Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования

«Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

На правах рукописи

Романов Игорь Викторович

О задачах граничного и распределенного управления для некоторых систем, описываемых дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями

Резюме диссертации

на соискание ученой степени
доктора наук по прикладной математике

Москва 2023

1 Постановка проблемы

Исследования в области теории управления системами с распределенными параметрами имеют достаточно длительную историю. Впервые эти вопросы начали рассматривать, по-видимому, в 60-е годы двадцатого века. Пионерские работы таких авторов как, например, Ж. Л. Лионс ([1–4]), А. Г. Бутковский ([5]) и Д. Л. Расселл ([6]) были посвящены задачам управления колебаниями струны, мембраны и пластины. Рассматривались задачи как граничного, так и распределенного по всей поверхности (или ее части) управления. Цели управления были различны. В одних исследованиях акцент делался на приведении колебаний системы в заданное состояние, в других требовалось оптимизировать различные функционалы, имеющие физико-механический смысл. В дальнейшем аналогичные задачи ставились уже для уравнения теплопроводности.

В перечисленных выше задачах на управляющее воздействие можно наложить дополнительные ограничения. Эти ограничения могут иметь различную природу. Например, требуется остановить колебания мембраны, управляя силовым воздействием на границу (или часть границы) с ограничением величины данной силы по норме пространства L_2.

С точки зрения механики гораздо более естественной будет ситуация, в которой граничная управляющая сила ограничена по абсолютной величине сколь угодно малым, заранее заданным числом. Данное дополнительное условие существенно усложняет задачу. В этом случае все ранее используемые методы в своем изначальном виде уже не работают.

В данной диссертации ставится и решается именно эта задача – привести колебания, описываемые классическими системами механики (волновое уравнение и уравнение колебания пластины) в покой за конечное время посредством ограниченного по абсолютной величине силового управляющего воздействия, приложенного к границе (или её части) области, занимаемой системой. Кроме того, ставится задача привести в покой колебания системы, описываемой уравнением «колебания пластины» на торе в случае локального (т.е. приложенного к части области) силового воздействия. Здесь никаких ограничений на функцию управления не накладывается.

Помимо классических систем в последние примерно 15-20 лет большое распространение получили исследования в области механических систем с т.н. «памятью» или интегральным последействием. Все началось с изучения уравнения Гуртина-Пипкина ([7]), которое может быть использовано для описания, например, процесса распространения тепла с конечной скоростью (имеется тепловой фронт). Ядро $K(t)$ может иметь различный вид, отражающий природу физических процессов, которые также описывает данное уравнение. В двух простейших случаях это ядро может быть тождественно равно единице или равняться дельта-функции. В первом случае уравнение сводится к волновому уравнению посредством дифференцирования по временной переменной, во втором случае – превращается в уравнение теплопроводности. Ниже мы рассмотрим ядра более сложного вида. После уравнения Гуртина-Пипкина изучались уравнения классического типа с добавлением интегральных членов (памяти). Эти дополнительные члены в ряде случаев позволяют более эффективно описывать те или иные процессы механики и физики.

Для уравнения Гуртина-Пипкина и ему подобных в работе также ставится задача приведения системы в состояние покоя за конечное время. Управление может быть приложено к границе, части или всей области. Если функция управления, приводящая механическую систему в покой существует, эта система называется *управляемой*. В противоположность этому, если управляемость отсутствует, т.е. существуют начальные возмущения механической системы, которые нельзя погасить за конечное время, то такую систему будем называть *неуправляемой*.

Дополнительной сложностью в задачах управления для систем с памятью является неэквивалентность понятий «приведение в покой» и «приведение в нулевое состояние». Причина состоит в наличии интегрального члена в уравнении. Достигнув в некоторый момент времени нулевого состояния, система затем может из него выйти. Как будет установлено в дальнейшем, большинство механических систем с памятью – неуправляемы.

2 Актуальность темы исследования

Для классических систем механики (мембраны, тонкие пластины) важность представляют вопросы управляемости в случаях, когда управляющее воздействие приложено либо к границе, либо к части области. Это связано с тем, что на практике трудно контролировать целую систему, а можно воздействовать лишь на ее часть. В связи с этим возникает проблема выбора этой части, например, для волнового уравнения такой выбор определяется специальным условием (Geometric control condition, [8]), которое состоит в том, что каждый оптический луч длины T (время управления) в области Ω входит в подобласть D (силовое управляющее воздействие приложено к этой подобласти). Существенным усложнением в постановках задач управления является наложение ограничения на абсолютную величину функции управления. Такое ограничение связано с невозможностью в реальных условиях найти сколь угодно большое силовое воздействие. В целом актуальность исследования классических систем механики связана с математической сложностью постановок, в которых присутствуют дополнительные ограничения на управления, но эти ограничения являются вполне естественными.

Исследование управляемости механических систем с интегральной памятью актуально в силу широчайшего спектра применения этих систем в различных приложениях. Интегро-дифференциальные уравнения с нелокальными членами типа свертки часто возникают в таких приложениях, как механика гетерогенных сред, теория вязкоупругости, теплофизика и кинетическая теория газов. Например, строго доказано, что в случае двухфазной гетерогенной среды, состоящей из вязкой жидкости и упругих добавок, эффективной будет модель, описываемая интегро-дифференциальным уравнением и соответствующее ядро свертки состоит из конечной или бесконечной суммы убывающих экспоненциальных функций.

Если вязкость жидкости мала (велика), то эффективное уравнение содержит (не содержит) члены третьего порядка, соответствующие трению Кельвина-Фойгхта. Более подробно этот вопрос описан в [9]. В теории вязкоупругости, как правило, ядра релаксации приближаются суммами экспонент. В теплофизике законы теплопроводности с интегральной памятью являются объектом изучения во многих исследовательских работах, в частности, см. [7]. Наличие интегральной памяти в законе теплопроводности может привести к появлению теплового фронта, который движется с конечной скоростью. Это создает существенное отличие от уравнения теплопроводности, чье решение задает распространение тепла с бесконечной скоростью. Также уравнения с памятью описывают процесс дифффузии запаздывающих нейтронов в ядерном реакторе, акустику в среде, представляющей собой жидкость с примесью твердых частиц.

3 Степень разработанности проблемы

На сегодняшний день степень разработанности проблемы управляемости для классических систем механики (мембраны и пластины) очень высока. Отметим некоторые, наиболее важные, результаты.

Ранее вопрос об управлении колебаниями плоской мембраны с помощью граничных сил рассматривался многими авторами (см., например, обзорные статьи [6, 10], а также приведенную в них литературу). В [5] описывается задача об остановке колебаний ограниченной струны с помощью граничного управления, доказывается, что можно за конечное время полностью остановить колебания струны при ограничении на абсолютную величину управляющего воздействия, и дается оценка времени, необходимого для полной остановки колебаний. В [1] рассматриваются задачи оптимального управления системами с распределенными параметрами и формулируются условия оптимальности, аналогичные принципу максимума Л. С. Понтрягина для систем с конечным числом степеней свободы. При этом указанные условия далеко не всегда приводят к конструктивному способу построения оптимального управления. В [10] приводится задача о полной остановке движения мембраны, доказывается существование такого граничного управления и оценивается время, необходимое для полной остановки колебаний. Здесь авторы во многих постановках задач отказываются от требований оптимальности управления и рассматривают только проблему управляемости, что существенно облегчает исследование. В упомянутой работе не рассматриваются задачи с ограничением на абсолютную величину управляющих сил, а также нет явных выражений для управляющих воздействий, а только доказываются теоремы существования.

