

Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Гаращук Иван Русланович

**Нелинейная динамика и гиперхаос в двух биофизических моделях
связанных нелинейных осцилляторов**

РЕЗЮМЕ ДИССЕРТАЦИИ

на соискание учёной степени кандидата наук
по прикладной математике

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук
Синельщиков Дмитрий Игоревич

Москва – 2023

Введение

Актуальность

Динамические системы описывают процессы с детерминированным законом эволюции и возникают при моделировании разнообразных явлений во многих областях науки, таких как физика, химия и биология [1].

В зависимости от требований конкретных приложений и сложности модели, её исследование может проводиться как с использованием аналитических, так и численных методов. Независимо от подхода, интерес представляет проведение бифуркационного анализа, т.е. изучения изменений качественных свойств поведения системы с изменениями управляющих параметров. В связи с этим при численном моделировании, как правило, проводится не только расчёт эволюции фазовых переменных, но и вычисление спектра показателей Ляпунова, который позволяет определить тип динамики на аттракторе [2; 3]. Например, присутствие в спектре положительного показателя Ляпунова можно использовать в качестве критерия хаотической динамики [4], а построение карт ляпуновских показателей по управляющим параметрам можно использовать в качестве инструмента при проведении бифуркационного анализа.

В данной работе изучаются две модели связанных нелинейных осцилляторов, возникающие в биофизических приложениях. Первой является модель двух взаимодействующих инкапсулированных газовых пузырьков в жидкости. Её исследование представляет интерес, т.к. такие пузырьки применяют в современной медицине в качестве контрастных агентов при проведении ультразвуковых исследований с целью визуализации некоторых органов или областей кровеносной системы, а также в задачах, связанных с направленной доставкой лекарственных препаратов [5–8].

Отклик контрастных агентов формируется за счёт радиальных осцилляций пузырьков под воздействием внешнего ультразвукового поля. Нелинейность их колебаний приводит к тому, что возможны разнообразные режимы динамики, например субгармонические (по отношению к периоду ультразвукового поля), квазипериодические или хаотические. В свою очередь, от режима колебаний пузырьков зависят свойства отклика, а также долгосрочная стабильность самих контрастных агентов. В зависимости от приложений, могут требоваться различные акустические свойства контрастных агентов. Например, считается, что для задач, связанных с ультразвуковой визуализацией хорошо подходят субгармонические и хаотические режимы колебаний контрастных агентов, потому что спектр излучаемого поля обратного рассеяния, хорошо подходит для его эффективного распознавания, т.к. он резко отличается от спектра акустических волн, создаваемых окружающими тканями, колебания которых под воздействием ультразвукового поля близки к линейным [5; 9; 10]. Гиперхаотические режимы колебаний пузырьков также хорошо подходят для эффективного распознавания контрастных агентов на фоне окружающих тканей, однако могут приводить к более быстрому разрыву оболочки и растворению пузырьков. С другой стороны, это свойство может быть полезным в некоторых задачах направленной доставки препаратов, в которых требуется быстрый контролируемый разрыв оболочки.

Таким образом, интерес представляет исследование режимов динамики колебаний контрастных агентов, т.к. они тесно связаны с их акустическими свойствами. В основе

моделей микропузырьковых контрастных агентов лежит уравнение Рэля-Плессета, полученное для описания сферических пузырьков газа в несжимаемой жидкости [11]. Для формулировки корректной модели контрастных агентов, в уравнении необходимо учесть вязко-эластичную оболочку пузырьков. Существует ряд различных подходов к описанию оболочки, применимость которых к конкретным типам контрастных агентов зависит от материала и толщины оболочки, необходимости учёта её разрыва при колебаниях большой амплитуды и т.д. (см. обсуждение в [9], а также [5; 10; 12; 13]). В данной работе для описания контрастных агентов SonoVue с тонкой липидной оболочкой используется модель де-Йонга [12; 14]. Кроме того, в модели динамики пузырьков принимаются во внимание поправки на сжимаемость и вязкость жидкости [9]. Для учёта сжимаемости использован подход Келлер-Миксиса, демонстрирующий наибольшую точность [15]. Поскольку в кровяной поток вводится ансамбль контрастных агентов, акустические волны, излучаемые каждым из них, воздействуют на другие пузырьки. Влияние такого взаимодействия на колебания пузырьков описывается силой Бьёркнеса [16], и может значительно изменять динамику колебаний пузырьков в кластере [16—20].

Вторым видом моделей, исследуемых в работе, является модель взаимодействующих нейронов. Возбудимость нейронов играет ключевую роль в передаче сигналов в нервной системе. Электрические механизмы возбуждения нервной клетки и генерации потенциала действия хорошо описываются моделью Ходжкина-Хаксли [21]. Модель Хиндмарш-Роуза, выводимая в рамках формализма Ходжкина-Хаксли, была предложена в работе [22] для воспроизведения бёрстинговых паттернов активности потенциала нейронной мембраны, наблюдаемой в экспериментах. Она применяется для описания возбудимых клеток, в которых такие режимы активности играют важную биологическую роль [23]. В организме человека такие клетки формируют сети взаимодействующих элементов, и прикладной интерес представляет моделирование их поведения. Более того, по современным представлениям некоторые специфические режимы динамики, такие как синхронная периодическая активность, в некоторых группах нейронов, ассоциируются с патологическим поведением [24], и отыскание областей устойчивости таких режимов в пространстве параметров может играть важную роль.

Кроме того, изучение таких динамических явлений, как гиперхаотическая динамика и синхронизация, возникающих в данных моделях, интересно с точки зрения динамических систем. Динамика на аттракторе называется гиперхаотической, если присутствуют гиперболические неустойчивости размерности два или более. При численном исследовании это выражается в том, что два или более показателя Ляпунова являются положительными. Поскольку дивергенция фазового потока на аттракторе гладкой диссипативной динамической системы, соответствующая сумме показателей Ляпунова, должна быть отрицательной, гиперхаотические аттракторы могут наблюдаться только в динамических системах размерности четыре или выше.

Первый пример гиперхаотического аттрактора был найден в четырёхмерной системе Рёсслера [25]. В дальнейшем, присутствие гиперхаотических режимов наблюдалось в разнообразных динамических системах (см., например, [26—28]). Экспериментальное подтверждение гиперхаотического поведения в физических системах было получено в работах по исследованию динамики в электрических цепях [29], лазерных системах с ядерным магнитным резонансом [30] и германиевых полупроводниках р-типа [31]. Однако, бифур-

кационные сценарии появления гиперхаотических странных аттракторов в многомерных системах недостаточно исследованы [32].

Другим интересным эффектом, возникающим в изучаемых моделях, является синхронизация колебаний в системах связанных нелинейных осцилляторов. Синхронные режимы имеют качественные отличия от асинхронных как с точки зрения динамики [33], так и с точки зрения приложений. С точки зрения динамических систем представляет интерес изучение явления разрушения синхронизации, наблюдаемого в рассматриваемых моделях. Более того, в некоторых случаях, этот феномен связан с возникновением гиперхаотических режимов динамики.

Степень разработанности проблемы

В области моделирования колебаний микропузырьковых контрастных агентов существует ряд работ по исследованию динамики отдельных пузырьков без учёта взаимодействия. Так, в работе [34] проведено детальное исследование бифуркационной структуры в модели пузырьков без оболочки. Более сложные модели динамики отдельных контрастных агентов с оболочкой были рассмотрены в работах [10; 35; 36]. Однако, в работе [36] при анализе бифуркаций, не была корректно учтена мультистабильность в системе. Существует несколько работ, посвящённых динамике двух или нескольких взаимодействующих пузырьков [17; 20; 37]. Однако, в работе [17] рассматривались пузырьки без оболочки. В то время как, в исследованиях [20; 37] использовалась некорректная модель оболочки (см. обсуждение в [9]). В работе [38] рассматривается большой кластер контрастных агентов, и для понижения размерности применяется редукция, позволяющая эффективно искать синхронные режимы осцилляций пузырьков. Тем не менее, как показано в данной работе, синхронные режимы динамики могут быть трансверсально неустойчивы, или неустойчивы к возмущениям, разрушающим симметрию, а мультистабильность является очень существенным фактором в динамике нескольких взаимодействующих контрастных агентов. С другой стороны, важный случай двух пузырьков с корректным учётом как оболочки, так и взаимодействия, не был исследован ранее. Рассмотрение такой системы является первым шагом к детальному моделированию поведения контрастных агентов в кластерах. Её изучение также необходимо для исследования влияния силы взаимодействия на синхронизацию колебаний и возникновение мультистабильных состояний. В связи с чем, в диссертационной работе предлагается модель двух взаимодействующих контрастных агентов инкапсулированных в оболочки и проводится исследование динамики их колебаний.

Теперь остановимся на моделировании поведения отдельных и взаимодействующих нейронов. Динамика одного нейрона, описываемого системой Хиндмарш-Роуза, изучено достаточно подробно (см. работы [39—42]). Ряд работ посвящён исследованию активности в ансамблях из двух и более элементов [43—45], а также эффектам синхронизации в больших сетях [46; 47]. Однако, в моделях сетей взаимодействующих нейронов недостаточно подробно исследована динамика в малых ансамблях, в частности недостаточно изучен вопрос об устойчивости синхронных режимов, соответствующим режимам динамики отдельных нейронов. Помимо этого, интерес представляет исследование новых асинхронных режимов, возникающих в малых нейронных ансамблях. В связи с этим, в данной работе проводится исследование динамики и синхронизации в минимальном ансамбле из двух

взаимодействующих нейронов, а также рассматриваются механизмы возбудимости такой системы и проводится моделирование её возбуждения сигналом, поступающим от внешнего нейрона.

В области динамических систем давно известны примеры гиперхаотических аттракторов [25; 48]. Не смотря на это, до недавнего времени механизмы их возникновения подробно не изучались. Исключение составляют системы слабо связанных осцилляторов, в которых появление гиперхаотической динамики объяснялось возникновением хаотических аттракторов в каждой из подсистем [49; 50]. В работах [51; 52] авторы отмечали, что для перехода от хаотической динамики к гиперхаотической необходимо включение множества седловых орбит с двумерными неустойчивыми многообразиями в аттрактор. Однако, бифуркационные механизмы появления таких траекторий объяснены не были. Помимо этого, изучались сценарии возникновения гиперхаотических аттракторов в отображениях типа Эно́ [53] и отмечалась гиперхаотическая природа дискретных аттракторов Шильникова [54; 55]. В связи с этим, важную роль играет изучение бифуркационных механизмов, лежащих в основе возникновения гиперхаотической динамики в физических моделях связанных нелинейных осцилляторов, рассматриваемых в диссертационной работе.

Цели и задачи исследования

Целью работы является изучение динамики в двух прикладных системах связанных нелинейных осцилляторов и выявление новых бифуркационных сценариев возникновения гиперхаотических колебаний. Для достижения этой цели решены следующие задачи:

1. Формулировка математической модели двух газовых пузырьков при учёте их оболочек, вязкости и сжимаемости жидкости, взаимодействия посредством силы Бьёркнеса и внешнего ультразвукового поля.
2. Разработка модификации алгоритма вычисления спектра показателей Ляпунова для детального изучения изменений динамики в условиях разрушения синхронизации и реализация программного комплекса для численного исследования изучаемых моделей.
3. Исследование динамики в модели двух взаимодействующих контрастных агентов с учётом мультистабильности и выявление новых сценариев возникновения гиперхаотической динамики.
4. Исследование синхронизации в модели двух взаимодействующих контрастных агентов, устойчивости синхронных режимов и сценариев разрушения синхронизации.
5. Исследование динамики в модели двух взаимодействующих нейронов и проведение анализа устойчивости синхронных режимов колебаний.
6. Изучение механизмов возбудимости группы из двух связанных нейронов и моделирование возбуждения внешними сигналами, поступающими от отдельного нейрона.

Методы исследования

Для решения поставленных задач применялось сочетание численных и аналитических методов. Для поиска стационарных точек и проведения анализа устойчивости в линейном приближении использовались аналитические методы.

Для вычисления траекторий динамических систем применяются адаптивные методы с переменным шагом, подходящие для интегрирования жёстких систем. Для нахождения начальных условий при изменении управляющих параметров, используется метод наследования начальных данных, основанный на идее продолжимости по параметру. Использование данного подхода необходимо из-за мультистабильности, характерной для исследуемых систем.

Для установления типов динамики используется комбинация методов построения отображений Пуанкаре и вычисления спектра показателей Ляпунова. Для анализа бифуркаций строятся карты спектра показателей Ляпунова по управляющим параметрам. Для исследования трансверсальной устойчивости синхронных режимов используется метод вычисления старшего трансверсального показателя Ляпунова. Также, для детального изучения динамики в процессе разрушения синхронизации и потери трансверсальной устойчивости в работе реализован метод отдельного вычисления спектра ляпуновских показателей для синхронной и асинхронной компонент траектории. Для ускорения вычислений при построении карт показателей Ляпунова использовались методы параллельных вычислений. Для спектрального анализа численных решений применялось быстрое преобразование Фурье.

Научная новизна

- Предложена математическая модель, описывающая динамику двух газовых пузырьков в оболочке, взаимодействующих посредством силы Бьёркнеса. Построены двумерные и одномерные карты режимов динамики, исследованы бифуркационные сценарии переходов между различными типами динамических режимов.
- Выявлен новый сценарий возникновения гиперхаотических аттракторов в системах связанных осцилляторов с внешним воздействием, сопровождающийся вторичной бифуркацией Неймарка-Сакера и возникновением гомоклинического аттрактора Шильникова.
- Выявлен новый сценарий появления гиперхаотических аттракторов в системах связанных осцилляторов с внешним воздействием, связанный с разрушением синхронизации через «пузырьковый переход».
- Найдены новые асинхронные режимы активности в модели, описывающей динамику двух взаимодействующих нейронов, и указаны области устойчивости синхронных режимов. Описаны механизмы возбудимости такой системы, и представлены результаты моделирования возбуждения этой системы нейронным сигналом.

Теоретическая значимость

Не смотря на то, что известны многочисленные примеры гиперхаотических аттракторов, в том числе в прикладных моделях, бифуркационные механизмы появления двумерных неустойчивостей были объяснены лишь в специфических случаях. В диссертационной работе выявлено два новых сценария возникновения гиперхаотической динамики в широком классе систем связанных осцилляторов с внешним воздействием. Предложенное объяснение бифуркационных механизмов является достаточно универсальным, и реализации данных сценариев были обнаружены в других системах. Также, была показана связь некоторых явлений, известных в теории синхронизации, с возникновением гиперхаотической динамики.

Практическая значимость

Не смотря на достаточно подробные исследования колебаний отдельных газовых пузырьков как без оболочки, так и с различными моделями оболочек, динамика в кластерах с учётом взаимодействия рассматривалась лишь в специфических случаях, а подробные исследования динамики в малых ансамблях с корректным учётом оболочки практически отсутствуют. В диссертационной работе предложена модель не изученного ранее случая двух взаимодействующих контрастных агентов в оболочках, и проведено подробное исследование динамики с учётом мультистабильности. Были обнаружены новые режимы, не наблюдаемые ранее в моделях контрастных агентов, и построены карты режимов динамики, показывающие связь амплитуды внешнего поля давлений и расстояния между пузырьками с режимами колебаний.

