Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«Национальный исследовательский университет»
«Высшая школа экономики»

Факультет математики

На правах рукописи

Ян Чжокэ

Новые подходы к весовым системам, строящимся по алгебрам Ли

Резюме диссертации
на соискание учёной степени
кандидата математических наук

Научный руководитель:
д.ф.-м.н., профессор
Ландо Сергей Константинович

Москва - 2023

Содержание

Введение **3**

1 Хордовые диаграммы и весовые системы **5**

2 Построение весовых систем по алгебрам Ли **8**

3 Мутации узлов, хордовых диаграмм и графы пересечений **9**

4 Диаграммы Якоби **11**

5 $\mathfrak{sl}(3)$-весовая система **14**

6 Значения $\mathfrak{sl}(3)$-весовой системы на хордовых диаграммах $K_{2,n}$ **15**

7 $\mathfrak{gl}$-весовая система для перестановок **17**

8 Симметричечкие функции и изоморфизм Хариш-Чандры **20**

9 Продолжение весовой системы $\mathfrak{gl}(m|n)$ на перестановки **23**

10 Формулировка основных результатов **25**

Результаты этой диссертации опубликованы в трех статьях:

- Zhuoke Yang, *On the Lie superalgebra* $\mathsf{gl}(m|n)$ *weight system*, Journal of Geometry and Physics. 2023. Vol. 187. Article 104808.
- Zhuoke Yang, *New approaches to* gl_N *weight system*, `arXiv:2202.12225 [math.CO]`, Accepted by Izvestiya: Mathematics
- Zhuoke Yang, *On values of* sl_3 *weight system on chord diagrams whose intersection graph is complete bipartite*, `arXiv:2102.00888 [math.CO]`, Accepted by Moscow Mathematical Journal

Введение

Инварианты узлов конечного порядка, которые были введены в [29] В. Васильевым около 1990 года, могут быть выражены в терминах весовых систем, то есть функций на хордовых диаграммах, удовлетворяющих так называемым 4-членным соотношениям Васильева. В работе [18] М. Концевич доказал, что над полем характеристики нуль всякая весовая система соответствует некоторому инварианту конечного порядка. Существует множество подходов к построению весовых систем. В частности, Д. Бар-Натан и М. Концевич предложили конструкцию весовой системы по алгебре Ли конечной размерности, наделенной инвариантной невырожденной билинейной формой. Весовая система алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$ является простейшим случаем, ее весовая система связана с инвариантом узла, известным как крашенный полином Джонса. Ее значения лежат в центре универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2)$, который, в свою очередь, изоморфен кольцу многочленов от одной переменной (элемента Казимира). Весовая система $\mathfrak{sl}(2)$ изучалась во многих работах. Несмотря на то, что эта весовая система легко определяется, вычислить ее значение на хордовой диаграмме по этому определению сложно, так как для этого необходимо работать с элементами некоммутативной алгебры. Рекуррентные соотношения Чмутова–Варченко [6] значительно упрощают эти вычисления, и с их помощью было проведено множество вычислений, см. напр. [12, 13, 30]. Теорема С. Чмутова и С. Ландо [7] утверждает, что значение $\mathfrak{sl}(2)$-весовой системы на хордовой диаграмме зависит только от графа пересечений этой хордовой диаграммы, т.е. если две хордовые диаграммы имеют изоморфные графы пересечений, то значения весовой системы на этих хордовых диаграммах совпадают.

С другой стороны, у нас нет таких хороших свойств уже для следующего разумного случая, а именно, для $\mathfrak{sl}(3)$-весовой системы. Весовая система алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3)$ принимает значения в центре универсальной обортывающей алгебры алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3)$, который изоморфен кольцу многочленов от ДВУХ переменных (элементов Казимира степеней 2 и 3). Для $\mathfrak{sl}(3)$-весовой системы не известно соотношения, аналогичного рекуррентным соотношениям Чмутова-Варченко для весовой системы $\mathfrak{sl}(2)$, которое позволило бы вычислять ее значения. Теорема Чмутова–Ландо для $\mathfrak{sl}(3)$-весовой системы также не работает, т.е. существуют две различные хордовые диаграммы с различными значениями весовой системы $\mathfrak{sl}(3)$, графы пересечений которых изоморфны.

Диссертация посвящена построению эффективных способов вычисления значений весовых систем, связанных с различными алгебрами Ли и супералгебрами Ли, и анализу их свойств. Она имеет следующую структуру. В разделах 1–4 мы

даем основные определения, в разделах 5–9 излагаем основные результаты.

Наша первая группа основных результатов в разделе 5 касается явных значений $\mathfrak{sl}(3)$-весовой системы на хордовых диаграммах, граф пересечений которых является полным двудольным, с размером одной части, равным 2. В наших вычислениях мы используем некоторые результаты из [34]. До настоящего времени явные значения $\mathfrak{sl}(3)$-весовой системы были известны лишь в немногих примерах и простых сериях. Наши результаты позволяют сделать нетривиальный вывод о том, что для хордовых диаграмм, граф пересечения которых является полным двудольным графом $K_{2,n}$, значение $\mathfrak{sl}(3)$-весовой системы зависит только от второго Казимира.

Ключевую роль в нашем исследовании играет структура алгебры Хопфа на пространстве хордовых диаграмм по модулю 4-членных соотношений, введенная Концевичем. Хордовые диаграммы, граф пересечений которых является полным двудольным, порождают подалгебру Хопфа в этой алгебре Хопфа. Анализируя структуру этой подалгебры Хопфа, П. Филиппова в [12, 13] вывела формулу для значений $\mathfrak{sl}(2)$-весовой системы на проекции хордовых диаграмм, граф пересечений которых является полным двудольным, на подпространство примитивных. Объединив наши вычисления с ее результатами, мы получаем явные выражения для значений весовой системы $\mathfrak{sl}(3)$ на примитивных.

Гораздо меньше известно о других алгебрах Ли; для них явные ответы были вычислены только для хордовых диаграмм очень малого порядка или для простых семейств хордовых диаграмм, см. [31]. В частности, для других алгебр Ли не существует рекуррентного соотношения, аналогичного соотношению Чмутова-Варченко (за исключением супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(1|1)$, см. [11, 6]). Разделы 7 и 8 посвящены новым способам вычисления значений $\mathfrak{gl}(N)$-весовой системы.

Один из этих новых способов основан на предложении М. Казаряна определить инвариант перестановок, принимающий значения в центре универсальной обертывающей алгебры $\mathfrak{gl}(N)$. Ограничение этого инварианта на инволюции без неподвижных точек (такая инволюция определяет хордовую диаграмму) совпадает со значением весовой системы $\mathfrak{gl}(N)$ на этой хордовой диаграмме. Мы описываем рекурсию, позволяющую вычислить $\mathfrak{gl}(N)$-инвариант перестановок, и демонстрируем ее работу на ряде примеров.

При $N' < N$ центр универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(N)$ естественным образом проектируется на центр универсальной обертывающей алгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(N')$, а $\mathfrak{gl}(N)$-весовая система стабильна: ее значение на перестановке является универсальным многочленом. Описанная нами рекурсия позволяет вычислить этот многочлен одновременно для всех N.

Напомним, что вычисление старшей однородной части универсальной системы весов $\mathfrak{gl}(N)$ в терминах элементов Казимира для некоторых специальных примитивных элементов, заданных открытыми диаграммами Якоби, составляют центральную часть доказательства нижней оценки размерности пространства инвариантов узлов Васильева в [5, 9] (см. также [5, §14.5.4]).

Мы также разработали другой эффективный способ вычисления $\mathfrak{gl}(N)$-весовой системы, который основан на изоморфизме Хариш-Чандры.

В разделе 9 мы распространяем результаты о $\mathfrak{gl}(N)$-весовой системе на весовую систему, соответствующую супералгебре Ли $\mathfrak{gl}(m|n)$. Мы доказываем, что она является специализацией универсальной $\mathfrak{gl}$-весовой системы при подстановке $N = m - n$.

Исходные сведения про супералгебры Ли можно найти в [15]. Весовые системы, возникающие из супералгебр Ли, определены в [28]. Прямой подход к вычислению значений весовой системы супералгебры Ли на общей хордовой диаграмме приводит к сложным вычислениям в некоммутативной универсальной обертывающей алгебре, несмотря на то, что результат лежит в центре последней. Такой подход весьма неэффективен даже для простейшей некоммутативной супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(1|1)$. Для этой супералгебры Ли, однако, существует рекуррентное соотношение, полученное Figueroa-O'Farrill, T. Kimura и A. Vaintrob [11]. О других супералгебрах Ли известно гораздо меньше.

