произвольного $n=p+q$.

Приведем сначала утверждения для частных случаев $n=4,5$ в явном виде, а затем утверждение для произвольного n с рекурсивными формулами.

Теорема 7 *Рассмотрим уравнение Сильвестра в алгебре* $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$, $p+q=4$

$$AX-XB=C, \tag{49}$$

для известных $A,B,C\in\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$ *и неизвестного* $X\in\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$.

Если $Q:=D\widehat{\widetilde{D}}(\widehat{D}\widetilde{D})^{\triangle}\neq 0$, *то*

$$X=\frac{\widehat{\widetilde{D}}(\widehat{D}\widetilde{D})^{\triangle}F}{Q}, \tag{50}$$

где

$$\begin{aligned} D &:= A^4-A^3(B+\widehat{\widetilde{B}}+\widehat{B}^{\triangle}+\widetilde{B}^{\triangle})+A^2(B\widehat{\widetilde{B}}+B\widehat{B}^{\triangle}+B\widetilde{B}^{\triangle}+\widehat{\widetilde{B}}\widehat{B}^{\triangle}+\widehat{\widetilde{B}}\widetilde{B}^{\triangle}+(\widehat{B}\widetilde{B})^{\triangle}) \qquad (51)\\ &- A(B\widehat{\widetilde{B}}\widehat{B}^{\triangle}+B\widehat{\widetilde{B}}\widetilde{B}^{\triangle}+B(\widehat{B}\widetilde{B})^{\triangle}+\widehat{\widetilde{B}}(\widehat{B}\widetilde{B})^{\triangle})+B\widehat{\widetilde{B}}(\widehat{B}\widetilde{B})^{\triangle},\\ F &:= A^3C-A^2C(\widehat{\widetilde{B}}+\widehat{B}^{\triangle}+\widetilde{B}^{\triangle})+AC(\widehat{\widetilde{B}}\widehat{B}^{\triangle}+\widehat{\widetilde{B}}\widetilde{B}^{\triangle}+(\widehat{B}\widetilde{B})^{\triangle})-C\widehat{\widetilde{B}}(\widehat{B}\widetilde{B})^{\triangle}. \qquad (52) \end{aligned}$$

Теорема 8 *Рассмотрим уравнение Сильвестра в алгебре* $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$, $p+q=5$,

$$AX-XB=C \tag{53}$$

для известных $A,B,C\in\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$ *и неизвестного* $X\in\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$.

Если $Q:=D\widetilde{D}(\widehat{D}\widehat{\widetilde{D}})^{\triangle}(D\widetilde{D}(\widehat{D}\widehat{\widetilde{D}})^{\triangle})^{\triangle}\neq 0$, *то*

$$X=\frac{\widetilde{D}(\widehat{D}\widehat{\widetilde{D}})^{\triangle}(D\widetilde{D}(\widehat{D}\widehat{\widetilde{D}})^{\triangle})^{\triangle}F}{Q}, \tag{54}$$

где

$$\begin{aligned} D &:= A^4-A^3(B+\widetilde{B}+\widehat{B}^{\triangle}+\widetilde{\widehat{B}}^{\triangle})+A^2(B\widetilde{B}+B\widehat{B}^{\triangle}+B\widetilde{\widehat{B}}^{\triangle}+\widetilde{B}\widehat{B}^{\triangle}+\widetilde{B}\widetilde{\widehat{B}}^{\triangle}+(\widehat{B}\widetilde{\widehat{B}})^{\triangle}) \qquad (55)\\ &- A(B\widetilde{B}\widehat{B}^{\triangle}+B\widetilde{B}\widetilde{\widehat{B}}^{\triangle}+B(\widehat{B}\widetilde{\widehat{B}})^{\triangle}+\widetilde{B}(\widehat{B}\widetilde{\widehat{B}})^{\triangle})+B\widetilde{B}(\widehat{B}\widetilde{\widehat{B}})^{\triangle},\\ F &:= A^3C-A^2C(\widetilde{B}+\widehat{B}^{\triangle}+\widetilde{\widehat{B}}^{\triangle})+AC(\widetilde{B}\widehat{B}^{\triangle}+\widetilde{B}\widetilde{\widehat{B}}^{\triangle}+(\widehat{B}\widetilde{\widehat{B}})^{\triangle})-C\widetilde{B}(\widehat{B}\widetilde{\widehat{B}})^{\triangle}. \qquad (56) \end{aligned}$$

Теорема 9 *Рассмотрим уравнение Сильвестра в алгебре* $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$, $p+q=n$,

$$AX-XB=C \tag{57}$$

для известных $A, B, C \in \mathcal{C}\!\ell_{p,q}$ *и неизвестного* $X \in \mathcal{C}\!\ell_{p,q}$.

Обозначим $N := 2^{[\frac{n+1}{2}]}$. *Если* $Q := d_{(N)} \neq 0$, *то*

$$X = \frac{(D_{(N-1)} - d_{(N-1)})F}{Q}, \qquad \text{где} \quad D := -\sum_{j=0}^{N} A^{N-j} b_{(j)}, \quad F := \sum_{j=1}^{N} A^{N-j} C(B_{(j-1)} - b_{(j-1)}), \quad (58)$$

и следующие выражения определяются рекурсивно ($k = 1, \ldots, N$)*:*

$$b_{(k)} = \frac{N}{k}\langle B_{(k)}\rangle_0, \quad B_{(k+1)} = B(B_{(k)} - b_{(k)}), \quad B_{(0)} := 0, \quad b_{(0)} := -1,$$
$$d_{(k)} = \frac{N}{k}\langle D_{(k)}\rangle_0, \quad D_{(k+1)} = D(D_{(k)} - d_{(k)}), \quad D_{(0)} := 0, \quad d_{(0)} := -1.$$

Заметим, что D (58) есть значение характеристического многочлена для элемента B с подстановкой элемента A.

В **параграфе 2.4** мы представляем метод вычисления элементов спинорных групп в случае произвольной размерности по заданным элементам соответствующих ортогональных групп при двулистном накрытии. Этот метод обобщает метод Хестенеса, который работает только в случае размерности 4. Мы используем метод усреднения в алгебре Клиффорда, предложенный ранее автором.