В рамках моделей связанных нейронов было проведено исследование динамики в полносвязной группе из двух элементов. Была рассмотрена устойчивость синхронных режимов и возникновение асинхронной динамики. Изучены механизмы возбудимости такой системы и проведено моделирование её возбуждения внешними сигналами. В качестве генератора естественных для нейронных систем возбуждающих сигналов использовался отдельный нейрон.

Результаты, выносимые на защиту

1. Предложена математическая модель двух взаимодействующих газовых пузырьков с учётом их оболочек. В рамках данной модели построены одномерные и двумерные карты режимов динамики в физически релевантном диапазоне управляющих параметров с учётом мультистабильности. В пространстве параметров найдены области существования синхронных колебаний. Описаны бифуркационные сценарии возникновения регулярных, хаотических и гиперхаотических режимов динамики.
2. Выявлен сценарий возникновения гиперхаотической динамики, ключевыми этапами которого являются вторичная бифуркация Неймарка-Сакера и появление гомоклинического аттрактора Шильникова при включении седло-фокусных орбит с двумерными неустойчивыми многообразиями в хаотический аттрактор. Численно подтвер-

ждена реализация предложенного сценария в модели взаимодействующих микропузырьковых контрастных агентов.

3. Выявлен сценарий возникновения гиперхаотического аттрактора, в основе которого лежит разрушение синхронизации. Установлено, что механизмом появления трансверсально неустойчивых областей в синхронном хаотическом аттракторе является каскад бифуркаций, известный, как «пузырьковый переход». Реализация данного сценария в модели взаимодействующих микропузырьковых контрастных агентов подтверждена численно с помощью разработанной модификации алгоритма вычисления спектра показателей Ляпунова.
4. В модели двух взаимодействующих нейронов, описываемых системой Хиндмарш-Роуза, построены одномерные карты режимов динамики и описаны паттерны нейронной активности. Установлены области трансверсальной устойчивости синхронных режимов и сценарий возникновения асинхронного хаотического аттрактора. Найдены области бистабильности. Изучены бифуркационные механизмы возбудимости такой системы и предложена модель её возбуждения сигналом, создаваемый поступающим от внешнего нейрона. В области устойчивости синхронного положения равновесия построены карты возбуждения различными сигналами.

Достоверность результатов

Достоверность результатов математического моделирования подтверждается тщательным тестированием численных алгоритмов, реализованных в рамках комплекса программ, на известных данных, результатах, полученных на других программных комплексах, и аналитических решениях. Основные результаты диссертационного исследования были апробированы на международных научных конференциях и опубликованы в рецензируемых научных журналах. Все результаты, представленные к защите, опубликованы в научных журналах, индексируемых в научных базах Web of Science или Scopus. Три статьи опубликованы в журналах квартиля Q1, и две работы в журналах квартиля Q3.

Апробация результатов исследования

Основные результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях:

1. Topological methods in dynamics and related topics, «Nonlinear dynamics and typical bifurcations in the model of three coupled ultrasound contrast agents», май 2022.
2. Shilnikov Workshop, «Asynchronous chaos and bifurcations in a model of two coupled Hindmarsh-Rose neurons», декабрь 2021.
3. SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems, «Hyperchaos and Synchronization in a Model of Two Interacting Encapsulated Microbubbles», май 2021.
4. International Conference 'Topological Methods in Dynamics and Related Topics. Shilnikov Workshop.'. «Synchronization and symmetry breaking in a model of two interacting ultrasound contrast agents», декабрь 2020.

5. International Conference 'Topological Methods in Dynamics and Related Topics. Shilnikov Workshop'. «Symmetry breaking in a system of two coupled microbubble contrast agents», декабрь 2019.
6. International Conference 'Shilnikov Workshop'. «Multistability and Hyperchaos in the Dynamics of Two Coupled Contrast Agents», декабрь 2018.

Результаты, полученные в ходе работы над диссертацией использовались в следующих научных проектах:

- 2020–2022. Грант РФФИ 20-31-90122 для аспирантов «Гиперхаос и механизмы его возникновения, мультистабильность и синхронизация в моделях взаимодействующих нейронов».
- 2019–2022. Министерства науки и высшего образования РФ соглашение № 075-15-2019-1931.
- 2019–2022. Грант РФФИ 19-71-10048 «Теория гиперхаоса и ее приложение к задачам биомедицины».

Список статей, представленных к защите по теме диссертации

Основные положения по теме диссертации изложены в 5 публикациях, проиндексированных в международной системе Scopus:

- [1*] Garashchuk I.R., Sinelshchikov D.I, Kazakov A.O., Kudryashov N.A., *Hyperchaos and multistability in the model of two interacting microbubble contrast agents*, Chaos (2019), **29**, 1199–1213.
- [2*] Garashchuk I.R., Sinelshchikov D.I, Kazakov A.O., *Synchronous oscillations and symmetry breaking in a model of two interacting ultrasound contrast agents*, Nonlinear Dynamics (2020), **101**, 1199–1213.
- [3*] Garashchuk I.R., Sinelshchikov D.I, *Bubbling transition as a mechanism of destruction of synchronous oscillations of identical microbubble contrast agents*, Chaos (2021), **31**, 023130.
- [4*] Garashchuk I.R., *Asynchronous Chaos and Bifurcations in a Model of Two Coupled Identical Hindmarsh–Rose Neurons*, Russian Journal of Nonlinear Dynamics (2021), **17(3)**, 307-320.
- [5*] Garashchuk I.R., . Sinelshchikov D.I, *Excitation of a Group of Two Hindmarsh–Rose Neurons with a Neuron-Generated Signal*, Russian Journal of Nonlinear Dynamics (2023), **19(1)**, 19-34.

1 Краткое содержание работы: основные результаты

1.1 Основные понятия и методы исследования

Рассмотрим гладкую динамическую систему, задаваемую системой дифференциальных уравнений, правая часть которой зависит от управляющих параметров

$$\dot{x} = f(x, a), \quad (1)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)$ – фазовые переменные, определённые в некоторой области $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f(x) = (f_1, \dots, f_n)$, $f_1, \dots, f_n \in C^r(D)$, $r > 1$, $a \in \mathbb{R}^m$ – m управляющих параметров, от которых зависит правая часть. Напомним, что аттрактором такой динамической системы называют замкнутое, ограниченное положительно-инвариантное локально притягивающее множество $K \subset D \subseteq \mathbb{R}^n$ [56].

Поскольку мультистабильность является неотъемлемым свойством рассматриваемых систем в физически релевантных областях значений управляющих параметров, в работе используется процедура получения начальных условий при изменении управляющих параметров. Предположим, что при некотором значении параметров $a = a^{(0)}$ существует два (или более) аттрактора K_1, K_2, \dots . Для исследования изменений интересующего аттрактора при переходе к значению параметра $a = a^{(l)}$, рассмотрим гомотопию $F_\mu : a^{(0)} \rightarrow a^{(l)}$, $\mu \in [0, 1]$ [57]. В численной реализации, этот одно-параметрический маршрут в пространстве параметров представляется дискретной последовательностью значений $a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(l)}$. Для анализа изменений аттрактора K_1 вдоль маршрута недостаточно использовать фиксированные начальные условия $x_0^{(0)}$ и интегрировать систему до окончания переходного процесса на каждом шаге по параметру, т.к. при некотором значении параметра a на этом маршруте, $x_0^{(0)}$ может оказаться в бассейне притяжения аттрактора K_2 . Если в точке $a = a^{(j-1)}$, $x_0^{(0)}$ лежит в бассейне притяжения аттрактора K_1 , а в точке $a = a^{(j)}$ – в бассейне аттрактора K_2 , то при переходе от $a^{(j-1)}$ к $a = a^{(j)}$, будет наблюдаться скачок в спектре показателей Ляпунова, из-за резкого изменения динамики системы при переходе на другой аттрактор, хотя в этой точке не происходит бифуркаций, связанных с изменениями аттрактора K_1 . Поэтому, при выполнении работы реализован алгоритм наследования начальных условий, основанный на идее продолжимости по параметру. На каждом шаге по параметру, последнее значение $x(t)$ на аттракторе K_1 выбирается в качестве новых начальных условий x_0^{i+1} , которые будут использованы при следующем значении параметра $a^{(i+1)}$. Если шаг по параметру a достаточно мал, это позволяет избежать перехода начальной точки в фазовом пространстве через сепаратрису.

При численном исследовании, основным способом определения типа динамики на аттракторе в данной работе является вычисление спектра показателей Ляпунова. Они характеризуют рост малых возмущений в линейном приближении [3]. Пусть гладкая траектория $x(t) \subset \mathbb{R}^n$ динамической системы (1) начинается в точке $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда возмущённую траекторию можно представить в виде $\tilde{x}(t) = x(t) + \delta x(t)$, где $\delta x(t) : \forall t > 0, \|\delta x(t)\| \ll 1$ описывает эволюцию малого возмущения, и возмущённой траектории соответствуют начальные условия $\tilde{x}(0) = x_0 + \delta x_0, \delta x_0 \in \mathbb{R}^n : \|\delta x_0\| \ll 1$. Уравнение (1) для возмущённой траектории принимает вид $\dot{\tilde{x}}(t) = f(x + \delta x)$, раскладывая правую часть которого в ряд Тейлора, получаем, что в линейном приближении эволюция возмущения описывается ли-

нейной системой уравнений

$$\dot{\delta x}(t) = J\delta x, \quad (2)$$

где $J = \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j}$, $i = \overline{1 \dots n}$, $j = \overline{1 \dots n}$ – матрица Якоби на невозмущённой траектории $x(t)$. Показатели Ляпунова определяются, как верхний предел

$$\Lambda_{\delta x(t)} = \overline{\lim}_{T \rightarrow +\infty} \frac{\ln \|\delta x(T)/\delta x_0\|}{T}, T \in \mathbb{R}, T > 0. \quad (3)$$

Заметим, что система (2) имеет n линейно независимых решений, каждое из которых соответствует одному показателю из спектра, состоящего из n показателей Ляпунова, определяемых пределом (3): $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$.

На практике при вычислении спектра показателей Ляпунова в качестве векторов возмущений используется ортонормированный базис $\{\delta x_i^0\}_{i=1}^n$, $\|\delta x_i^0\| = \epsilon$. Норма возмущений ϵ выбирается согласно характерному масштабу процессов в конкретной динамической системе. Однако, при вычислении пределов (3), с ростом нормы векторов, нарушается ортогональность набора векторов и условия применимости линейного приближения. В связи с этим, необходимо проводить реортogonalизацию и нормировку набора векторов возмущений. Рассмотрим $t = T$ и неортogonalный набор векторов $\{\delta x_i(T)\}_{i=1}^n$. Записывая их в матрицу $A(T)$ по столбцам, используем разложение $A(T) = Q(T)R(T)$ [58], где $Q(T)$ – ортогональная матрица, а $R(T)$ – верхнетреугольная с положительными элементами на главной диагонали. Тогда нормы векторов возмущений стоят на главной диагонали матрицы $R(T)$: $R_{ii}(T) = \|\delta x_i(T)\|$, а в матрице $Q(T)$ стоит новый ортонормированный базис, который после нормировки используется в качестве нового ортогонального набора векторов возмущений на следующем шаге: $\delta x_0_i = Q_{\cdot,i}$. Тогда, повторяя процедуру M раз, получаем следующее выражение для показателей Ляпунова:

$$\lambda_i = \frac{1}{MT} \sum_{k=1}^M \ln \frac{\|R_{ii}(kT)\|}{\epsilon}.$$

Данный алгоритм для вычисления показателей Ляпунова называется алгоритмом Бенеттина [59], и его реализация применяется для вычисления показателей Ляпунова в данной работе. Результат вычисления спектра показателей Ляпунова вдоль типичной траектории на аттракторе в течение достаточно длительного времени сходится к значениям, которые можно отнести к аттрактору в целом с вероятностью, стремящейся к единице [59; 60].

Заметим, что любой аттрактор динамической системы, отличный от устойчивого равновесия, содержит в своём спектре нулевой показатель Ляпунова, соответствующий трансляциям вдоль аттрактора в каждой точке. Сумма показателей Ляпунова равна средней дивергенции фазового потока, и является отрицательной для любого аттрактора диссипативной динамической системы.

Наличие в спектре положительного показателя Ляпунова свидетельствует о присутствии неустойчивостей, которые приводят к расходимости близких траекторий на аттракторе, т.е. к хаотической динамике на аттракторе. В трёхмерном пространстве у аттракторов возможны следующие сигнатуры показателей Ляпунова:

- $\langle -, -, - \rangle$ соответствует устойчивой точке покоя;
- $\langle 0, -, - \rangle$ соответствует устойчивым предельным циклам;
- $\langle 0, 0, - \rangle$ соответствует квазипериодическим аттракторам;
- $\langle +, 0, - \rangle$ - хаотическому странному аттрактору.

В случае, если размерность динамической системы повышается до $n = 4$, становится возможной сигнатура $\langle +, +, 0, - \rangle$. С дальнейшим ростом размерности, может существовать вплоть до $n - 2$ положительных показателей Ляпунова. Аттрактор, обладающий двумя или более положительными показателями Ляпунова называется *гиперхаотическим*. Взаимно однозначная связь между сигнатурой спектра показателей Ляпунова и режимом динамики системы позволяет использовать показатели Ляпунова для построения карт режимов динамики исследуемых динамических систем.

Для оценки трансверсальной устойчивости синхронных инвариантных множеств в изучаемых системах используется аппарат трансверсальных показателей Ляпунова [33]. Рассмотрим систему связанных осцилляторов вида

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + \alpha g(y), \\ \dot{y} &= f(y) + \alpha g(x),\end{aligned}\tag{4}$$

$x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$. Она симметрична к перестановке переменных $x \leftrightarrow y$. Заметим, что если существуют решения системы меньшей размерности, имеющей вид $\dot{x} = f(x) + \alpha g(x)$, то они полностью описывают траектории обеих подсистем x и y , лежащие в многообразии синхронизации $S : x = y$. Фазовая траектория, лежащая в S соответствует полностью синхронным осцилляциям обеих подсистем x и y . Используя замену переменных [33]

$$u = \frac{x + y}{2}, \quad v = \frac{x - y}{2},$$

в уравнениях (4), получим систему, описывающую эволюцию переменных u, v :

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \frac{1}{2} (f(u + v) + f(u - v)) + \frac{\alpha}{2} (g(u - v) + g(u + v)), \\ \dot{v} &= \frac{1}{2} (f(u + v) - f(u - v)) + \frac{\alpha}{2} (g(u - v) - g(u + v)).\end{aligned}\tag{5}$$

В данном случае, u описывает эволюцию фазовых переменных в направлении вдоль S , а v – в трансверсальном к S . Соответствующая (5) система в вариациях выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\delta u} &= (J_f + \alpha J_g) \delta u, \\ \dot{\delta v} &= (J_f - \alpha J_g) \delta v.\end{aligned}\tag{6}$$

Её решения характеризуют эволюцию возмущений δu и δv . Соответственно, их рост описывается старшими показателями Ляпунова λ_u, λ_v . Показатель λ_u характеризует эволюцию возмущений, лежащих в многообразии синхронизации, а показатель λ_v – эволюцию возмущений в направлении трансверсальном к многообразию синхронизации и называется старшим трансверсальным показателем Ляпунова [33]. Значение $\lambda_v > 0$ соответствует трансверсальной неустойчивости синхронного решения и характеризуется ростом возмущений в направлении трансверсальном к многообразию синхронизации. Для численной

оценки трансверсального показателя Ляпунова используется алгоритм Бенеттина, применяемый к системе (5), описывающей эволюцию переменных u, v , и соответствующей системе в вариациях (6).