Помимо приведения в полный покой, для распределенных колебательных систем существует так называемая задача стабилизации решения. Эта задача состоит в задании на границе области некоторого управления по обратной связи, которое «стабилизирует» решение, т. е. энергия системы стремится к нулю, когда время t стремится к бесконечности. Например, в [6] рассматривается задача стабилизации энергии мембраны посредством трения, введенного на границе. Более точно, граница области, занимаемой мембраной, состоит из двух частей: Γ_0 и Γ_1. На Γ_0 вводится условие Дирихле, т. е. эта часть границы жестко фиксируется, а на Γ_1 вводится краевое условие вида

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = -k\frac{\partial w}{\partial t},$$

где w – решение уравнения колебания мембраны, ν – внешняя нормаль к Γ_1, $k > 0$. Заданное таким образом трение приводит к диссипации энергии системы, а следовательно, к стабилизации ее колебаний. Так как часть границы зафиксирована, то энергия системы совпадает с квадратом нормы прямого произведения пространств: $H^1 \times L_2$. Следовательно, при $t \to +\infty$ решение задачи и его первая производная по t (скорость) стремятся к нулю по нормам пространств H^1 и L_2, соответственно. Заметим, что в указанной постановке начальные данные задачи должны быть выбраны достаточно гладкими и удовлетворяющими условиям согласования. Похожая постановка рассматривалась и для задачи граничной стабилизации поперечных колебаний тонкой пластины [11].

В целом методы граничной стабилизации достаточно эффективны, так как позволяют привести колебания системы за конечное время в сколь угодно малую окрестность нуля, что на практике, как правило, равносильно приведению в покой. Тем не менее, у этих методов есть и недостаток. Время, затрачиваемое на стабилизацию, может оказаться более длительным, чем в задачах точного управления. Например, для пластины известны способы, позволяющие приводить колебания системы в покой за сколь угодно малое время.

Проблемы управляемости для систем с памятью, в отличие от классических систем, исследованы не столь подробно. Дадим краткий обзор результатов по этому вопросу.

Наличие нелокального члена типа свертки в уравнениях и системах приводит к большому количеству интересных качественных эффектов, которые не наблюдаются в классических дифференциальных уравнениях и системах дифференциальных уравнений. Например, системы подобного типа содержат свойства одновременно параболических и гиперболических уравнений. В спектральных задачах для таких уравнений и систем спектр состоит из вещественной и комплексной частей. Первая часть соответствует диссипации энергии в уравнении теплопроводности, последняя, в свою очередь, соответствует колебаниям. Такие уравнения могут быть решены с помощью метода, близкого к методу Фурье. Более того, системы данного типа обычно неуправляемы в покой, если мы применяем граничное управление или управление, которое распределено на части области.

Если управление распределено по всей области, то интегральные члены в некотором случае «помогают» процессу управления. В этом случае время управления может быть существенно сокращено. Следует заметить, что спектральный метод, предложенный в [12] иногда успешно применяется для случая систем с нелокальными членами типа свертки (более подробно см. [13]).

Упомянутая выше неуправляемость была обнаружена в [14] для одномерного уравнения теплопроводности с памятью.

В большинстве случаев свойство управляемости в покой не наблюдается. Например, в [14] было доказано, что решение уравнения теплопроводности с памятью не может быть приведено в покой за конечное время, если некоторая вспомогательная аналитическая функция имеет нули. Этот результат верен для граничного и локального управлений. Более того, случай локального управления может быть сведен к случаю граничного управления. Мы получили похожие результаты для задач с двумерными областями.

Следует отметить также работу [15], так как в ней установлена неуправляемость для уравнения теплопроводности с памятью в некотором частном случае.

Положительные результаты управляемости для многомерного волнового уравнения с памятью были получены в [13]. Там было показано, что система, описываемая этим уравнением, может быть приведена в покой с помощью ограниченного распределенного управления. В этом случае ядро в интегральном члене представляет собой сумму из N убывающих экспоненциальных функций.

Задачи для интегро-дифференциальных уравнений, близких к уравнению Гуртина-Пипкина

$$\dot{\theta}(t,x) = \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\theta(s,x)ds, \tag{1}$$

широко изучены в существующей литературе. Уравнение (1) было впервые выведено в [7]. Вопросы разрешимости и асимптотического поведения решений уравнений данного типа были исследованы в [16, 17]. В [18] доказано, что энергия некоторой диссипативной системы убывает полиномиально, в то время как ядро убывает экспоненциально.

Задачи, связанные с разрешимостью систем с памятью, описываемых уравнением (1) и ему подобных рассматривались в [19]. Было доказано, что решение принадлежит некоторому соболевскому пространству на полуоси (по переменной t), если ядро $K(t)$ – сумма экспоненциальных функций, каждая из которых стремится к нулю при $t \to +\infty$.

Интересные точные формулы для решения были получены в [20] в предположении, что ядро $K(t)$ также является суммой убывающих экспоненциальных функций.

4 Цели и задачи исследования

1. Доказать, что колебания механической системы, описываемой двумерным волновым уравнением, можно остановить за конечное время ограниченным по абсолютной величине силовым управляющим воздействием (условие Неймана), приложенным к части границы. Более точно, рассматривается двумерная область с отверстием и управление приложено к внешнему контуру границы, края отверстия остаются закрепленными. Заметим, что под остановкой колебаний в данном случае имеется ввиду достижение в терминальный момент времени состояния с нулевым смещением и нулевой скоростью.

2. Доказать, что колебания механической системы, описываемой двумерным волновым уравнением можно остановить за конечное время ограниченным по абсолютной величине силовым управляющим воздействием (условие Неймана), приложенным ко всей границе. В данном случае рассматривается область без отверстий. Под остановкой колебаний при этом имеется ввиду достижение в терминальный момент времени состояния с постоянным смещением и нулевой скоростью.

3. Доказать, что колебания механической системы, описываемой уравнением колебаний тонкой пластины, можно остановить за конечное время ограниченным по абсолютной величине силовым управляющим воздействием (условие Неймана), приложенным к части границы. Более точно, рассматривается, как и в п. 1 двумерная область с отверстием и управление приложено к внешнему контуру границы, края отверстия остаются жестко закрепленными. В начальный момент смещение и скорость являются финитными функциями, взятыми из некоторых соболевских классов. Заметим, что под остановкой колебаний в данном случае имеется ввиду достижение в терминальный момент времени

состояния с нулевым смещением и нулевой скоростью.

4. Доказать локальную управляемость для уравнения «колебания пластины» на торе. В данном случае подобласть, к которой приложено управление, произвольна и порядок гладкости функции управления растет с ростом гладкости начальных данных.

5. Доказать отсутствие локальной управляемости для механической системы, описываемой уравнением Гуртина-Пипкина для широкого класса ядер. Этот класс состоит из непрерывных на временной полуоси функций, преобразование Лапласа которых имеет, по крайней мере, один нуль в области голоморфности. Отсутствие локальной управляемости в данном случае означает, что существуют начальные возмущения системы, которые нельзя погасить за конечное время управляющим воздействием, приложенным к подобласти.

6. Доказать отсутствие глобальной управляемости для механической системы, описываемой уравнением Гуртина-Пипкина с ядром, представленным рядом из убывающих экспоненциальных функций с «медленно» растущими показателями. Отсутствие глобальной управляемости в данном случае означает, что существуют начальные возмущения системы, которые нельзя погасить за конечное время управляющим воздействием, приложенным даже ко всей области.