Рассмотрим псевдоортогональную группу $\mathrm{O}(p,q)$, $p+q=n$:

$$\mathrm{O}(p,q) := \{P \in \mathrm{Mat}(n, \mathbb{R}) \,|\, P^{\mathrm{T}}\eta P = \eta\}. \qquad (59)$$

Обозначим через $p^A_B = p^{a_1 \ldots a_k}_{b_1 \ldots b_k}$, $a_1 < \cdots < a_k$, $b_1 < \cdots < b_k$, миноры матрицы $P = (p^a_b)$. В случае пустых мультииндексов A и B соответствующий минор кладем равным 1 по определению. Группа $\mathrm{O}(p,q)$ имеет следующие подгруппы:

$$\mathrm{O}_+(p,q) \;:=\; \{P \in \mathrm{O}(p,q) \,|\, p^{1\ldots p}_{1\ldots p} \geq 1\}, \qquad \mathrm{O}_-(p,q) \;:=\; \{P \in \mathrm{O}(p,q) \,|\, p^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} \geq 1\},$$
$$\mathrm{SO}(p,q) \;:=\; \{P \in \mathrm{O}(p,q) \,|\, \mathrm{det} P = 1\}, \qquad \mathrm{SO}_+(p,q) \;:=\; \{P \in \mathrm{SO}(p,q) \,|\, p^{1\ldots p}_{1\ldots p} \geq 1\}.$$

Например, в частном случае пространства Минковского мы имеем следующие группы: группа Лоренца $\mathrm{O}(1,3)$, специальная (или собственная) группа Лоренца $\mathrm{SO}(1,3)$, ортохронная группа Лоренца $\mathrm{O}_+(1,3)$, ортохорная группа Лоренца $\mathrm{O}_-(1,3)$, специальная ортохронная группа Лоренца $\mathrm{SO}_+(1,3)$.

Будем обозначать через $M^\times$ подмножество всех обратимых элементов любого множества M. Рассмотрим группу Липшица

$$\Gamma^\pm_{p,q} := \{S \in \mathcal{C}\!\ell^{(0)\times}_{p,q} \cup \mathcal{C}\!\ell^{(1)\times}_{p,q} \,|\, S\mathcal{C}\!\ell^1_{p,q}S^{-1} \subset \mathcal{C}\!\ell^1_{p,q}\} = \{v_1 \cdots v_k \,|\, v_1, \ldots, v_k \in \mathcal{C}\!\ell^{1\times}_{p,q}\}$$

и ее четную подгруппу

$$\Gamma^+_{p,q} \;:=\; \{S \in \mathcal{C}\!\ell^{(0)\times}_{p,q} \,|\, S\mathcal{C}\!\ell^1_{p,q}S^{-1} \subset \mathcal{C}\!\ell^1_{p,q}\} = \{v_1 \cdots v_{2k} \,|\, v_1, \ldots, v_{2k} \in \mathcal{C}\!\ell^{1\times}_{p,q}\} \subset \Gamma^\pm_{p,q}.$$

Следующие группы называются *спинорными*:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pin}(p,q) &:= \{S\in\Gamma^{\pm}_{p,q}\,|\,\widetilde{S}S=\pm e\}=\{S\in\Gamma^{\pm}_{p,q}\,|\,\widehat{\widetilde{S}}S=\pm e\},\\
\mathrm{Pin}_+(p,q) &:= \{S\in\Gamma^{\pm}_{p,q}\,|\,\widehat{\widetilde{S}}S=+e\},\qquad \mathrm{Pin}_-(p,q) := \{S\in\Gamma^{\pm}_{p,q}\,|\,\widetilde{S}S=+e\},\\
\mathrm{Spin}(p,q) &:= \{S\in\Gamma^{+}_{p,q}\,|\,\widetilde{S}S=\pm e\}=\{S\in\Gamma^{+}_{p,q}\,|\,\widehat{\widetilde{S}}S=\pm e\},\\
\mathrm{Spin}_+(p,q) &:= \{S\in\Gamma^{+}_{p,q}\,|\,\widetilde{S}S=+e\}=\{S\in\Gamma^{+}_{p,q}\,|\,\widehat{\widetilde{S}}S=+e\}.
\end{aligned}
\tag{60}
$$

Рассмотрим скрученное присоединенное действие

$$\check{\mathrm{ad}}:\mathcal{C}\!\ell^{\times}_{p,q}\to\mathrm{End}\mathcal{C}\!\ell_{p,q},\qquad S\to\check{\mathrm{ad}}_S,\qquad \check{\mathrm{ad}}_S U=\widehat{S}US^{-1},\qquad U\in\mathcal{C}\!\ell_{p,q}.$$

Следующие гомоморфизмы сюръективны с ядром $\{\pm1\}$:

$$\check{\mathrm{ad}}:\mathrm{Pin}(p,q)\to\mathrm{O}(p,q),\quad \check{\mathrm{ad}}:\mathrm{Pin}_+(p,q)\to\mathrm{O}_+(p,q),\quad \check{\mathrm{ad}}:\mathrm{Pin}_-(p,q)\to\mathrm{O}_-(p,q),$$
$$\check{\mathrm{ad}}:\mathrm{Spin}(p,q)\to\mathrm{SO}(p,q),\quad \check{\mathrm{ad}}:\mathrm{Spin}_+(p,q)\to\mathrm{SO}_+(p,q).$$

Для каждой матрицы $P=(p^a_b)\in\mathrm{O}(p,q)$ существуют ровно два элемента $\pm S\in\mathrm{Pin}(p,q)$ такие, что $\widehat{S}e_aS^{-1}=p^b_ae_b$; аналогично для остальных рассматриваемых групп соответственно. Спинорные группы (60) являются двулистными накрытиями соответствующих ортогональных групп.

Теорема 10 *Рассмотрим вещественную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$ с четным $n=p+q$. Пусть $P\in\mathrm{SO}(p,q)$ есть такая ортогональная матрица, что*

$$M:=\sum_{A,B}p^B_Ae_Be^A\neq0.\tag{61}$$

Тогда мы можем найти элементы $\pm S\in\mathrm{Spin}(p,q)$, которые соответствуют матрице $P=(p^b_a)\in\mathrm{SO}(p,q)$ при двулистном накрытии $Se_aS^{-1}=p^b_ae_b$, следующим образом:

$$S=\pm\frac{M}{\sqrt{\alpha\,\widetilde{M}M}},\tag{62}$$

где $\widetilde{M}M\in\mathrm{Cen}(\mathcal{C}\!\ell_{p,q})=\mathcal{C}\!\ell^0_{p,q}\cong\mathbb{R}$ и знак $\alpha:=\mathrm{sign}(p^{1\ldots p}_{1\ldots p})e=\mathrm{sign}(p^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n})e=\widetilde{S}S=\pm e$ зависит от того, в какой компоненте ортогональной группы $\mathrm{SO}(p,q)$ находится элемент P.

Теорема 11 *Рассмотрим вещественную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$ с нечетным $n=p+q$. Пусть $P\in\mathrm{O}(p,q)$ есть такая ортогональная матрица, что*

$$M:=\sum_{A,B}(\det P)^{|A|}p^B_Ae_Be^A\neq0.\tag{63}$$

Тогда мы можем найти элементы $\pm S\in\mathrm{Pin}(p,q)$, которые соответствуют матрице $P=(p^b_a)\in\mathrm{O}(p,q)$ при двулистном накрытии $\widehat{S}e_aS^{-1}=p^b_ae_b$, следующим образом:

$$S=\pm\frac{M}{\sqrt{\alpha\,\widetilde{M}M}},\tag{64}$$

где

$$\widetilde{M}M \in \mathcal{C}\!\ell^0_{p,q} \subset \mathrm{Cen}(\mathcal{C}\!\ell_{p,q}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}, & \text{если } p-q=1 \mod 4; \\ \mathbb{C}, & \text{если } p-q=3 \mod 4 \end{cases}$$

и знак

$$\alpha := \begin{cases} \mathrm{sign}(p^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n})e = \widetilde{S}S = \pm e, & \text{если } n=1 \mod 4; \\ \mathrm{sign}(p^{1\ldots p}_{1\ldots p})e = \widehat{\widetilde{S}}S = \pm e, & \text{если } n=3 \mod 4 \end{cases} \tag{65}$$

зависит от того, в какой компоненте ортогональной группы $\mathrm{O}(p,q)$ *находится элемент* P.