В работе предложена модификация алгоритма вычисления спектра показателей Ляпунова для систем вида (4). Если аттрактор содержит как синхронную, так и асинхронную компоненту траектории, то вычисление спектра показателей Ляпунова производится отдельно для каждой из них. Обозначим спектр, соответствующий синхронной компоненты, как $(\lambda_i^s)_{i=1}^n$, а асинхронной, как $(\lambda_i^{as})_{i=1}^n$. Если время, которое траектория находилась в многообразии синхронизации составляет T^s , время вне синхронизации T^{as} , а общее время $T = T^{as} + T^s$, то вычисленные таким образом показатели связаны с обычными показателями Ляпунова следующим образом: $\lambda_i^s \cdot T^s + \lambda_i^{as} \cdot T^{as} = \lambda_i \cdot T$. Данная модификация используется при исследовании разрушения синхронизации, сопровождаемого каскадом бифуркаций, известным, как «пузырьковый переход» [61–63]. Она позволяет подтвердить присутствие двумерных неустойчивостей в седловом асинхронном множестве даже, если аттрактор Милнора в многообразии синхронизации трансверсально устойчив, и динамика является хаотической с одним положительным показателем Ляпунова.

1.2 Модель взаимодействующих микропузырьковых контрастных агентов

1.2.1 Система уравнений

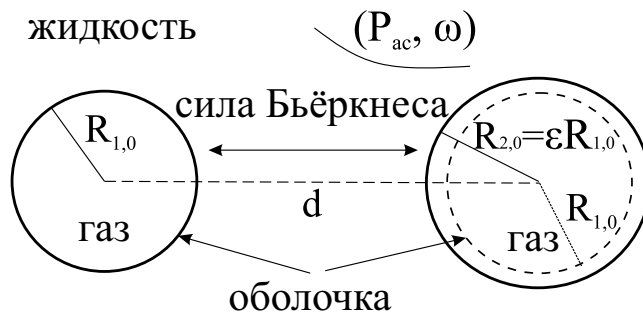


Рис. 1: Схематичное изображение двух пузырьков в жидкости, колеблющихся под воздействием внешнего поля и взаимодействующих посредством акустических волн.

Два пузырька газа в жидкости с учётом вязко-эластичной оболочки, взаимодействия посредством силы Бьёркнеса, сжимаемости жидкости по Келлеру-Миксису, вязкости на границе раздела газ жидкость, поверхностного натяжения и внешнего ультразвукового поля, описывается следующей системой уравнений [15–18; 20; 37; 64]:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\dot{R}_1}{c}\right) R_1 \ddot{R}_1 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{R}_1}{3c}\right) \dot{R}_1^2 &= \frac{1}{\rho} \left[1 + \frac{\dot{R}_1}{c} + \frac{R_1}{c} \frac{d}{dt}\right] P_1 - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_2^2 \dot{R}_2}{d}\right), \\ \left(1 - \frac{\dot{R}_2}{c}\right) R_2 \ddot{R}_2 + \frac{3}{2} \left(1 - \frac{\dot{R}_2}{3c}\right) \dot{R}_2^2 &= \frac{1}{\rho} \left[1 + \frac{\dot{R}_2}{c} + \frac{R_2}{c} \frac{d}{dt}\right] P_2 - \frac{d}{dt} \left(\frac{R_1^2 \dot{R}_1}{d}\right), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$P_i = \left(P_0 + \frac{2\sigma}{R_{i0}} \right) \left(\frac{R_{i0}}{R_i} \right)^{3\gamma} - \frac{4\eta_L \dot{R}_i}{R_i} - \frac{2\sigma}{R_i} - P_0 - 4\chi \left(\frac{1}{R_{i0}} - \frac{1}{R_i} \right) - 4\kappa_S \frac{\dot{R}_i}{R_i^2} - P_{ac} \sin(\omega t), \quad i = 1, 2.$$

Здесь t – время, $R_1(t), R_2(t)$ обозначают радиусы каждого из пузырьков, d – расстояние между их центрами, P_{stat} – статическое давление, P_v – давление пара, $P_0 = P_{stat} - P_v$, а P_{ac} – амплитуда внешнего поля давлений с циклической частотой ω . σ – поверхностное натяжение, ρ – плотность жидкости, η_L – вязкость жидкости, c – скорость звука в жидкости, γ – показатель политропы, χ и κ_s – эластичность и вязкость оболочки соответственно, R_{i0} – равновесные радиусы пузырьков в отсутствии внешнего поля. Заметим, что уравнения (7) могут быть разрешены относительно старших производных и приведены к форме пятимерной динамической системы, которая здесь не приводится в силу её громоздкости.

В качестве параметров жидкости используются экспериментально измеренные значения, соответствующие плазме крови: $P_{stat} = 100$ кПа, $\sigma = 0.0725$ Н/м, $\rho = 1000$ кг/м³, $\eta_L = 0.001$ Н с/м³, $c = 1500$ м/с. Значения параметров оболочки и газа внутри пузырька выбраны в соответствии с экспериментальными результатами для контрастных агентов SonoVue: $P_v = 2.33$ кПа, $\gamma = 4/3$, $\chi = 0.22$ Н/м, $\kappa_S = 2.5 \cdot 10^{-9}$ кг/с, $R_{i0} = 1.72$ мкм, $i = 1, 2$ [14]. P_{ac} , ω и d рассматриваются в качестве управляющих параметров.

Численные расчёты проводятся в безразмерных переменных $r(\tau), u(\tau)$: $R_i = R_0 r_i$, $t = \omega_0^{-1} \tau$, где $\omega_0^2 = 3\kappa P_0 / (\rho R_{10}^2) + 2(3\kappa - 1)\sigma / R_{10} + 4\chi / R_{10}$ – собственная частота колебаний пузырьков в линейном приближении. Тогда безразмерные скорости оболочек имеют вид $u_i = dr_i / d\tau = \dot{R}_i / (R_0 \omega_0)$.

1.2.2 Разнообразие динамических режимов

В работе [1*] исследованы режимы динамики, реализующиеся в системе (7) в следующем диапазоне управляющих параметров: $\omega = 2.87$ с⁻¹, $P_{ac} \in [1.142, 1.89]$ МПа, $d/R_0 \in [6, 35]$. Построена двумерная карта режимов динамики системы, представленная на рис. 2а со следующей цветовой схемой:

- Синий – периодический режим. Старшие показатели Ляпунова имеют следующие знаки: $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$;
- Зелёный – квазипериодический режим. Старшие показатели Ляпунова $\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$;
- Жёлтый – простой хаотический режим (странный аттрактор с одним положительным показателем Ляпунова). Старшие показатели Ляпунова имеют следующие знаки: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0$;
- Красный – гиперхаотический режим. Старшие показатели Ляпунова имеют следующие знаки: $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$.

Предельные циклы, соответствующие периодическим колебаниям пузырьков, могут быть как синхронными, так и асинхронными. В данной области параметров найдены только асинхронные квазипериодические режимы. Среди хаотических режимов с одним положительным показателем Ляпунова наблюдались как синхронные, так и асинхронные.

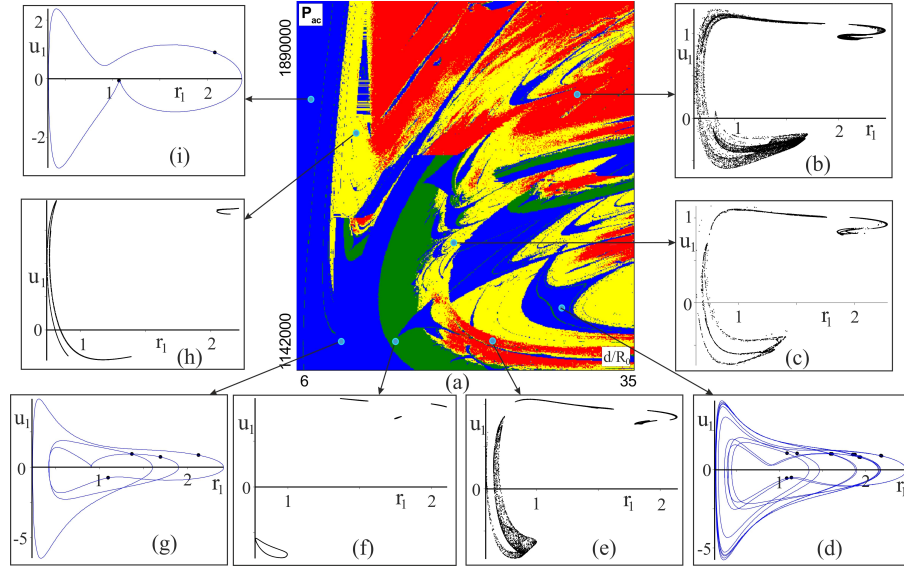


Рис. 2: (a) Карта режимов динамики, (b)-(i) проекции фазовых портретов аттракторов, соответствующих некоторым типичным режимам этой карты. Чёрные точки на графиках соответствуют точкам в отображении Пуанкаре, синие линии - фазовым траекториям предельных циклов. Здесь приведены рисунки для следующих режимов: (b) гиперхаос при $d/R_0 = 32$, $P_{ac} = 1.68$ МПа; (c) синхронный хаос $d/R_0 = 30$, $P_{ac} = 1.4$ МПа; (d) синхронный предельный цикл периода 12 при $d/R_0 = 28$, $P_{ac} = 1.3$ МПа; (e) гиперхаос при $d/R_0 = 22$, $P_{ac} = 1.2$ МПа; (f) квазипериодический аттрактор при $d/R_0 = 14.5$, $P_{ac} = 1.2$ МПа; (g) асинхронный предельный цикл периода 4 при $d/R_0 = 10$, $P_{ac} = 1.2$ МПа; (h) синхронный хаотический аттрактор $d/R_0 = 10$, $P_{ac} = 1.6$ МПа; (i) синхронный предельный цикл периода два $d/R_0 = 6.75$, $P_{ac} = 1.7$ МПа.

Поскольку размерность многообразия синхронизации в данной системе равна трём, и синхронные аттракторы вложены в это трёхмерное многообразие, гиперхаотические режимы не могут быть синхронными, т.к. минимальная размерность, допускающая гиперхаотическую динамику, равна четырём. На рис. 2b-i приведены примеры проекций фазовых портретов следующих режимов: (b) гиперхаотический аттрактор при $d/R_0 = 32$, $P_{ac} = 1.68$ МПа со старшими показателями Ляпунова $\lambda_1 = 0.0803$, $\lambda_2 = 0.0357$; (c) синхронный хаотический аттрактор при $d/R_0 = 30$, $P_{ac} = 1.4$ МПа со старшими показателями Ляпунова $\lambda_1 = 0.0684$, $\lambda_2 = -0.0268$; (d) синхронный предельный цикл периода 12 при $d/R_0 = 28$, $P_{ac} = 1.3$ МПа с показателями $\lambda_1 = -0.0616$, $\lambda_2 = -0.0733$; (e) гиперхаотический аттрактор при $d/R_0 = 22$, $P_{ac} = 1.2$ МПа со старшими показателями Ляпунова $\lambda_1 = 0.0241$, $\lambda_2 = 0.0034$; (f) квазипериодический аттрактор при $d/R_0 = 14.5$, $P_{ac} = 1.2$ МПа со старшими показателями Ляпунова $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -0.0149$; (g) асинхронный предельный цикл периода 4 при $d/R_0 = 10$, $P_{ac} = 1.2$ МПа старшими показателями Ляпунова $\lambda_1 = -0.2331$, $\lambda_2 = -0.2343$; (h) синхронный хаотический аттрактор $d/R_0 = 10$, $P_{ac} = 1.6$ МПа старшими показателями Ляпунова $\lambda_1 = 0.0802$, $\lambda_2 = -0.0826$; (i) синхронный предельный цикл периода два $d/R_0 = 6.75$, $P_{ac} = 1.7$ МПа со старшими показателями Ляпунова $\lambda_1 = -0.1437$, $\lambda_2 = -0.2057$.

Мультистабильность, характерная для данной системы иллюстрируется двумя листами карты режимов динамики в одной и той же области управляющих параметров на рис. 3.

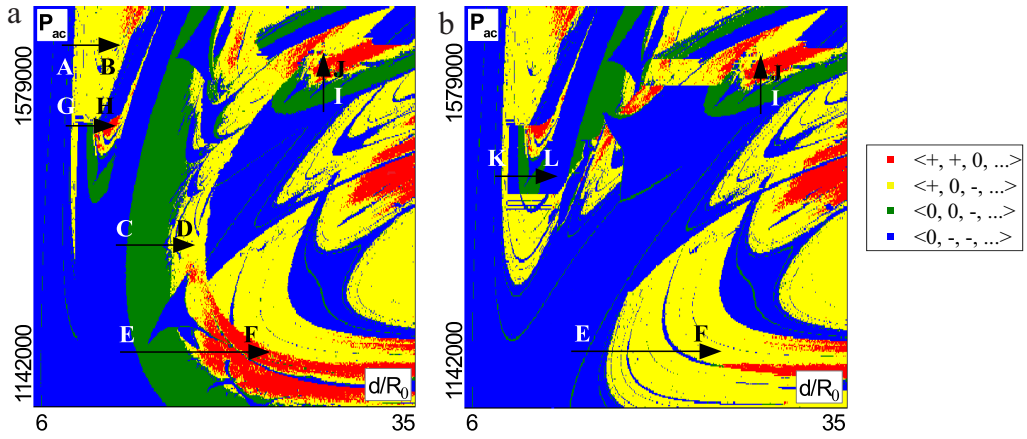


Рис. 3: Два листа карты режимов динамики в области $P_{ac} \in [1.142, 1.579]$ МПа и $d/R_0 \in [6, 35]$, полученные при продолжении по параметрам (а) асинхронного предельного цикла (б) синхронного цикла.

В работе показано, что сценарием появления синхронных хаотических аттракторов является каскад Фейгенбаума бифуркаций удвоений периода, начинающийся с устойчивого синхронного предельного цикла. В пространстве параметров данный сценарий реализуется на маршруте АВ на рис. 3.