7. Доказать глобальную ограниченную управляемость для частного случая волнового уравнения с интегральной памятью и ядром, состоящим из суммы конечного числа убывающих экспоненциальных функций. В данном случае «ограниченная управляемость» означает, что функция управляющего воздействия ограничена по абсолютной величине и в терминальный момент времени колебания системы останавливаются.

8. Доказать отсутствие граничной управляемости (в одномерном случае) для почти всех моделей «наивной механики» (подробности см. в разделе 7, п. 6).

5 Научная новизна

Постановка задачи в данной диссертации для проблем управления классическими системами существенно отличается от постановок из [4, 6], так как величина управляющей граничной силы u должна удовлетворять условию:

$$|u(t, x)| \leqslant \varepsilon.$$

Заметим, что здесь целью является найти не оптимальное, но допустимое, то есть удовлетворяющее этому условию управление.

Например, в первой части диссертации рассматривается мембрана, у которой одна часть границы закреплена и управление приложено к другой части. Эта управляющая функция определяется условием Неймана и ограничена по абсолютной величине. На обе части границы накладываются некоторые важные геометрические условия (точные формулировки см. в разделе 7, п. 1). Целью процесса управления является достижение системой состояния, такого что её смещение и скорость равны нулю. Похожая постановка рассмотрена для проблемы граничного управления тонкой пластиной.

В случае систем с памятью также возникает весь спектр проблем управляемости для различных случаев: граничная, локальная и глобальная. Например, для уравнения Гуртина-Пипкина с ядром в виде сумм бесконечного числа экспонент не имеет места, вообще говоря, даже глобальная управляемость. Для доказательства отсутствия управляемости показатели экспонент ряда, которым представлено ядро свертки, должны достаточно медленно стремиться к минус бесконечности. Близкий результат доказан в [21]. Этот результат говорит о «негрубости» свойства управляемости в данной задаче. Именно, остаток ряда, с помощью которого задается ядро свертки, может быть сколь угодно мал и сколь угодно быстро убывать. Если мы отбросим этот остаток, то система станет управляемой, а его восстановление приводит к неуправляемой системе. Это и есть свойство «негрубости» задачи. Оно составляет «диссонанс» с проблемой управляемости линейных конечномерных систем. Согласно классическому критерию Калмана управляемости линейных конечномерных систем, полная управляемость эквивалентна полному рангу некоторой прямоугольной матрицы составленной из данных задачи, что в свою очередь, эквивалентно отличию от нуля нескольких определителей из элементов этой матрицы. Ясно, что при достаточно малом произвольном возмущении данных задачи это свойство отличия от нуля определителей сохраняется, что и говорит о «грубости» свойства управляемости.

Вообще, свойства задач управления для интегро-дифференциальных систем радикально отличаются от свойств аналогичных задач управления для дифференциальных систем. Так, если для дифференциальных систем задачи граничного управления как правило разрешимы (при этом, конечно, есть определенные условия разрешимости), то разрешимость аналогичных задач для интегро-дифференциальных систем – исключительные случаи. Чтобы проиллюстрировать этот факт, мы рассмотрим задачу граничного управления для одномерного уравнения Гуртина-Пипкина. Оказывается, препятствием для граничной управляемости является, например, то, что плотность спектра рассматриваемой задачи равна бесконечности, где плотность понимается в смысле некоторой числовой характеристики ([22]). Часто спектры интегро-дифференциальных задач имеют конечную точку накопления и поэтому спектр является «густым», откуда следует отсутствие управляемости. Так, в одномерном случае для уравнения Гуртина-Пипкина с ядром вида (34) задача граничного управления разрешима только в случае, когда ядро состоит из одной убывающей экспоненциальной функции; в случаях, когда ядро представляет собой сумму двух или более убывающих экспоненциальных функций она неразрешима из-за наличия конечных точек накопления в спектрах.

Следует указать на одну особенность в задачах управления для интегро - дифференциальных уравнений. Если управление производится силой, приложенной к подобласти, то в большинстве случаев управляемость отсутствует ([23]). При этом в указанной работе доказывается, что если даже сколь угодно малая окрестность внутри области не входит в область приложения управляющей силы, то система не является полностью управляемой, т.е. существует начальное условие, которое мы не можем за конечное время привести в полный покой, какое бы мы не прикладывали управляющее воздействие, удовлетворяющее условиям задачи.

В последнее время довольно активно проводятся исследования возможности управления интегро-дифференциальной системой силовым воздествием, приложенным к движущемуся подотрезку (в одномерном случае), в которых для некоторых случаев устанавливается такая возможность ([24]). Такая проблема является как бы промежуточной между задачей об остановке колебаний с помощью силы, приложенной к фиксированной части области (интервала), и задачей об управлении силой, приложенной ко всей области (интервалу). Данная постановка приводит к интересным спектральным задачам о существовании биортогональной системы функций для системы экспонент на отрезке и об оценках на элементы этой системы, если она существует. При этом исследование проблемы полной управляемости существенно усложняется по сравнению со случаем неподвижной области, и положительные результаты получены только для частных случаев. Так, в [24] рассмотрено уравнение колебаний струны со слагаемым типа свертки, причем ядро свертки – единица. Переход к убывающей экспоненциальной функции в качестве ядра свертки совершенно не очевиден. В работе также рассматриваются краевые условия периодичности, и переход к условиям Дирихле также неочевиден.

6 Описание методологии исследования

Для доказательства управляемости классических систем используются основные известные в научной литературе методы. А именно, методы Д. Л. Расселла ([6]) о построении управления через продолжение решения на неограниченную область или через создание трения (или его «аналогов») на границе области. Также имеет место сочетание этих методов. Для доказательства локальной управляемости системы, описываемой уравнением «колебания пластины» на торе используется метод каскадного расщепления исходной задачи и HUM (Hilbert Uniqueness Method).

Для исследования управляемости систем с памятью испольуются метод моментов и различные методы комплексного анализа, которые применяются для доказательства отсутствия управляемости. Речь идет о препятствиях к управляемости различных механических систем. В качестве таких препятствий можно, например, указать существование предельной точки в спектре задачи, «медленный» рост спектра, наличие т.н. «точки ветвления» и др.

Заметим, что во многих случаях прямое применение упомянутых выше методов (в их изначальном виде) было либо невозможно, либо затруднительно, поэтому в представленной диссертации приходилось зачастую их адаптировать или существенно видоизменять.

Кратко опишем применение упомянутых методов для решения некоторых задач диссертации. В первой части диссертации доказывается, что двумерную мембрану можно привести в состояние покоя за конечное время с помощью ограниченного по абсолютной величине управляющего силового воздействия, приложенного к границе рассматриваемой мембраны. В постановке задачи управления на функции начальных данных (смещение и скорость) наложены условия гладкости и некоторые граничные условия. Граничное силовое воздействие определяется неоднородным условием Неймана и в одном случае приложено к всей границе области, а в другом случае – к ее части. Решение задачи делится на два этапа. На первом этапе производится стабилизация решения в достаточно малую окрестность состояния покоя с помощью трения, введенного на границе области. При этом достаточная малость величины управления достигается за счет выбора близкого к нулю значения коэффициента трения. В данном случае используются результаты работ [6, 25, 26], посвященные стабилизации энергии мембран посредством граничных условий специального вида. На втором этапе управления производится полное успокоение колебаний мембраны. Здесь существенную роль играет метод продолжения начальных данных на некоторую ограниченную область и рассмотрение некоторой специальной начально-краевой задачи для двумерного волнового уравнения в этой области. Тогда управлением является производная по нормали к границе исходной области, занимаемой мембраной, взятая от решения указанной начально-краевой задачи. Заметим, что способ управления на данном этапе фактически определяется способом продолжения начальных данных на упомянутую ограниченную область. Решающую роль в подобной конструкции играет обратимость классического волнового уравнения по времени. Управление такого рода использовалось в работах многих авторов 70–90-х гг. В данном случае ограничение на абсолютную величину управляющего силового воздействия выполняется в силу того, что решение исходной задачи было приведено в достаточно малую окрестность по норме некоторого соболевского пространства на первом этапе.