Рассмотрим частный случай Теорем 10 и 11 для элементов группы $\mathrm{Spin}_+(p,q)$ и соответствующей группы $\mathrm{SO}_+(p,q)$. Элементы группы $\mathrm{Spin}_+(p,q)$ частно называются роторами и имеют широкое применение в геометрической алгебре. Пусть

$$Se_a\widetilde{S} = \beta_a, \qquad \widetilde{S} = S^{-1},$$

где два фрейма e_a и β_a, $a=1,\ldots,n$ связаны вращением. Если $M = \beta_A e^A = e + \beta_a e^a + \cdots + \beta_{1\ldots n}e^{1\ldots n} \neq 0$, то

$$S = \pm\frac{M}{\sqrt{\widetilde{M}M}}.$$

Представленные явные формулы для вычисления элементов спинорных групп обобщают формулы, которые были известны ранее и работали только в случае малых размерностей $n \leq 4$.

В **параграфе 2.5** изучаются уравнения для спиновой связности общего вида в произвольном псевдоевклидовом пространстве. Представлено общее решение этих уравнений.

Рассмотрим псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^{k,l}$ размерности $\dim\mathbb{R}^{k,l} = k+l = m \geq 1$ с декартовыми координатами x^μ, $\mu = 1,\ldots,m$. Метрический тензор пространства $\mathbb{R}^{k,l}$ задается диагональной матрицей $g = (g_{\mu\nu}) = (g^{\mu\nu})$ с k единицами и l минус единицами на главной диагонали. Рассмотрим вещественную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$, $p+q=n\geq 1$ с порождающими e_a, $a=1,\ldots,n$, которые удовлетворяют соотношениям $e_ae_b + e_be_a = 2\eta_{ab}e$ с диагональной матрицей $\eta = (\eta_{ab}) = (\eta^{ab})$ с p единицами и q минус единицами на главной диагонали.

Мы используем обозначение $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mathrm{T}^r_s$ для множества тензорных полей $U^{\phi_1\ldots\phi_r}_{\psi_1\ldots\psi_s} = U^{\phi_1\ldots\phi_r}_{\psi_1\ldots\psi_s}(x) : \mathbb{R}^{k,l} \to \mathcal{C}\!\ell_{p,q}$ со значениями в алгебре Клиффорда:

$$U^\Phi_\Psi = u^{\phi_1\ldots\phi_r}_{\psi_1\ldots\psi_s}(x)e + u^{\phi_1\ldots\phi_r a}_{\psi_1\ldots\psi_s}(x)e_a + \cdots + u^{\phi_1\ldots\phi_r 1\ldots n}_{\psi_1\ldots\psi_s}(x)e_{1\ldots n} = u^{\Phi A}_\Psi(x)e_A \in \mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mathrm{T}^r_s, \quad u^{\Phi A}_\Psi : \mathbb{R}^{k,l} \to \mathbb{R}, \tag{66}$$

где подразумевается суммирование по упорядоченному мультииндексу A. Мы обозначаем мультииндекс $\phi_1\ldots\phi_r$ через Φ, мультииндекс $\psi_1\ldots\psi_s$ через Ψ, а их длины через $|\Phi| = r$, $|\Psi| = s$. Можем поднимать и опускать греческие индексы с помощью матрицы $g = (g^{\mu\nu})$ и поднимать и опускать латинские индексы с помощью матрицы $\eta = (\eta^{ab})$. Рассмотрим множество гладких функций со значениями в алгебре Клиффорда $h_a : \mathbb{R}^{k,l} \to \mathcal{C}\!\ell_{p,q}$

$$h_a(x) = y_a(x)e + y_a^b(x)e_b + \cdots + y_a^{1\ldots n}(x)e_{1\ldots n} = y_a^A(x)e_A, \tag{67}$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$h_a(x)h_b(x)+h_b(x)h_a(x)=2\eta_{ab}e, \qquad a,b=1,\ldots,n, \qquad \forall x\in\mathbb{R}^{k,l}. \tag{68}$$

В случае нечетного $n=p+q$ также требуем дополнительное условие $\langle h_1\cdots h_n\rangle_0=0$, чтобы получить независимые элементы h_A. Множество $\{h_A(x)\}=\{e,h_a(x),\ldots,h_{1\ldots n}(x)\}$ является базисом алгебры $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mathrm{T}$ гладких функций со значениями в алгебре Клиффорда. Будем обозначать подпространства фиксированных рангов относительного нового базиса через

$$\mathcal{C}\!\ell[h]^k_{p,q}\mathrm{T}=\{\sum_{A:\,|A|=k}u^A(x)h_A(x)\}, \qquad k=0,1,\ldots,n. \tag{69}$$

Операцию проецирования на подпространство $\mathcal{C}\!\ell[h]^k_{p,q}\mathrm{T}$ обозначаем через $\pi[h]_k$.

Теорема 12 *Множество*

$$\mathcal{C}\!\ell^{\circledS}_{p,q}:=\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\setminus\mathrm{Cen}(\mathcal{C}\!\ell_{p,q}), \qquad \textit{где} \quad \mathrm{Cen}(\mathcal{C}\!\ell_{p,q})=\begin{cases}\mathcal{C}\!\ell^0_{p,q}, & \textit{если } n \textit{ четно;}\\ \mathcal{C}\!\ell^0_{p,q}\oplus\mathcal{C}\!\ell^n_{p,q}, & \textit{если } n \textit{ нечетно,}\end{cases}$$

является алгеброй Ли по отношению к коммутатору $[A,B]=AB-BA$.

Для элементов $h_a\in\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mathrm{T}$ (67), (68) имеем (при $n\geq 2$) $h_a\in\mathcal{C}\!\ell^{\circledS}_{p,q}\mathrm{T}$, $a=1,\ldots,n$.

Рассмотрим следующую систему уравнений для неизвестных $C_\mu\in\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mathrm{T}_1$

$$\partial_\mu h_a-[C_\mu,h_a]=0, \qquad \mu=1,\ldots,m, \qquad a=1,\ldots,n. \tag{70}$$

Будем называть (70) *уравнением для спиновой связности общего вида*. Заметим, что если мы имеем решение $C_\mu=C_\mu(x)\in\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mathrm{T}_1$ системы уравнений (70) и $\alpha_\mu=\alpha_\mu(x)$ есть произвольные непрерывные компоненты ковекторного поля со значениями в центре алгебры Клиффорда $\mathrm{Cen}(\mathcal{C}\!\ell_{p,q})$, то компоненты $C_\mu+\alpha_\mu\in\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mathrm{T}_1$ также удовлетворяют уравнению (70). Следовательно, логично предполагать $C_\mu\in\mathcal{C}\!\ell^{\circledS}_{p,q}\mathrm{T}_1$.