Наш подход основан на определении инварианта перестановок, принимающих значения в центре универсальной обертывающей алгебры супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m|n)$. Ограничение этого инварианта на инволюции без неподвижных точек (такая инволюция определяет хордовую диаграмму) совпадает со значением весовой системы $\mathfrak{gl}(m|n)$ на этой хордовой диаграмме. Мы доказываем рекурсию для $\mathfrak{gl}(m|n)$-весовой системы, которая оказывается такой же, как и рекурсия для $\mathfrak{gl}(N)$-весовой системы.

1 Хордовые диаграммы и весовые системы

Ниже мы используем стандартные понятия из теории инвариантов узлов конечного порядка; см., например, [5, 22].

В этом разделе мы определяем алгебру Хопфа хордовых диаграмм по модулю 4-членных отношений.

Определение 1.1 (хордовая диаграмма)**.** *Хордовая диаграмма* D порядка n (или степени n) — это ориентированная окружность (иногда называемая *петлей Вильсона*) с выделенным множеством из n пар попарно различных точек,

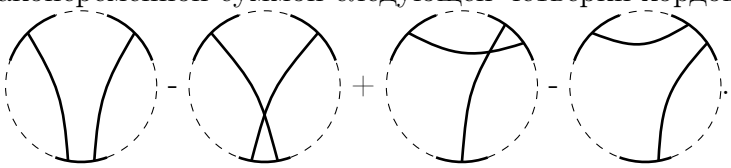
рассматриваемых с точностью до диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию. Множество хорд хордовой диаграммы D обозначим через $[D]$.

Векторное пространство $\mathcal{A}$ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, порожденное хордовыми диаграммами, является градуированным,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_0 \oplus \mathcal{A}_1 \oplus \mathcal{A}_2 \oplus \mathcal{A}_3 \oplus \dots .$$

Каждая однородная компонента $\mathcal{A}_n$ порождается диаграммами того же порядка n.

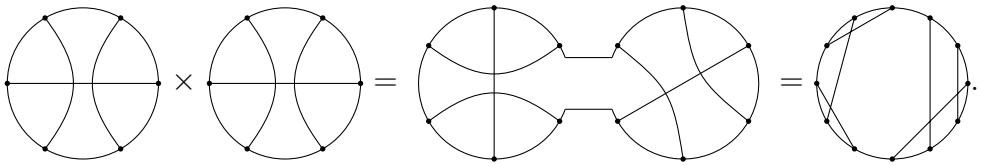
Определение 1.2 (4-членные элементы)**.** 4-*членный* (или $4T$) *элемент* является знакопеременной суммой следующей четверки хордовых диаграмм:



Здесь все четыре хордовые диаграммы содержат, помимо двух изображенных хорд, один и тот же набор других хорд, концы которых принадлежат пунктирным дугам. Для любого векторного пространства V линейное отображение $f \in \hom_{linear}(\mathcal{A}, V)$, которое обращается в нуль на всех 4-членных элементах, называется *весовой системой*.

Теперь мы определим структуру алгебры Хопфа на $\mathcal{A}/\langle$4-членные элементы$\rangle := \mathcal{A}^{fr}$.

Определение 1.3. Произведение двух хордовых диаграмм D_1 и D_2 определяется путем разрезания и склеивания двух окружностей, как показано на рисунке



По модулю 4-членных элементов произведение корректно определено, то есть не зависит от выбранных точек разрезания вильсоновых петель.

Определение 1.4. *Копроизведение* в алгебре $\mathcal{A}^{fr}$

$$\delta : \mathcal{A}_n^{fr} \to \bigoplus_{k+l=n} \mathcal{A}_k^{fr} \otimes \mathcal{A}_l^{fr}$$

определяется следующим образом. Для диаграммы $D \in \mathcal{A}_n^{fr}$ положим

$$\delta(D) := \sum_{J \subseteq [D]} D_J \otimes D_{\bar{J}}.$$

Суммирование ведется по всем подмножествам J множества хорд D. Здесь D_J — хордовая диаграмма, образованная теми хордами из D, которые принадлежат J, а $\bar{J} = [D] \setminus J$ — дополнительное подмножество хорд. На все пространство $\mathcal{A}^{fr}$ оператор δ продолжается по линейности.

Утверждение 1.5. [18] *Векторное пространство A^{fr}, наделенное введенными выше умножением и коумножением, является коммутативной кокоммутативной связной градуированной биалгеброй.*

Определение 1.6. Элемент p биалгебры называется *примитивным*, если $\delta(p) = 1 \otimes p + p \otimes 1$.

Легко показать, что примитивные элементы образуют векторное подпространство $P(\mathcal{A}^{fr})$ в биалгебре $\mathcal{A}^{fr}$. Поскольку любая однородная компонента примитивного элемента является примитивной, такое векторное подпространство градуированной биалгебры также является градуированным, $P_n = P(\mathcal{A}_n^{fr})$. Элемент пространства $\mathcal{A}_n$ является *разложимым*, если он может быть представлен как произведение элементов порядка меньшего, чем n.

Теорема 1.7 ([19, 27])**.** *Проекция $\pi(D)$ хордовой диаграммы D на подпространство примитивных элементов, ядром которой является подпространство, порожденное разложимыми элементами в алгебре Хопфа $\mathcal{A}^{fr}$, задается формулой*

$$\begin{aligned}\pi(D) &= D - 1! \sum_{[D_1] \sqcup [D_2] = [D]} D_1 \cdot D_2 + 2! \sum_{[D_1] \sqcup [D_2] \sqcup [D_3] = [D]} D_1 \cdot D_2 \cdot D_3 - \dots \\ &= D - \sum_{i=2}^{|[D]|} (-1)^i (i-1)! \sum_{\substack{\bigsqcup_{j=1}^{i} [D_j] = [D] \\ [D_j] \neq \emptyset}} \prod_{j=1}^{i} D_j\end{aligned}$$

Например,

Пример 1.8. Элемент

$\pi($ $) =$ $- 2$ $+$

это примитивный элемент, который является проекцией аргумента в левой части на подпространство примитивных.

2 Построение весовых систем по алгебрам Ли

Для алгебры Ли $\mathfrak{g}$, снабженной невырожденной инвариантной билинейной формой, можно построить весовую систему со значениями в центре ее универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$. Такую форму М. Концевич [18] придал конструкции Д. Бар-Натана [3]. Конструкция Концевича состоит в следующем.

Определение 2.1 (Универсальная весовая система алгебры Ли для хордовых диаграмм)**.** Пусть $\mathfrak{g}$ — метризованная алгебра Ли над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, то есть алгебра Ли с ad-инвариантной невырожденной билинейной формой $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Пусть d обозначает размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Выберем базис $e_1,\dots,e_d$ в $\mathfrak{g}$, и пусть $e_1^*,\dots,e_d^*$ — двойственный к нему базис относительно формы $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $\langle e_i,e_j^*\rangle=\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Для данной хордовой диаграммы D с n хордами сначала выбирается базисная точка на окружности, отличная от концов ее хорд. Этот выбор задает линейный порядок на концах хорд, возрастающий в положительном направлении петли Вильсона. Присвоим каждой хорде a индекс, то есть целочисленную переменную i_a. Индекс i_a принимает значения от 1 до d, размерности алгебры Ли. Сопоставим первому концу хорды a символ e_{i_a}, а второму — символ $e_{i_a}^*$.

Теперь запишем произведение всех e_{i_a} и всех $e_{i_a}^*$ в том порядке, в котором они появляются на вильсоновом цикле диаграммы D, и возьмем сумму всех d^n элементов универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$, полученных подстановкой всех возможных значений индексов i_a в это произведение. Обозначим через $w_{\mathfrak{g}}(D)$ полученный элемент алгебры $U(\mathfrak{g})$.

Утверждение 2.2. [18] *Функция $w_{\mathfrak{g}}: D\mapsto w_{\mathfrak{g}}(D)$ на хордовых диаграммах обладает следующими свойствами:*

1. *элемент $w_{\mathfrak{g}}(D)$ не зависит от выбора базисной точки на хордовой диаграмме;*

2. *он не зависит от выбора базиса e_i алгебры Ли $\mathfrak{g}$;*

3. *его образ принадлежит ad-инвариантному подпространству*

$$U(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}=\{x\in U(\mathfrak{g})|xy=yx \text{ для всех } y\in\mathfrak{g}\}=ZU(\mathfrak{g});$$

4. *является мультипликативной, $w_{\mathfrak{g}}(D_1D_2)=w_{\mathfrak{g}}(D_1)w_{\mathfrak{g}}(D_2)$ для любой пары хордовых диаграмм D_1,D_2;*

5. *это отображение из хордовых диаграмм в $ZU(\mathfrak{g})$ удовлетворяет 4-членным соотношениям.*

Замечание 2.3. Если D — хордовая диаграмма с n хордами, то

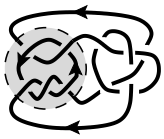
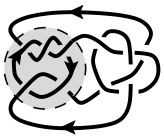
$$\phi_{\mathfrak{g}}(D) = c^n + \{\text{мономы степени менее } 2n \text{ в } U(g)\},$$

где $c = e_1 \otimes e_1^* + \cdots + e_m \otimes e_m^* \in U(\mathfrak{g})$ — квадратичный элемент Казимира. Действительно, мы можем переставлять конечные точки хорд на окружности без изменения старшего члена $\phi_{\mathfrak{g}}(D)$, так как все дополнительные слагаемые, возникающие как коммутаторы, имеют степени меньше $2n$. Следовательно, старший член значения $\phi_{\mathfrak{g}}(D)$ не зависит от D с заданным числом n хорд. Наконец, если D — диаграмма с n изолированными хордами, то есть n-ая степень диаграммы с одной хордой, то $\phi_{\mathfrak{g}}(D) = c^n$.