Также исследуется возможность приведения в покой поперечных колебаний тонкой пластины именно в случае, когда граничные управляющие воздействия ограничены по абсолютной величине. При этом на геометрию границы области, заполненной пластиной, наложены существенные ограничения (см. раздел 7, п. 2). Кроме того, на начальные данные задачи также накладываются некоторые условия, а именно условия гладкости и согласования (см. раздел 7, п. 2). Остаются открытыми вопросы управляемости, связанные с ослаблением данных ограничений. Например, в представленном исследовании граница области, занимаемой пластиной, должна состоять из двух частей. А именно, рассматривается пластина с отверстием. Остается неясным, можно ли привести в покой колебания (ограниченным граничным воздействием), если отверстия нет и область односвязна. Также возникает задача по снижению степени гладкости начальных данных, в данном исследовании на начальное возмущение накладываются достаточно сильные условия гладкости.

Вторая часть диссертации посвящена задачам распределенного (в том числе локального) и граничного управления колебаниями системы, описываемой уравнением Гуртина-Пипкина и ему подобных. Это уравнение содержит член сверточного (по временной переменной) типа, этот член часто называют памятью. Ставится вопрос о возможности приведения таких систем в состояние покоя посредством различных способов управления, а именно, граничного, локального и приложенного ко всей области. Заметим, что, вообще говоря, понятие «приведение в покой» для систем с памятью не эквивалентно приведению системы в нулевое состояние. Кроме того, управляемость в покой для подобных моделей не всегда возможна даже, если управляющее воздействие приложено ко всей области, занимаемой механической системой (см. раздел 7, п. 5). Именно здесь и применяются препятствия к управляемости, упомянутые в начале данного раздела.

7 Основные результаты, выносимые на защиту

В данном разделе через w и θ обозначены решения соответствующих уравнений, t и x – временная и пространственная переменные, соответственно.

1. О задачах граничного управления для системы, описываемой двумер-

ным волновым уравнением. Пусть Ω – ограниченная область в R^2 с бесконечно гладкой границей, ν – внешняя единичная нормаль к границе области Ω, Σ – боковая поверхность цилиндра $Q_T = (0, T) \times \Omega$.

Здесь и далее будем считать, что Ω (или любая другая рассматриваемая область) расположена локально по одну сторону от своей границы.

Пусть также граница области Ω состоит из двух связных частей Γ_0 и Γ_1, т. е.

$$\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1.$$

Предположим дополнительно, что

$$\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \varnothing$$

и Γ_0 является границей некоторой ограниченной области Ω^*, такой что $\Omega \cap \Omega^* = \emptyset$ (Рис. 1).

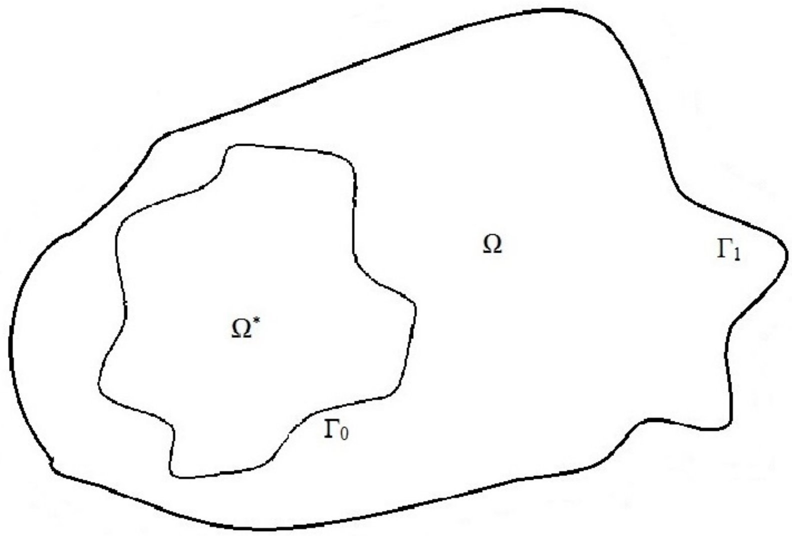

Рис. 1

Обозначим

$$\Sigma_i = (0, T) \times \Gamma_i, \quad i = 0, 1.$$

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения колебаний мембраны:

$$w_{tt}(t, x) - \Delta w(t, x) = 0, \quad (t, x) \in Q_T, \tag{2}$$

$$w|_{t=0} = \varphi(x), \quad w_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$w(t, x) = 0, \quad (t, x) \in \Sigma_0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = u(t, x), \quad (t, x) \in \Sigma_1. \tag{5}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Ставится задача построить такое управляющее воздействие u, удовлетворяющее неравенству

$$|u(t,x)| \leqslant \varepsilon, \tag{6}$$

что соответствующее решение w и его первая производная по t обращаются в нуль в некоторый момент времени T, т. е. $w(T,x) = 0$, $w_t(T,x) = 0$ для всех $x \in \Omega$. Если данная задача имеет решение, то систему (2)–(5) будем называть *управляемой.*

Рассмотрим пространство

$$\mathcal{H}_0^3(\Omega) = \{(w_1, w_2) \in H^3(\Omega) \times H^2(\Omega) : w_1(x) = w_2(x) = \Delta w_1 = 0,\ x \in \Gamma_0\}.$$

Теорема 1. *Пусть дополнительно граница Ω удовлетворяет условию: существует точка $x_0 \in R^2$, такая, что:*

1) $(x - x_0) \cdot \nu \leqslant 0,\ \ x \in \Gamma_0,$

2) $(x - x_0) \cdot \nu \geqslant \beta > 0,\ \ x \in \Gamma_1,$

кроме того, $(\varphi(x), \psi(x)) \in \mathcal{H}_0^3(\Omega)$ и

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = \psi = \frac{\partial \psi}{\partial \nu} = \Delta\varphi = 0 \ \text{ на } \Gamma_1. \tag{7}$$

Тогда система (2)–(5) управляема.