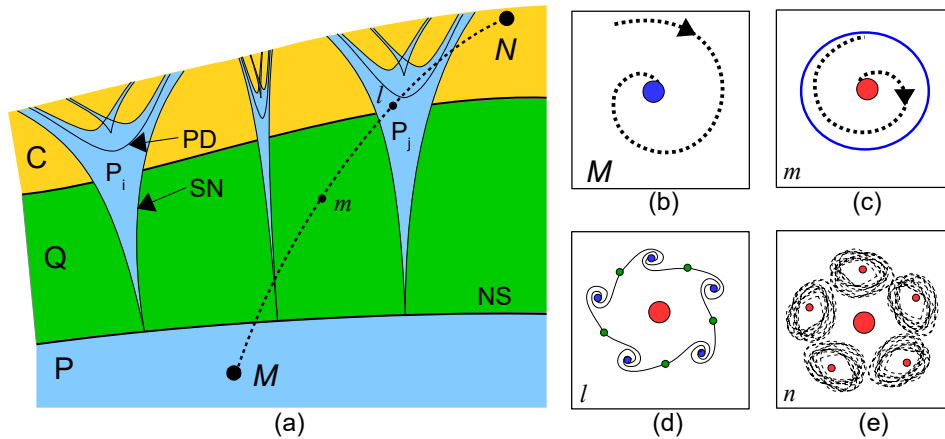


Рис. 4: (а) Схема бифуркационной диаграммы, иллюстрирующей бифуркации инвариантного тора. P , Q , P_i и C – области существования (б) устойчивой периодической орбиты, (с) устойчивого инвариантного тора, (d) резонансной периодической орбиты и (е) хаотический аттрактор. MN - некоторый маршрут в пространстве параметров, вдоль которого появляется хаотический аттрактор согласно сценарию Афраймовича-Шильникова.

Установлено, что асинхронные хаотические аттракторы появляются согласно сценарию Афраймовича-Шильникова. Сценарий начинается с асинхронного устойчивого предельного цикла и происходит по следующей цепочке бифуркаций: бифуркация Неймарка-Сакера и появление квазипериодического режима; потеря устойчивости квазипериодического режима через резонанс, и появление устойчивого асинхронного цикла; хаотизация резонансного цикла, например, через каскад удвоений периода. Схема бифуркационной диаграммы сценария Афраймовича-Шильникова представлена на рис. 4. Пример реали-

зации сценарии Афраймовича-Шильникова с графиком старших показателей Ляпунова и последовательностью фазовых портретов на основных этапах представлен на рис. 5. На рис. 5а представлено бифуркационное дерево, на рис. 5b – график старших показателей Ляпунова, а также последовательность отображений Пуанкаре, демонстрирующих основные этапы сценария: рис. 5c – устойчивая орбита периода 4, рис. 5d – инвариантная кривая, соответствующая квазипериодическому режиму, рис. 5e – резонансная орбита, рис. 5f – устойчивая орбита удвоенного периода, рис. 5g – странный аттрактор после каскада Фейгенбаума, рис. 5h – хаотический аттрактор со старшими показателями Ляпунова $\lambda_1 = 0.0139, \lambda_2 = -0.0538$.

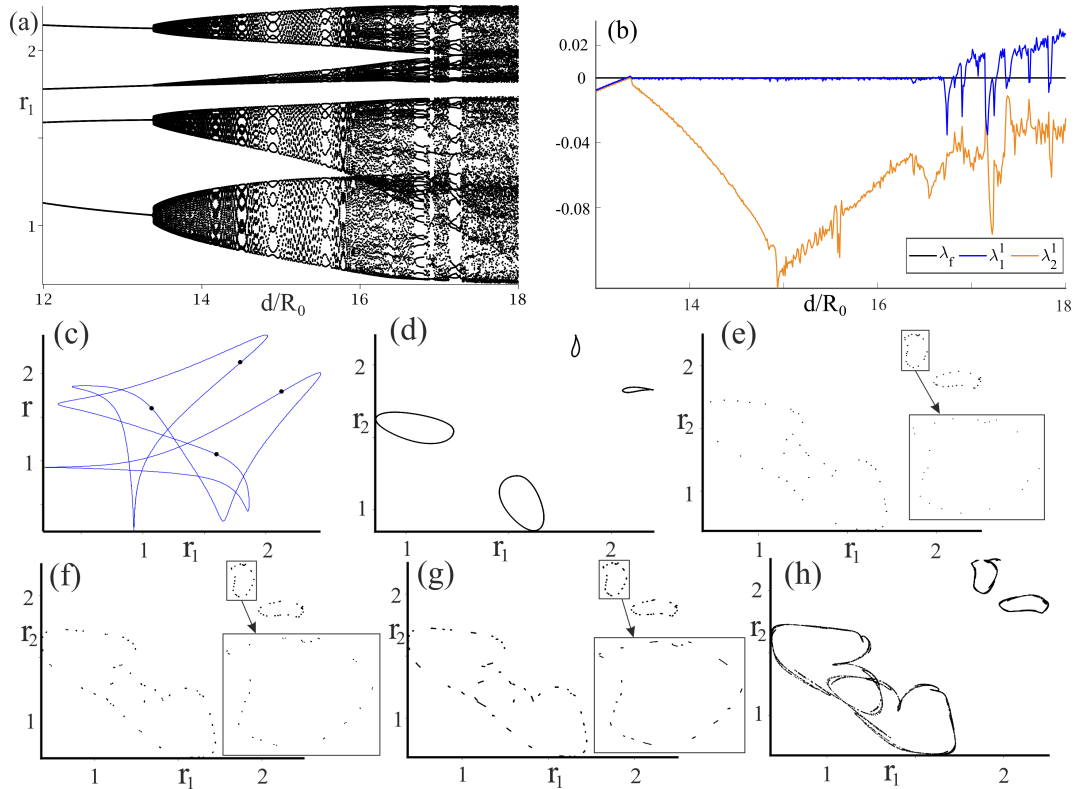


Рис. 5: Реализация сценария Афраймовича-Шильникова на пути CD. (a) бифуркационное дерево и (b) график двух старших показателей Ляпунова; последовательность проекций отображений Пуанкаре на плоскость (r_1, r_2) , демонстрирующих основные этапы сценария: (c) устойчивая периодическая орбита периода 4, (d) квазипериодический режим, (e) резонансная орбита, (f) орбита удвоенного периода, (g) странный хаотический аттрактор.

1.2.3 Сценарий возникновения гиперхаотического аттрактора Шильникова

В модели взаимодействующих микропузырьковых контрастных агентов в изученной области управляющих параметров было обнаружено два сценария возникновения гиперхаотических аттракторов. Первый из них связан с появлением гомоклинического аттрактора Шильникова.

Пусть существует устойчивый асинхронный предельный цикл. Если он теряет устойчивость в результате бифуркации Неймарка-Сакера, то вместе с этим возникает квазипериодический режим. В свою очередь, квазипериодический аттрактор может разрушаться с появлением резонансной орбиты. Важным этапом данного сценария является вторичная

бифуркация Неймарка-Сакера. Благодаря ей, эта орбита (обозначим её SF_i) становится седло-фокусной с двумерным неустойчивым многообразием. Вместе с тем, при вторичной бифуркации Неймарка-Сакера рождается новый устойчивый квазипериодический режим.

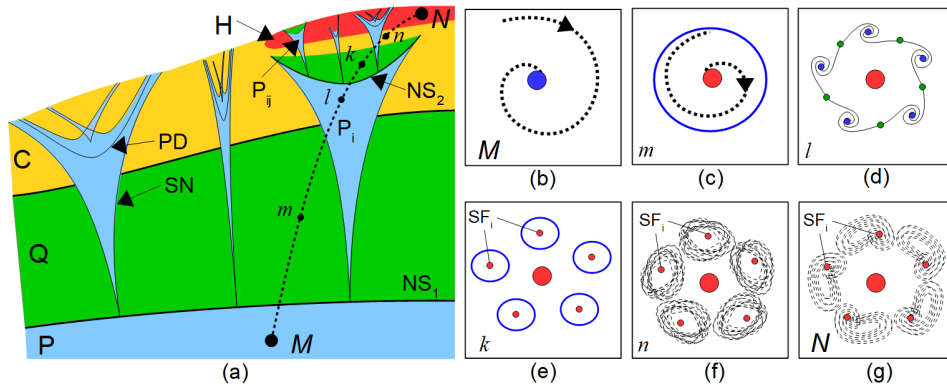


Рис. 6: Схема бифуркационной диаграммы, иллюстрирующей сценарий появления гиперхаотического аттрактора Шильникова (приведено отображение Пуанкаре)

Следующим этапом сценария является разрушение этого квазипериодического режима и появление хаотического аттрактора. Механизм потери устойчивости в данном случае не важен: это может быть сценарий Афраймовича-Шильникова, каскад удвоений квазипериодического режима или даже третичная бифуркация Неймарка-Сакера. Существенным является лишь естественное предположение, что после соответствующих бифуркаций возникает хаотический аттрактор с одним положительным показателем Ляпунова (см. рис. 6f).

Финальным и ключевым этапом сценария является включение седло-фокусных периодических орбит SF_i вместе с их двумерными неустойчивыми многообразиями в хаотический аттрактор, в результате которого появляется гомоклинический аттрактор Шильникова (см. рис. 6g). Как следствие, траектории на аттракторе проходят сколь угодно близко к SF_i и её неустойчивым многообразиям, т.е. через области двумерных растяжений. Таким образом, два показателя Ляпунова становятся положительными.

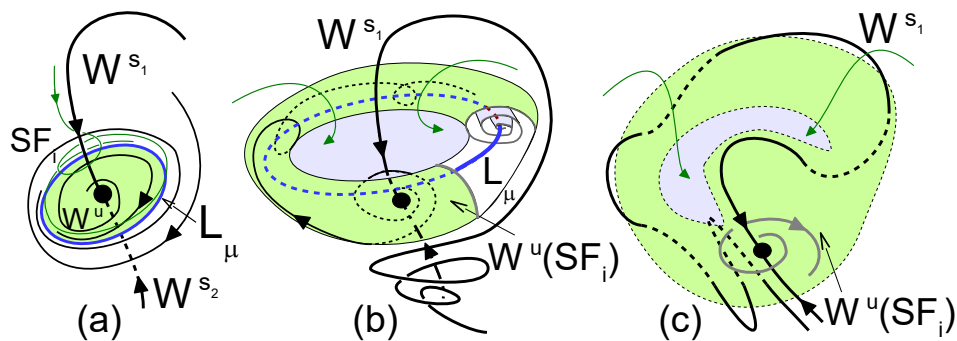


Рис. 7: Один из возможных способов включения неустойчивого многообразия седло-фокуса в аттрактор.

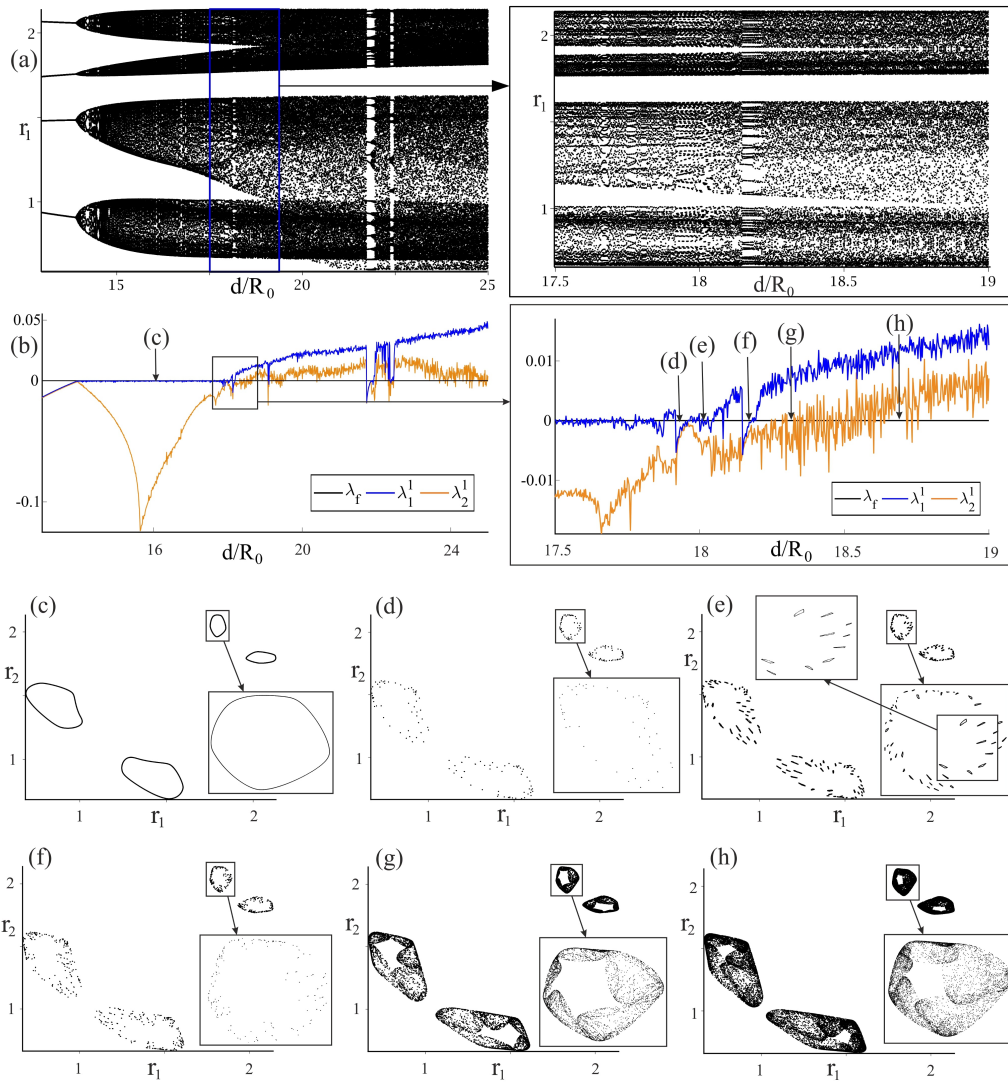


Рис. 8: Реализация сценария перехода к гиперхаосу с образованием аттрактора Шильникова на пути EF: (a) бифуркационное дерево, (b) график старших показателей Лупнова, проекции отображений Пуанкаре на подпространство (r_1, r_2) , демонстрирующие основные этапы сценария: (c) квазипериодический режим, (d) резонансная орбита, (e) вторичный квазипериодический режим, (f) резонансный предельный цикл после разрушения вторичного квазипериодического режима, (g) хаотический аттрактор, (h) гиперхаотический аттрактор.

Обсудим некоторые детали включения седло-фокусных орбит SF_i в аттрактор. Сразу после бифуркации Неймарка-Сакера, устойчивая инвариантная кривая L_μ имеет узловой тип (см. рис. 7a). В дальнейшем, он меняется на фокусный, и появляется так называемая воронка Шильникова (см. рис. 7b). Почти все орбиты в окрестности седло-фокуса наматываются на устойчивую инвариантную кривую. Увеличиваясь в размере, воронка сближается с устойчивым инвариантным многообразием $W^{s1}(SF_i)$, и траектории начинают проходить ближе к седло-фокусу (см. рис. 7b). В итоге происходит гомоклиническое пересечение между устойчивым и неустойчивым многообразиями SF_i , и появляется гомоклинический аттрактор Шильникова (см. рис. 7c). После этого, траектории на аттракторе могут пересекать любую окрестность седло-фокуса SF_i . Включение седло-фокусной периодической орбиты в хаотический аттрактор может происходить разными способами, в зависимости

от перехода от устойчивого инвариантного тора к хаотическому аттрактору. В модели микропузырьковых контрастных агентов, как и в других известных примерах, демонстрирующих появление дискретного аттрактора Шильникова, включение происходит мягким образом при плавной трансформации хаотического аттрактора (см. работы [65–67]).