3 Мутации узлов, хордовых диаграмм и графы пересечений

Рисунки этого раздела заимствованы из [7].

Два узла называются *мутантами*, если они отличаются поворотом/отражением шара с четырьмя конечными точками узла на его границе; при необходимости, ориентация дуг внутри шара может быть заменена на противоположную. Вот известный пример узлов-мутантов — узел Конвея ($11n34$) C рода 3 и узел Киношиты–Терасаки ($11n42$) KT рода 2 (см. [1]).

$C =$  $KT =$ 

Отметим, что изменение ориентации узла может быть достигнуто мутацией в дополнении к тривиальному шару.

Большинство известных инвариантов узлов не могут различить мутантные узлы. Ни (крашенный) полином Джонса, ни полином HOMFLY, ни полином Кауффмана с двумя переменными не различают мутантов. Все инварианты Васильева до 10-го порядка также не различают мутантов [21] (до порядка 8 этот факт был установлен прямым вычислением [2, 5]). Однако существует инвариант Васильева 11-го порядка, различающий C и KT [20, 21]. Он строится по крашенному многочлену HOMFLY.

Основными комбинаторными объектами васильевской теории инвариантов узлов конечного порядка являются *хордовые диаграммы*. Каждой хордовой диаграмме сопоставляется ее *граф пересечений* (также называемый *круговой граф*). Вершины графа соответствуют хордам диаграммы, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие хорды пересекаются.

Значение инварианта Васильева порядка n на особом узле с n двойными точками зависит только от хордовой диаграммы особого узла. Следовательно, любой такой инвариант определяет функцию, а именно *весовую систему*, на хордовых диаграммах с n хордами. И наоборот, любая весовая система индуцирует, в композиции с интегралом Концевича, который является универсальным инвариантом конечного порядка, инвариант конечного порядка узлов.

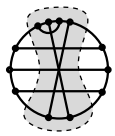
Определение 3.1. Граф *пересечений* связан с хордовой диаграммой. Вершины графа соответствуют хордам диаграммы, и две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующие им хорды пересекаются.

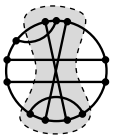
Не каждый абстрактный граф изоморфен графу пересечений некоторой хордовой диаграммы. Наоборот, две различные хордовые диаграммы могут иметь изоморфные графы пересечений.

Мутация узлов определяется как операция поворота связки в узле. Комбинаторным аналогом связки в мутантных узлах является *доля* [2, 5]. Неформально говоря, *доля* в хордовой диаграмме — это подмножество хорд, концы которых разделены не более чем на две части конечными точками дополняющих хорд. Более формально,

Определение 3.2. *доля* — это часть хордовой диаграммы, состоящая из двух дуг ее окружности, обладающая следующим свойством: каждая хорда, один из концов которой принадлежит этим дугам, имеет оба конца на этих дугах.

Вот несколько примеров:


A share

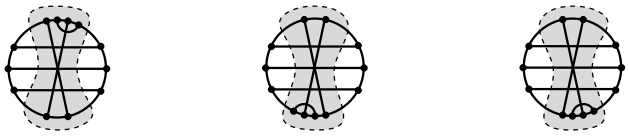

Not a share

Two shares

Дополнение к доле также является долей. Вся хордовая диаграмма является собственной долей, дополнение которой не содержит хорд.

Определение 3.3. *Мутация хордовой диаграммы* — это новая хордовая диаграмма, полученная путем вращения/отражения доли.

Например, три мутации доли в первой хордовой диаграмме выше дают следующие хордовые диаграммы:



Очевидно, что мутации сохраняют графы пересечений хордовых диаграмм.

Теорема 3.4. *[4, 8, 14] Две хордовые диаграммы имеют один и тот же граф пересечений тогда и только тогда, когда они связаны некоторой последовательностью мутаций.*

Графы пересечений играют ключевую роль в изучении мутантных узлов:

Теорема 3.5. *[7] Инвариант узла конечного порядка не различает мутантов тогда и только тогда, когда соответствующая весовая система не различает хордовых диаграмм мутантов, то есть она зависит от графа пересечений хордовых диаграмм диаграммы, а не от самой диаграммы.*

В частности,

Теорема 3.6. *[7] Значения $\mathfrak{sl}(2)$-весовой системы зависят от графов пересечений хордовых диаграмм, а не от самих диаграмм.*

Поэтому мы знаем, что $\mathfrak{sl}(2)$-весовая система не различает мутантные пары. Напротив, крашенный многочлен HOMFLYPT различает мутантные узлы Конвея и Киношиты–Терасаки. Соответствующая ему $\mathfrak{sl}(3)$-весовая система различает две мутантные хордовые диаграммы порядка 11.

4 Диаграммы Якоби

Для вычисления значений $\mathfrak{sl}(3)$-весовой системы нам потребуются результаты из [34] о рекуррентных соотношениях для значений этой весовой системы на диаграммах Якоби. Для этого мы напомним понятие *замкнутой диаграммы Якоби*. Эти диаграммы позволяют лучше понять примитивное пространство $P\mathcal{A}$, см., например, [5].

Определение 4.1. *Замкнутая диаграмма Якоби* (или, просто, *замкнутая диаграмма*) — это связный трехвалентный граф с выделенным вложенным ориентированным циклом, называемым петлей Вильсона, и фиксированным циклическим порядком полуребер в каждой вершине, не входящей в петлю Вильсона.

Половина числа вершин замкнутой диаграммы называется степенью, или порядком, диаграммы. Это число всегда целое. Вершины замкнутой диаграммы, принадлежащие петле Вильсона, называются ее *ногами*.

На рисунках ниже мы всегда будем рисовать диаграмму внутри ее петли Вильсона, которая будет считаться ориентированной против часовой стрелки, если явно не указано иное. Внутренние вершины также будут считаться ориентированными против часовой стрелки.

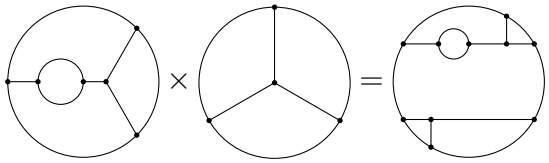
Хордовые диаграммы — это в точности те замкнутые диаграммы Якоби, все вершины которых лежат на петле Вильсона.

Определение 4.2. Векторное пространство замкнутых диаграмм $\mathcal{C}_n^{STU}$ — это пространство, порожденное всеми замкнутыми диаграммами $\mathcal{C}_n$ степени n по модулю *STU-соотношений*:

Три диаграммы S, T и U должны быть идентичны вне изображенного фрагмента. Мы обозначаем через $\mathcal{C}^{STU}$ прямую сумму пространств $\mathcal{C}_n^{STU}$ для всех $n \geq 0$.

Теперь мы определим структуру биалгебры в пространстве $\mathcal{C}^{STU}$.

Определение 4.3. Произведение двух замкнутых диаграмм определяется так же, как и для хордовых диаграмм: две петли Вильсона разрезаются в произвольных местах, а затем склеиваются в одну петлю в соответствии с ориентациями:



Определение 4.4. *Внутренний* граф замкнутой диаграммы — это граф, полученный при стирании петли Вильсона. Замкнутая диаграмма считается *связной*, если ее внутренний граф связен. Под *связными компонентами* замкнутой диаграммы понимаются компоненты связности ее внутреннего графа.

В смысле этого определения любая хордовая диаграмма порядка n состоит из n связных компонент — максимально возможного числа связных компонент в диаграмме Якоби порядка n.

Теперь построение копроизведения происходит так же, как и для хордовых диаграмм, при этом хорды заменяются более общими связными компонентами.