Теорема 13 *Пусть* $S:\mathbb{R}^{k,l}\to\mathcal{C}\!\ell^{\times}_{p,q}$ *есть такая функция со значениями в группе всех обратимых элементов алгебры Клиффорда* $\mathcal{C}\!\ell^{\times}_{p,q}$, *что* $S^{-1}\partial_\mu S\in\mathcal{C}\!\ell^{\circledS}_{p,q}\mathrm{T}_1$. *Тогда следующие выражения*

$$\acute{h}_a=S^{-1}h_aS\in\mathcal{C}\!\ell^{\circledS}_{p,q}\mathrm{T}, \qquad \acute{C}_\mu=S^{-1}C_\mu S-S^{-1}\partial_\mu S\in\mathcal{C}\!\ell^{\circledS}_{p,q}\mathrm{T}_1$$

также удовлетворяют уравнению $\partial_\mu\acute{h}_a-[\acute{C}_\mu,\acute{h}_a]=0, \quad \forall\mu=1,\ldots,m, \quad a=1,\ldots,n.$

Теорема 14 *Следующее условие нулевой кривизны следует из (70):*

$$\partial_\mu C_\nu-\partial_\nu C_\mu-[C_\mu,C_\nu]=0, \qquad \mu,\nu=1,\ldots,m. \tag{71}$$

Условия (71) инвариантны относительно калибровочного преобразования $C_\mu\to\acute{C}_\mu=S^{-1}C_\mu S-S^{-1}\partial_\mu S$, *где* $S\in\mathcal{C}\!\ell^{\times}_{p,q}\mathrm{T}$ *и* $S^{-1}\partial_\mu S\in\mathcal{C}\!\ell^{\circledS}_{p,q}\mathrm{T}_1$.

Теорема 15 *Пусть $C_\mu \in \mathcal{C}\!\ell^{\circledS}_{p,q}\mathrm{T}_1$. Тогда следующие две системы уравнений эквивалентны:*

$$\partial_\mu h_a - [C_\mu, h_a] = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C_\mu = \sum_{k=1}^{\acute{n}} \mu_k \pi[h]_k((\partial_\mu h^a)h_a), \tag{72}$$

где $\acute{n} = n$ для четного n, $\acute{n} = n-1$ для нечетного n и $\mu_k = \frac{1}{n-(-1)^k(n-2k)} = \frac{1}{n-\lambda_k}$. Здесь $\pi[h]_k$ есть проекционные операторы на подпространства (69).

Мы используем метод усреднения в алгебрах Клиффорда, чтобы получить другую форму записи единственного решения (72) системы (70).

Теорема 16 *Из системы (70) следует, что*

$$\partial_\mu h_A - [C_\mu, h_A] = 0, \qquad \mu = 1, \ldots, m \tag{73}$$

для всех упорядоченных мультииндексов A длины от 0 до n.

Теорема 17 *Система (70) имеет единственное решение $C_\mu \in \mathcal{C}\!\ell^{\circledS}_{p,q}\mathrm{T}_1$*

$$C_\mu = \frac{1}{2^n}(\partial_\mu h_A)h^A, \qquad \mu = 1, \ldots, m. \tag{74}$$

В случае нечетного n выражение (74) может быть представлено в виде

$$C_\mu = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{|A|=1}^{\frac{n-1}{2}} (\partial_\mu h_A)h^A, \qquad \mu = 1, \ldots, m. \tag{75}$$

В частном случае $h_a \in \mathcal{C}\!\ell^1_{p,q}\mathrm{T}$ представленные выражения (72), (74), (75) совпадают с известной формулой для спиновой связности $C_\mu = \frac{1}{4}(\partial_\mu h_a)h^a \in \mathcal{C}\!\ell^2_{p,q}\mathrm{T}_1$.

В **параграфе 2.6** мы представляем новый класс ковариантно постоянных решений уравнений Янга – Миллса. Эти решения соответствуют решению уравнения для спиновой связности общего вида.

Рассмотрим тензорное поле (66) со значениями в алгебре Клиффорда. Можем взять выражения $h_b(x) = y^A_b(x)e_A$ (67), (68) и получить другой базис $h_B(x) = y^A_B(x)e_A$ алгебры $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mathrm{T}$ для некоторого $y^A_B = y^A_B(x) : \mathbb{R}^{k,l} \to \mathbb{R}$. Имеем

$$U^\Phi_\Psi(x) = u[h]^{\Phi B}_\Psi(x)h_B(x) \in \mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mathrm{T}^r_s, \qquad u[h]^{\Phi B}_\Psi(x) : \mathbb{R}^{k,l} \to \mathbb{R}, \qquad u^{\Phi A}_\Psi(x) = u[h]^{\Phi B}_\Psi(x)y^A_B(x). \tag{76}$$

Рассмотрим следующую *операцию ковариантного дифференцирования*, которая зависит от базиса $\{h_A\}$ алгебры $\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mathrm{T}$

$$D_\mu U^\Phi_\Psi := \partial_\mu U^\Phi_\Psi - [C_\mu, U^\Phi_\Psi], \qquad U^\Phi_\Psi \in \mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mathrm{T}^r_s, \tag{77}$$

где $C_\mu = C_\mu(x) \in \mathcal{C}\!\ell^{\circledS}_{p,q}\mathrm{T}_1$ есть единственное решение системы (70).

Теорема 18 *Для произвольного тензорного поля (76) со значениями в $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ имеем*

$$D_\mu(U^\Phi_\Psi(x)) = \partial_\mu(u[h]^{\Phi B}_\Psi(x))h_B(x). \tag{78}$$

Рассмотрим множество *ковариантно постоянных тензорных полей со значениями в алгебре Клиффорда* $U^\Phi_\Psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}\mathrm{T}^r_s$

$$\mathrm{M}\mathcal{C}\ell_{p,q}\mathrm{T}^r_s := \{U^\Phi_\Psi \in \mathcal{C}\ell_{p,q}\mathrm{T}^r_s, \quad D_\mu U^\Phi_\Psi = 0\}.$$

Рассмотрим систему уравнений Янга – Миллса (1), (2) в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathcal{C}\ell^{\circledS}_{p,q}$, т.е. $A_\mu \in \mathcal{C}\ell^{\circledS}_{p,q}\mathrm{T}_1$, $F_{\mu\nu} \in \mathcal{C}\ell^{\circledS}_{p,q}\mathrm{T}_2$, $J^\nu \in \mathcal{C}\ell^{\circledS}_{p,q}\mathrm{T}^1$. Рассматривается случай псевдоевклидова пространства $\mathbb{R}^{k,l}$, $k+l=m$, с метрикой g. Константу связи для простоты положим равной единице $\rho = 1$.