Рассмотрим случай, когда нет закрепления части границы области. Рассмотрим начально-краевую задачу для двумерного волнового уравнения:

$$w_{tt}(t,x) - \Delta w(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_T = (0,T) \times \Omega, \tag{8}$$

$$w|_{t=0} = \varphi(x), \quad w_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Omega, \tag{9}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = u(t,x), \quad (t,x) \in \Sigma, \tag{10}$$

где $\Omega \subset R^2$ – ограниченная, звездная относительно некоторого замкнутого круга область с бесконечно гладкой границей. Начальные данные $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы и будут выбраны из подходящих гильбертовых пространств, $u(t,x)$ – функция управления, определенная на границе $\Gamma = \partial\Omega$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное заданное число. Наложим ограничение на функцию управления:

$$|u(t,x)| \leqslant \varepsilon. \tag{11}$$

Задача состоит в том, чтобы построить управление $u(t,x)$, удовлетворяющее неравенству (11) такое, что соответствующее решение $w(t,x)$ начально-краевой задачи (8)–(10) и его первая производная по t приходят в состояние $(C, 0)$ в некоторый момент времени T, т.е.

$$w(T,x) = C,\ \ w_t(T,x) = 0, \tag{12}$$

для всех $x \in \Omega$. В данном случае C – некоторая константа. Если возможно построить управление $u(t,x)$ такое, что условия (12) достигнуты, то система (8)–(10) называется *управляемой в покой.*

Заметим, что постоянная C в данном случае не является произвольной, а зависит от выбора начальных данных и параметра ε,

$$C = \frac{1}{|\Gamma|}\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)d\Gamma + \frac{1}{k(\varepsilon)|\Gamma|}\int\limits_{\Omega}\psi(x)dx, \tag{13}$$

где $|\Gamma|$ – длина Γ и $k(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Теорема 2. *Пусть $\varphi(x) \in H^6(\Omega)$ и $\psi(x) \in H^5(\Omega)$ такие, что*

$$\frac{\partial\varphi(x)}{\partial\nu} = \Delta\varphi(x) = \frac{\partial\Delta\varphi(x)}{\partial\nu} = \Delta^2\varphi(x) = \frac{\partial\Delta^2\varphi(x)}{\partial\nu} = 0, \;\; x \in \Gamma,$$

$$\psi(x) = \frac{\partial\psi(x)}{\partial\nu} = \Delta\psi(x) = \frac{\partial\Delta\psi(x)}{\partial\nu} = \Delta^2\psi(x) = 0, \;\; x \in \Gamma. \tag{14}$$

Тогда система (8)–(10) управляема в покой.

Дадим объяснение значения условий гладкости начальных данных и условий (14). Доказательство теоремы 2 состоит из двух этапов. На первом этапе рассматриваемое решение и его первая производная по переменной t стабилизируются в малую окрестность положения равновесия $(C,0)$ по норме пространства $C^4(\overline{\Omega}) \times C^3(\overline{\Omega})$, второй этап позволяет привести систему в покой из этой малой окрестности. Первая часть доказательства (стабилизация решения) связана с введением трения на границе области. Это трение создает диссипацию энергии, которая, в свою очередь, приводит к стабилизации. Это трение и является управлением. В данном случае ограничение (11) будет выполнено благодаря достаточной «малости» этого трения и эта «малость» достигается за счет вариации некоторого коэффициента. Условия (14) накладываются для того, чтобы постановка задачи оставалась корректной для любого выбранного коэффициента трения.

2. Гашение колебаний тонкой пластины ограниченным воздействием, приложенным к границе. Пусть Ω – ограниченная область на плоскости R^2 с бесконечно гладкой границей Γ, состоящей из двух связных частей: Γ_0 и Γ_1, т.е. $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ и $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ – внешняя единичная нормаль к границе области Ω. Пусть дополнительно выполнено условие:

$$\overline{\Gamma}_0 \cap \overline{\Gamma}_1 = \varnothing.$$

Предположим, что Γ_0 должна быть также границей некоторой ограниченной области Ω^*, такой что $\Omega \cap \Omega^* = \emptyset$.

Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения поперечных колебаний тонких пластин:

$$w_{tt}(t,x) + \Delta^2 w(t,x) = 0, \quad (t,x) \in Q_T = (0,T) \times \Omega, \tag{15}$$

$$w|_{t=0} = \varphi(x), \quad w_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \Omega, \tag{16}$$

$$w = \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0, \quad (t,x) \in (0,T) \times \Gamma_0, \tag{17}$$

$$\Delta w + (1-\mu) B_1 w = u_1(t,x), \quad \frac{\partial \Delta w}{\partial \nu} + (1-\mu)\frac{\partial B_2 w}{\partial \tau} = u_2(t,x), \quad (t,x) \in (0,T) \times \Gamma_1, \tag{18}$$

где μ – постоянная Пуассона ($0 < \mu < 1/2$), $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$ – касательный вектор, а B_1, B_2 – граничные операторы, определяемые формулами:

$$B_1 w = 2\nu_1\nu_2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} - \nu_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \nu_2^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2},$$

$$B_2 w = (\nu_1^2 - \nu_2^2)\frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} + \nu_1\nu_2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right).$$

Здесь и далее будем считать, что на границе Γ выполнены неравенства:

$$x \cdot \nu = x_1\nu_1 + x_2\nu_2 \leqslant 0 \ \text{ на } \ \Gamma_0,$$

$$x \cdot \nu = x_1\nu_1 + x_2\nu_2 \geqslant 0 \ \text{ на } \ \Gamma_1.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Ставится задача построить такие управляющие воздействия u_1 и u_2, удовлетворяющие неравенствам:

$$|u_i(t,x)| \leqslant \varepsilon, \ \ i = 1, 2, \tag{19}$$

что соответствующее решение w и его производная по t обращаются в нуль в некоторый момент времени T, т. е. $w(T,x) = 0$, $w_t(T,x) = 0$ для всех $x \in \Omega$. Нулевое смещение и нулевую скорость будем называть *состоянием покоя* рассматриваемой системы.

Теорема 3. *Пусть функции $\varphi(x) \in H^6(\Omega)$ и $\psi(x) \in H^4(\Omega)$, такие что они равны нулю вблизи границы Γ (т. е. являются финитными в области Ω). Тогда найдутся момент T и управляющие воздействия $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$, удовлетворяющие ограничению (19), такие что система (15)–(18) приводима в состояние покоя.*

3. Управляемость в покой для уравнения «колебания пластины» на торе в случае локального силового воздействия. Рассмотрим задачу распределенного управления для уравнения «колебания пластины» на торе:

$$w_{tt}(t,x) + \Delta^2 w(t,x) = u(t,x), \ \ (t,x) \in Q_T = (0, t_*] \times T^2, \tag{20}$$

$$w|_{t=0} = w_0(x), \ \ w_t|_{t=0} = w_1(x), \ \ x \in T^2. \tag{21}$$

Здесь T^2 – 2-мерный тор (гладкое, компактное многообразие без края), который удобно понимать как квадрат $[-\pi, \pi]^2$ с отождествленными противоположными сторонами, u – управление с носителем по переменной x, не совпадающим с T^2, $t_* > 0$ – заданный заранее момент времени.

Ставится задача построить такое управляющее воздействие u, что соответствующее решение w и его первая производная по t обращаются в нуль в момент времени t_*, т. е. $w(t_*, x) = 0$, $w_t(t_*, x) = 0$ для всех $x \in T^2$. Нулевое смещение и нулевую скорость будем называть *состоянием покоя* рассматриваемой системы.