Определение 4.5. Пусть D — замкнутая диаграмма, а $[D]$ — множество ее связных компонент. Для любого подмножества $J \subseteq [D]$ обозначим через D_J замкнутую диаграмму с компонентами, принадлежащими J, а через $D_{\bar{J}}$ — дополнительную диаграмму ($\bar{J} := [D] \setminus J$). Мы определяем копроизведение диаграммы D следующим образом

$$\delta(D) := \sum_{J \subseteq [D]} D_J \otimes D_{\bar{J}}.$$

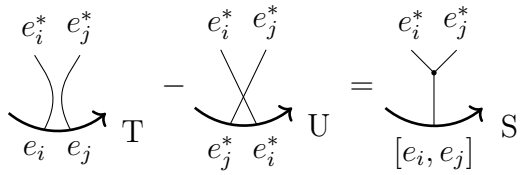
Теперь для каждого $n = 0, 1, 2, \ldots$, мы имеем естественное включение $\lambda : \mathcal{A}_n \to \mathcal{C}_n$.

Утверждение 4.6. [3] *Включение λ задает изоморфизм биалгебр $\lambda : \mathcal{A}^{fr} \to \mathcal{C}^{STU}$.*

По определению, связные замкнутые диаграммы примитивны по отношению к копроизведению δ. Может показаться удивительным, что обратное также верно:

Утверждение 4.7. [3] *Примитивное пространство P биалгебры $\mathcal{C}^{STU}$ совпадает с линейной оболочкой связных замкнутых диаграмм.*

Поскольку каждая замкнутая диаграмма является линейной комбинацией хордовых диаграмм, весовую систему $\phi_{\mathfrak{g}}$ можно рассматривать как функцию на $\mathcal{C}^{STU}$ со значениями в $U(\mathfrak{g})$. Соотношение STU, определяющее алгебру $\mathcal{C}$, дает нам подсказку, как сделать это определение явным. А именно, если мы сопоставим элементы e_i, e_j конечным точкам хорд T- и U-диаграмм из STU-отношения,



то естественно сопоставить коммутатор $[e_i, e_j]$ трехвалентной вершине на вильсоновом контуре диаграммы.

Вообще говоря, $[e_i, e_j]$ может не быть базисным вектором. Диаграмму с конечной точкой, которой сопоставлена линейная комбинация базисных векторов, следует понимать как соответствующую линейную комбинацию диаграмм, которым сопоставлены базисные векторы. Такое понимание приводит к следующему полезному утверждению.

Лемма 4.8. *Степень значения весовой системы алгебры Ли на замкнутой диаграмме D не превосходит числа ног в ней.*

5 $\mathfrak{sl}(3)$-весовая система

В этом разделе мы сосредоточимся на весовой системе, связанной с алгеброй Ли $\mathfrak{sl}(3)$.

Определение 5.1 (Весовая система, ассоциированная с представлением)**.** Линейное представление $T : \mathfrak{g} \to \mathrm{End}(V)$ продолжается до гомоморфизма ассоциативных алгебр $U(T) : U(\mathfrak{g}) \to \mathrm{End}(V)$. Композиция следующих трех отображений (последнее из которых является следом)

$$\mathcal{A} \xrightarrow{\phi_{\mathfrak{g}}} U(\mathfrak{g}) \xrightarrow{U(T)} \mathrm{End}(V) \xrightarrow{Tr}, \mathbb{C}$$

по определениюЭ дает *весовую систему, связанную с представлением* T,

$$\phi_{\mathfrak{g}}^T = Tr \circ U(T) \circ \phi_{\mathfrak{g}}.$$

Рассмотрим стандартное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}(3)$ как пространство 3×3-матриц с нулевым следом. Это восьмимерная алгебра Ли, порожденная матрицами

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$F_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad F_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

коммутаторы которых имеют вид

$$\begin{array}{llll} [E_i, F_j] = \delta_{ij} H_i, & [H_i, H_j] = 0, & [H_i, E_i] = 2E_i, & [H_i, F_i] = -2F_i, \\ [H_1, E_2] = -E_2, & [H_2, E_1] = -E_1, & [H_2, E_3] = E_3, & [H_1, E_3] = E_3, \\ [H_1, F_2] = F_2, & [H_2, F_1] = F_1, & [H_2, F_3] = -F_3, & [H_1, F_3] = -F_3. \end{array}$$

Мы будем использовать симметричную билинейную форму $\langle x, y \rangle = Tr(xy)$:

$$\begin{array}{llll} \langle E_i, E_j \rangle = 0, & \langle F_i, F_j \rangle = 0, & \langle H_i, E_j \rangle = 0, & \langle H_i, F_j \rangle = 0, \\ \langle E_i, F_j \rangle = \delta_{ij}, & \langle H_i, H_i \rangle = 2, & \langle H_1, H_2 \rangle = -1. & \end{array}$$

Можно легко проверить, что она является ad-инвариантной и невырожденной. Соответствующий двойственный базис имеет вид

$$H_1^* = \frac{2}{3}H_1 + \frac{1}{3}H_2, H_2^* = \frac{1}{3}H_1 + \frac{2}{3}H_2, E_i^* = F_i, F_i^* = E_i,$$

и для стандартного представления St алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3$ и следа произведения матриц в качестве ad-инвариантной билинейной формы, мы имеем весовую систему алгебры Ли $\mathfrak{sl}_3$, связанную с ее стандартным представлением $\phi^{St}_{\mathfrak{sl}_3} := Tr(\phi_{\mathfrak{sl}_3})$. Отсюда

$$\phi_{\mathfrak{sl}(3)}(\bigcirc\!\!-\!\!\bigcirc) = c_2 = \sum_i e_i e_i^* = \frac{2}{3}H_1^2 + \frac{2}{3}H_2^2 + \frac{1}{3}(H_1H_2 + H_2H_1) + \sum_{i=1}^{3}(E_iF_i + F_iE_i)$$

$$\phi^{St}_{\mathfrak{sl}(3)}(\bigcirc\!\!-\!\!\bigcirc) = Tr\left(\frac{8}{3} \times id_3\right) = 8.$$

Кроме того,

$$\phi^{St}_{\mathfrak{sl}(3)}(\otimes) = Tr\left(\sum_i e_i e_j e_i^* e_j^*\right) = Tr\left(-\frac{8}{9} \times id_3\right) = -\frac{8}{3}.$$

Действительно,

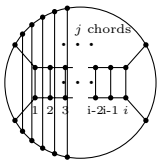
$$\phi_{\mathfrak{sl}(3)}(\otimes) = (c_2 - t)c_2,$$

и поскольку $(\frac{8}{3} - t)\frac{8}{3} = -\frac{8}{9}$, получаем $t = 3$. Поэтому $\phi_{\mathfrak{sl}(3)}(\otimes) = (c_2 - 3)c_2$.

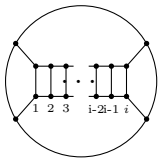
6 Значения $\mathfrak{sl}(3)$-весовой системы на хордовых диаграммах $K_{2,n}$

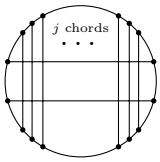
Для весовой системы w мы обозначаем через $\bar{w} := w \circ \pi$ ее композицию с проекцией на подпространство примитивных вдоль подпространства разложимых элементов.

Обозначим через $J_{i,j}$ диаграмму Якоби порядка $i + j + 2$ с $i - 1$ внутренними прямоугольниками и j вертикальными хордами, их пересекающими $(i, j \geq 0)$:

$J_{i,j} =$ 

В частности,

$J_{i,0} =$ 

$J_{0,j} =$ 

и $J_{0,j}$ — хордовая диаграмма, графом пересечения которой является полный двудольный граф $K_{2,j}$.

Наш первый результат заключается в следующем.

Теорема 6.1. *Для любой простой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, наделенной скалярным произведением, пропорциональным форме Киллинга с коэффициентом пропорциональности λ, имеем*

$$\bar{w}_{\mathfrak{g}}(J_{i,j}) = \bar{w}_{\mathfrak{g}}(J_{i-1,j+1}) + \frac{1}{\lambda}\bar{w}_{\mathfrak{g}}(J_{i-1,j})$$

Из теоремы 6.1 вытекает следующее

Следствие 6.2. *Справедливы следующие утверждения:*

1. *значение $\bar{w}_{\mathfrak{g}}(J_{0,j})$ имеет степень не выше 4;*
2. $\bar{w}_{\mathfrak{g}}(J_{i,0}) = \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \lambda^{-k} \bar{w}_{\mathfrak{g}}(J_{0,i-k})$;
3. $\sum_{n=0} \bar{w}_{\mathfrak{g}}(J_{n,0}) \frac{x^n}{n!} = e^{\frac{x}{\lambda}} \sum_{n=0} \bar{w}_{\mathfrak{g}}(J_{0,n}) \frac{x^n}{n!}$.

Затем мы получим значения весовой системы $\mathfrak{sl}(3)$ на хордовых диаграммах, граф пересечений которых является полным двудольным $K_{2,n}$.