Теорема 19 *Если ковариантно постоянное тензорное поле со значениями в алгебре Клиффорда $K_\mu \in \mathrm{M}\mathcal{C}\ell_{p,q}\mathrm{T}_1$ является решением следующей системы алгебраических уравнений*

$$[K_\mu, [K^\mu, K^\nu]] = J^\nu, \qquad \nu = 1, \dots, m, \tag{79}$$

для некоторого $J^\mu \in \mathrm{M}\mathcal{C}\ell_{p,q}\mathrm{T}^1$, то тензорное поле

$$A_\mu(x) = C_\mu(x) + K_\mu(x), \qquad \mu = 1, \dots, m, \tag{80}$$

является решением уравнений Янга – Миллса

$$\begin{aligned} &\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - [A_\mu, A_\nu] = F_{\mu\nu}, \qquad \mu, \nu = 1, \dots, m, \\ &\partial_\mu F^{\mu\nu} - [A_\mu, F^{\mu\nu}] = J^\nu, \qquad \nu = 1, \dots, m, \end{aligned} \tag{81}$$

в алгебре Ли $\mathcal{C}\ell^{\circledS}_{p,q}$, где $C_\mu \in \mathcal{C}\ell^{\circledS}_{p,q}\mathrm{T}_1$ есть единственное решение системы

$$\partial_\mu h_a - [C_\mu, h_a] = 0, \qquad \mu = 1, \dots, m, \qquad a = 1, \dots, n.$$

Теперь рассмотрим частный случай $k = p$, $l = q$. Имеем $m = n = p+q$, и диагональные матрицы совпадают $\eta = g$. Рассмотрим векторное поле $h^\mu \in \mathcal{C}\ell_{p,q}\mathrm{T}^1$ со значениями в алгебре Клиффорда $h^\mu = h^\mu(x) : \mathbb{R}^{p,q} \to \mathcal{C}\ell_{p,q}$

$$h^\mu(x) = y^\mu(x)e + y^{\mu a}(x)e_a + y^{\mu ab}(x)e_{ab} + \dots + y^{\mu 1\dots n}(x)e_{1\dots n} = y^{\mu A}e_A, \tag{82}$$

которое удовлетворяет

$$h^\mu(x)h^\nu(x) + h^\nu(x)h^\mu(x) = 2\eta^{\mu\nu}e, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^{p,q}. \tag{83}$$

В случае нечетного n требуем также выполнение дополнительного условия $\langle h^1(x)\dots h^n(x)\rangle_0 = 0$, чтобы получить независимые элементы $h^{\mu_1\cdots\mu_k}$. Выражение h^μ называется *клиффордовым полевым вектором*. Выражение

$$U = ue + u_{\omega_1}h^{\omega_1} + u_{\omega_1\omega_2}h^{\omega_1\omega_2} + \dots + u_{1\dots n}h^{1\dots n} = u_\Omega h^\Omega,$$

где $u_\Omega = u_{\omega_1\ldots\omega_j}$ являются кососимметричными тензорными полями ранга j, называется *h-формой*. Множество таких h-форм есть *алгебра h-форм* $\mathcal{C}\!\ell[h]_{p,q}$. Она является обобщением алгебры Атьи – Келера, где мы имеем вместо выражений h^μ дифференциалы dx^μ. Набор h^μ, $\mu = 1,\ldots,n = p+q$ порождает базис алгебры $\mathcal{C}\!\ell[h]_{p,q}$: $\{h^\Omega, |\Omega| = 0,1,\ldots,n\} = \{e, h^{\omega_1}, h^{\omega_1\omega_2},\ldots,h^{1\ldots n}\}$. Далее в диссертации приводятся аналоги Теорем 13–19 не для элементов h_a, а для векторных величин h^μ.

В **параграфе 2.7** обобщенная теорема Паули, доказанная в предыдущих работах автора для случая двух наборов элементов, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям вещественной или комплексифицированной алгебры Клиффорда размерности 2^n, переносится на случай, когда оба набора элементов гладко зависят от точки евклидова пространства V размерности r. С помощью уравнения, описывающего спиновую связность общего вида, показано, что вопрос о локальной теореме Паули эквивалентен вопросу о существовании решения некоторой специальной системы уравнений в частных производных.

Теорема 20 *Пусть гладкие функции $h_a : V \to \mathcal{C}\!\ell$, $a = 1,\ldots,n$, удовлетворяют соотношениям*

$$h_a(x)h_b(x) + h_b(x)h_a(x) = 2\eta_{ab}e, \qquad a,b = 1,\ldots,n, \qquad \forall x \in V$$

и дополнительному соотношению $\langle h_{1\ldots n}\rangle_0 = 0$ в случае нечетного n.

Тогда существует такая функция $S = S(x) : V \to \mathcal{C}\!\ell$, что $\exists\, S^{-1}(x)\,\forall x \in V$, удовлетворяющая системе уравнений

$$\partial_\mu S(x) = C_\mu(x)S(x), \qquad \mu = 1,\ldots,r, \qquad \forall x \in V, \tag{84}$$

где $C_\mu : V \to \mathcal{C}\!\ell \setminus \mathrm{Cen}(\mathcal{C}\!\ell)$ определяются как единственное решение системы уравнений

$$\partial_\mu h_a - [C_\mu, h_a] = 0, \qquad a = 1,\ldots,n, \qquad \mu = 1,\ldots,r, \tag{85}$$

и существует такая функция $T(x) = S(x)K$ для некоторого не зависящего от x обратимого элемента $K \in \mathcal{C}\!\ell$, которая также является обратимым во всем евклидовом пространстве решением системы (84) и осуществляет связь

$$e_a = T^{-1}(x)h_a(x)T(x), \qquad a = 1,\ldots,n, \qquad \forall x \in V \tag{86}$$

в случае четного n и

$$e_a = h_{1\ldots n}e^{1\ldots n}T^{-1}(x)h_a(x)T(x), \qquad a = 1,\ldots,n, \qquad \forall x \in V \tag{87}$$

в случае нечетного n, где $h_{1\ldots n}e^{1\ldots n} = \pm e$.

В диссертации подробно разобраны частные случаи $n = 2$, $r \geq 1$ и $n \geq 2$, $r = 1$, в которых решение задачи принимает более простой вид.

Из приведенной теоремы получаем алгоритм для вычисления функции $S = S(x)$. Используя этот алгоритм, а также алгоритм для вычисления элемента K из алгебраической теоремы Паули, получаем алгоритм для вычисления функции $T(x) = S(x)K$, осуществляющей связь двух наборов элементов $h_a(x)$, e_a, $a = 1, \ldots, n$.