Для начальных данных в задаче (20)–(21) потребуем, чтобы были выполены условия:

$$w_0 \in H^4(T^2),\ w_1 \in H^2(T^2),\ w_1 - i\Delta w_0 \in H^4(T^2). \tag{22}$$

Напомним, что пространство Соболева $H^s(T^2)$ $(s \in R)$ на T^2 можно, например, понимать как область определения оператора $A^{s/2} = (1 - \Delta)^{s/2}$, которая снабжена нормой

$$\|w\|_s = \|A^{s/2}w\|_{L_2(T^2)}. \tag{23}$$

Норму (23) удобно записать в терминах коэффициентов Фурье при разложении w в ряд (формальный ряд для $s < 0$) по системе экспонент $\{e^{i\alpha x}\}_{\alpha \in Z^2}$:

$$\left(\sum (1 + |\alpha|^2)^s |c_\alpha|^2\right)^{1/2}.$$

Теорема 4. *Пусть на торе T^2 задана произвольная область ω, для которой $\bar{\omega} \neq T^2$ и выполнены условия (22), тогда найдется силовое управляющее воздействие u, тождественно равное нулю на множестве $T^2 \diagdown \bar{\omega}$, такое, что система (20)–(21) приводима в состояние покоя за время t_*.*

Заметим, что из метода построения управления для уравнения (20) следует возможность регуляризации управления $u(t, x)$ для исходной задачи. То есть, увеличивая соболевскую гладкость начальных данных, мы можем сделать $u(t, x)$ сколь угодно гладким как по времени так и по пространственным переменным. Например, если выбрать начальные данные, удовлетворяющие включениям: $w_0 \in H^6(T^2)$, $w_1 \in H^4(T^2)$, $w_1 - i\Delta w_0 \in H^6(T^2)$, то можно построить управление, для которого будет верно следующее:

$$u \in C([0, t_*]; H^4(T^2)),\ \ u_t \in C([0, t_*]; H^2(T^2)),\ \ u_{tt} \in C([0, t_*]; L_2(T^2)).$$

4. Задачи о приводимости в состояние покоя системы, описываемой волновым уравнением с интегральной памятью. Рассмотрим начально-краевую задачу:

$$\theta_{tt}(t, x) - K(0)\Delta\theta(t, x) - \int\limits_0^t K'(t - s)\Delta\theta(s, x)ds = u(t, x), \tag{24}$$

$$x \in \Omega, \quad t > 0.$$

$$\theta|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \theta_t|_{t=0} = \varphi_1(x), \tag{25}$$

$$\theta|_{\partial\Omega} = 0, \tag{26}$$

здесь

$$K(t)=\sum_{j=1}^{N}\frac{c_j}{\gamma_j}e^{-\gamma_j t},\ N\geqslant 2,$$

где c_j, γ_j заданные положительные константы, $u(t,x)$ – функция управления, определенная на некоторой ограниченной области (по x) $\Omega\subset R^n$ с бесконечно гладкой границей и

$$|u(t,x)|\leqslant\varepsilon,$$

$\varepsilon>0$ – заданная константа. Требуется привести систему в покой за конечное время.

Пусть $A:=-\Delta$ – оператор с областью определения

$$Dom(A):=H^2(\Omega)\cap H_0^1(\Omega).$$

Следуя [19], обозначим через $W_{2,\gamma}^2(R_+,A)$ пространство Соболева функций $\theta:R_+=(0,+\infty)\to Dom(A)$, снабженное нормой:

$$\|\theta\|_{W_{2,\gamma}^2(R_+,A)}=\left(\int\limits_0^{+\infty}e^{-2\gamma t}\left(\left\|\theta^{(2)}(t)\right\|_{L_2(\Omega)}^2+\|A\theta(t)\|_{L_2(\Omega)}^2\right)dt\right)^{\frac{1}{2}},\quad \gamma\geqslant 0.$$

Определение 1. *Функция $\theta(t,x)$ называется сильным решением задачи (24)–(26), если для некоторого $\gamma\geqslant 0$ такая функция принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(R_+,A)$, удовлетворяет уравнению (24) почти всюду (по t) на положительной полуоси R_+ и удовлетворяет начальным условиям (25).*

Достаточные условия разрешимости задачи (24)–(26) в рамках определения 1 даны в [19].

Теорема 5. *Пусть $\varphi_0\in D(A^{\beta+\frac{1}{2}})$ и $\varphi_1\in D(A^\beta)$, где $\beta>\frac{n}{2}$. Тогда, в зависимости от значения ε, существуют управление $u(t,x)\in C([0,T]\times\Omega)$ и время $T>0$ такие, что для решения системы (24)–(26) верны следующие равенства*

$$\theta(T,x)=\theta_t'(T,x)=0,\tag{27}$$

и выполнено ограничение

$$|u(t,x)|\leqslant\varepsilon,$$

для любых $t\in(0,T]$, $x\in\Omega$. Если построенное управление $u(t,x)$ продолжить нулем при $t>T$, то система останется в нулевом состоянии и для $t>T$.

5. Задачи о неприводимости в состояние покоя системы, описываемой уравнением Гуртина-Пипкина. Рассмотрим задачу распределенного управления.

$$\theta_t(t,x)=\int\limits_0^t K(t-s)\Delta\theta(s,x)ds+u(t,x),\quad x\in\Omega,\quad t>0.\tag{28}$$

$$\theta|_{t=0} = \varphi(x), \tag{29}$$

$$\theta(t,x) = 0, \;\; x \in \partial\Omega. \tag{30}$$

Ядро $K(t)$ может, например, иметь вид:

$$K(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t}, \; K(t) = \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t}.$$

где c_j, γ_j – заданные положительные постоянные, такие, что

$$0 < \gamma_1 < \gamma_2 < ... < \gamma_j < ..., \; \gamma_j \to +\infty, \; j \to +\infty.$$

Пусть $\Omega \subset R^2$ – ограниченная односвязная область с бесконечно гладкой границей. Для краткости мы будем также писать $\theta(t)$ и $u(t)$ вместо $\theta(t,x)$ и $u(t,x)$ соответственно. Это означает, что $\theta(t)$ и $u(t)$ функции переменной t со значениями в некоторых подходящих пространствах.

Рассмотрим функцию управления $u(t) \in L_2^{loc}([0,+\infty); L_2(\Omega))$ и начальное условие $\xi \in H_0^1(\Omega)$. Предположим дополнительно, что $K(t)$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция на $[0,+\infty)$ такая, что $K(0) = \mu > 0$.

Определение 2. *Функция*

$$\theta(t) \in H^1_{loc}([0,+\infty); L_2(\Omega)) \cap L_2^{loc}([0,+\infty); DomA)$$

называется решением задачи (28)–(30), если $\theta(t)$ удовлетворяет (28):

$$\theta_t(t) - \int\limits_0^t K(t-s)\Delta\theta(s)ds = u(t)$$

и начальному условию (29): $\theta(0) = \xi$.

Заметим, что решения задачи в рамках определения 2 может, вообще говоря, и не быть, но в силу предполагаемой гладкости $K(t)$ задача (28)–(30) будет разрешимой, если наложить дополнительные условия гладкости на ξ и $u(t)$ (см. [27]).

Будем говорить, что для задачи (28)–(30) *отсутствует управляемость в покой*, если существует начальное условие φ такое, что для любого управления u (u выбирается из подходящего функционального класса), которое равно нулю тождественно (по переменной t) вне некоторого конечного отрезка $[0,T]$, соответствующее решение не равно тождественно нулю вне любого конечного отрезка (по t).

Пусть D – произвольная ограниченная область такая, что $\overline{D} \subset \Omega$. Определим $\widetilde{L}_2(D)$ как пространство всех элементов из $L_2(D)$, продолженных нулем на множество $\Omega \setminus D$.

Теорема 6. *Если функция управления $u(t,x)$ является элементом пространства*

$$L_2^{loc}([0,+\infty); \widetilde{L}_2(D))$$

и $\hat{K}(\lambda)$ имеет по крайней мере один нуль λ_0 в области голоморфности, тогда в задаче (28)–(30) отсутствует управляемость в покой.

Здесь $\hat{K}(\lambda)$ – это преобразование Лапласа функции $K(t)$.