Основная теорема A. *Справедливы равенства*

$$\sum_{n=0} \bar{w}_{\mathfrak{sl}(3)}(K_{2,n}) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0} \bar{w}_{\mathfrak{sl}(3)}(J_{0,n}) \frac{x^n}{n!} = e^{-6x} \sum_{n=0} \bar{w}_{\mathfrak{sl}(3)}(J_{n,0}) \frac{x^n}{n!},$$

$$\sum_{n=0} \bar{w}_{\mathfrak{sl}(3)}(K_{2,n}) \frac{x^n}{n!} = \frac{c_2}{40} \left((27c_2 - 72)e^{-8x} + (8c_2 + 72)e^{-3x} - 40c_2 e^{-6x} + 5c_2 \right),$$

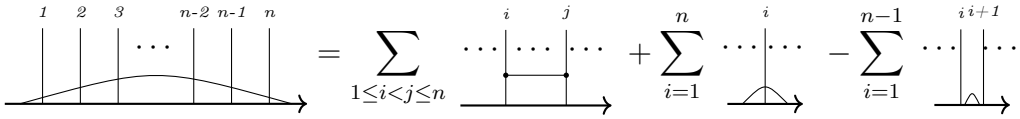
$$\sum_{n=0} w_{\mathfrak{sl}(3)}(K_{2,n}) \frac{x^n}{n!} = \frac{c_2}{40} \left((27c_2 - 72)e^{(c_2-8)x} + (8c_2 + 72)e^{(c_2-3)x} + 5c_2 e^{c_2 x} \right),$$

$$w_{\mathfrak{sl}(3)}(K_{2,n}) = \frac{c_2}{40} \left((27c_2 - 72)(c_2 - 8)^n + (8c_2 + 72)(c_2 - 3)^n + 5c_2^{n+1} \right).$$

Наши вычисления показывают, в частности, что для хордовых диаграмм, граф пересечений которых $K_{2,n}$, их проекция на подпространство примитивных может быть представлена в виде линейной комбинации связных диаграмм Якоби, имеющих не более 4 ног. Ранее С. Ландо высказал предположение, что значение весовой системы $\mathfrak{sl}(2)$ на проекции хордовой диаграммы в подпространство примитивных является полиномом от квадратичного элемента Казимира c, степень которого не превышает половины длины наибольшего цикла в графе пересечений хордовой диаграммы. Существует множество свидетельств в пользу этой гипотезы, см. например [12, 13]. Следующая более общая гипотеза может объяснить гипотезу Ландо, и, вероятно, ее легче доказать.

Гипотеза 6.3 (S. Lando, Z. Yang)**.** *Пусть D — хордовая диаграмма, и пусть ℓ — длина самого длинного цикла в ее графе пересечений. Тогда проекция $\pi(D)$ диаграммы D на подпространство примитивных является линейной комбинацией связных диаграмм Якоби, имеющих не более ℓ ног. В частности, значение весовой системы, связанной с произвольной алгеброй Ли $\mathfrak{g}$, на этой проекции имеет степень не выше ℓ.*

Теорема 6.4. *Имеют место равенства*



Следствие 6.5. *Имеем*

$$\deg(w_{\mathfrak{g}}(k_{m,n})) \le 2\min\{m,n\}.$$

Следствие 6.6. *Имеем*

$$\deg(w_{\mathfrak{g}}(V\times G)) \le 2|G|.$$

Следствие 6.7. *Для $\mathfrak{sl}(2)$-весовой системы справедливы равенства*

$$w_{\mathfrak{sl}(2)}(D) = (c-2k)w_{\mathfrak{sl}(2)}(D_a) + 2\sum_{1\le i<j\le k}(w_{\mathfrak{sl}(2)}(D^{||}_{i,j}) - w_{\mathfrak{sl}(2)}(D^{\times}_{i,j}))$$

7 $\mathfrak{gl}$-весовая система для перестановок

Насколько нам известно, для $w_{\mathfrak{gl}(N)}$-весовой системы не существует рекуррентного соотношения. Вместо этого, следуя предложению М. Казаряна, мы интерпретируем дуговую диаграмму как инволюцию без неподвижных точек на множестве ее концов и продолжаем функцию $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ на произвольные перестановки

любого числа переставляемых элементов. Для перестановок, в отличие от хордовых диаграмм, такое рекуррентное соотношение имеет место.

Для перестановки $\sigma \in S_m$ положим

$$w_{\mathfrak{gl}(N)}(\sigma) = \sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{N} E_{i_1 i_{\sigma(1)}} E_{i_2 i_{\sigma(2)}} \cdots E_{i_m i_{\sigma(m)}} \in U(\mathfrak{gl}(N)).$$

Мы утверждаем, что

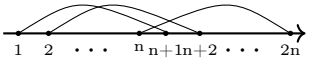
- $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ лежит в центре универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{gl}(N))$;
- этот элемент инвариантен при сопряжении циклической перестановкой: $w_{\mathfrak{gl}(N)}(\sigma) = \sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{N} E_{i_2 i_{\sigma(2)}} \cdots E_{i_m i_{\sigma(m)}} E_{i_1 i_{\sigma(1)}}$.

Например, стандартная образующая

$$C_m = \sum_{i_1,\cdots,i_m=1}^{N} E_{i_1 i_2} E_{i_2 i_3} \cdots E_{i_{m-1} i_m} E_{i_m i_1}$$

соответствует циклической перестановке $1 \mapsto 2 \mapsto \cdots \mapsto m-1 \mapsto m \mapsto 1 \in S_m$.

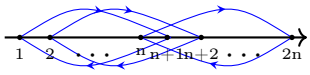
С другой стороны, хордовую диаграмму с n хордами можно рассматривать как инволюцию без неподвижных точек на множестве из $m = 2n$ элементов. Значение отображения $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ на соответствующей инволюции равно значению $\mathfrak{gl}(N)$-весовой системы на соответствующей хордовой диаграмме.

Пример 7.1. Для хордовой диаграммы $K_n =$ 

имеем

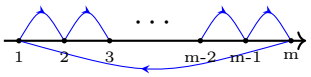
$$\begin{aligned} w_{\mathfrak{gl}(N)}(K_n) &= \sum_{i_1,\cdots,i_{2n}=1}^{N} E_{i_1 i_{n+1}} E_{i_2 i_{n+2}} \cdots E_{i_n i_{2n}} E_{i_{n+1} i_1} E_{i_{n+2} i_2} \cdots E_{i_{2n} i_n} \\ &= w_{\mathfrak{gl}(N)}((1\ n+1)(2\ n+2)\cdots(n\ 2n)). \end{aligned}$$

Определение 7.2 (орграф перестановки)**.** Представим перестановку в виде ориентированного графа. m вершин графа соответствуют переставляемым элементам. Они упорядочены циклически и расположены на вещественной прямой, соединены горизонтальными стрелками, направленными вправо, и пронумерованы слева направо. Дуговые стрелки изображают действие перестановки (так, что каждой вершине инцидентно ровно одно входящее и одно исходящее дуговое ребро). Орграф $G(\sigma)$ перестановки $\sigma \in S_m$ состоит из этих m вершин и m ориентированных дуг, например:

$G((1\ n+1)(2\ n+2)\cdots(n\ 2n)) =$ 

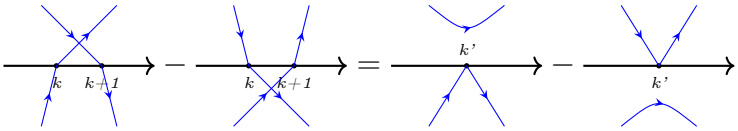
Пример 7.3. Орграф элемента Казимира C_m, который соответствует циклической перестановке $1 \mapsto 2 \mapsto \cdots \mapsto m-1 \mapsto m \mapsto 1$ S_m, выглядит так:

$$G((1\ 2\ 3 \cdots m-1\ m)) =$$



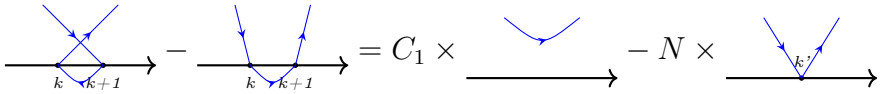
Основная теорема B. *Значение $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ инварианта перестановок обладает следующими свойствами:*

- *для пустого графа (без вершин) значение $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ равно 1, $w_{\mathfrak{gl}(N)}(\bigcirc) = 1$;*
- *$w_{\mathfrak{gl}(N)}$ мультипликативно по отношению к конкатенации перестановок;*
- *для циклической перестановки (с циклическим порядком на множестве переставляемых элементов, совместимым с перестановкой), значение $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ является стандартной образующей, $w_{\mathfrak{gl}(N)}(1 \mapsto 2 \mapsto \cdots \mapsto k \mapsto 1) = C_k$.*
- (***Рекуррентное соотношение***) *Для графа произвольной перестановки σ в S_m, и для любых двух соседних элементов $k, k+1$ из переставляемого множества $\{1, 2, \ldots, m\}$, имеем для значения весовой системы $w_{\mathfrak{gl}(N)}$*



На диаграммах слева изображены две горизонтально соседние вершины и ребра, инцидентные им, тогда как справа эти две вершины заменены одной; остальные вершины располагаются на прямой, и их положение одинаково на всех диаграммах, участвующих в соотношениях, однако справа номера вершин правее $k+1$ должны быть уменьшены на 1.