В работе [1*] показано, что в модели двух взаимодействующих микропузырьковых контрастных агентов реализуется предложенный сценарий возникновения гиперхаотического аттрактора. Реализация этого сценария на пути EF в пространстве параметров ($P_{ac} = 1.2$ МПа, $13 < d/R_0 < 25$) проиллюстрирована на рис. 8. Бифуркационное дерево представлено на рис. 8а, а график старших показателей Ляпунова – на рис. 8б. Проекция отображений Пуанкаре некоторых аттракторов вдоль этого пути представлены на рис. 8с–h. рис.8с соответствует квазипериодическим колебаниям, появляющимся в результате бифуркации Неймарка–Сакера. С ростом d , возникает резонансная орбита (см. рис. 8d). Далее, она претерпевает вторичную бифуркацию Неймарка–Сакера и становится седло-фокусом с двумерным неустойчивым многообразием, а также появляется новый квазипериодический режим (см. рис. 8e). В результате резонанса, квазипериодический аттрактора теряет устойчивость, и возникает предельный цикл высокого периода (см. рис. 8f). При дальнейшем увеличении d , происходит каскад бифуркаций удвоения периода, приводящий к появлению хаотического аттрактора (см. рис. 8g). После включения седло-фокусной орбиты в хаотический аттрактор, возникает гиперхаотическая динамика (см. рис. 8h). Так, при $d = 18.71$ старшие показатели Ляпунова имеют значения $\lambda_1 = 0.0135$, $\lambda_2 = 0.0019$, $\lambda_3 = -0.5560$.

1.2.4 Сценарий появления гиперхаотического аттрактора на основе разрушения синхронизации

Второй сценарий возникновения гиперхаотических аттракторов в модели связан с потерей трансверсальной устойчивости синхронным хаотическим аттрактором.

Предположим, что существует синхронный устойчивый предельный цикл. Если происходит каскад Фейгенбаума, и каждый цикл удвоенного периода остаётся в многообразии синхронизации $\text{Fix}(S)$, сохраняя трансверсальную устойчивость, то возникает синхронный хаотический аттрактор. Появление синхронных хаотических аттракторов по такому сценарию в модели взаимодействующих микропузырьковых контрастных агентов продемонстрирована в работах [1*], [3*]. Такой аттрактор содержит счётное число трансверсально устойчивых седловых орбит, неустойчивые многообразия которых лежат в $\text{Fix}(S)$. Поскольку все орбиты трансверсально устойчивы, наблюдается сильная синхронизация [33].

Если вне $\text{Fix}(s)$ существуют симметричные пары седловых орбит с двумя направлениями неустойчивости, то они могут образовывать гетероклинические многообразия с трансверсально устойчивыми седловыми орбитами в синхронном аттракторе. При дальнейшем изменении бифуркационного параметра эти тройки из двух асинхронных орбит и одной синхронной сливаются через субкритическую бифуркацию «вилка», и в синхронном аттракторе появляются седловые орбиты с двумерными неустойчивыми многообразиями, причём одно из направлений неустойчивости направлено трансверсально к $\text{Fix}(S)$ (см. рис. 9). Каскад таких бифуркаций приводит к появлению трансверсально неустойчивого множества положительной меры в многообразии синхронизации. Траектория в $\text{Fix}(S)$,

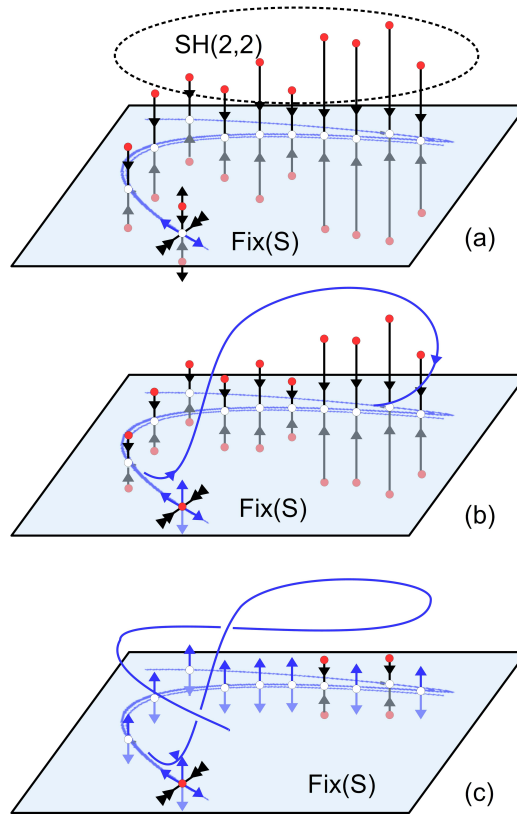


Рис. 9: Схема основных этапов сценария возникновения гиперхаотической динамики в результате разрушения синхронизации.

проходящая в окрестности такого трансверсально неустойчивого множества может выбрасываться из многообразия синхронизации. В дальнейшем, траектория возвращается в $\text{Fix}(S)$ через трансверсально устойчивые области. На этом этапе, синхронное инвариантное множество становится аттрактором Милнора с прореженным бассейном притяжения, которое является в среднем трансверсально устойчивым. Таким образом, траекторию можно поделить на две естественные компоненты: лежащую в $\text{Fix}(S)$ и асинхронную. В начале каскада бифуркаций, доля асинхронной компоненты очень мала, а выход траектории из многообразия синхронизации происходит очень редко и может считаться экстремальным событием [63]. Поскольку вне $\text{Fix}(S)$ траектория проходит вблизи седловых орбит с двумерными неустойчивыми многообразиями, динамика асинхронной компоненты является гиперхаотической. Пока многообразие синхронизации в среднем трансверсально устойчиво, траектория продолжает возвращаться в $\text{Fix}(S)$ и наблюдается слабая синхронизация. Если при дальнейшем изменении бифуркационного параметра продолжается каскад субкритических бифуркаций «вилка», то синхронное инвариантное множество в $\text{Fix}(S)$ становится в среднем трансверсально неустойчивым, и динамика в целом начинает определяться в большей степени асинхронной компонентой. Таким образом, динамика становится гиперхаотической.

В работе [3*] продемонстрирована реализация описанного выше сценария перехода к гиперхаосу через разрушение синхронизации в модели взаимодействующих микропузырьковых контрастных агентов (см. рис. 10, 11). График старших показателей Ляпунова

представлен на рис. 10а, график старших показателей Ляпунова для синхронной и асинхронной компонент показан на рис. 10b, график долей синхронной и асинхронной составляющих показана на рис. 10с, а старший трансверсальный показатель Ляпунова – на рис. 10d.

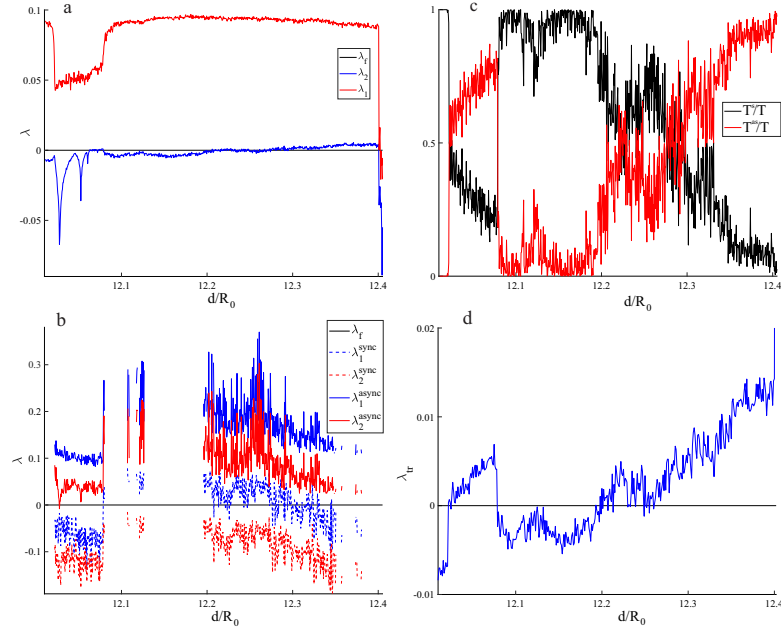


Рис. 10: (а) Старшие показатели Ляпунова вдоль всего аттрактора, (b) старшие показатели Ляпунова для синхронной и асинхронной компонент, (с) доля синхронной и асинхронной компонент, (d) трансверсальный показатель Ляпунова.

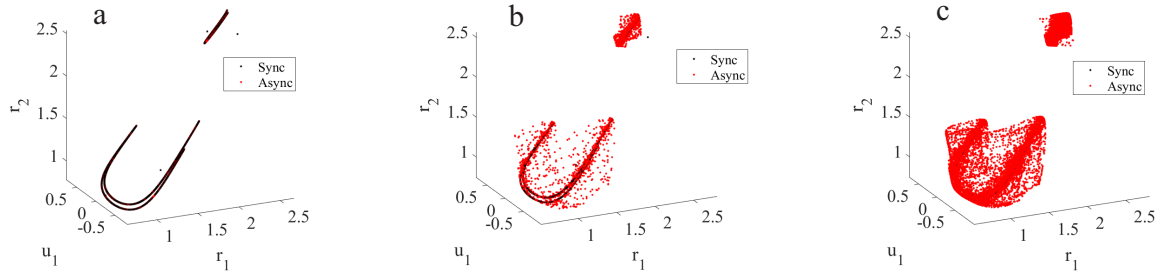


Рис. 11: Проекция отображений Пуанкаре на (r_1, u_1, r_2) при (а) $d = 12.18$, (b) $d = 12.27$, (с) $d = 12.36$.

На рис. 11 приведена серия проекций отображений Пуанкаре на подпространство (r_1, u_1, r_2) , демонстрирующая рост доли асинхронной компоненты и потерю трансверсальной устойчивости. На рис. 11а показан хаотический аттрактор при $d/R_{10} = 12.18$, обладающий старшими показателями Ляпунова $\lambda_1 = 0.0953$, $\lambda_2 = -0.0032$, старшим трансверсальным показателем Ляпунова $\lambda_{tr} = -0.0027$ и долей асинхронной компоненты $T^{as}/T = 0.037$. При $d/R_{10} = 12.27$ асинхронная составляющая траектории на хаотическом аттракторе возрастает до $T^{as}/T = 0.338$ (см. рис. 11b), при этом старшие показатели Ляпунова имеют значения $\lambda_1 = 0.0940$, $\lambda_2 = -0.0006$, а величины показателей для синхронной и асинхронной компонент равны $\lambda_1^s = 0.0528$, $\lambda_2^s = -0.0410$ и $\lambda_1^{as} = 0.1747$, $\lambda_2^{as} = 0.0786$, соответственно, т.е. динамика траектории в многообразии синхронизации является хаотической,

а вне его – гиперхаотической, что подтверждает присутствие двумерных неустойчивостей в асинхронном седловом множестве. Данный аттрактор характеризуется малым положительным значением старшего трансверсального показателя Ляпунова $\lambda_{tr} = 0.0010$. При $d/R_{10} = 12.36$ аттрактор является трансверсально неустойчивым со старшим трансверсальным показателем Ляпунова принимающим значение $\lambda_{tr} = 0.0112$ и гиперхаотическим со старшими показателями Ляпунова равными $\lambda_1 = 0.0908$, $\lambda_2 = 0.0037$ за счёт вклада асинхронной компоненты: $T^{as}/T = 0.636$, $\lambda_1^{as} = 0.1124$, $\lambda_2^{as} = 0.0242$.

1.2.5 Устойчивость к разрушению симметрии

В случае полностью идентичных пузырьков, система (7) симметрична к замене переменных $R_1 \leftrightarrow R_2$, $\dot{R}_1 \leftrightarrow \dot{R}_2$. Однако, возмущения равновесного радиуса одного из пузырьков R_{i0} нарушают эту симметрию. В работе [2*] рассматривалась устойчивость типичных режимов динамики к возмущениям, разрушающим симметрию вида

$$R_{20} = \varepsilon R_{10}, \quad (|\varepsilon - 1| \ll 1). \quad (8)$$

Показано, что основным фактором, влияющим на устойчивость синхронных режимов к возмущению равновесного радиуса одного из пузырьков является мультистабильность. Когда система моностабильна, синхронный аттрактор с большой вероятностью будет устойчив к таким возмущениям. В условиях мультистабильности, если синхронный аттрактор сосуществует с асинхронным предельным циклом или квазипериодическим аттрактором, он тоже с высокой вероятностью будет устойчив к разрушению симметрии, но не в таком широком диапазоне ε , как в случае моностабильности. В случае, если синхронный аттрактор сосуществует с асинхронным хаотическим аттрактором, в зависимости от конкретных параметров, возможны разные варианты: он может как быть устойчивым к разрушению симметрии в схожем диапазоне ε , что и в случае сосуществования с асинхронным предельным циклом или асинхронным квазипериодическим аттрактором, так и неустойчив даже к малым возмущениям ε . Если синхронный аттрактор сосуществует с гиперхаотическим аттрактором, то он неустойчив к возмущениям, разрушающим симметрию.

Рассмотрим пример, демонстрирующий влияние мультистабильности на устойчивость синхронных режимов. При $P_{ac} = 1.8$ МПа, $d/R_{10} = 11.3$ в симметричном случае система моностабильна: существует только синхронный хаотический аттрактор, представленный на рис. 12а. В этом случае, качественные свойства этого режима динамики сохраняются в достаточно широком диапазоне ε (см. рис. 12b). Заметим, что при больших ε возникает новый хаотический аттрактор, рассмотрение которого выходит за рамки исследования устойчивости синхронных режимов (см. [2*]). Продолжение синхронного хаотического режима по параметру расстояния при $P_{ac} = 1.8$ МПа, $d/R_{10} = 11.47$ также является синхронным хаотическим аттрактором, однако вместе с ним сосуществует асинхронный хаотический аттрактор. В этом случае, синхронный аттрактор является неустойчивым к возмущениям ε , в то время как асинхронный хаотический аттрактор устойчив в широком диапазоне параметра.