Существуют примеры ядер, для которых отсутствует глобальная управляемость в покой, т.е. в случае, когда управляющее воздействие приложено ко всей области, занимаемой системой. Это ядро Абеля и ряд из экспонент с медленно растущими показателями. Рассмотрим ядро

$$K(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} e^{-\gamma_j t}, \tag{31}$$

т.ч.

$$\sum_{j=1}^{+\infty} \frac{c_j}{\gamma_j} < +\infty.$$

Пусть теперь Ω – ограниченная область в R^n с бесконечно гладкой границей. Существование и единственность решения задачи (28)–(30) при дополнительных условиях, наложенных на ядро (31), ξ и правую часть u доказаны в [19].

Определение 3. *Показателем сходимости последовательности комплексных чисел $\{z_k\}$ называется число*

$$\tau = \inf\left\{\alpha > 0 : \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{|z_k|^\alpha} < +\infty\right\}.$$

Теорема 7. *Предположим, что для последовательности показателей $\{\gamma_k\}$ ядра (31) $\tau > 1$. Тогда отсутствует управляемость в покой для задачи (28)–(30), если управление приложено даже ко всей области.*

6. Три исключительных случая в задачах граничной управляемости для моделей «наивной механики». Большой класс моделей с интегральной памятью может быть получен в рамках т.н. «наивной механики». Суть дела состоит в записи определяющего соотношения между напряжением и деформацией (мы рассматриваем здесь одномерный по пространственной переменной случай). Это соотношение, в свою очередь, записывается исходя из различных способов соединения «пружин» и «поршеньков» (терминология А. А. Ильюшина и Б. Е. Победри, [28]). В результате этого соединения образуется элемент, который является простейшей ячейкой сплошной среды и определяющее соотношение для этого элемента затем в ряде случаев (при определенном типе соединения между собой этих элементов) переносится на всю сплошную среду. Доказывается ([28]), что в рамках «наивной механики» определяющее соотношение имеет вид:

$$P\sigma = Q\varepsilon, \tag{32}$$

где

$$P = \sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i}{dt^i}, \ \ Q = \sum_{i=0}^{n+1} b_i \frac{d^i}{dt^i},$$

$a_i > 0$, $b_i > 0$, $i = 1, 2, ..., n$, $b_{n+1} \geqslant 0$. Рассмотрим многочлен

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i.$$

Пусть корни $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ $P(\lambda)$ вещественные, отрицательные и попарно различны, причем среди них нет нулевого. Тогда формально выразим $\sigma(t, x)$ из определяющего соотношения (32):

$$\sigma = C_0 \varepsilon + C_1 \dot{\varepsilon} + \int_0^t K(t-s) \varepsilon(s, x) ds. \tag{33}$$

Здесь ядро $K(t)$ имеет вид:

$$K(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{\lambda_i t}. \tag{34}$$

Предположим, что $C_0 \geqslant 0$, $C_1 \geqslant 0$ и все постоянные K_i, $i = 1, 2, ..., n$, меньше либо равны нулю. Данное условие связано с тем, что во всех подобных вязкоупругих моделях знаки берутся именно такими.

Пусть $\theta(t, x)$ – состояние системы, тогда его связь с напряжением и деформацией имеет вид:

$$\sigma_x = \ddot{\theta}, \ \ \varepsilon = \theta_x. \tag{35}$$

Используя (35), получим из (33) интегро-дифференциальное уравнение:

$$\ddot{\theta} = C_0 \theta_{xx} + C_1 \dot{\theta}_{xx} + \int_0^t K(t-s) \theta_{xx}(s, x) ds. \tag{36}$$

Уравнение (36) описывает достаточно широкий класс моделей в механике. Более того, в этот класс прямо или косвенно входят основные классические уравнения (уравнения колебания струны, теплопроводности, телеграфное).

Для (36) можно поставить задачу управления. Например, возьмем нулевое условие у решения θ на правом конце отрезка $[0, \pi]$ и функцию $v(t) \in L_2^{loc}(0, +\infty)$ (управление) на левом конце. В нулевой момент времени имеется два начальных условия ξ_1, ξ_2 (смещение, скорость соответственно). Будем говорить, что в данной задаче *отсутствует граничная управлемость в покой*, если существуют начальные условия ξ_1, ξ_2 такие, что для любого управления $v(t)$, которое равно нулю тождественно вне некоторого конечного отрезка $[0, T]$, соответствующее решение не равно тождественно нулю вне любого конечного отрезка (по t).

Теорема 8. *Заведомо отсутствует граничная управляемость в покой во всех случаях, кроме трех:*

а) $C_0 > 0$, $C_1 = K_1 = K_2 = ... = K_n = 0$,

б) $C_1 > 0$, $C_0 = K_1 = K_2 = ... = K_n = 0$,

в) $K_1 < 0$, $C_0 = \frac{K_1}{\lambda_1}$, $C_1 = K_2 = ... = K_n = 0$.

Случай (а) дает уравнение колебания струны, хорошо известно, что для этого уравнения имеет место граничная управляемость. Для (б) и (в) ситуация несколько сложнее. Граничная управляемость для уравнений, описываемых этими случаями, формально отсутствует, если определение управляемости понимать так, как оно было введено выше. Между тем, если мы будем рассматривать более узкий класс начальных данных: положим равным нулю второе начальное условие ξ_2, то уравнение в случае (б) интегрированием по переменной t сводится к уравнению теплопроводности, а в случае (в) к уравнению Гуртина-Пипкина, которые можно дополнительно исследовать на предмет управляемости. Заметим, что уравнение в случае (в) при $\xi_2 = 0$ может быть также сведено к телеграфному уравнению.

8 Личный вклад автора в разработку проблемы

Большинство опубликованных научных работ, в которых отражены научные результаты диссертации, написаны в соавторстве с А. С. Шамаевым, которому принадлежат, в основном, постановки задач, а также общие соображения, относящиеся к методам и технике построения управления и отсутствия управляемости. Автором сделаны точные формулировки теорем, проведены доказательства и указаны основные следствия полученных результатов.

9 Общие выводы исследования

В представленной диссертации комплексно исследованы вопросы управляемости для двух широких классов систем с распределенными параметрами: классических (мембраны, пластины) и систем с памятью (уравнение Гуртина-Пипкина и ему подобные).

Для мембран и пластин исследованы вопросы граничной управляемости в случае, когда на абсолютную величину силового управляющего воздействия наложено ограничение, которое существенно усложняет задачу. Во всех случаях требуется выполнение дополнительных условий на начальные данные и на геометрию областей (границ). Кроме того, исследован вопрос локальной управляемости для системы, описываемой уравнением «колебания пластины» на торе.

Для систем с памятью доказано отсутствие граничной управляемости (в одномерном случае) для всех вязко-упругих моделей «наивной механики», кроме трех случаев. Также доказано отсутствие локальной и граничной управляемости для уравнения Гуртина-Пипкина и широкого класса ядер в интегральном члене уравнения, найдены примеры ядер, для которых отсутствует глобальная управляемость для данного уравнения.

10 Список опубликованных статей, где отражены основные результаты диссертации

По теме диссертации опубликовано 14 научных работ. Две статьи из журнала Q1 по версиям WoS и Scopus, этот же журнал входит в список А, 5 статей из журналов Q2 Scopus.

1. *Romanov I., Shamaev A.* Controllability to Rest for the «Plate Oscillation» Equation on the Torus in the Case of Local Force Action. *Mathematical Notes.* 2023, V. 113, №4, P. 598-600. (Scopus **Q2**)

2. *Романов И. В.* Об отсутствии управляемости в моделях «наивной механики». Три исключительных случая. *Прикладная математика и механика.* 2023, V. 87, №1, С. 19-25.