В частности, для особого случая $\sigma(k+1) = k$ рекуррентное соотношение выглядит следующим образом:



Эти соотношения действительно являются рекурсией, то есть они позволяют заменить вычисление значения $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ на перестановке его вычислением на более простых перестановках.

Замечание 7.4. В ситуации перестановок, соответствующих хордовым диаграммам, разность в правой части рекуррентного соотношения представляет собой диаграмму Якоби с тройной вершиной согласно соотношению STU, см. раздел 4. Это соотношение позволяет вычислить значение весовой системы $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ на примитивных элементах, заданных диаграммами Якоби. Для некоторых специальных элементов вычисления такого рода были приведены в [5, 9].

Следствие 7.5. *Значение $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ на перестановке корректно определено, может быть представлено в виде многочлена от переменных $N, C_1, C_2, \ldots,$ и этот многочлен универсален.*

Определение 7.6 (универсальная $\mathfrak{gl}$-весовая система на перестановке)**.** *Универсальная $\mathfrak{gl}$-весовая система на перестановках $w_{\mathfrak{gl}}$* — это весовая система, принимающая значения в кольце многочленов $\mathbb{C}[N, C_1, C_2, \cdots]$, которая определяется равенством $w_{\mathfrak{gl}}(\sigma) = w_{\mathfrak{gl}(N)}(\sigma)$ для всех перестановок σ и может быть вычислена посредством применения приведенных выше рекуррентных соотношений.

8 Симметричечкие функции и изоморфизм Хариш-Чандры

В этом разделе мы покажем, как использовать изоморфизм Хариш-Чандры для алгебр Ли $\mathfrak{gl}(N)$ для вычисления соответствующих весовых систем.

Определение 8.1 (алгебра сдвинутых симметричных многочленов)**.**
Для целого положительного числа N алгебра $\Lambda^*(N)$ сдвинутых симметрических многочленов от переменных $x_1, x_2, \cdots, x_N$ состоит из многочленов от N переменных $x_1, x_2, \cdots, x_N$, которые инвариантны при замене переменных

$$(x_1, \cdots, x_i, x_{i+1}, \cdots, x_N) \mapsto (x_1, \cdots, x_{i+1} - 1, x_i + 1, \cdots, x_N),$$

для всех $i = 1, \cdots, N-1$. Эквивалентно, это алгебра симметрических многочленов от сдвинутых переменных $(x_1 - 1, x_2 - 2, \ldots, x_N - N)$.

Универсальная обертывающая алгебра $U(\mathfrak{gl}(N))$ алгебры Ли $\mathfrak{gl}(N)$ допускает разложение в прямую сумму

$$U(\mathfrak{gl}(N)) = (\mathfrak{n}_- U(\mathfrak{gl}(N)) + U(\mathfrak{gl}(N))\mathfrak{n}_+) \oplus U(\mathfrak{h}), \tag{1}$$

где $\mathfrak{n}_-$ и $\mathfrak{n}_+$ — нильпотентные подалгебры соответственно верхне- и нижнетреугольных матриц в $\mathfrak{gl}(N)$, а $\mathfrak{h}$ — подалгебра диагональных матриц.

Определение 8.2 (проекция Хариш-Чандры в $U(\mathfrak{gl}(N))$).
Проекция Хариш-Чандры для $U(\mathfrak{gl}(N))$ является проекцией на второе слагаемое в (1)

$$\phi : U(\mathfrak{gl}(N)) \to U(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}[E_{11}, \cdots, E_{NN}],$$

где $E_{11}, \cdots, E_{NN}$ — диагональные матричные единицы в $\mathfrak{gl}(N)$; они коммутируют друг с другом.

Теорема 8.3 (изоморфизм Хариш-Чандры [35, 24]). *Проекция Хариш-Чандры при ограничении на центр $ZU(\mathfrak{gl}(N))$ является изоморфизмом на алгебру $\Lambda^*(N) \subset U(\mathfrak{h})$ сдвинутых симметрических многочленов от $E_{11}, \cdots, E_{NN}$.*

Таким образом, вычисление значения $\mathfrak{gl}(N)$-весовой системы на хордовой диаграмме можно упростить, последовательно применяя проекцию Хариш-Чандры к каждому моному многочлена. Для такого монома проекция может быть вычислена путем перемещения переменных E_{ij} с $i > j$ влево, и/или переменных E_{ij} с $i < j$ вправо с помощью коммутационных соотношений. Если получившийся при этом моном лежит в $\mathfrak{n}_- U(\mathfrak{gl}(N))$ или $U(\mathfrak{gl}(N))\mathfrak{n}_+$, то мы заменим его нулем. Моном от (взаимно коммутирующих) переменных E_{ii} не может быть упрощен, и его проекция на $U(\mathfrak{h})$ совпадает с ним самим. Полученный многочлен от $E_{11}, \cdots, E_{NN}$ будет автоматически сдвинуто симметричным.

Пример 8.4. Вычислим проекцию квадратичного элемента Казимира

$$C_2 = \sum_{i,j} E_{ij} E_{ji} \in ZU(\mathfrak{gl}(N))$$

в $U(\mathfrak{h})$. Имеем

$$\begin{aligned} C_2 &= \sum_i E_{ii}^2 + \sum_{i<j} E_{ij}E_{ji} + \sum_{i>j} E_{ij}E_{ji} \\ &= \sum_i E_{ii}^2 + 2\sum_{i>j} E_{ij}E_{ji} + \sum_{i<j} [E_{ij}, E_{ji}] \\ &= \sum_i E_{ii}^2 + 2\sum_{i>j} E_{ij}E_{ji} + \sum_{i<j} (E_{ii} - E_{jj}). \end{aligned}$$

В этом выражении первое и третье слагаемые зависят только от диагональных единичных элементов E_{ii}, в то время как второе слагаемое лежит в $\mathfrak{n}_- U(\mathfrak{gl}(N)) +$

$U(\mathfrak{gl}(N))\mathfrak{n}_+$, поэтому его образ при проекции имеет вид

$$\begin{aligned}\phi(C_2) &= \sum_i E_{ii}^2 + \sum_{i<j}(E_{ii} - E_{jj}) \\ &= \sum_i (E_{ii}^2 + (N+1-2i)E_{ii}).\end{aligned}$$

Аналогично кольцу обычных симметрических функций, кольцо $\Lambda^*(N)$ сдвинутых симметрических функций от N переменных изоморфно кольцу многочленов от N переменных. Имеется несколько удобных наборов из N образующих в $\Lambda^*(N)$. Одним из них является набор сдвинутых степенных сумм

$$p_k = \sum_i \left(\left(E_{ii} + \frac{N+1}{2} - i \right)^k - \left(\frac{N+1}{2} - i \right)^k \right).$$

Представляя $\phi(C_2)$ в виде

$$\phi(C_2) = \sum_i \left(\left(E_{ii} + \frac{N+1}{2} - i \right)^2 - \left(\frac{N+1}{2} - i \right)^2 \right),$$

мы видим, что это просто p_2.

Замечание 8.5. Поскольку изоморфизм Хариш-Чандры можно применять к произвольным элементам центра $ZU(\mathfrak{gl}(N))$, мы также можем применить его к значениям $w_{\mathfrak{gl}}$ на перестановках.

При $k > 2$ выражение для $\phi(C_k)$ не сводится только к линейным комбинациям степенных сумм. На самом деле, мы имеем следующую явную формулу, которая следует из [26], [35, § 60] и [25, Remark 2.1.20],

$$\begin{aligned}1 - Nu - \sum_{k=1}^{\infty} \phi(C_k) u^{k+1} &= \prod_{i=1}^{N} \frac{1 - (E_{ii} + N - i + 1)u}{1 - (E_{ii} + N - i)u} \\ &= (1 - Nu) e^{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - \frac{N-1}{2}u)^{-k} - (1 - \frac{N+1}{2}u)^{-k}}{k} u^k p_k}.\end{aligned}$$

Эта формула дает выражение для образа $\phi(C_k)$ элемента C_k в виде многочлена от $p_1, p_2, \ldots$, которое справедливо для всех N. Проекции элементов Казимира $C_1, \cdots, C_N$ в $U(\mathfrak{h})$ могут быть выражены через сдвинутые степенные суммы

$p_1, \cdots, p_N$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
&\phi(C_1) = p_1\\
&\phi(C_2) = p_2\\
&\phi(C_3) = -\frac{1}{4}N^2 p_1 + \frac{Np_2}{2} + \frac{p_1}{4} + p_3 - \frac{p_1^2}{2}\\
&\phi(C_4) = -\frac{1}{4}N^3 p_1 + N\left(-\frac{p_1^2}{2} + \frac{p_1}{4} + p_3\right) - p_1 p_2 + \frac{p_2}{2} + p_4\\
&\quad \dots
\end{aligned}$$

Вычисления с использованием изоморфизма Хариш-Чандры также являются сложными, и получаемые ответы не являются универсальными, они зависят от N. Поэтому эффективнее подставить известные значения $\phi(C_k)$ в ответы, полученные предыдущим методом.