В **параграфе 2.8** приводятся некоторые частные классы постоянных решений уравнений Янга – Миллса – Прока и Янга – Миллса в алгебрах Клиффорда. Рассматривается система уравнений Янга – Миллса – Прока для постоянных решений

$$[A_\mu, [A^\mu, A^\nu]] = -\lambda A^\nu, \qquad \lambda = \frac{m^2}{\rho^2} \geq 0, \tag{88}$$

где $A^\mu \in \mathfrak{g} = \mathcal{C}\!\ell^{\circledS}$ с $n \geq 2$. Данная система имеет следующий класс решений

$$(A^\mu)^2 = \frac{-\lambda \eta^{\mu\mu} e}{4(n-1)}, \quad \mu = 1, 2, \ldots, n; \qquad \{A^\mu, A^\nu\} = 0, \quad \mu \neq \nu. \tag{89}$$

После соответствующей нормировки элементы A^μ (89) будут порождающими: 1) алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell_{q,p}$, $p + q = n$ в случае вещественной алгебры Клиффорда; в случае комплексифицированной алгебры Клиффорда можно брать также другие сигнатуры; 2) алгебры Клиффорда меньшей размерности 2^{n-1} для $q - p = 1 \mod 4$ в случае вещественной алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell_{q,p}$ и для $p - q = 1, 3 \mod 4$ в случае комплексифицированной алгебры Клиффорда; 3) алгебры Грассмана для $\lambda = 0$.

В **главе 3** решаются задачи, связанные с группами и алгебрами Ли специального типа в формализме алгебр Клиффорда.

В **параграфе 3.1** представлена полная классификация алгебр Ли специального типа в комплексифицированных алгебрах Клиффорда $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\!\ell_{p,q}$. Эти 16 алгебр Ли являются прямыми суммами подпространств кватернионных типов. Получены изоморфизмы между рассматриваемыми алгебрами Ли и классическими матричными алгебрами Ли в случае произвольной размерности и сигнатуры пространства. Представлены 16 групп Ли: по одной группе Ли для каждой алгебры Ли, ассоциированной с этой группой Ли. Изучены связи между рассматриваемыми группами Ли и спинорными (вещественными $\mathrm{Spin}_+(p, q)$ и комплексными $\mathrm{Spin}(n, \mathbb{C})$) группами.

Теорема 21 *Комплексифицированная алгебра Клиффорда $\mathbb{C} \otimes \mathcal{C}\!\ell_{p,q}$ имеет следующие подалгебры Ли*[98]

$$\begin{gathered}\overline{\boldsymbol{2}}, \quad \overline{\boldsymbol{02}}, \quad \overline{\boldsymbol{12}}, \quad \overline{\boldsymbol{23}}, \quad \overline{\boldsymbol{2}} \oplus i\overline{\boldsymbol{0}}, \quad \overline{\boldsymbol{2}} \oplus i\overline{\boldsymbol{1}}, \quad \overline{\boldsymbol{2}} \oplus i\overline{\boldsymbol{2}}, \quad \overline{\boldsymbol{2}} \oplus i\overline{\boldsymbol{3}}, \quad \overline{\boldsymbol{0123}}, \\ \overline{\boldsymbol{02}} \oplus i\overline{\boldsymbol{02}}, \quad \overline{\boldsymbol{12}} \oplus i\overline{\boldsymbol{12}}, \quad \overline{\boldsymbol{23}} \oplus i\overline{\boldsymbol{23}}, \quad \overline{\boldsymbol{02}} \oplus i\overline{\boldsymbol{13}}, \quad \overline{\boldsymbol{12}} \oplus i\overline{\boldsymbol{03}}, \quad \overline{\boldsymbol{23}} \oplus i\overline{\boldsymbol{01}}.\end{gathered} \tag{90}$$

[98]Мы опускаем знак прямой суммы для упрощения обозначений: $\overline{\mathbf{0}} \oplus \overline{\mathbf{2}} = \overline{\mathbf{02}}$, $i\overline{\mathbf{1}} \oplus i\overline{\mathbf{3}} = i\overline{\mathbf{13}}$, $\overline{\mathbf{0}} \oplus \overline{\mathbf{1}} \oplus \overline{\mathbf{2}} \oplus \overline{\mathbf{3}} = \overline{\mathbf{0123}}$ и т.д.

Рассмотрим следующие 16 групп Ли в $\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$ (определения групп см. во втором столбце Таблицы 2)[99]:

$$(\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell_{p,q})^{\times},\quad \mathcal{C}\!\ell^{\times}_{p,q},\quad \mathcal{C}\!\ell^{(0)\times}_{p,q},\quad (\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell^{(0)}_{p,q})^{\times},\quad (\mathcal{C}\!\ell^{(0)}_{p,q}\oplus i\mathcal{C}\!\ell^{(1)}_{p,q})^{\times},\quad \mathrm{G}^{23i01}_{p,q},$$
$$\mathrm{G}^{12i03}_{p,q},\quad \mathrm{G}^{2i0}_{p,q},\quad \mathrm{G}^{23i23}_{p,q},\quad \mathrm{G}^{12i12}_{p,q},\quad \mathrm{G}^{2i2}_{p,q},\quad \mathrm{G}^{2i1}_{p,q},\quad \mathrm{G}^{2i3}_{p,q},\quad \mathrm{G}^{12}_{p,q},\quad \mathrm{G}^{23}_{p,q},\quad \mathrm{G}^{2}_{p,q}.$$

Здесь $\mathrm{A}^{\times}$ означает множество (группу) обратимых элементов множества A.

Теорема 22 *Подмножества $\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$, приведенные во втором столбце Таблицы 2, являются группами Ли. Подмножества $\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$, приведенные в третьем столбце Таблицы 2, являются алгебрами Ли соответствующих групп Ли из второго столбца Таблицы 2. Рассматриваемые группы Ли и алгебры Ли имеют размерности, приведенные в четвертом столбце Таблицы 2.*

Таблица 2: Группы Ли и соответствующие алгебры Ли специального типа в алгебрах Клиффорда