С другой стороны, гиперхаотические аттракторы устойчивы к разрушению симметрии. Пример ситуации с сосуществованием синхронного хаотического аттрактора с гипер-

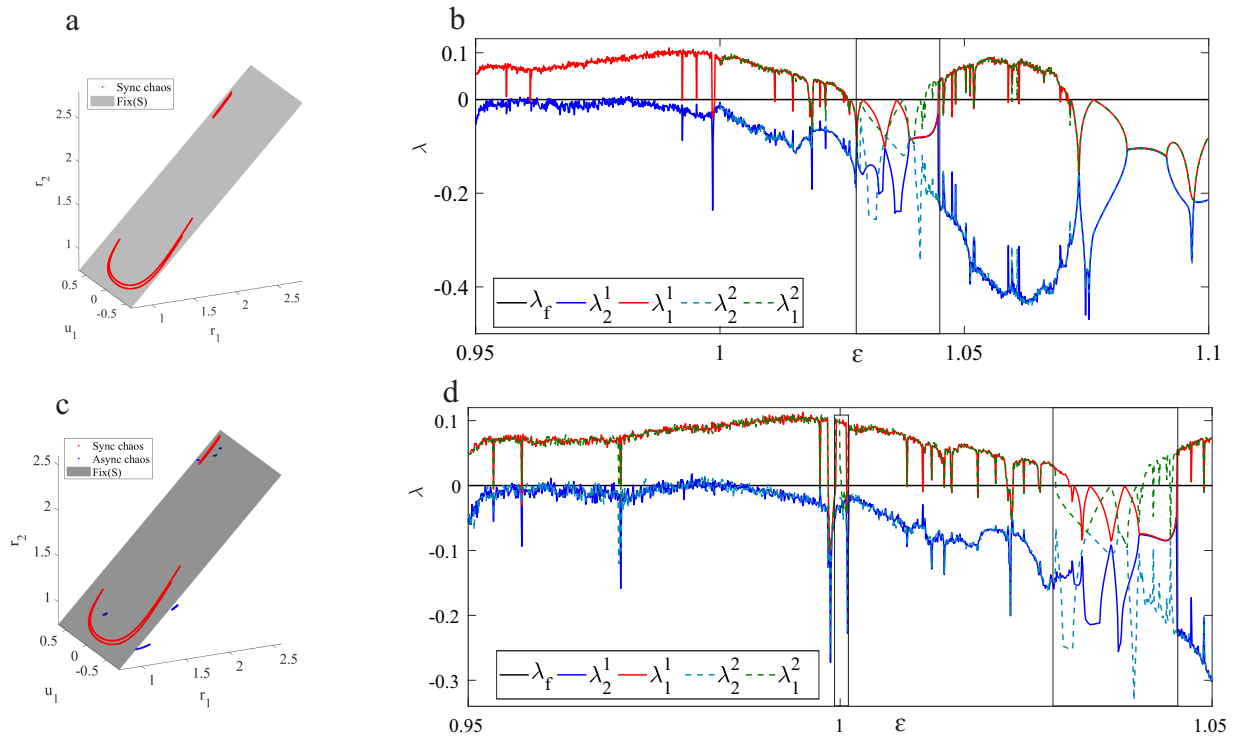


Рис. 12: Проекция отображений Пуанкаре на (r_1, u_1, r_2) : (a) синхронного хаотического аттрактора при $P_{ac} = 1.8 \cdot 10^6$, $d/R_{10} = 11.3$, (c) сосуществующих синхронного и асинхронного хаотических аттракторов при $P_{ac} = 1.8 \cdot 10^6$, $d/R_{10} = 11.47$. (b), (d) графики старших показателей Ляпунова продолжений соответствующих аттракторов по параметру ϵ .

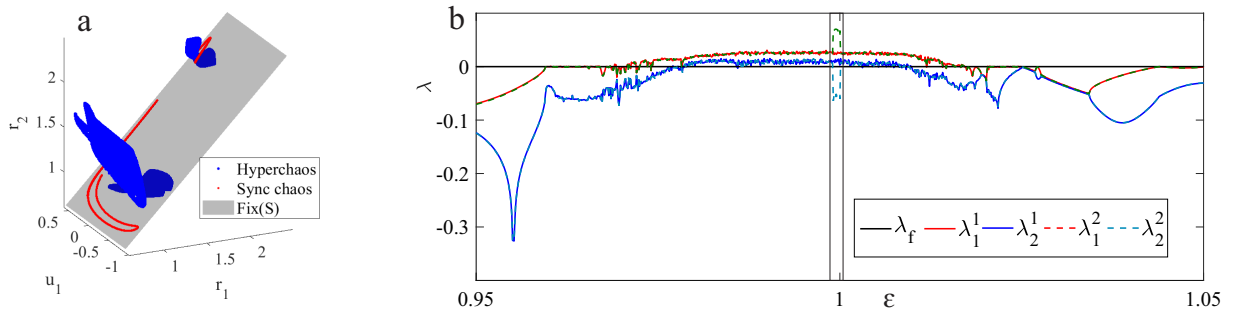


Рис. 13: (a) Проекция отображений Пуанкаре синхронного хаотического и гиперхаотического аттракторов на (r_1, u_1, r_2) при $P_{ac} = 1.2$ МПа, $d/R_{10} = 21$, (b) график старших показателей Ляпунова их продолжений по параметру ϵ .

хаотическим, в которой синхронный аттрактор неустойчив к разрушению симметрии, а гиперхаотический – устойчив в широком диапазоне ϵ приведён на рис. 13.

Также, показано, что аттракторы, возникающие на основных этапах сценария появления гиперхаотической динамики, связанного с разрушением синхронизации через «пузырьковый переход», также устойчивы к возмущениям, разрушающим симметрию.

1.3 Модель взаимодействующих нейронов

1.3.1 Модель двух взаимодействующих нейронов

Рассмотрим нейрон, находящийся в покое. С точки зрения динамических систем данное состояние описывается устойчивым равновесием. Импульсы, поступающие через синапсы, изменяют потенциал мембраны, создавая постсинаптические потенциалы. Чувствительные к напряжению ионные каналы, встроенные в мембрану, могут усилить некоторые постсинаптические потенциалы, вызывая резкий рост потенциала мембраны, который распространяется через аксон к другим нейронам – *спайк*, или *потенциал действия* [68]. Бёрстинг – состояние нейрона, в котором он генерирует группы спайков (бёрсты), разделяемые периодами молчания [69; 70].

В данной работе для моделирования нейронной активности используется система Хиндмарш-Роуза [22]. Она хорошо воспроизводит как спайкинговую, так и бёрстинговую активность. Модель двух нейронов, взаимодействующих через прямую электрическую связь между мембранами, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= y_1 - ax_1^3 + bx_1^2 - z_1 + I + D_0(x_2 - x_1), \\
 \dot{y}_1 &= c - dx_1^2 - y_1, \\
 \dot{z}_1 &= r(s(x_1 - x^0) - z_1), \\
 \dot{x}_2 &= y_2 - ax_2^3 + bx_2^2 - z_2 + I + D_0(x_1 - x_2), \\
 \dot{y}_2 &= c - dx_2^2 - y_2, \\
 \dot{z}_2 &= r(s(x_2 - x^0) - z_2),
 \end{aligned} \tag{9}$$

где x_i – потенциалы мембран соответствующих нейронов, y_i и z_i соответствуют быстрым и медленным ионным токам, соответственно, $i = 1, 2$. Мы рассматриваем два идентичных нейрона, поэтому параметры $a = 1$, $b = 3$, $c = 1$, $d = 5$, $s = 4$ и $x^0 = -8/5$ выбраны одинаковыми для обоих нейронов [45; 46]. Система является быстро-медленной, т.к. параметр $r = 0.0021$ является малым. Параметр I отвечает внешнему току, подаваемому на оба нейрона и рассматривается в работе качестве управляющего параметра.

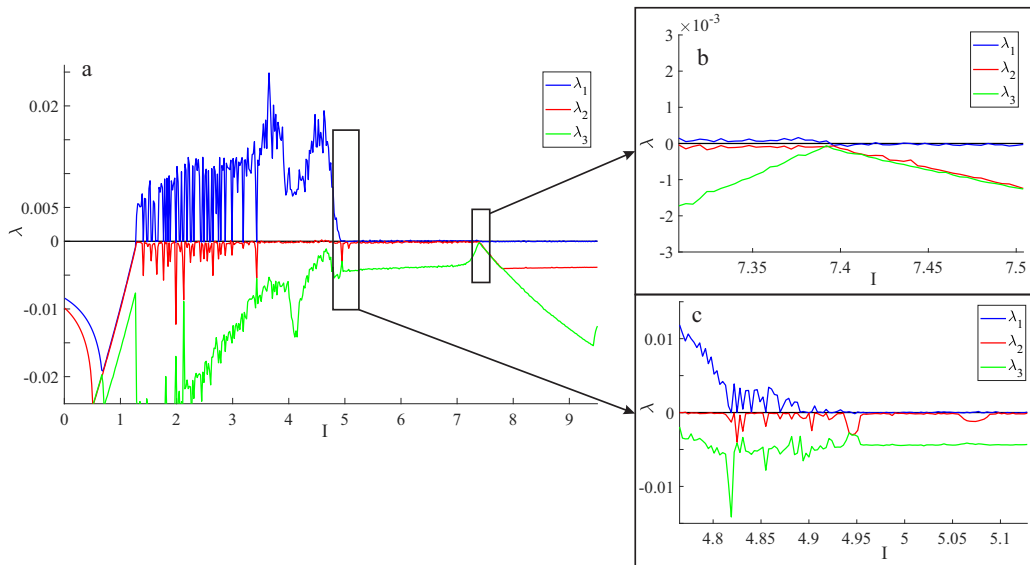


Рис. 14: Старшие показатели Ляпунова, соответствующие системе (9) в диапазоне токов $0 < I < 9.5$.

В работе [4*] изучены интервалы трансверсальной устойчивости синхронных режимов, соответствующим аттракторам найденным ранее в модели отдельного нейрона в работе [42]. Установлено, что асинхронный хаотический аттрактор возникает согласно сценарию Афраймовича-Шильникова. Показано, что асинхронный хаотический режим устойчив в широком диапазоне управляющих параметров. На рис. 14 представлен график старших показателей Ляпунова по параметру I . Показано, что среди синхронных режимов устойчивыми являются только положения равновесия и спайкинговые предельные циклы, в то время, как бёрстинговые режимы, как хаотические, так и периодические являются трансверсально неустойчивыми во всей области существования.

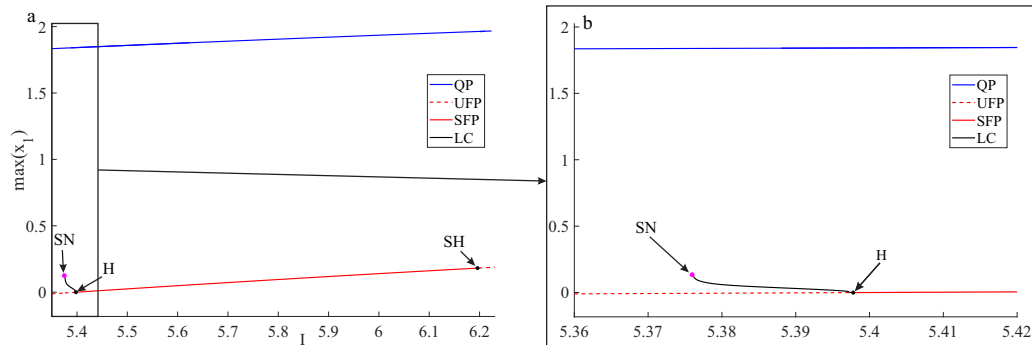


Рис. 15: Бифуркационная диаграмма в первой области бистабильности $5.35 < I < 6.25$. SH – субкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, H – суперкритическая бифуркация Андронова-Хопфа, SN – седло-узловая бифуркация предельного цикла.

Найдены две области бистабильности, в которых асинхронные режимы сосуществуют с синхронными. В первой области бистабильности, с уменьшением I синхронное положение равновесия становится устойчивым через субкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа и сосуществует с асинхронным квазипериодическим режимом при $5.398 < I < 6.198$ (см. Рис. 15). Устойчивое равновесие теряет устойчивость через суперкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа при $I = 5.398$, приводя к появлению устойчивого предельного цикла, существующего в узком диапазоне управляющего параметра. Он сосуществует с квазипериодическим режимом, пока не исчезает через седло-узловую бифуркацию предельного цикла (см. рис. 15).

Сразу после возникновения хаотического аттрактора, ему соответствует асинхронный тонический спайкинг обоих нейронов. С уменьшением тока I происходит мягкий переход к хаотическому асинхронному бёрстингу. Так, при $I = 4.3080$ наблюдается хаотический спайкинг, в котором иногда встречаются аномальные интервалы молчания нейронов (см. рис. 16а). При уменьшении I эти интервалы молчания расширяются и начинают встречаться чаще (см. рис. 16б). Постепенно, начинают отчётливо выделяться бёрсты, разделённые промежутками молчания (см. рис. 16с). При малых токах наблюдаются бёрсты длиной 2-3 спайка (см. рис. 16д). Заметим, что на рис. 16с показан регулярный бёрстинг, т.к. это значение тока попадает в окно устойчивости асинхронного хаотического аттрактора.

Вторая область бистабильности найдена в диапазоне $1.2760 < I < 1.2895$. Синхронная точка покоя становится устойчивой через субкритическую бифуркацию Андронова-Хопфа. Оно сосуществует с асинхронным хаотическим аттрактором, соответствующий асинхрон-

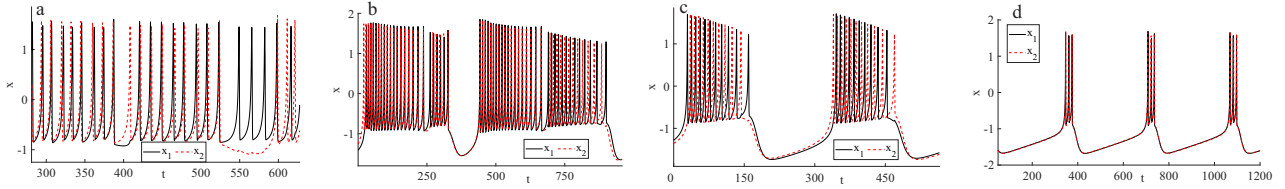


Рис. 16: (a) Хаотический спайкинг при $I = 4.3080$, (b) промежуточный хаотический режим при $I = 3.7880$, (c) регулярный бёрстинг при $I = 2.428$, (d) регулярный бёрстинг при $I = 2.960$.

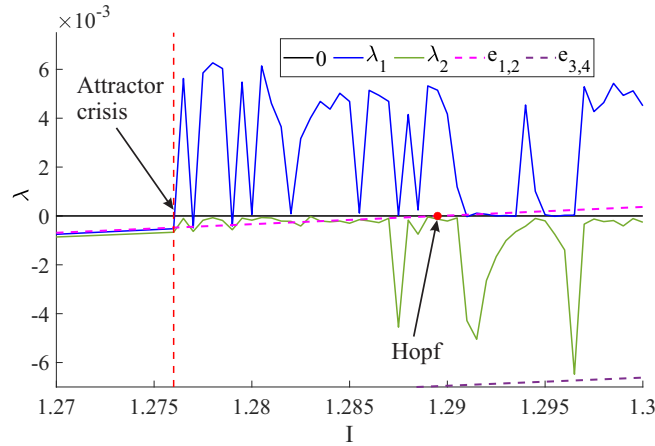


Рис. 17: Бифуркационная диаграмма во второй области бистабильности $1.27 < I < 1.30$.

ному бёрстингу двух нейронов (см. рис. 17). Вероятный механизм кризиса асинхронного аттрактора при уменьшении I описан в работе [5*]. В ней также исследовано изменение типа устойчивого равновесия в зависимости от параметра. Было показано, что в области бистабильности, точка покоя имеет тип фокуса, и система вблизи субкритической бифуркации Андронова-Хопфа возбудима, и обладает свойствами резонаторов согласно классификации, приведённой в [68].

1.3.2 Возбуждение системы из двух нейронов сигналом от внешнего нейрона

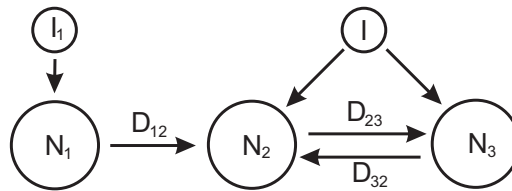


Рис. 18: Схема возбуждения системы из двух нейронов третьим нейроном через направленную связь.