9 Продолжение весовой системы $\mathfrak{gl}(m|n)$ на перестановки

Мы определяем $w_{\mathfrak{gl}(m|n)}$ на перестановках следующим образом, который аналогичен определению для $w_{\mathfrak{gl}(N)}$.

Для перестановки σ S_k положим

$$w_{\mathfrak{gl}(m|n)}(\sigma) = \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{m+n} (-1)^{f_\sigma(\bar{i}_1,\dots,\bar{i}_k)} E_{i_1 i_{\sigma(1)}} E_{i_2 i_{\sigma(2)}} \cdots E_{i_k i_{\sigma(k)}},$$

где f_σ — знаковая функция, которая является определенным ниже многочленом над полем $\mathbb{Z}_2$ от $\bar{i}_1, \bar{i}_2, \dots, \bar{i}_k$.

Знаковая функция f_σ — это многочлен, в который входят только линейные и квадратичные мономы. Например, для стандартной циклической перестановки $(12\dots k) : 1 \to 2 \to \cdots \to k \to 1$, мы имеем $f_{(12\dots k)}(\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_k) = \bar{i}_2 + \cdots + \bar{i}_k$.

Мы говорим, что индекс a, $1 \le a \le k$, является *выделенным* относительно σ, если $\sigma^{-1}(a) < a$. Множество выделенных индексов обозначается $P_1(\sigma) \subset \{1, \dots, k\}$. Мы говорим, что пара индексов (a, b), $1 \le a < b \le k$, является *выделенной*, если две пары различных вещественных чисел $(\sigma^{-1}(a) + \epsilon, a - \epsilon)$ и $(\sigma^{-1}(b) + \epsilon, b - \epsilon)$ чередуются; здесь $\epsilon > 0$ — малое вещественное число, скажем, $\epsilon = \frac{1}{3}$. Множество выделенных пар индексов обозначается $P_2(\sigma) \subset \{1, \dots, k\} \times \{1, \dots, k\}$.

Определение 9.1. Знаковая функция f_σ перестановки $\sigma \in S_k$ определяется следующим образом:

$$f_\sigma(\bar{i}_1, \bar{i}_2, \dots) = \sum_{a \in P_1(\sigma)} \bar{i}_a + \sum_{(a,b) \in P_2(\sigma)} \bar{i}_a \bar{i}_b.$$

Более удобное описание инварианта $w_{\mathfrak{gl}(m|n)}(\sigma)$ и знаковой функции использует язык орграфов из предыдущего раздела.

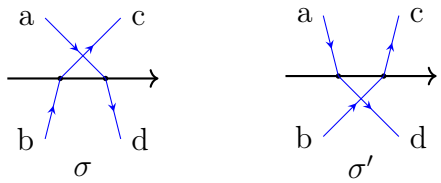
Набор индексов, участвующих в суммировании, будем обозначать ребрами (а не вершинами). Для каждой вершины i обозначим через $in(i)$ и $out(i)$ входящее ребро и исходящее ребро, инцидентные вершине i, соответственно. Используя эти обозначения, мы имеем

$$w_{\mathfrak{gl}(m|n)}(\sigma) = \sum_{i_1, \cdots, i_k = 1}^{m+n} (-1)^{f_\sigma(\bar{i}_1, \dots, \bar{i}_k)} E_{i_{in(1)} i_{out(1)}} \cdots E_{i_{in(k)} i_{out(k)}}.$$

Исходная формула соответствует нумерации ребер таким образом. что ребро $i \to j$ имеет номер j. Результат, очевидно, не зависит от нумерации.

При такой нумерации ребро выделено, если оно направлено слева направо. Пара ребер с попарно различными концами выделена, если соответствующие пары вершин чередуются. Если ребра имеют общие вершины, то сначала приведем их в общее положение, слегка сдвинув начало каждого ребра вправо и конец каждого ребра влево, а затем проверим, чередуются ли пары концов сдвинутых ребер.

Предположим, что две перестановки σ и σ' сопряжены транспонированием двух соседних элементов. Тогда эти два элемента являются конечными точками четырех ребер a, b, c, d, как показано на рисунке ниже (среди ребер a, b, c, d могут быть пары совпадающих).



Лемма 9.2. *Знаковые функции f_σ и $f_{\sigma'}$ связаны между собой следующим образом*

$$f_{\sigma'} = f_\sigma + (\bar{i}_a + \bar{i}_d)(\bar{i}_b + \bar{i}_c).$$

Другими словами, каждая из четырех пар ребер $(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)$ меняет свойство быть выделенной при переходе от перестановки σ к σ'.

Поскольку знаковая функция f_σ соответствует знаку в элементах Казимира, а лемма говорит, что знаковая функция f_σ соответствует операции инволюции S, имеем

Утверждение 9.3. *Весовая система $\mathfrak{gl}(m|n)$ для хордовых диаграмм в [28, 11] является частным случаем весовой системы $\mathfrak{gl}(m|n)$ для перестановок, где мы рассматриваем хордовую диаграмму с k хордами как инволюцию без неподвижных точек на множестве из $2k$ элементов.*

Основная теорема C. *Весовая система $w_{\mathfrak{gl}(m|n)}$ для перестановок является результатом подстановки $m-n$ вместо C_0, и k-го элемента Казимира супералгебры Ли $\mathfrak{gl}(m|n)$ вместо C_k, $k>0$, в весовую систему $w_{\mathfrak{gl}}$.*

10 Формулировка основных результатов

Результаты этой диссертации опубликованы в трех работах:

- Zhuoke Yang, *On the Lie superalgebra $\mathsf{gl}(m|n)$ weight system*, Journal of Geometry and Physics. 2023. Vol. 187. Article 104808.
- Zhuoke Yang, *New approaches to gl_N weight system*, `arXiv:2202.12225 [math.CO]`, accepted by Izvestiya Mathematics
- Zhuoke Yang, *On values of sl_3 weight system on chord diagrams whose intersection graph is complete bipartite*, `arXiv:2102.00888 [math.CO]`, Accepted by Moscow Mathematical Journal

В статье Zhuoke Yang, *On values of sl_3 weight system on chord diagrams whose intersection graph is complete bipartite* `arXiv:2102.00888 [math.CO]`, мы вычисляем значения $\mathfrak{sl}(3)$-весовой системы на хордовых диаграммах, граф пересечений которых является полным двудольным $K_{2,n}$.

Основная теорема A. *Справедливы равенства*

$$\sum_{n=0} \bar{w}_{\mathfrak{sl}(3)}(K_{2,n})\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0} \bar{w}_{\mathfrak{sl}(3)}(J_{0,n})\frac{x^n}{n!} = e^{-6x}\sum_{n=0} \bar{w}_{\mathfrak{sl}(3)}(J_{n,0})\frac{x^n}{n!},$$

$$\sum_{n=0} \bar{w}_{\mathfrak{sl}(3)}(K_{2,n})\frac{x^n}{n!} = \frac{c_2}{40}\left((27c_2-72)e^{-8x}+(8c_2+72)e^{-3x}-40c_2e^{-6x}+5c_2\right),$$

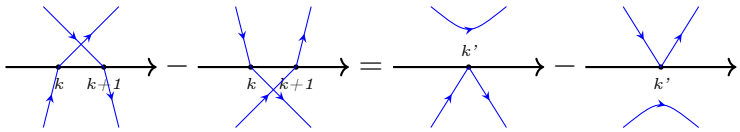
$$\sum_{n=0} w_{\mathfrak{sl}(3)}(K_{2,n})\frac{x^n}{n!} = \frac{c_2}{40}\left((27c_2-72)e^{(c_2-8)x}+(8c_2+72)e^{(c_2-3)x}+5c_2e^{c_2x}\right),$$

$$w_{\mathfrak{sl}(3)}(K_{2,n}) = \frac{c_2}{40}\left((27c_2-72)(c_2-8)^n+(8c_2+72)(c_2-3)^n+5c_2^{n+1}\right).$$

В статье Zhuoke Yang, *New approaches to* gl_N *weight system*, `arXiv:2202.12225 [math.CO]`, accepted by Izvestiya Mathematics, мы интерпретируем дуговую диаграмму как инволюцию без неподвижных точек на множестве ее концов и продолжаем функцию $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ на произвольные перестановки любого числа переставляемых элементов. Для перестановок, в отличие от хордовых диаграмм, может быть выведено рекуррентное соотношение.