	группа Ли	алгебра Ли	размерность
1	$(\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell_{p,q})^{\times}=\{U\in\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mid\exists U^{-1}\}$	$\overline{\mathbf{0123}}\oplus i\overline{\mathbf{0123}}$	2^{n+1}
2	$\mathcal{C}\!\ell^{\times}_{p,q}=\{U\in\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mid\exists U^{-1}\}$	$\overline{\mathbf{0123}}$	2^{n}
3	$\mathcal{C}\!\ell^{(0)\times}_{p,q}=\{U\in\mathcal{C}\!\ell^{(0)}_{p,q}\mid\exists U^{-1}\}$	$\overline{\mathbf{02}}$	2^{n-1}
4	$(\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell^{(0)}_{p,q})^{\times}=\{U\in\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell^{(0)}_{p,q}\mid\exists U^{-1}\}$	$\overline{\mathbf{02}}\oplus i\overline{\mathbf{02}}$	2^{n}
5	$(\mathcal{C}\!\ell^{(0)}_{p,q}\oplus i\mathcal{C}\!\ell^{(1)}_{p,q})^{\times}=\{U\in\mathcal{C}\!\ell^{(0)}_{p,q}\oplus i\mathcal{C}\!\ell^{(1)}_{p,q}\mid\exists U^{-1}\}$	$\overline{\mathbf{02}}\oplus i\overline{\mathbf{13}}$	2^{n}
6	$\mathrm{G}^{23i01}_{p,q}=\{U\in\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mid\bar{\tilde{U}}U=e\}$	$\overline{\mathbf{23}}\oplus i\overline{\mathbf{01}}$	2^{n}
7	$\mathrm{G}^{12i03}_{p,q}=\{U\in\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mid\bar{\hat{\tilde{U}}}U=e\}$	$\overline{\mathbf{12}}\oplus i\overline{\mathbf{03}}$	2^{n}
8	$\mathrm{G}^{2i0}_{p,q}=\{U\in\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell^{(0)}_{p,q}\mid\bar{\tilde{U}}U=e\}$	$\overline{\mathbf{2}}\oplus i\overline{\mathbf{0}}$	2^{n-1}
9	$\mathrm{G}^{23i23}_{p,q}=\{U\in\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mid\tilde{U}U=e\}$	$\overline{\mathbf{23}}\oplus i\overline{\mathbf{23}}$	$2^{n}-2^{\frac{n+1}{2}}\sin\frac{\pi(n+1)}{4}$
10	$\mathrm{G}^{12i12}_{p,q}=\{U\in\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mid\hat{\tilde{U}}U=e\}$	$\overline{\mathbf{12}}\oplus i\overline{\mathbf{12}}$	$2^{n}-2^{\frac{n+1}{2}}\cos\frac{\pi(n+1)}{4}$
11	$\mathrm{G}^{2i2}_{p,q}=\{U\in\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell^{(0)}_{p,q}\mid\tilde{U}U=e\}$	$\overline{\mathbf{2}}\oplus i\overline{\mathbf{2}}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}$
12	$\mathrm{G}^{2i1}_{p,q}=\{U\in\mathcal{C}\!\ell^{(0)}_{p,q}\oplus i\mathcal{C}\!\ell^{(1)}_{p,q}\mid\bar{\tilde{U}}U=e\}$	$\overline{\mathbf{2}}\oplus i\overline{\mathbf{1}}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{\pi(n+1)}{4}$
13	$\mathrm{G}^{2i3}_{p,q}=\{U\in\mathcal{C}\!\ell^{(0)}_{p,q}\oplus i\mathcal{C}\!\ell^{(1)}_{p,q}\mid\bar{\hat{\tilde{U}}}U=e\}$	$\overline{\mathbf{2}}\oplus i\overline{\mathbf{3}}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{\pi(n+1)}{4}$
14	$\mathrm{G}^{23}_{p,q}=\{U\in\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mid\tilde{U}U=e\}$	$\overline{\mathbf{23}}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n-1}{2}}\sin\frac{\pi(n+1)}{4}$
15	$\mathrm{G}^{12}_{p,q}=\{U\in\mathcal{C}\!\ell_{p,q}\mid\hat{\tilde{U}}U=e\}$	$\overline{\mathbf{12}}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{\pi(n+1)}{4}$
16	$\mathrm{G}^{2}_{p,q}=\{U\in\mathcal{C}\!\ell^{(0)}_{p,q},\mid\tilde{U}U=e\}$	$\overline{\mathbf{2}}$	$2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}\cos\frac{\pi n}{4}$

В диссертации доказываются изоморфизмы групп Ли с номерами 1–5 из Таблицы 2 линейным классическим матричным группам Ли, изоморфизмы групп Ли с номерами 6–8 унитарным, псевдоунитарным и комплексным линейным классическим матричным группам Ли, изоморфизмы групп Ли с номерами 9–11 комплексным ортогональным, симплектическим и линейным

[99]Через $\bar{U}$ обозначено комплексное сопряжение от элемента комплексифицированной алгебры Клиффорда $U\in\mathbb{C}\otimes\mathcal{C}\!\ell_{p,q}$, т.е. взятие комплексного сопряжения от всех коэффициентов $u_A\in\mathbb{C}$ разложения по базису $\{e_A\}$.

классическим матричным группам Ли, изоморфизмы групп Ли с номерами 12–16 вещественным, комплексным и кватернионным ортогональным, симплектическим, линейным, унитарным и псевдоунитарным классическим матричным группам Ли (в зависимости от p и q). Как следствие, получаем изоморфизмы соответствующих алгебр Ли.

В **параграфе 3.2** изучаются внутренние автоморфизмы, которые оставляют инвариантными фиксированные подпространства вещественной $\mathcal{C}\ell_{p,q}$ или комплексной $\mathcal{C}\ell(\mathbb{C}^n)$ алгебры Клиффорда (обозначаем далее оба случая через $\mathcal{C}\ell$) – подпространства фиксированных рангов и подпространства, определяемые операциями реверса и четностного сопряжения. Представлены группы элементов, которые определяют указанные внутренние автоморфизмы, изучены их свойства. Некоторые из этих групп Ли могут быть интерпретированы как обобщения группы Клиффорда, группы Липшица и спинорных групп. Изучены соответствующие алгебры Ли.

Таблица 3: Группы Ли, сохраняющие фиксированные подпространства $\mathcal{C}\ell$ при преобразовании подобия, и соответствующие алгебры Ли

группа Ли	n	алгебра Ли	размерность
$\mathcal{C}\ell^{\times}$		$\mathcal{C}\ell$	2^n
$\Gamma=\bigcap_{k=0}^{n}\Gamma^k$	$1 \mod 2$	$\mathcal{C}\ell^{02n}$	$\frac{n(n-1)}{2}+2$
	$0 \mod 2$	$\mathcal{C}\ell^{02}$	$\frac{n(n-1)}{2}+1$
$\mathrm{P}=\Gamma^{(0)}=\Gamma^{(1)}$	$1 \mod 2$	$\mathcal{C}\ell^{(0)n}$	$2^{n-1}+1$
	$0 \mod 2$	$\mathcal{C}\ell^{(0)}$	2^{n-1}
$\mathrm{A}=\Gamma^{\overline{01}}=\Gamma^{\overline{23}}$	$1 \mod 4$	$\mathcal{C}\ell^{0\overline{23}n}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n-1}{2}}\sin(\frac{\pi(n+1)}{4})+2$
	$0,2,3 \mod 4$	$\mathcal{C}\ell^{0\overline{23}}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n-1}{2}}\sin(\frac{\pi(n+1)}{4})+1$
$\mathrm{B}=\Gamma^{\overline{03}}=\Gamma^{\overline{12}}$	$3 \mod 4$	$\mathcal{C}\ell^{0\overline{12}n}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n-1}{2}}\cos(\frac{\pi(n+1)}{4})+2$
	$0,1,2 \mod 4$	$\mathcal{C}\ell^{0\overline{12}}$	$2^{n-1}-2^{\frac{n-1}{2}}\cos(\frac{\pi(n+1)}{4})+1$
$\mathrm{Q}=\mathrm{Q}'=\Gamma^{\overline{k}}$	$1,3 \mod 4$	$\mathcal{C}\ell^{0\overline{2}n}$	$2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4})+2$
$(k=0,1,2,3)$	$2 \mod 4$	$\mathcal{C}\ell^{0\overline{2}}$	$2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4})+1$
$\mathrm{Q}=\Gamma^{\overline{1}}=\Gamma^{\overline{3}}$	$0 \mod 4$	$\mathcal{C}\ell^{0\overline{2}}$	$2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4})+1$
$\mathrm{Q}'=\Gamma^{\overline{0}}=\Gamma^{\overline{2}}$	$0 \mod 4$	$\mathcal{C}\ell^{0\overline{2}n}$	$2^{n-2}-2^{\frac{n-2}{2}}\cos(\frac{\pi n}{4})+2$