Рассмотрим систему из трёх нейронов с направленными связями, следующего вида: первый нейрон имеет только одну исходящую связь ко второму нейрону, а второй и третий нейрон представляют из себя полносвязную сеть (см. рис. 18). Если поведение каждого из нейронов моделируется системой Хиндмарш-Роуза, и электрические связи между ними моделируются линейно, то система уравнений, описывающая динамику модели выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= y_1 - ax_1^3 + bx_1^2 - z_1 + I_1, \\
\dot{y}_1 &= c - dx_1^2 - y_1, \\
\dot{z}_1 &= r(s(x_1 - x^0) - z_1), \\
\dot{x}_2 &= y_2 - ax_2^3 + bx_2^2 - z_2 + I_2 + D_{32}(x_3 - x_2) + D_{12}(x_1 - x_2), \\
\dot{y}_2 &= c - dx_2^2 - y_2, \\
\dot{z}_2 &= r(s(x_2 - x^0) - z_2), \\
\dot{x}_3 &= y_3 - ax_3^3 + bx_3^2 - z_3 + I_3 + D_{23}(x_2 - x_3), \\
\dot{y}_3 &= c - dx_3^2 - y_3, \\
\dot{z}_3 &= r(s(x_3 - x^0) - z_3),
\end{aligned} \tag{10}$$

где использованы те же обозначения, что и в системе (9). В данной конфигурации первый нейрон выступает в роли источника сигнала, а подсистема вида (9) рассматривается, как подчиненная система, возбуждаемая этим сигналом. Это позволяет исследовать влияние на такую группу нейронов сигналов, возникающих в биологических нейронных сетях естественным образом.

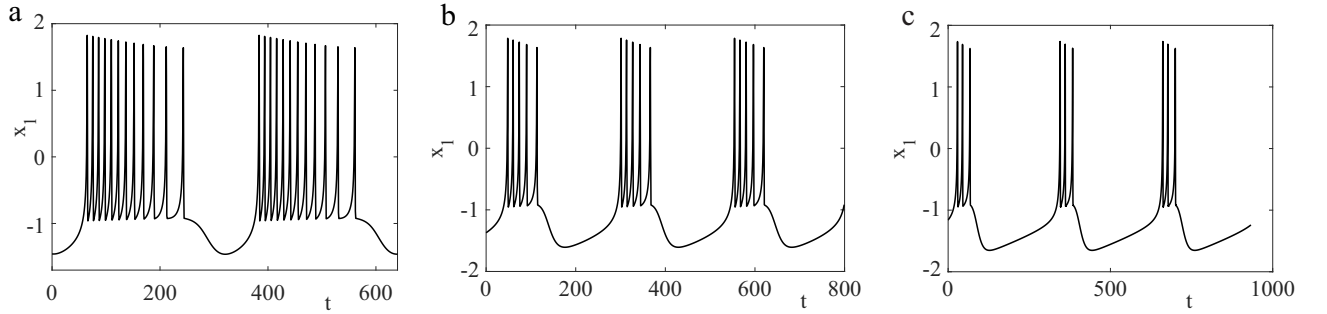


Рис. 19: Сигналы, создаваемые внешним нейроном при (a) $I_1 = 3.20$, (b) $I_1 = 2.00$, (c) $I_1 = 1.40$.

Оценка периодов сигнала, создаваемого нейроном, производилась при помощи спектрального анализа с применением быстрого преобразования Фурье к численным решениям. Для нахождения периода малых затухающих колебаний в окрестности устойчивого равновесия вычислялись собственные значения матрицы Якоби в точке покоя. Было показано, что в области малых внешних токов бёрстинговые сигналы с длинными периодами хорошо подходят для возбуждения подчинённой системы из двух нейронов, в то время, как спайкинговые сигналы неэффективны. При возбуждении подчинённой системы рассматривалось три регулярных бёрстинговых режима: бёрстинг с 12 спайками в бёрсте периода $T_0^b = 318.48$, создаваемый ведущим нейроном при $I_1 = 3.2$; бёрстинг с 5 спайками в бёрсте периода $T_1^b = 252.53$, создаваемый внешним нейроном при $I_1 = 2.0$; бёрстинг с 3 спайками в бёрсте периода $T_2^b = 316.46$, создаваемый внешним нейроном при $I_1 = 1.4$ (см. рис. 19). Также, рассматривался регулярный спайкинговый сигнал с межспайковым интервалом $T_1^s = 8.10$, создаваемый первым нейроном при $I_1 = 3.5$.

Карта возбуждения системы из двух нейронов бёрстинговым сигналом, создаваемым ведущим нейроном при $I_1 = 3.20$, и карта хаотической и регулярной динамики при таком возбуждении представлены на рис. 20. Зона (I) на рис. 20 соответствует тоническому бёрстингу обоих нейронов подчинённой системы, зона (II) – подпороговым осцилляциям

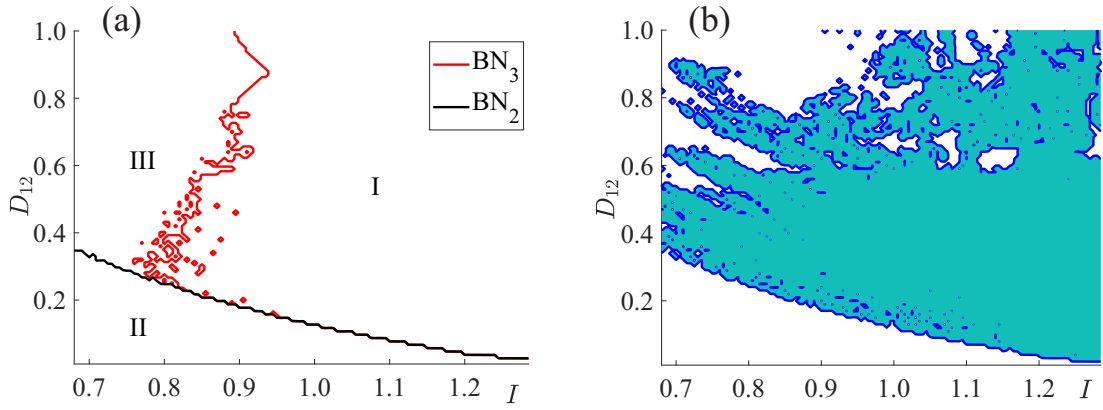


Рис. 20: (а) Границы возбуждения подчинённой системы сигналом от ведущего нейрона в области $0.680 < I < 1.285, 0 < D_{12} < 1$, (б) области хаотической (закрашенные) и регулярной (незакрашенная) динамики.

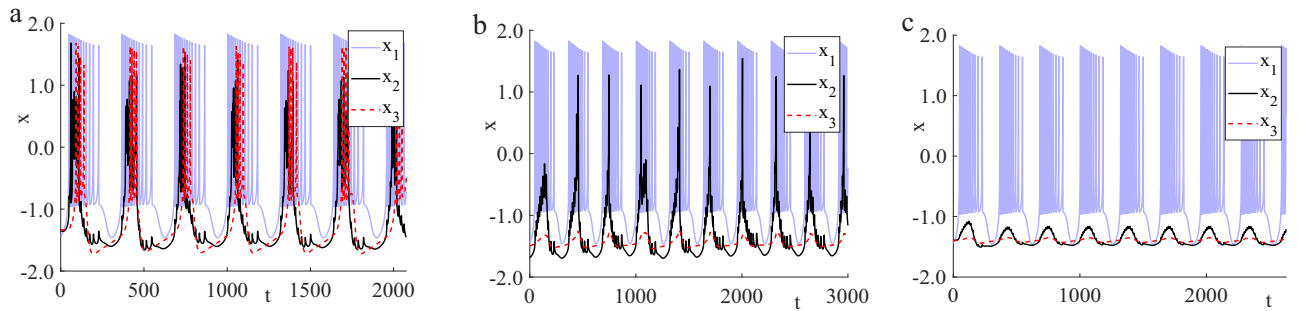


Рис. 21: Различные паттерны активации системы из двух нейронов при возбуждении регулярным сигналом, создаваемым внешним нейроном при $I_1 = 3.20$. (а) Хаотический бёрстинг при $I = 1.25, D_{12} = 0.5$ (зона I), (б) хаотический бёрстинг одного нейрона и подпороговые осцилляции другого при $D_{12} = 0.6, I = 0.75$ (зона III), (с) регулярные подпороговые осцилляции обоих нейронов при $I = 1.0, D_{12} = 0.10$ (зона II).

обоих нейронов (после переходного процесса), а зона (III) – тоническому бёрстингу второго нейрона, в то время, как третий демонстрирует подпороговые осцилляции. Примеры результирующих режимов осцилляций из зон (I), (II) и (III) приведены на рис. 21.

Также, исследовано возбуждение подчинённой системы в области бистабильности при больших токах: $5.398 < I < 6.198$. Границы возбуждения системы различными сигналами представлены на рис. 22. В данном случае при успешном возбуждении системы внешним сигналом результирующий режим представляет из себя тонический спайкинг, независимо от того, является ли поступающий сигнал бёрстинговым или спайкинговым. Этот режим близок к квазипериодическому режиму, существующему в системе из двух нейронов при соответствующем токе в отсутствии внешнего сигнала. Так, при возбуждении бёрстинговым сигналом, генерируемым внешним нейроном при $I_1 = 3.20$ и параметрах $I = 5.5, D_{12} = 0.03$, средний межспайковый интервал результирующего режима мало отличается от соответствующего интервала квазипериодического режима: $T/T_q = 0.9903$. Основным фактором, отвечающим за возбудимость системы в данной области параметров является бистабильность: возбуждающий сигнал может приводить к переходу подчинённой системы через сепаратрису. Результирующий режим осцилляций системы из двух

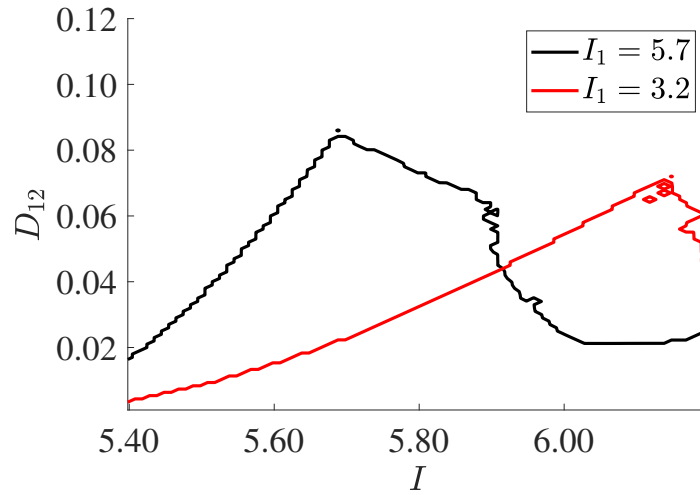


Рис. 22: Границы возбуждения системы из двух нейронов в области бистабильности $5.398 < I < 6.198, 0 < D_{12} < 0.12$ (а) бёрстинговым сигналом, создаваемым ведущим нейроном при $I_1 = 3.2$, (б) спайкинговым сигналом, создаваемым ведущим нейроном при $I_1 = 5.7$.

нейронов представляет из себя возмущённый квазипериодический режим.

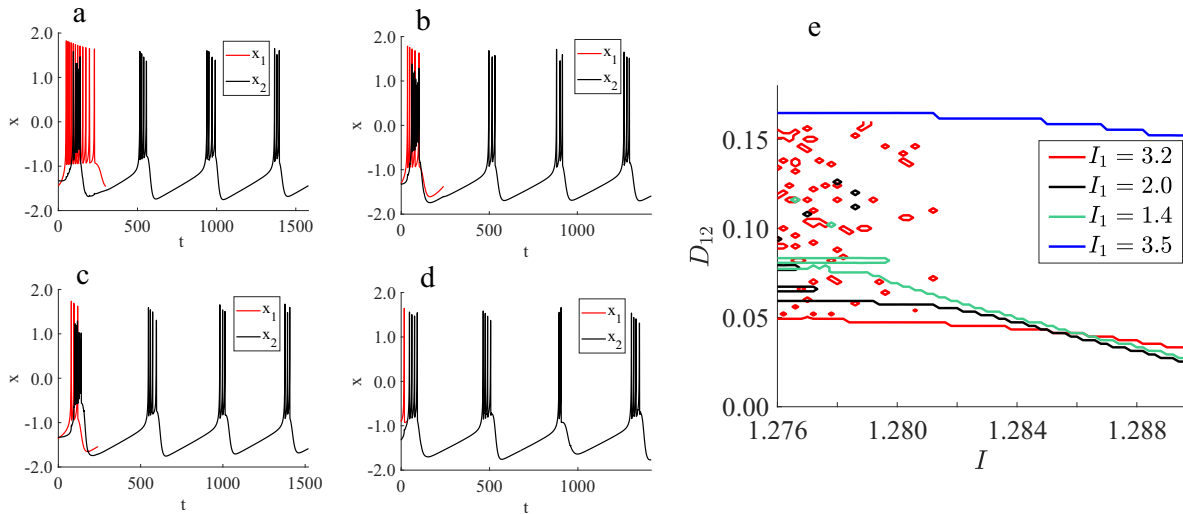


Рис. 23: Примеры возбуждения подчинённой системы при $I = 1.284$ одним периодом различных регулярных сигналов, поступающих от ведущего нейрона при следующих параметрах тока I_1 и силы связи D_{12} : (а) $D_{12} = 0.1, I_1 = 3.2$, (б) $D_{12} = 0.1, I_1 = 2.0$, (с) $D_{12} = 0.1, I_1 = 1.4$, (д) $D_{12} = 0.2, I_1 = 3.5$. (е) границы возбуждения подчинённой системы в области бистабильности $1.2760 < I < 1.2895, 0 < D_{12} < 0.18$ при возбуждении одним периодом сигналов, создаваемых первым нейроном при следующих токах: красная – $I_1 = 3.20$, чёрная – $I_1 = 2.00$, зелёная – $I_1 = 1.4$, синяя – $I_1 = 3.5$

Кроме того, в области бистабильности $1.2760 < I < 1.2895$ исследована возможность возбуждения подчинённой системы одним периодом регулярного возбуждающего сигнала. На рис. 23а-д представлены примеры возбуждения различными конечными сигналами, а на рис. 23е показана карта возбуждения одним периодом четырёх различных сигналов.