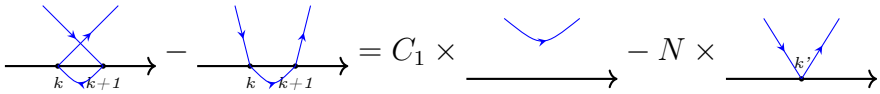
Основная теорема B. *Значение* $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ *инварианта перестановок обладает следующими свойствами:*

- *для пустого графа (без вершин) значение* $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ *равно* 1, $w_{\mathfrak{gl}(N)}(\bigcirc) = 1$*;*
- $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ *мультипликативен по отношению к конкатенации перестановок;*
- *для циклической перестановки (с циклическим порядком на множестве переставляемых элементов, совместимым с перестановкой), значение* $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ *является стандартной образующей,* $w_{\mathfrak{gl}(N)}(1 \mapsto 2 \mapsto \cdots \mapsto k \mapsto 1) = C_k$.
- (***Рекуррентное соотношение***) *Для графа произвольной перестановки* σ *в* S_m*, и для любых двух соседних элементов* $k, k+1$ *из переставляемого множества* $\{1, 2, \ldots, m\}$ *имеем для значения системы весов* $w_{\mathfrak{gl}(N)}$



На диаграммах слева изображены две горизонтально соседние вершины и ребра, инцидентные им, тогда как справа эти две вершины заменены одной; остальные вершины располагаются на прямой, и их положение одинаково на всех диаграммах, участвующих в сооотношениях, однако справа номера вершин правее $k+1$ *должны быть уменьшены на* 1.

В частности, для специального случая $\sigma(k+1) = k$*, рекуррентное соотношение выглядит следующим образом:*



Эти соотношения действительно являются рекурсией, то есть они позволяют заменить вычисление значения функции $w_{\mathfrak{gl}(N)}$ *на перестановке вычислением ее значений на более простых перестановках.*

В статье Zhuoke Yang, *On the Lie superalgebra* $\mathfrak{gl}(m|n)$ *weight system*, Journal of Geometry and Physics. 2023. Vol. 187. Article 104808., мы распространяем эту конструкцию на весовую систему, связанную с супералгебрами Ли $\mathfrak{gl}(m|n)$. Затем мы доказываем, что $\mathfrak{gl}(m|n)$-весовая система эквивалентна $\mathfrak{gl}$-системе, при подстановке $C_0 = m - n$:

Основная теорема C. *Весовая система* $w_{\mathfrak{gl}(m|n)}$ *для перестановок является результатом подстановки* $m - n$ *вместо* C_0*, и* k*-го элемента Казимира супералгебры Ли* $\mathfrak{gl}(m|n)$ *вместо* C_k*,* $k > 0$*, в весовую систему* $w_{\mathfrak{gl}}$*.*

Список литературы

[1] *The knot Atlas*, `http://katlas.math.toronto.edu/wiki/Main_Page`

[2] S. V. Chmutov, S. V. Duzhin, S. K. Lando *Vassiliev knot invariants I. Introduction*, Advances in Soviet Mathematics, vol. **21**, 117-126 (1994)

[3] Dror Bar-Natan. On the Vassiliev knot invariants. *Topology*, 34(2):423–472, 1995. (an updated version available at `http://www.math.toronto.edu/~drorbn/papers`).

[4] A. Bouchet *Reducing prime graphs and recognizing circle graphs*, Combinatorica, **7**, no. 3, 243–254 (1987)

[5] S. Chmutov, S. Duzhin, and J. Mostovoy. *Introduction to Vassiliev Knot Invariants*. Cambridge University Press, May 2012.

[6] S. Chmutov and A. Varchenko. Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from $\mathfrak{sl}_2$. *Topology*, 36(1):153–178, 1997.

[7] S. V. Chmutov and S. K. Lando. Mutant knots and intersection graphs. *Algebr. Geom. Topol.*, pages 1579–1598, July 2007.

[8] B. Courcelle *Circle graphs and Monadic Second-order logic*, Preprint, June 2005, `http://www.labri.fr/perso/courcell/ArticlesEnCours/CircleGraphsSubmitted.pdf`

[9] O. Dasbach, *On the Combinatorial Structure of Primitive Vassiliev Invariants III — A Lower Bound*, Communications in Contemporary Mathematics, Vol. 2, No. 4, 2000, pp. 579–590.

[10] R. Dogra, S. Lando, *Skew characteristic polynomial of graphs and embedded graphs*, `arXiv:2201.07084 [math.CO]`

[11] Figueroa-O'Farrill, T. Kimura, A. Vaintrob, *The Universal Vassiliev Invariant for the Lie Superalgebra* $\mathfrak{gl}(1|1)$, Comm. Math. Phys., 1997, 185, 93–127

[12] P. Filippova, *Values of the* $\mathfrak{sl}(2)$ *Weight System on Complete Bipartite Graphs*, Funct. Anal. Appl., 54:3 (2020), 208–223

[13] P. Filippova, *Values of the* $\mathfrak{sl}(2)$*-weight system on a family of graphs that are not intersection graphs of chord diagrams*, Sbornik Math. 213:2 (2022), 115–148

[14] C. P. Gabor, K. J. Supowit, W.-L. Hsu, *Recognizing circle graphs in polynomial time*, Journal of the ACM (JACM) (3), **36**, no. 3, 435–473 (1989)

[15] V. G. Kac, *Lie Superalgebras*, Adv.Math. 26 (1977) 8-96 DOI: 10.1016/0001-8708(77)90017-2

[16] V. G. Kac, *Laplace operators of infinite-dimensional Lie algebras and theta functions*, Proceedings of the National Academy of Sciences 81, no. 2 (1984): 645-647.

[17] Algebra of shares, complete bipartite graphs, and the $SL(2)$-weight system, Sbornik Mathematics, 2023, to appear

[18] M. Kontsevich. Vassiliev knot invariants. in: *Advances in Soviet Math.*, 16(2):137–150, 1993.

[19] Sergei K. Lando. On a Hopf algebra in graph theory. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 80(1):104–121, 2000.

[20] H. R. Morton, P. R. Cromwell, *Distinguishing mutants by knot polynomials*, J. Knot Theory Ramif. **5** 225–238 (1996)

[21] J. Murakami, *Finite type invariants detecting the mutant knots*, Knot Thoery. A volume dedicated to Professor Kunio Murasugi for his 70th birthday. Editors: M. Sakuma et al., Osaka University, March 2000. Preprint is available at `http://www.f.waseda.jp/murakami/papers/finitetype.pdf`

[22] Sergei K. Lando and Alexander K. Zvonkin. *Graphs on surfaces and their applications*, volume 141. Springer Science & Business Media, 2013.

[23] C. O. Nwachuku and M. A. Rashid, *New expressions for the eigenvalues of the invariant operators of the general linear and the orthosymplectic Lie superalgebras*, Journal of mathematical physics 26, no. 8 (1985): 1914–1920.

[24] A. Okounkov, G. Olshanski, *Shifted Schur Functions*, St. Petersburg Math. J. volume 9, no. 2, 239–300, 1998.

[25] G. Olshanski, *Representations of infinite-dimensional classical groups, limits of enveloping algebras and yangians*, in "Topics in Representation Theory", Advances in Soviet Math. 2, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1991, pp. 1–66.

[26] A. M. Perelomov and Vladimir S. Popov, *Casimir operators for semisimple groups*, Math. USSR Izv. Volume 2(6), p.1313, 1968.

[27] William R Schmitt. Incidence Hopf algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 96(3):299–330, 1994.

[28] A. Vaintrob, *Vassiliev knot invariants and Lie S-algebras* Mathematical Research Letters, 1, 579-595.(1994)

[29] V. A. Vassiliev. *Cohomology of knot spaces.* in: Advances in Soviet Math., 1990.

[30] P. Zakorko, to appear

[31] Zhuoke Yang, *On values of $\mathfrak{sl}(3)$ weight system on chord diagrams whose intersection graph is complete bipartite*, `arXiv:2102.00888 [math.CO]`, Accepted by Moscow Mathematical Journal

[32] Zhuoke Yang, *New approaches to $\mathfrak{gl}_N$ weight system*, `arXiv:2202.12225 [math.CO]`

[33] Zhuoke Yang, *On the Lie superalgebra $\mathfrak{gl}(m|n)$ weight system*, Journal of Geometry and Physics. 2023. Vol. 187. Article 104808.

[34] Shutaro Yoshizumi, Kenichi Kuga, et al. Some formulas in $\mathfrak{sl}(3)$ weight systems. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences*, 75(7):134–136, 1999.

[35] Zhelobenko D.P. *Compact Lie groups and their representations*, Nauka, Moscow, 1970. English translation: Translations of mathematical monographs, v. 40. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1973.