Будем использовать следующее обозначение для групп элементов, которые сохраняют подпространства фиксированных рангов, фиксированной четности, фиксированных кватернионных типов или их прямые суммы при преобразовании подобия[100]:

$$\Gamma^k \;:=\; \{T\in\mathcal{C}\ell^{\times}\,|\,T\mathcal{C}\ell^k T^{-1}\subseteq\mathcal{C}\ell^k\},\quad k=0,1,\ldots,n, \tag{91}$$

$$\Gamma^{(k)} \;:=\; \{T\in\mathcal{C}\ell^{\times}\,|\,T\mathcal{C}\ell^{(k)} T^{-1}\subseteq\mathcal{C}\ell^{(k)}\},\quad k=0,1, \tag{92}$$

[100]Мы опускаем знак прямой суммы для упрощения обозначений: $\mathcal{C}\ell^{\overline{kl}}=\mathcal{C}\ell^{\overline{k}}\oplus\mathcal{C}\ell^{\overline{l}}$, $\mathcal{C}\ell^{k\overline{l}}=\mathcal{C}\ell^{k}\oplus\mathcal{C}\ell^{\overline{l}}$ и т.д.

$$\Gamma^{\overline{k}} := \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\times} \,|\, T\mathcal{C}\!\ell^{\overline{k}}T^{-1} \subseteq \mathcal{C}\!\ell^{\overline{k}}\}, \quad k = 0,1,2,3, \tag{93}$$
$$\Gamma^{\overline{kl}} := \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\times} \,|\, T\mathcal{C}\!\ell^{\overline{kl}}T^{-1} \subseteq \mathcal{C}\!\ell^{\overline{kl}}\}, \quad k,l = 0,1,2,3. \tag{94}$$

В частном случае получаем известную группу Клиффорда $\Gamma := \Gamma^{1}$. Будем обозначать через $\mathrm{Z}^{\times}$ группу всех обратимых элементов центра Z алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell$

$$\mathrm{Z} := \begin{cases} \mathcal{C}\!\ell^{0}, & \text{если } n \text{ четно},\\ \mathcal{C}\!\ell^{0} \oplus \mathcal{C}\!\ell^{n}, & \text{если } n \text{ нечетно}. \end{cases} \tag{95}$$

Теорема 23 *Имеем равенство*

$$\Gamma^{(0)} = \Gamma^{(1)} = \mathrm{P} := \mathrm{Z}^{\times}(\mathcal{C}\!\ell^{(0)\times} \cup \mathcal{C}\!\ell^{(1)\times}) = \begin{cases} \mathcal{C}\!\ell^{(0)\times} \cup \mathcal{C}\!\ell^{(1)\times}, & \textit{если } n \textit{ четно},\\ \mathcal{C}\!\ell^{0n\times}\mathcal{C}\!\ell^{(0)\times}, & \textit{если } n \textit{ нечетно}. \end{cases}$$

Теорема 24 *Имеем равенство*

$$\Gamma^{\overline{01}} = \Gamma^{\overline{23}} = \mathrm{A} := \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\times} \,|\, \widetilde{T}T \in \mathrm{Z}^{\times}\}.$$

Теорема 25 *Имеем равенство*

$$\Gamma^{\overline{03}} = \Gamma^{\overline{12}} = \mathrm{B} := \{T \in \mathcal{C}\!\ell^{\times} \,|\, \widehat{\widetilde{T}}T \in \mathrm{Z}^{\times}\}.$$

Рассмотрим группы

$$\mathrm{Q} := \{T \in \mathrm{Z}^{\times}(\mathcal{C}\!\ell^{(0)\times} \cup \mathcal{C}\!\ell^{(1)\times}) \,|\, \widetilde{T}T \in \mathrm{Z}^{\times}\}, \tag{96}$$
$$\mathrm{Q}' := \{T \in \mathrm{Z}^{\times}(\mathcal{C}\!\ell^{(0)\times} \cup \mathcal{C}\!\ell^{(1)\times}) \,|\, \widetilde{T}T \in (\mathcal{C}\!\ell^{0} \oplus \mathcal{C}\!\ell^{n})^{\times}\}. \tag{97}$$

Имеем $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}'$ в случаях $n = 1,2,3 \mod 4$.

Теорема 26 *В случаях* $n \geq 4$ *имеем*

$$\mathrm{Q} = \Gamma^{\overline{1}} = \Gamma^{\overline{3}} \neq \mathrm{Q}' = \Gamma^{\overline{0}} = \Gamma^{\overline{2}}, \qquad n = 0 \mod 4, \tag{98}$$
$$\mathrm{Q} = \Gamma^{\overline{0}} = \Gamma^{\overline{1}} = \Gamma^{\overline{2}} = \Gamma^{\overline{3}}, \qquad n = 1,2,3 \mod 4. \tag{99}$$

В исключительных случаях имеем

$$\Gamma^{\overline{0}} = \mathcal{C}\!\ell^{\times} \neq \Gamma^{\overline{1}} = \Gamma^{\overline{2}} = \mathrm{Q} = \mathrm{P} = \mathcal{C}\!\ell^{(0)\times} \cup \mathcal{C}\!\ell^{(1)\times}, \quad n = 2,$$
$$\Gamma^{\overline{0}} = \Gamma^{\overline{3}} = \mathcal{C}\!\ell^{\times} \neq \Gamma^{\overline{1}} = \Gamma^{\overline{2}} = \mathrm{Q} = \mathrm{P} = \mathrm{Z}^{\times}\mathcal{C}\!\ell^{(0)\times}, \quad n = 3.$$

Теорема 27 *Имеем*

$$\Gamma = \mathrm{Q}, \qquad n \leq 5; \qquad \Gamma \neq \mathrm{Q}, \qquad n = 6. \tag{100}$$

Теорема 28 *Группы Ли* P, A, B, Q *и* Q′ *имеют следующие алгебры Ли* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{q}$ *и* $\mathfrak{q}'$, *представленные в Таблице 3, с соответствующими размерностями.*

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему учителю, доктору физико-математических наук Николаю Гурьевичу Марчуку за постоянное внимание к работе и поддержку.