3. *Романов И. В.* Исследование управляемости для некоторой динамической системы с распределенными параметрами, описываемой интегро-дифференциальным уравнением. *Изв. РАН. ТиСУ.* 2022, №2, С. 58-61. (Scopus **Q2** для переводной версии журнала)

4. *Романов И. В., Шамаев А. С.* Точное управление распределенной системой, описываемой волновым уравнением с интегральной памятью. *Проблемы математического анализа.* 2022, Вып. 115, С. 3-13.

5. *Romanov I., Shamaev A.* Exact Bounded Boundary Controllability to Rest for the Two-Dimensional Wave Equation. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 2021, V. 188, №3, P. 925-938. (WoS, Scopus **Q1**)

6. *Romanov I., Shamaev A.* Suppression of Oscillations of Thin Plate by Bounded Control Acting to the Boundary. *Journal of Computer and Systems Sciences International.* 2020, V. 59, №3, P. 371-380.

7. *Романов И. В., Шамаев А. С.* О задаче граничного управления для системы, описываемой двумерным волновым уравнением. *Изв. РАН. ТиСУ.* 2019, №1, С. 109-116.

8. *Romanov I., Romanova A.* Some Problems of Controllability of Distributed Systems Governed by Integrodifferential Equations. *IFAC-PapersOnLine.* 2018, V. 51, №2, P. 132-137.

9. *Romanov I., Shamaev A.* Some Problems of Distributed and Boundary Control for Systems with Integral Aftereffect. *Journal of Mathematical Sciences.* 2018, V. 234, №4, P. 470-484.

10. *Romanov I., Shamaev A.* Noncontrollability to Rest of the Two-Dimensional Distributed

System Governed by the Integrodifferential Equation. *Journal of Optimization Theory and Applications.* 2016, V. 170, №3, P. 772-782. (WoS, Scopus **Q1**)

11. *Романов И. В., Шамаев А. С.* Точное управление колебаниями двумерной мембраны ограниченным силовым воздействием, приложенным к границе. *Доклады Академии наук. Теория управления.* 2016, Т. 470, №1, С. 22-25. (Scopus **Q2** для переводной версии журнала)

12. *Romanov I., Shamaev A.* Exact Controllability of the Distributed System, Governed by String Equation with Memory. *Journal of Dynamical and Control Systems.* 2013, V. 19, №4, P. 611-623. (Scopus **Q2**)

13. *Романов И. В., Шамаев А. С.* О задаче точного управления системой, описываемой уравнением струны с запаздыванием. *Автоматика и телемеханика.* 2013, №11, С. 49-61. (Scopus **Q2** для переводной версии журнала)

14. *Романов И. В.* О невозможности приведения плоской мембраны в состояние покоя с помощью граничных сил. *Автоматика и телемеханика.* 2012, №12, С. 56-64.

Список литературы

1. *Лионс Ж. Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. М.: Мир, 1972.

2. *Лионс Ж. Л.* Об оптимальном управлении распределенными системами. // Успехи математических наук. 1985, 28: 4 (172), С. 15-46.

3. *Лионс Ж. Л.* Некоторые вопросы оптимального управления распределенными системами. // Успехи математических наук. 1985, 40: 4 (244), С. 55-68.

4. *Lions J. L.* Contrôlabilité Exacte, Perturbations et Stabilization de Systèmes Distribués. Tome 1: Contrôlabilité Exacte, Masson, Paris (1988).

5. *Бутковский А. Г.* Теория оптимального управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1965.

6. *Russell D. L.* Controllability and Stabilizability Theory for Linear Partial Differential Equations: Recent Progress and Open Questions. // SIAM Review. 1978, V. 20, №4, P. 639-739.

7. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* A General Theory of Heat Conduction With Finite Wave Speeds // Arch. Ration. Mech. Anal. 1968, №31, P. 113-126.

8. *Bardos C., Lebeau G. and Rauch J.* Sharp sufficient conditions for the observation, control and stabilisation of waves from the boundary. // SIAM J.Control Optim. 1992, V. 305, P. 1024-1065.

9. *Sanchez-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. Springer-Verlag, New York, (1980).

10. *Lions J. L.* Exact Controllability, Stabilization and Perturbations for Distributed Systems. // SIAM Review. 1988, V. 30, №1, P. 1-68.

11. *Lagnese J. E.* Boundary Stabilization of Thin Plates. // SIAM. Philadelphia, 1989.

12. *Черноусько Ф.Л.* Ограниченное управление в системах с распределенными параметрами. // Прикл. матем. и мех. 1992, Т. 56, №5, С. 810-826.

13. *Романов И. В, Шамаев А. С.* Точное управление распределенной системой, описываемой волновым уравнением с интегральной памятью // Проблемы математического анализа. 2022, Вып. 115, С. 3-13.

14. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat Equations with Memory: Lack of Controllability to Rest // J. Mathematical Analysis and Applications. 2009, V. 355, №1, P. 1-11.

15. *Guerrero S., Imanuvilov O. Yu.* Remarks on non controllability of the heat equation with memory. // ESAIM Control Optim. Calc. Var. 2013, V 19, №1, P. 288-300.

16. *Dafermos C. M.* Asimptotic Stability in Viscoelasticity. // Arch. Ration. Mech. Anal. 1970, №37, P. 297-308.

17. *Desch W., Miller R. K.* Exponential Stabilization of Volterra Integrodifferential Equations in Hilbert Space. // Journal of Differential Equations. 1987, №70, P. 366-389.

18. *Munoz Rivera J. E., Naso M. G., Vegni F. M.* Asymptotic Behavior of the Energy for a Class of Weakly Dissipative Second-Order Systems With Memory. // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, V. 286, P. 692-704.

19. *Vlasov V. V., Rautian N. A., Shamaev A. S.* Spectral Analysis and Correct Solvability of Abstract Integro-Differential Equations Arising in Thermophysics and Acoustics // Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. 2011, V. 39, P. 36-65.

20. *Rautian N. A.* On the Structure and Properties of Solutions of Integrodifferential Equations Arising in Thermal Physics and Acoustics. // Mathematical Notes, 2011, V. 90, №3, P. 455-459.

21. *Романов И. В.* Исследование управляемости для некоторых динамических систем с распределенными параметрами, описываемых интегродифференциальными уравнениями // Известия РАН. Теория и системы управления. 2022, №2, С. 58-61.

22. *Romanov I., Shamaev A.* Some Problems of Distributed and Boundary Control for Systems with Integral Aftereffect. // Journal of Mathematical Sciences. 2018, V. 234, №4, P. 470-484.

23. *Romanov I., Shamaev A.* Non-controllability to Rest of the Two-Dimensional Distributed System Governed by the Integrodifferential Equation // J. Optimization Theory and Applications. 2016, V. 170, №3, P. 772-782.

24. *Biccari U., Micu U.* Null-controllability Properties of the Wave Equation with a Second Order Memory Term // J. Differential Equations. 2019, №267, P. 1376-1422.

25. *Chen G.* Energy Decay Estimates and Exact Boundary Value Controllability for the Wave Equation in a Bounded Domain. // J. Math. Pures Appl. 1979, №58, P. 249-274.

26. *Lagnese J.* Decay of Solutions of Wave Equations in a Bounded Region with Boundary Dissipation. // Journal of Differential Equations. 1983, №50. P. 163-182.

27. *Pandolfi L.* The Controllability of the Gurtin-Pipkin Equations: a Cosine Operator Approach. // Appl. Math. Optim. 2005, 52, P. 143-165.

28. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. М.: Наука, 1970.