2 Заключение

В диссертационной работе изучались две системы связанных нелинейных осцилляторов, встречающихся в биофизических приложениях: модель взаимодействующих микропузырьковых контрастных агентов и модель связанных нейронов. В ходе выполнения работы были получены следующие результаты:

1. Сформулирована математическая модель, описывающая динамику двух контрастных агентов, инкапсулированных в оболочки, взаимодействующих посредством силы Бьёркнеса.
2. Разработан комплекс программ для численного исследования динамики в изучаемых моделях. Он позволяет вычислять отдельные траектории, строить отображения Пуанкаре, находить Фурье-образы полученных решений, вычислять спектр показателей Ляпунова, в том числе с разделением на синхронную и асинхронную компоненты, находить старший трансверсальный показатель Ляпунова, строить одно- и двух-параметрические карты показателей Ляпунова с использованием метода численных продолжений для получения начальных условий.
3. Построено несколько листов двух-параметрических карт режимов динамики в модели взаимодействующих контрастных агентов. Проанализированы бифуркационные сценарии, реализующиеся вдоль одно-параметрических маршрутов. Объяснены механизмы, отвечающие за возникновение гиперхаотической динамики.
4. Найдены области синхронизации колебаний двух взаимодействующих контрастных агентов. Изучены сценарии возникновения синхронных и асинхронных режимов динамики. Исследовано явление разрушения синхронизации.
5. Проведено исследование динамики в системе из двух взаимодействующих нейронов, описываемых системой Хиндмарш-Роуза, с электрическими связями. Рассмотрена устойчивость синхронных режимов динамики и появление асинхронного хаотического аттрактора.
6. Изучены механизмы возбудимости полносвязной группы из двух нейронов в областях устойчивости синхронной точки покоя. Проведено моделирование возбуждения такой системы внешним сигналом, создаваемым отдельным нейроном.

Список литературы

1. *Strogatz S. H.* Nonlinear dynamics and chaos: with applications to physics, biology, chemistry, and engineering. — CRC press, 2018.
2. *Pikovsky A., Politi A.* Lyapunov Exponents: A Tool to Explore Complex Dynamics. — Cambridge University Press, 2016.
3. *Skokos C.* — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2010. — С. 63—135.
4. *Vulpiani A., Cecconi F., Cencini M.* Chaos: from simple models to complex systems. Т. 17. — World Scientific, 2009.
5. *Klibanov A. L.* Microbubble contrast agents: targeted ultrasound imaging and ultrasound-assisted drug-delivery applications // Investigative radiology. — 2006. — Т. 41, № 3. — С. 354—362.
6. *Hoff L.* Acoustic characterization of contrast agents for medical ultrasound imaging. — Springer Science & Business Media, 2001.
7. *Goldberg B., Raichlen J., Forsberg F.* Ultrasound Contrast Agents: Basic Principles and Clinical Applications. — Taylor & Francis, 2001.
8. *Szabo T. L.* Diagnostic ultrasound imaging: inside out. — Academic press, 2004.
9. *Doinikov A. A., Bouakaz A.* Review of shell models for contrast agent microbubbles // IEEE transactions on ultrasonics, ferroelectrics, and frequency control. — 2011. — Т. 58, № 5. — С. 981—993.
10. Material characterization of the encapsulation of an ultrasound contrast microbubble and its subharmonic response: Strain-softening interfacial elasticity model / S. Paul, A. Katiyar, K. Sarkar, D. Chatterjee, W. T. Shi, F. Forsberg // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2010. — Т. 127, № 6. — С. 3846—3857.
11. *Plesset M. S.* The dynamics of cavitation bubbles // Journal of Applied Mechanics. — 1949. — Т. 16, № 3. — С. 277—282.
12. Absorption and scatter of encapsulated gas filled microspheres: theoretical considerations and some measurements / N. de Jong, L. Hoff, T. Skotland, N. Bom // Ultrasonics. — 1992. — Т. 30, № 2. — С. 95—103.
13. A model for large amplitude oscillations of coated bubbles accounting for buckling and rupture / P. Marmottant, S. Van Der Meer, M. Emmer, M. Versluis, N. De Jong, S. Hilgenfeldt, D. Lohse // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2005. — Т. 118, № 6. — С. 3499—3505.
14. Estimating the shell parameters of SonoVue® microbubbles using light scattering / J. Tu, J. Guan, Y. Qiu, T. J. Matula // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2009. — Т. 126, № 6. — С. 2954—2962.
15. *Keller J. B., Miksis M.* Bubble oscillations of large amplitude // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1980. — Т. 68, № 2. — С. 628—633.

16. Bjerknes forces between small cavitation bubbles in a strong acoustic field / R. Mettin, I. Akhatov, U. Parlitz, C. Ohl, W. Lauterborn // *Physical review E*. — 1997. — T. 56, № 3. — C. 2924.
17. *Takahira H., Yamane S., Akamatsu T.* Nonlinear oscillations of a cluster of bubbles in a sound field: Bifurcation structure // *JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering*. — 1995. — T. 38, № 3. — C. 432—439.
18. *Ida M.* Phase properties and interaction force of acoustically interacting bubbles: A complementary study of the transition frequency // *Physics of fluids*. — 2005. — T. 17, № 9. — C. 097107.
19. Secondary Bjerknes forces between two bubbles and the phenomenon of acoustic streamers / N. A. Pelekasis, A. Gaki, A. Doinikov, J. A. Tsamopoulos // *Journal of Fluid Mechanics*. — 2004. — T. 500. — C. 313—347.
20. Effects of coupling, bubble size, and spatial arrangement on chaotic dynamics of microbubble cluster in ultrasonic fields / F. Dzaharudin, S. A. Suslov, R. Manasseh, A. Ooi // *The Journal of the Acoustical Society of America*. — 2013. — T. 134, № 5. — C. 3425—3434.
21. *Hodgkin A. L., Huxley A. F.* A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve // *The Journal of physiology*. — 1952. — T. 117, № 4. — C. 500.
22. *Hindmarsh J. L., Rose R.* A model of neuronal bursting using three coupled first order differential equations // *Proceedings of the Royal society of London. Series B. Biological sciences*. — 1984. — T. 221, № 1222. — C. 87—102.
23. *Coombes S., Bressloff P. C.* *Bursting: the genesis of rhythm in the nervous system*. — World Scientific, 2005.
24. Bioelectronic modulation of carotid sinus nerve activity in the rat: a potential therapeutic approach for type 2 diabetes / J. F. Sacramento, D. J. Chew, B. F. Melo, M. Donegá, W. Dopson, M. P. Guarino, A. Robinson, J. Prieto-Lloret, S. Patel, B. J. Holinski [и др.] // *Diabetologia*. — 2018. — T. 61. — C. 700—710.
25. *Rössler O. E.* An equation for hyperchaos // *Physics Letters A*. — 1979. — T. 71, № 2/3. — C. 155—157.
26. *Baier G., Klein M.* Maximum hyperchaos in generalized Hénon maps // *Physics Letters A*. — 1990. — T. 151, № 6/7. — C. 281—284.
27. *Baier G., Sahle S.* Design of hyperchaotic flows // *Physical Review E*. — 1995. — T. 51, № 4. — R2712.
28. *Stefański K.* Modelling chaos and hyperchaos with 3-D maps // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 1998. — T. 9, № 1/2. — C. 83—93.
29. *Matsumoto T., Chua L. O., Kobayashi K.* Hyper chaos: laboratory experiment and numerical confirmation // *IEEE Transactions on Circuits and Systems*. — 1986. — T. 33, № 11. — C. 1143—1147.

30. *Stoop R., Meier P.* Evaluation of Lyapunov exponents and scaling functions from time series // JOSA B. — 1988. — T. 5, № 5. — C. 1037–1045.
31. A p-Ge semiconductor experiment showing chaos and hyperchaos / R. Stoop, J. Peinke, J. Parisi, B. Röhrich, R. Huebener // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 1989. — T. 35, № 3. — C. 425–435.
32. Hyperchaotic attractors of three-dimensional maps and scenarios of their appearance / A. Shykhmamedov, E. Karatetskaia, A. Kazakov, N. Stankevich // arXiv preprint arXiv:2012.05099. — 2020.
33. *Pikovsky A., Rosenblum M., Kurths J.* Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences. — Cambridge University Press, 2001. — (Cambridge Nonlinear Science Series).
34. Bifurcation structure of bubble oscillators / U. Parlitz, V. Englisch, C. Scheffczyk, W. Lauterborn // The Journal of the Acoustical Society of America. — 1990. — T. 88, № 2. — C. 1061–1077.
35. Nonlinear transitions of a spherical cavitation bubble / S. Behnia, A. Jafari, W. Soltanpoor, O. Jahanbakhsh // Chaos, Solitons & Fractals. — 2009. — T. 41, № 2. — C. 818–828.
36. *Carroll J. M., Calvisi M. L., Lauderbaugh L. K.* Dynamical analysis of the nonlinear response of ultrasound contrast agent microbubbles // The Journal of the Acoustical Society of America. — 2013. — T. 133, № 5. — C. 2641–2649.
37. *Macdonald C., Gomatam J.* Chaotic dynamics of microbubbles in ultrasonic fields // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science. — 2006. — T. 220, № 3. — C. 333–343.
38. Study of encapsulated microbubble cluster based on association schemes perspective / S. Behnia, M. Yahyavi, R. Habibpourbisafar, F. Mottaghi // Ultrasonics Sonochemistry. — 2019. — T. 52. — C. 131–141.
39. *Shilnikov A., Kolomiets M.* Methods of the qualitative theory for the Hindmarsh–Rose model: A case study—a tutorial // International Journal of Bifurcation and chaos. — 2008. — T. 18, № 08. — C. 2141–2168.
40. Macro-and micro-chaotic structures in the Hindmarsh-Rose model of bursting neurons / R. Barrio, M. Angeles Martínez, S. Serrano, A. Shilnikov // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2014. — T. 24, № 2. — C. 023128.
41. *Malashchenko T., Shilnikov A., Cymbalyuk G.* Six types of multistability in a neuronal model based on slow calcium current // PLoS One. — 2011. — T. 6, № 7. — e21782.
42. Dynamical phases of the Hindmarsh-Rose neuronal model: Studies of the transition from bursting to spiking chaos / G. Innocenti, A. Morelli, R. Genesio, A. Torcini // Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science. — 2007. — T. 17, № 4. — C. 043128.
43. Spike-train bifurcation scaling in two coupled chaotic neurons / R. Huerta, M. I. Rabinovich, H. D. Abarbanel, M. Bazhenov // Physical review E. — 1997. — T. 55, № 3. — R2108.

44. *Erichsen Jr R., Brunnet L.* Multistability in networks of Hindmarsh-Rose neurons // *Physical Review E*. — 2008. — T. 78, № 6. — C. 061917.
45. *Yu H., Peng J.* Chaotic synchronization and control in nonlinear-coupled Hindmarsh–Rose neural systems // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2006. — T. 29, № 2. — C. 342–348.
46. *Etémé A. S., Tabi C. B., Mohamadou A.* Synchronized nonlinear patterns in electrically coupled Hindmarsh–Rose neural networks with long-range diffusive interactions // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 2017. — T. 104. — C. 813–826.
47. *Etémé A. S., Tabi C. B., Mohamadou A.* Long-range patterns in Hindmarsh–Rose networks // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. — 2017. — T. 43. — C. 211–219.
48. *Tamaševičius A., Namajūnas A., Čenys A.* Simple 4D chaotic oscillator // *Electronics Letters*. — 1996. — T. 32, № 11. — C. 957.
49. *Harrison M. A., Lai Y.-C.* Route to high-dimensional chaos // *Physical Review E*. — 1999. — T. 59, № 4. — R3799.
50. Chaos-hyperchaos transition / T. Kapitaniak, K.-E. Thylwe, I. Cohen, J. Wojewoda // *Chaos, Solitons & Fractals*. — 1995. — T. 5, № 10. — C. 2003–2011.
51. *Kapitaniak T., Maistrenko Y., Popovych S.* Chaos-hyperchaos transition // *Physical Review E*. — 2000. — T. 62, № 2. — C. 1972.
52. *Yanchuk S., Kapitaniak T.* Chaos–hyperchaos transition in coupled Rössler systems // *Physics Letters A*. — 2001. — T. 290, № 3/4. — C. 139–144.
53. Three-dimensional Hénon-like maps and wild Lorenz-like attractors / S. V. Gonchenko, I. Ovsyannikov, C. Simó, D. Turaev // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2005. — T. 15, № 11. — C. 3493–3508.
54. Towards scenarios of chaos appearance in three-dimensional maps / A. Khokhlov, N. Brilliantov, S. Belyakin, A. Dzhanoev, E. Zhuchkova, O. Kotlyarov, S. Krotov, S. Larionov, E. Postnikov, G. Riznichenko [и др.] // *Rus. J. Nonlin. Dyn.* — 2012. — T. 8, № 1. — C. 3–28.
55. Simple scenarios of onset of chaos in three-dimensional maps / A. Gonchenko, S. Gonchenko, A. Kazakov, D. Turaev // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. — 2014. — T. 24, № 08. — C. 1440005.
56. *Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part I* . / L. Shilnikov, A. Shilnikov, D. Turaev, L. Chua. — 1998.
57. Hidden attractors in dynamical systems / D. Dudkowski, S. Jafari, T. Kapitaniak, N. V. Kuznetsov, G. A. Leonov, A. Prasad // *Physics Reports*. — 2016. — T. 637. — C. 1–50.
58. *Trefethen L., Bau D.* Numerical Linear Algebra: Twenty-Fifth Anniversary Edition. — SIAM, Society for Industrial, Applied Mathematics, 2022. — (Other Titles in Applied Mathematics).
59. Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems; a method for computing all of them. Part 1: Theory / G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, J.-M. Strelcyn // *Meccanica*. — 1980. — T. 15. — C. 9–20.

60. *Oseledec V. I.* A multiplicative ergodic theorem, Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems // Transactions of the Moscow Mathematical Society. — 1968. — T. 19. — C. 197–231.
61. *Ashwin P., Buescu J., Stewart I.* Bubbling of attractors and synchronisation of chaotic oscillators // Physics Letters A. — 1994. — T. 193, № 2. — C. 126–139.
62. *Ashwin P., Buescu J., Stewart I.* From attractor to chaotic saddle: a tale of transverse instability // Nonlinearity. — 1996. — T. 9, № 3. — C. 703.
63. *Saha A., Feudel U.* Extreme events in FitzHugh-Nagumo oscillators coupled with two time delays // Physical Review E. — 2017. — T. 95, № 6. — C. 062219.
64. Secondary Bjerknes forces between two bubbles and the phenomenon of acoustic streamers / N. A. Pelekasis, A. Gaki, A. Doinikov, J. A. Tsamopoulos // Journal of Fluid Mechanics. — 2004. — T. 500. — C. 313–347.
65. *Gonchenko A. S., Gonchenko S.* Variety of strange pseudohyperbolic attractors in three-dimensional generalized Hénon maps // Physica D: Nonlinear Phenomena. — 2016. — T. 337. — C. 43–57.
66. *Borisov A. V., Kazakov A. O., Sataev I. R.* Spiral chaos in the nonholonomic model of a Chaplygin top // Regular and Chaotic Dynamics. — 2016. — T. 21. — C. 939–954.
67. Chaotic dynamics and multistability in the nonholonomic model of a Celtic stone / A. S. Gonchenko, S. V. Gonchenko, A. O. Kazakov, E. A. Samylnina // Radiophysics and Quantum Electronics. — 2019. — T. 61. — C. 773–786.
68. *Izhikevich E. M.* Dynamical systems in neuroscience. — MIT press, 2007.
69. Bursts as a unit of neural information: selective communication via resonance / E. M. Izhikevich, N. S. Desai, E. C. Walcott, F. C. Hoppensteadt // Trends in neurosciences. — 2003. — T. 26, № 3. — C. 161–167.
70. *Lisman J. E.* Bursts as a unit of neural information: making unreliable synapses reliable // Trends in neurosciences. — 1997. — T. 20, № 1. — C. 38–43.